

УДК 517.925; 517.93; 531.13

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388

EDN: PONQIR

# ПОСТРОЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ПРОЕКЦИИ КОТОРЫХ НА КООРДИНАТНЫЕ ПЛОСКОСТИ ИМЕЮТ ЗАДААННЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

С. В. Волков

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** Цель работы — построение многомерных векторных полей, которые представляются автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и имеют заданные топологические структуры в заданных ограниченных односвязных областях фазового пространства при условии, что эти структуры могут быть заданы топологическими структурами проекций искомого векторных полей на координатные плоскости. Эта задача является обратной задачей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты работы могут быть использованы для построения математических моделей динамических систем в разных областях науки и техники. В частности, для механических систем с произвольным конечным числом степеней свободы такие векторные поля могут представлять собой кинематические уравнения программных движений и быть использованы для получения управляющих сил и моментов, реализующих эти движения.

**Ключевые слова:** векторное поле, система ОДУ, качественная теория ОДУ, фазовый портрет, топологическая структура, динамическая система, обратная задача.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** С. В. Волков. Построение многомерных векторных полей, проекции которых на координатные плоскости имеют заданные топологические структуры // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 3. С. 375–388. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Построение многомерных векторных полей, описываемых автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и имеющих заданные топологические структуры в заданных ограниченных областях фазового пространства, является в общем случае трудноразрешимой задачей. Эта задача упрощается, если топологическая структура многомерного векторного поля может быть задана топологическими структурами его проекций на координатные плоскости фазового пространства. В этом случае построение искомого векторного поля  $\vec{v} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\}$  сводится сначала к построению  $(n-1)$ -го вспомогательного плоского векторного поля вида  $\vec{v}_k = \{\dot{x}_i, \dot{x}_j\}$ ,  $i, j \in 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , каждое из которых имеет заданную топологическую структуру в некоторой ограниченной области соответствующей координатной плоскости  $Ox_i x_j$ , а затем — к согласованию изменений во времени компонент этих плоских векторных полей и составлению из них искомого векторного поля.



- $P_{\alpha,ij}$ , где  $(i,j) \in I_r$  и  $\alpha \in \{1,2\}$ , являются изолированными особыми точками соответствующих векторных полей (3.1), а дуги кривых  $L_{m,ij}$  и  $L_{ij}$ , проходящие через эти точки, являются их сепаратрисами;
- все траектории векторного поля (3.1), расположенные внутри области  $D_{ij}$ , исходят из малой окрестности точки  $P_{1,ij}$  и стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к особой точке  $P_{2,ij}$ , касаясь в ней интегральной кривой  $L_{ij}$ .
- по крайней мере одна из компонент векторного поля (3.1) не имеет нулевых значений в области  $D_{ij}$  и её неособых граничных точках.

#### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поставленную задачу решим последовательным построением вспомогательных плоских векторных полей  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}$ , определяемых системами уравнений вида (3.1), и согласованием изменений их компонент во времени при составлении искомого  $n$ -мерного векторного поля  $\vec{v}$ .

1-ый шаг. Выберем любые две координаты, которые обозначим  $x_{i_1}$  и  $x_{i_2}$ :

$$i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ где } i_1 \neq i_2,$$

и построим плоское векторное поле

$$\vec{v}_1 = \{\dot{x}_{i_1}, \dot{x}_{i_2}\} : \begin{cases} \dot{x}_{i_1} = X_{1,i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}), \\ \dot{x}_{i_2} = X_{1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}), \end{cases} \quad (4.1)$$

которое имеет требуемую топологическую структуру в области  $D_{i_1 i_2}$  соответствующей координатной плоскости  $Ox_{i_1}x_{i_2}$  и одна из компонент которого не имеет нулевых значений в области  $D_{i_1 i_2}$  и её неособых граничных точках.

2-ой шаг. Выберем любые две координаты, которые обозначим  $x_{j_2}$  и  $x_{i_3}$ :

$$j_2 \in \{i_1, i_2\}, \quad i_3 \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}, \quad X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \neq 0 \text{ внутри } D_{i_1 i_2},$$

и построим плоское векторное поле

$$\vec{v}_2 = \{\dot{x}_{j_2}, \dot{x}_{i_3}\} : \begin{cases} \dot{x}_{j_2} = \tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}), \\ \dot{x}_{i_3} = \tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3}) \end{cases} \quad (4.2)$$

с заданной топологической структурой в области  $D_{j_2, i_3}$  соответствующей плоскости  $Ox_{j_2}x_{i_3}$  и компонентой  $\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}) \neq 0$  внутри этой области и в её неособых граничных точках.

Так как  $j_2 \in \{i_1, i_2\}$ , то следует выполнить согласование изменений одноименных координат векторных полей (4.1) и (4.2). В связи с этим заметим, что система уравнений в (4.2) имеет такой же фазовый портрет, что и дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_{i_3}}{dx_{j_2}} = \frac{\tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3})}{\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})}, \quad (4.3)$$

где в соответствии с (4.1)

$$dx_{j_2} = X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) dt. \quad (4.4)$$

После подстановки (4.4) в (4.3) получим

$$\dot{x}_{i_3} = \frac{\tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3})}{\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})} \cdot X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}). \quad (4.5)$$

Согласование координат векторного поля (4.1) с полученной координатой (4.5) завершим умножением их на знаменатель последней  $\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})$ . В результате получим трёхмерное векторное поле

$$\vec{V}_2 = \{\dot{x}_{i_1}, \dot{x}_{i_2}, \dot{x}_{i_3}\} : \begin{cases} \dot{x}_{i_1} = X_{1,i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot \tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}), \\ \dot{x}_{i_2} = X_{1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot \tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}), \\ \dot{x}_{i_3} = X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot \tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3}). \end{cases} \quad (4.6)$$

Так как функции  $X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$  и  $\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})$  отличны от нуля в соответствующих им областях  $D_{i_1 i_2}$  и  $D_{j_2 i_3}$  и их неособых граничных точках, то:



проекции которого на координатные плоскости, в которых были построены вспомогательные плоские векторные поля  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ , имеют в соответствующих им областях  $D_{ij}$  топологические структуры соответствующих вспомогательных векторных полей, и по крайней мере одна из компонент  $X_{k,i}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k+1}})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k + 1$ , не имеет нулевых значений в области  $D_{i_1 i_2} \times D_{j_2 i_3} \times \dots \times D_{j_k i_{k+1}}$  пространства  $Ox_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k+1}}$ .

Из сказанного выше следует, что на последнем  $(n - 1)$ -ом шаге этого процесса получим искомого  $n$ -мерное векторное поле  $\vec{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ , определяемое системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.13)$$

## 5. О КРИТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЯХ И ТИПАХ СЕПАРАТРИС ОСОБЫХ ТОЧЕК ПЛОСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Изложенное в разделе 4 решение задачи раздела 3 предполагает построение последовательно-сти плоских векторных полей, которые имеют заданные сепаратрисы и заданные топологические структуры в ограниченных областях соответствующих координатных плоскостей. Вопрос существования у таких векторных полей заданных сепаратрис решается методом Еругина [4], после чего требуемые свойства топологических структур этих векторных полей определяются типами критических направлений и сепаратрис их особых точек. Построение плоских векторных полей с заданными критическими направлениями особых точек и заданными типами касающихся их сепаратрис можно выполнить, используя результаты Фроммера (в [5, § 5]) в исследовании особых точек дифференциального уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (5.1)$$

с дробно-рациональной правой частью и простыми обыкновенными критическими направлениями этих точек.

В соответствии с этими результатами тип критического направления  $y = u_i x$  ( $u_i \neq \pm\infty$ ) особой точки  $O(0; 0)$  уравнения (5.1) и, следовательно, типы сепаратрис, касающихся этого направления в этой точке, определяются знаком производной  $\psi'(0; u_i)$  функции

$$\psi(x, u) = \left[ \frac{xQ(x, y) - yP(x, y)}{xP(x, y)} \right] \Big|_{y=ux}, \quad (5.2)$$

где  $u_i$  — угловой коэффициент критического направления.

Заметим, что в (5.2)

$$xQ(x, y) - yP(x, y) = (\vec{r} \times \vec{v})_z, \quad (5.3)$$

где  $\vec{r} = \{x; y\}$ ,  $\vec{v} = \{P(x, y); Q(x, y)\}$ ,  $(\vec{r} \times \vec{v})_z$  — проекция векторного произведения  $\vec{r} \times \vec{v}$  на ось  $Oz$  правой системы координат  $Oxyz$ , и

$$\text{sign}[x \cdot P(x, y)] = \text{sign}[\vec{r} \cdot \vec{v}] \quad (5.4)$$

в достаточно малом секторе  $S_O(i, \varepsilon, \delta) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < \varepsilon, |y/x - u_i| < \delta\}$ .

Предположим, что: точка  $O(0; 0)$  имеет  $n + 1$  простое обыкновенное критическое направление и других критических направлений не имеет; каждого из этих направлений в точке  $O$  касается одна из интегральных кривых  $L_i : \omega_i(x, y) = 0$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ), содержащих сепаратрисы этой точки; и

$$P(x, y) = P_n(x, y) + \varphi(x, y) \text{ и } Q(x, y) = Q_n(x, y) + \psi(x, y),$$

где  $P_n(x, y)$  и  $Q_n(x, y)$  — однородные многочлены степени  $n$ , а многочлены  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  состоят из членов более высоких порядков. Тогда в точках сектора  $S_O(i, \varepsilon, \delta)$

$$xQ(x, y) - yP(x, y) = \mu x^{n+1} \prod_{j=1, j \neq i}^n (u - u_j)(1 + \alpha x^k)(u - u_i), \quad (5.5)$$

$$xP(x, y) = x^{n+1}[P_n(1, u) + \beta x^m], \quad (5.6)$$

где  $\alpha, \beta, \mu$  — постоянные,  $\mu \neq 0$ ,  $k, m$  — натуральные числа, и

$$\psi(x, u) = \frac{\mu \prod_{j=1, j \neq i}^n (u - u_j) \cdot (1 + \alpha \cdot x^k)}{P_n(1, u) + \beta \cdot x^m} \cdot (u - u_i). \quad (5.7)$$

Дифференцируя (5.7) по переменной  $u$ , получим

$$\psi'(0, u_i) = \frac{\mu \prod_{j=1, j \neq i}^n (u_i - u_j)}{P_n(1, u_i)}. \quad (5.8)$$

Пусть  $S_O^-(i, \varepsilon, \delta)$  и  $S_O^+(i, \varepsilon, \delta)$  — части сектора  $S_O(i, \varepsilon, \delta)$ , на которые он разбивается прямой  $y = u_i x$  так, что из точки  $O$  сектор  $S_O^-(i, \varepsilon, \delta)$  видится справа от этой прямой, а сектор  $S_O^+(i, \varepsilon, \delta)$  — слева. Из (5.4)–(5.8) следует зависимость знака производной  $\psi'(0, u_i)$  от комбинации знаков скалярного произведения  $(\vec{r} \cdot \vec{v})$  и проекции векторного произведения  $(\vec{r} \times \vec{v})_z$  внутри соответствующих достаточно малых секторов  $S_O^-(i, \varepsilon, \delta)$  и  $S_O^+(i, \varepsilon, \delta)$ . А именно:

- (а)  $\psi'(0, u_i) > 0$ , если  $(\vec{r} \cdot \vec{v}) \cdot (\vec{r} \times \vec{v})_z \begin{cases} < 0 \text{ внутри } S_O^-(i, \varepsilon, \delta), \\ > 0 \text{ внутри } S_O^+(i, \varepsilon, \delta); \end{cases}$   
 (б)  $\psi'(0, u_i) < 0$ , если  $(\vec{r} \cdot \vec{v}) \cdot (\vec{r} \times \vec{v})_z \begin{cases} > 0 \text{ внутри } S_O^-(i, \varepsilon, \delta), \\ < 0 \text{ внутри } S_O^+(i, \varepsilon, \delta). \end{cases}$

**Замечание 5.1.** Согласно [5, § 5] сепаратриса особой точки  $O(0; 0)$  уравнения (5.1), которая расположена на его интегральной кривой  $L_i$  и касается в этой точке критического направления  $y = u_i x$ , имеет параболический тип в случае (а) и гиперболический тип в случае (б).

**Замечание 5.2.** Если критическое направление особой точки  $O(0; 0)$  уравнения (5.1) параллельно оси  $Oy$ , то его изучение можно свести к исследованию методом Фроммера [5] знака функции

$$\varphi(y, v) = \left[ \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} - \frac{x}{y} \right] \Big|_{x=vy}$$

в достаточно малой окрестности точки  $O(0; 0)$  плоскости  $Oyv$ .

Таким образом, использованный в [5] алгебраический подход к исследованию топологической структуры особой точки, имеющей только простые обыкновенные критические направления, сводится к изучению знаков скалярного произведения  $\vec{r} \cdot \vec{v}$  и проекции векторного произведения  $(\vec{r} \times \vec{v})_z$  во внутренних точках секторов  $S_O^-(i, \varepsilon, \delta)$  и  $S_O^+(i, \varepsilon, \delta)$ , соответствующих этим направлениям.

С геометрической точки зрения эти произведения характеризуют радиальные и трансверсальные составляющие плоского векторного поля относительно особой точки. Поэтому использование этих произведений упрощает решение задач на построение уравнений вида (5.1) и соответствующих им плоских векторных полей с особыми точками заданной локальной топологической структуры.

Изложенный выше метод построения многомерных векторных полей иллюстрируется следующим примером.

## 6. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В $\mathbb{R}^3$

Построить векторное поле  $\vec{v} = \{X, Y, Z\}$ , соответствующее системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x, y, z), \quad \dot{y} = Y(x, y, z), \quad \dot{z} = Z(x, y, z), \quad (6.1)$$

для которой

- (i) интегральные поверхности, ограничивающие область  $D$  в  $\mathbb{R}^3$ , заданы уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_1 &\equiv -x^2 - (y - 1)^2 + 1 = 0, & \omega_2 &\equiv (x - 1)^2 + y - 1 = 0, \\ \omega_4 &\equiv z = 0, & \omega_5 &\equiv 1 - y = 0, & \omega_6 &\equiv -y = 0, & \omega_7 &\equiv z - 1 = 0; \end{aligned} \quad (6.2)$$

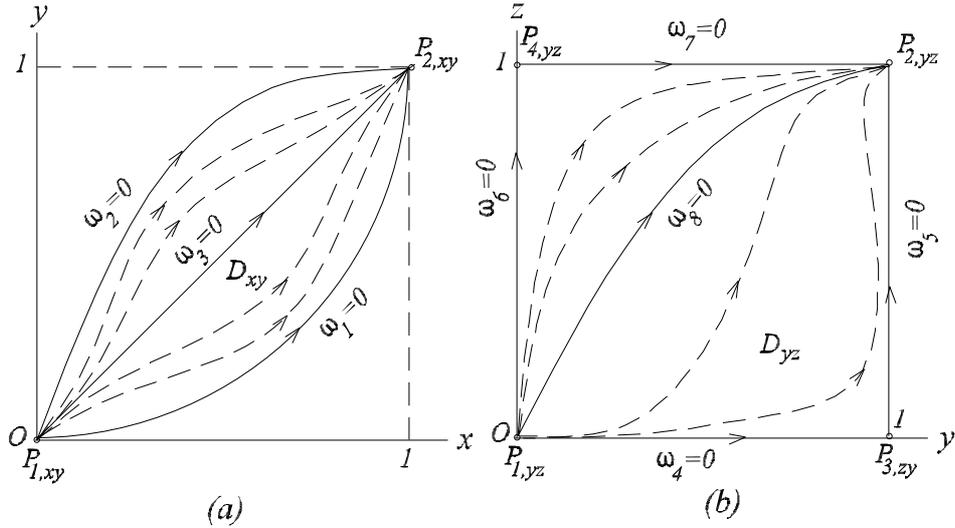


Рис. 1: Схемы топологических структур векторных полей  $\vec{v}_{xy}$  и  $\vec{v}_{yz}$  : (a) разбиение области  $D_{xy}$  на траектории векторного поля  $\vec{v}_{xy}$ ; (b) разбиение области  $D_{yz}$  на траектории векторного поля  $\vec{v}_{yz}$ .

Fig. 1: Schemes of topological structures of vector fields  $\vec{v}_{xy}$  and  $\vec{v}_{yz}$  : (a) partition of the domain  $D_{xy}$  into trajectories of the vector field  $\vec{v}_{xy}$ ; (b) partition of the domain  $D_{yz}$  into trajectories of the vector field  $\vec{v}_{yz}$ .

- (ii)  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(1, 1, 1)$  являются особыми точками, предельными при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$ , соответственно, для расположенных в области  $D$  траекторий, которые касаются или не касаются в этих точках поверхностей

$$\omega_3 \equiv y - x = 0, \quad \omega_8 \equiv -3y + y^2 + 2z = 0 \tag{6.3}$$

указанным на рис. 1.a и 1.b образом;

- (iii) проекции векторного поля  $\vec{v}$  на координатные плоскости  $Oxy$  и  $Oyz$  определяют плоские векторные поля  $\vec{v}_{xy}$  и  $\vec{v}_{yz}$ , имеющие в областях

$$D_{xy} = \{(x, y) : \omega_1(x, y) \geq 0, \omega_2(x, y) \leq 0\},$$

$$D_{yz} = \{(y, z) : \omega_i(y, z) \geq 0 (i = 4, 5), \omega_i(y, z) \leq 0 (i = 6, 7)\}$$

топологические структуры, представленные на рис. 1.a и 1.b соответственно;

- (iv) все критические направления особых точек векторных полей  $\vec{v}_{xy}$  и  $\vec{v}_{yz}$  будем полагать *простыми обыкновенными* в смысле определения из [5, § 4].

**Замечание 6.1.** Из ограничения пункта (iv) следует, что все сепаратрисы особых точек векторных полей  $\vec{v}_{xy}$  и  $\vec{v}_{yz}$  являются только несмешанного типа: параболического или гиперболического (определения см. в [2]).

Решение задачи начнём с построения вспомогательных плоских векторных полей  $\vec{v}_{xy}$  и  $\vec{v}_{yz}$ , имеющих в областях  $D_{xy}$  и  $D_{yz}$  топологические структуры, представленные схемами на рис. 1.a и 1.b, соответственно.

1. В соответствии с [4] положим:

$$\vec{v}_{xy} = \lambda_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 + \lambda_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 - \lambda_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2, \tag{6.4}$$

где  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  — неопределённые положительные множители, а векторы

$$\vec{\tau}_1 = \{-(y - 1); x\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -2(x - 1)\}, \quad \vec{\tau}_3 = \{1; 1\} \tag{6.5}$$

являются касательными к соответствующим кривым  $L_{i,xy} : \omega_i(x, y) = 0 (i = 1, 2, 3)$ ;

$$\vec{v}_{yz} = -\lambda_4 \vec{\tau}_4 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \omega_8 - \lambda_5 \vec{\tau}_5 \omega_4 \omega_6 \omega_7 \omega_8 - \lambda_6 \vec{\tau}_6 \omega_4 \omega_5 \omega_7 \omega_8 - \lambda_7 \vec{\tau}_7 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \omega_8 + \lambda_8 \vec{\tau}_8 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \omega_7, \tag{6.6}$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 4, 5, \dots, 8$ ) — неопределённые положительные множители, а векторы

$$\vec{\tau}_4 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_5 = \{0; 1\}, \quad \vec{\tau}_6 = \{0; 1\}, \quad \vec{\tau}_7 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_8 = \{2; 3 - 2y\} \quad (6.7)$$

являются касательными к соответствующим кривым  $L_{yz,i} : \omega_i(y, z) = 0$  ( $i = 4, \dots, 8$ ).

В этом случае  $L_{i,xy}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются интегральными кривыми векторного поля  $\vec{v}_{xy}$ , а  $L_{i,yz}$  ( $i = 4, \dots, 8$ ) — интегральными кривыми векторного поля  $\vec{v}_{yz}$ .

Проецируя (6.4) и (6.6) на координатные оси, получим, с учётом (6.5) и (6.7), компоненты вспомогательных векторных полей:

$$v_{xy,x} = -\lambda_1(y-1)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_1\omega_3 - \lambda_3\omega_1\omega_2, \quad (6.8)$$

$$v_{xy,y} = \lambda_1x\omega_2\omega_3 - 2\lambda_2(x-1)\omega_1\omega_3 - \lambda_3\omega_1\omega_2, \quad (6.9)$$

$$v_{yz,y} = -\lambda_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 - \lambda_7\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 2\lambda_8\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7, \quad (6.10)$$

$$v_{yz,z} = -\lambda_5\omega_4\omega_6\omega_7\omega_8 - \lambda_6\omega_4\omega_5\omega_7\omega_8 + \lambda_8(3-2y)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7. \quad (6.11)$$

2. Для векторных полей (6.4) и (6.6) найдём значения коэффициентов  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ), при которых угловые особые точки областей  $D_{xy}$  и  $D_{yz}$ , а следовательно, и сами эти области будут иметь заданные топологические структуры. Эти значения найдём, используя замечание 5.1.

2.1. Для векторного поля  $\vec{v}_{xy}$ .

2.1.а. В окрестности точки  $P_{1,xy}(0; 0)$ , полагая  $\vec{r}_{1,xy} = \{x, y\}$ , рассмотрим векторное произведение

$$\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ v_{xy,x} & v_{xy,y} & 0 \end{vmatrix} = (xv_{xy,y} - yv_{xy,x})\vec{k},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.8) и (6.9)

$$xv_{xy,y} - yv_{xy,x} = (-0.5\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + o(r_{1,xy}^3), \quad r_{1,xy} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (6.12)$$

Согласно рис. 1.а в точках подмножества  $\bar{D}_{xy} \cap \dot{U}(P_{1,xy}, \varepsilon)$  достаточно малой проколотой  $\varepsilon$ -окрестности  $\dot{U}(P_{1,xy}, \varepsilon)$  точки  $P_{1,xy}$  скалярное произведение  $\vec{r}_{1,xy} \cdot \vec{v}_{xy} > 0$  и

$$(\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy})_z \begin{cases} < 0, & \text{если } \omega_1\omega_2\omega_3 > 0; \\ > 0, & \text{если } \omega_1\omega_2\omega_3 < 0. \end{cases}$$

Из (6.12) следует, что эти неравенства для проекции  $(\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy})_z$  выполняются, если

$$-\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 < 0. \quad (6.13)$$

В этом случае согласно замечанию 5.1 сепаратрисы точки  $P_{1,xy}$ , расположенные на кривых  $L_{1,xy}$  и  $L_{2,xy}$ , являются гиперболическими, а сепаратрисы, расположенные на прямой  $L_{3,xy}$  — параболическими.

2.1.б. В окрестности точки  $P_{2,xy}(1; 1)$  при  $\vec{r}_{2,xy} = \{x-1, y-1\}$

$$\vec{r}_{2,xy} \times \vec{v}_{xy} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y-1 & 0 \\ v_{xy,x} & v_{xy,y} & 0 \end{vmatrix} = [(x-1)v_{xy,y} - (y-1)v_{xy,x}]\vec{k},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.8) и (6.9)

$$(x-1)v_{xy,y} - (y-1)v_{xy,x} = (-0.5\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + o(r_{2,xy}^3), \quad (6.14)$$

$$r_{2,xy} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

В соответствии с рис. 1.а в точках подмножества  $\bar{D}_{xy} \cap \dot{U}(P_{2,xy}, \varepsilon)$  достаточно малой проколотой  $\varepsilon$ -окрестности  $\dot{U}(P_{2,xy}, \varepsilon)$  точки  $P_{2,xy}$  скалярное произведение  $\vec{r}_{1,xy} \cdot \vec{v}_{xy} < 0$  и

$$(\vec{r}_{2,xy} \times \vec{v}_{xy})_z \begin{cases} < 0, & \text{если } \omega_1\omega_3 < 0; \\ > 0, & \text{если } \omega_1\omega_3 > 0. \end{cases}$$

Из (6.14) следует, что эти неравенства для проекции  $(\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy})_z$  выполняются, если

$$-\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 < 0. \quad (6.15)$$

В этом случае согласно замечанию 5.1 сепаратрисы точки  $P_{2,xy}$ , расположенные на кривых  $L_{1,xy}$  и  $L_{2,xy}$ , являются гиперболическими, а сепаратрисы, расположенные на прямой  $L_{3,xy}$ , являются параболическими.

При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  неравенства (6.13), (6.15) выполняются и компонентами векторного поля  $\vec{v}_{xy}$  являются

$$v_{xy,x} = -(y-1)\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2, \quad (6.16)$$

$$v_{xy,y} = x\omega_2\omega_3 - 2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2. \quad (6.17)$$

Покажем, что в (6.16) компонента  $v_{xy,y} > 0$  внутри области  $D_{xy}$ .

Внутри той части области  $D_{xy}$ , где  $\omega_3 < 0$ , слагаемое  $x\omega_2\omega_3 > 0$ , как и сумма остальных слагаемых:

$$\begin{aligned} -2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2 &= \omega_1[-2(x-1)\omega_3 + \omega_2] = \\ &= -\omega_1[2(x-1)(y-x) + (x-1)^2 + y-1] = \omega_1[x^2 - 2xy + y] = \omega_1[(x-y)^2 + y(1-y)] > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что в этой части области  $D_{xy}$  выполняются неравенства  $\omega_1 > 0$  и  $1-y > 0$ .

Внутри части области  $D_{xy}$ , где  $\omega_3 > 0$ , в компоненте (6.17) слагаемое  $-2(x-1)\omega_1\omega_3 > 0$ , как и сумма остальных слагаемых

$$x\omega_2\omega_3 - \omega_1\omega_2 = \omega_2[x\omega_3 + \omega_1] = \omega_2(xy + y^2 - 2y) = \omega_2y(y+x-2) > 0,$$

так как в этой части области  $D_{xy}$  справедливы неравенства  $\omega_2 < 0$ ,  $y > 0$  и  $y+x-2 < 0$ .

Из неравенства  $v_{xy,y} > 0$  в области  $D_{xy}$  и её граничных точках, отличных от  $P_{1,xy}$  и  $P_{2,xy}$ , следует, что векторное поле  $\vec{v}_{xy}$  не имеет особых точек внутри этой области. В этом случае векторное поле  $\vec{v}_{xy}$  имеет в  $D_{xy}$  топологическую структуру, которая задана схемой на рис. 1.a и определяется установленными выше типами сепаратрис особых точек  $P_{1,xy}$  и  $P_{2,xy}$ .

2.2. Для векторного поля  $\vec{v}_{yz}$ .

2.2.a. В окрестности точки  $P_{1,yz}(0;0)$ , полагая  $\vec{r}_{1,yz} = \{y, z\}$ , рассмотрим векторное произведение

$$\vec{r}_{1,yz} \times \vec{v}_{yz} = \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y & z & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix} = (yv_{yz,z} - zv_{yz,y})\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$yv_{yz,z} - zv_{yz,y} = (\lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_8)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + o(r_{1,yz}^3). \quad (6.18)$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества  $\bar{D}_{yz} \cap \mathring{U}(P_{1,yz}, \varepsilon)$  достаточно малой проколотой  $\varepsilon$ -окрестности  $\mathring{U}(P_{1,yz}, \varepsilon)$  точки  $P_{1,yz}$  скалярное произведение  $\vec{r}_{1,yz} \cdot \vec{v}_{yz} > 0$  и

$$(\vec{r}_{1,yz} \times \vec{v}_{yz})_x \begin{cases} > 0, & \text{если } \omega_4\omega_8 < 0; \\ < 0, & \text{если } \omega_4\omega_8 > 0. \end{cases}$$

Из (6.18) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_8 < 0 \quad (6.19)$$

сепаратрисы особой точки  $P_{1,yz}$  векторного поля  $\vec{v}_{yz}$ , расположенные на прямых  $L_{4,yz}$  и  $L_{6,xy}$ , являются параболическими, а расположенные на кривой  $L_{8,xy}$  — гиперболическими (см. рис. 1.b).

2.2.b. В окрестности точки  $P_{2,yz}(1;1)$ , полагая  $\vec{r}_{2,yz} = \{y-1, z-1\}$ , рассмотрим векторное произведение

$$\vec{r}_{2,yz} \times \vec{v}_{yz} = \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y-1 & z-1 & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix} = [(y-1)v_{yz,z} - (z-1)v_{yz,y}]\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$(y-1)v_{yz,z} - (z-1)v_{yz,y} = (\lambda_5 + \lambda_7 - \lambda_8)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + o(r_{2,yz}^3). \quad (6.20)$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества  $\bar{D}_{yz} \cap \mathring{U}(P_{2,yz}, \varepsilon)$  достаточно малой проколотой  $\varepsilon$ -окрестности  $\mathring{U}(P_{2,yz}, \varepsilon)$  точки  $P_{2,yz}$  скалярное произведение  $\vec{r}_{2,yz} \cdot \vec{v}_{yz} < 0$  и

$$(\vec{r}_{2,yz} \times \vec{v}_{yz})_x \begin{cases} < 0, & \text{если } \omega_5 \omega_8 < 0; \\ > 0, & \text{если } \omega_5 \omega_8 > 0. \end{cases}$$

Из (6.20) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_5 + \lambda_7 - \lambda_8 > 0 \quad (6.21)$$

сепаратрисы точки  $P_{2,yz}$ , лежащие на прямых  $L_{5,yz}$  и  $L_{7,yz}$ , имеют гиперболический тип, а сепаратрисы, расположенные на кривой  $L_{8,yz}$  — параболический тип (см. рис. 1.b).

2.2.в. В окрестности точки  $P_{3,yz}(1; 0)$ , полагая  $\vec{r}_{3,yz} = \{y - 1, z\}$ , найдём

$$\vec{r}_{3,yz} \times \vec{v}_{yz} = \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y - 1 & z & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix} = [(y - 1)v_{yz,z} - zv_{yz,y}]\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$(y - 1)v_{yz,z} - zv_{yz,y} = (\lambda_4 + \lambda_5)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + o(r_{3,yz}^2). \quad (6.22)$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества  $\bar{D}_{yz} \cap \mathring{U}(P_{3,yz}, \varepsilon)$  малой проколотой окрестности  $\mathring{U}(P_{3,yz}, \varepsilon)$  точки  $P_{3,yz}$  проекция  $(\vec{r}_{3,yz} \times \vec{v}_{yz})_x < 0$  и при достаточно малых  $\delta$  скалярное произведение

$$\vec{r}_{3,yz} \cdot \vec{v}_{yz} \begin{cases} < 0, & \text{в секторе } S_{P_{3,yz}}^-(4, \varepsilon, \delta); \\ > 0, & \text{в секторе } S_{P_{3,yz}}^+(5, \varepsilon, \delta). \end{cases}$$

Из (6.22) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_4 + \lambda_5 > 0 \quad (6.23)$$

сепаратрисы точки  $P_{3,yz}$ , лежащие на прямых  $L_{4,yz}$  и  $L_{5,yz}$ , имеют гиперболический тип, как и заключённый между ними сектор малой окрестности  $\mathring{U}(P_{3,yz}, \varepsilon)$  (см. рис. 1.b).

2.2.г. В окрестности точки  $P_{4,yz}(0; 1)$ . Пусть  $\vec{r}_{4,yz} = \{y, z - 1\}$ . Тогда векторное произведение

$$\vec{r}_{4,yz} \times \vec{v}_{yz} = \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y & z - 1 & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix} = [yv_{yz,z} - (z - 1)v_{yz,y}]\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$yv_{yz,z} - (z - 1)v_{yz,y} = (\lambda_6 + \lambda_7)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + o(r_{4,yz}^2). \quad (6.24)$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества  $\bar{D}_{yz} \cap \mathring{U}(P_{4,yz}, \varepsilon)$  малой проколотой окрестности  $\mathring{U}(P_{4,yz}, \varepsilon)$  точки  $P_{4,yz}$  проекция  $(\vec{r}_{4,yz} \times \vec{v}_{yz})_x > 0$  и при достаточно малых  $\delta$  скалярное произведение

$$\vec{r}_{4,yz} \cdot \vec{v}_{yz} \begin{cases} < 0, & \text{в секторе } S_{P_{4,yz}}^+(6, \varepsilon, \delta); \\ > 0, & \text{в секторе } S_{P_{4,yz}}^-(7, \varepsilon, \delta). \end{cases}$$

Из (6.24) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_6 + \lambda_7 > 0 \quad (6.25)$$

сепаратрисы точки  $P_{4,yz}$ , лежащие на прямых  $L_{6,yz}$  и  $L_{7,yz}$ , имеют гиперболический тип, как и заключённый между ними сектор малой окрестности  $\mathring{U}(P_{4,yz}, \varepsilon)$  (см. рис. 1.b).

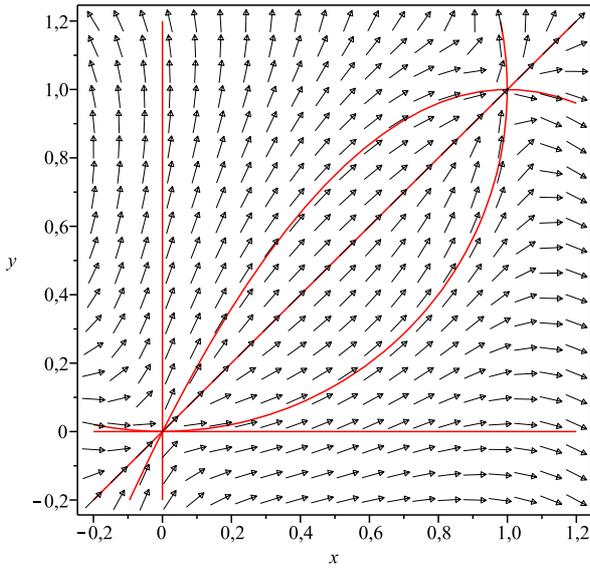
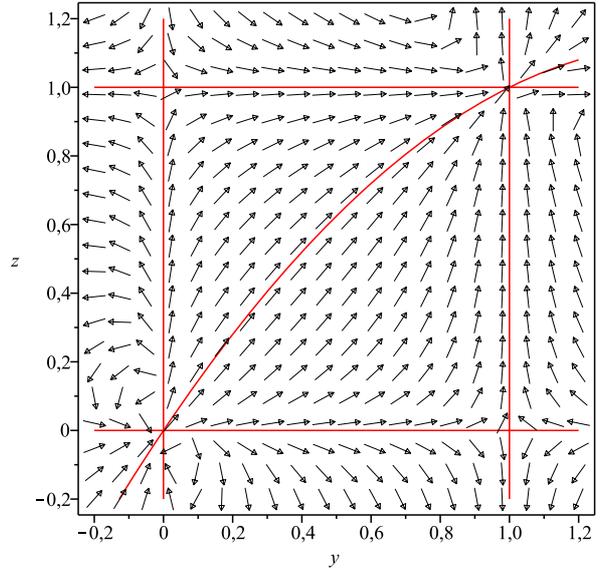
Неравенствам (6.19), (6.21), (6.23) и (6.25) удовлетворяют, в частности,

$$\lambda_4 = \lambda_6 = 1, \quad \lambda_5 = \lambda_7 = 2, \quad \lambda_8 = 3. \quad (6.26)$$

После подстановки (6.26) в (6.10) и (6.11) получим компоненты векторного поля  $\vec{v}_{yz}$ :

$$v_{yz,y} = -\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 - 2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7, \quad (6.27)$$

$$v_{yz,z} = -2\omega_4\omega_6\omega_7\omega_8 - \omega_4\omega_5\omega_7\omega_8 + 3(3 - 2y)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7. \quad (6.28)$$

Рис. 2: Векторное поле  $\vec{v}_{xy}$ Fig. 2: Vector field  $\vec{v}_{xy}$ Рис. 3: Векторное поле  $\vec{v}_{yz}$ Fig. 3: Vector field  $\vec{v}_{yz}$ 

Докажем, что компонента  $v_{yz,y}$ , определяемая равенством (6.21), положительна в области  $D_{yz}$ . В той части этой области, где  $\omega_8 < 0$ , первое слагаемое в правой части (6.21)  $-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 > 0$ , а сумма второго и третьего слагаемых

$$-2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7 = 2(3\omega_7 - \omega_8)\omega_4\omega_5\omega_6, \quad (6.29)$$

где

$$3\omega_7 - \omega_8 = z - 1 - (y - 1)(y - 2) < 0 \quad (6.30)$$

в рассматриваемой части области  $D_{yz}$ . Из (6.29), (6.30) следует, что  $v_{yz,y} > 0$  в тех точках области  $D_{yz}$ , где  $\omega_8 < 0$ .

В другой части этой области  $D_{yz}$ , где  $\omega_8 > 0$ , второе слагаемое в правой части равенства (6.21)  $-2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 > 0$ , а сумма первого и третьего слагаемых

$$-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7 = (6\omega_4 - \omega_8)\omega_5\omega_6\omega_7, \quad (6.31)$$

где

$$6\omega_4 - \omega_8 = 4(z - 1) - (y + 4)(y - 1) < 0 \quad (6.32)$$

в рассматриваемой части области  $D_{yz}$ . Из (6.31), (6.32) следует, что  $v_{yz,y} > 0$  в тех точках области  $D_{yz}$ , где  $\omega_8 > 0$ .

Таким образом, в (6.27) компонента  $v_{yz,y} > 0$  в области  $D_{yz}$  и векторное поле  $\vec{v}_{yz}$  с компонентами (6.27), (6.28) не имеет особых точек в этой области и на её границе, кроме особых точек  $P_{i,yz}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). В этом случае векторное поле  $\vec{v}_{yz}$  имеет в  $D_{yz}$  заданную топологическую структуру, которая представлена схемой на рис. 1.b и определяется установленными выше типами сепаратрис особых граничных точек этой области.

Графики векторных полей  $\vec{v}_{xy}$  с компонентами (6.16), (6.17) и  $\vec{v}_{yz}$  с компонентами (6.27), (6.28), построенные с помощью функции *fieldplot* пакета *Maple*, представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

**Замечание 6.2.** В рассмотренном выше примере построение плоских векторных полей  $\vec{v}_{xy}$  и  $\vec{v}_{yz}$  начиналось с их представления в виде (6.4) и (6.6) соответственно. Другой метод построения таких векторных полей представлен в статье [2]. Этот метод основан на составлении вспомогательной дробно-рациональной функции двух переменных, свойства нулей числителя и знаменателя которой соответствуют заданной топологической структуре искомого векторного поля

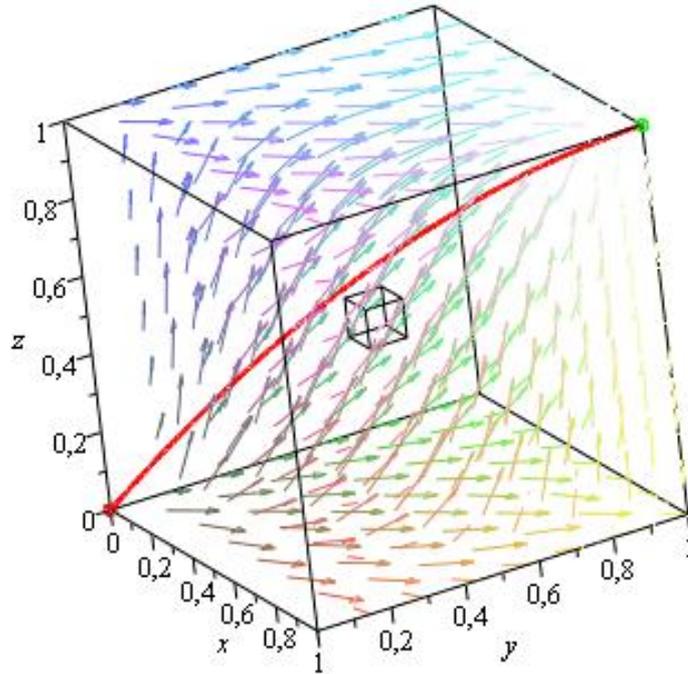


Рис. 4: График векторного поля  $\vec{v}$ (6.34), построенный функцией *fieldplot3d* пакета *Maple*.

Fig. 4: Plot of the vector field  $\vec{v}$ (6.34) plotted by the *fieldplot3d* function of the *Maple* package.

вида (3.1) в заданной области фазовой плоскости. Затем поля касательных и нормальных направлений к линиям уровней этой функции используются в качестве полей направлений сравнения для искомого векторного поля в процессе его построения.

3. Искомое трёхмерное векторное поле  $\vec{v}$  получим, выполнив согласование изменения во времени компонент (6.16), (6.17) и (6.27), (6.28) векторных полей  $\vec{v}_{xy}$  и  $\vec{v}_{yz}$ . В связи с этим заметим, что для векторного поля  $\vec{v}_{yz}$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{v_{yz,z}}{v_{yz,y}}.$$

Полагая в соответствии с (6.17) в этом равенстве  $dy = v_{xy,y} \cdot dt$ , получим

$$\dot{z} = v_{yz,z} \cdot \frac{v_{xy,y}}{v_{yz,y}}. \quad (6.33)$$

Процесс согласования можно завершить умножением  $v_{xy,x}$ ,  $v_{xy,y}$ ,  $\dot{z}$  из (6.16), (6.17), (6.33) на  $v_{yz,y}$  из (6.27). В результате компоненты искомого трёхмерного векторного поля  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  принимают вид произведений  $\dot{x} = v_{xy,x} \cdot v_{yz,y}$ ,  $\dot{y} = v_{xy,y} \cdot v_{yz,y}$ ,  $\dot{z} = v_{yz,z} \cdot v_{xy,y}$ . Заменив в правых частях этих равенств множители их выражениями из (6.16), (6.17), (6.27), (6.28), получим искомое векторное поле

$$\vec{v} : \begin{cases} \dot{x} = [-(y-1)\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2] \cdot (-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 - 2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7), \\ \dot{y} = [x\omega_2\omega_3 - 2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2] \cdot (-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 - 2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7), \\ \dot{z} = [x\omega_2\omega_3 - 2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2] \cdot [-2\omega_4\omega_6\omega_7\omega_8 - \omega_4\omega_5\omega_7\omega_8 + 3(3-2y)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7]. \end{cases} \quad (6.34)$$

График этого векторного поля, построенный с использованием функции *fieldplot3d* пакета *Maple*, представлен на рис. 4. На этом рисунке жирной линией изображена сепаратриса, расположенная на линии  $L$  пересечения цилиндрических поверхностей, заданных уравнениями (6.3).

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье изложен метод построения многомерных векторных полей, имеющих заданные особые траектории и заданную топологическую структуру в ограниченной области  $D$  соответствующего пространства  $\mathbb{R}^n$ . При этом предполагается, что:

- (а) эта область ограничена совокупностью заданных цилиндрических поверхностей, уравнения которых имеют вид  $f(x_i, x_j) = 0$ ;
- (б) топологическая структура искомого векторного поля в области  $D$  задаётся топологическими структурами плоских векторных полей в областях  $D_{ij}$ , которые являются проекциями области  $D$  на соответствующие  $n - 1$  координатные плоскости системы координат  $Ox_1 \dots x_n$ .

Результаты статьи могут быть использованы для построения математических моделей динамических систем, поведение которых описываются системами с конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений указанного типа. Таковыми являются, в частности, механические системы с конечным числом степеней свободы (например, манипуляционные роботы). Векторные поля обобщённых скоростей таких систем в сочетании с уравнениями Лагранжа 2-го рода могут быть использованы для нахождения управляющих сил, обеспечивающих осуществление требуемых движений этих механических систем, их устойчивость, оптимальность и другие свойства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
2. Волков С. В. Построение плоских векторных полей с заданными глобальными топологическими структурами // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — 70, № 2. — С. 237–252.
3. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
4. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. мат. мех. — 1952. — 16, № 6. — С. 659–670.
5. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Усп. мат. наук. — 1941. — № 9. — С. 212–253.

С. В. Волков

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: volkov-sv@rudn.ru

UDC 517.925; 517.93; 531.13

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388

EDN: PONQIR

## Construction of multidimensional vector fields whose projections onto coordinate planes have given topological structures

S. V. Volkov

*RUDN University, Moscow, Russia*

**Abstract.** The aim of the work is to construct multidimensional vector fields that are represented by autonomous systems of ordinary differential equations and have specified topological structures in specified limited simply connected domains of the phase space, provided that these structures can be specified by topological structures of projections of the sought vector fields onto coordinate planes. This problem is an inverse problem of the qualitative theory of ordinary differential equations. The results of this work can be used to construct mathematical models of dynamic systems in various fields of science and technology. In particular, for mechanical systems with an arbitrary finite number of degrees of freedom, such vector fields can represent kinematic equations of program motions and be used to obtain control forces and moments implementing these motions.

**Keywords:** vector field, ODE system, qualitative theory of ODE, phase portrait, topological structure, dynamic system, inverse problem.

**Conflict-of-interest.** The author declares no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The author declares no financial support.

**For citation:** S. V. Volkov, “Construction of multidimensional vector fields whose projections onto coordinate planes have given topological structures,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 375–388. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388>

### REFERENCES

1. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Mayer, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
2. S. V. Volkov, “Postroenie ploskikh vektornykh poley s zadannymi global’nymi topologicheskimi strukturami” [Construction of flat vector fields with prescribed global topological structures], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 2, 237–252 (in Russian).
3. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Methods for Solving Inverse Problems of Dynamics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. N. P. Erugin, “Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial’nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral’nuyu krivuyu” [Construction of the entire set of systems of differential equations having a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, **16**, No. 6, 659–670 (in Russian).
5. M. Frommer, “Integral’nye krivye obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya pervogo poryadka v okrestnosti osoboy tochki, imeyushchey ratsional’nyy kharakter” [Integral curves of a first-order ordinary differential equation in the neighborhood of a singular point of rational character], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1941, No. 9, 212–253 (in Russian).

S. V. Volkov  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: [volkov-sv@rudn.ru](mailto:volkov-sv@rudn.ru)

