Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 356–374
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.28+512.552
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374
EDN: PFEHJE

ТРИВИАЛЬНОСТЬ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ В $\ell_p(G)$ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГРУПП

А. А. Арутюнов[1], **А. В. Наянзин**[2]

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия*

Аннотация. В данной работе изучены дифференцирования в групповых кольцах, пополненных по различным видам норм. Основное внимание уделяется классу групп, в которых сопряжения действуют в некотором смысле контролируемо. С использованием метода отождествления дифференцирований и характеров на некоторой категории получен альтернативный способ доказательства того, что для этого класса групп все дифференцирования являются внутренними.

Ключевые слова: дифференцирование на алгебрах, внутреннее дифференцирование, характер.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. А. А. Арутюнов поддержан грантом РНФ № 22-11-00042 `https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/` в ИПУ РАН.

Для цитирования: *А. А. Арутюнов, А. В. Наянзин.* Тривиальность внешних дифференцирований в $\ell_p(G)$ для одного класса групп// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 356–374. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374`

1. Введение

Пусть имеется некоторая ассоциативная алгебра. Пока безразлично, имеет ли она топологическое оснащение. Под дифференцированиями на ней понимаются линейные операторы, удовлетворяющие правилу Лейбница. При наличии топологического оснащения к этому определению добавляется требование ограниченности. Хорошо известен класс т. н. внутренних дифференцирований, т. е. задающихся коммутатором.

Широко изучается вопрос о том, при каких условиях на алгебру и топологию все дифференцирования являются внутренними. На языке гомологической алгебры это равносильно вырождению первых когомологий Хохшильда.

Наша цель состоит в том, чтобы продемонстрировать, как метод исследования дифференцирований через характеры, предложенный в работах [2,3], работает для случая дифференцирований на групповых алгебрах со значениями в свободных ℓ_p бимодулях. По сути, содержание настоящей работы состоит в предъявлении геометрических и, как нам кажется, более простых доказательств ранее известных результатов Б. Джонсона и других исследователей, часть из которых мы перечислим ниже.

Такой подход позволяет дать более простое и геометрическое доказательство, а также найти подход к исследованию более общих классов операторов. В частности, фактически без изменений эта техника может быть применена к исследованию (σ,τ)-дифференцирований, как это было сделано, например, в работе [5] (без топологического оснащения).

1.1. Постановка задачи и история вопроса. Перейдём к более строгим формулировкам и начнём с нескольких стандартных определений.

Определение 1.1 (см. [8, Definition 1.8.1])**.** Пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$, M — некоторый A-бимодуль. *Дифференцированием* в алгебре A со значениями в M называется линейное отображение

$$d\colon A \to M \tag{1.1}$$

такое, что для каждых a, $b \in A$ выполнена формула Лейбница

$$d(ab) = d(a)b + ad(b). \tag{1.2}$$

Определим внутренние дифференцирования как коммутаторы.

Определение 1.2. Пусть $x \in M$. *Внутренним дифференцированием* D_x называется дифференцирование, которое действует на $a \in A$ следующим образом:

$$D_x(a) = xa - ax. \tag{1.3}$$

В работе [13] Джонсон и Рингроуз показали, что все дифференцирования в алгебре $\ell_1(G)$ для дискретной группы G внутренние.

В [8] сформулирован более общий вопрос (Question 5.6 B). Пусть G — локально компактная группа. Всякое ли дифференцирование из $L^1(G)$ в $M(G)$ является внутренним? Здесь $M(G)$ — пространство комплекснозначных регулярных борелевских мер на G.

Во многих частных случаях ответ получен Джонсоном. Он исследовал этот вопрос как подходящий пример для теории когомологий в банаховых алгебрах. Так, в [12] им было показано, что для связной группы Ли G все дифференцирования из $L_1(G)$ в себя имеют вид

$$Da = a\mu - \mu a, \tag{1.4}$$

где $a \in L_1(G)$, $\mu \in M(G)$. Окончательно поставленная задача была решена Лозером в работе [15].

Отметим, что группа G однозначно восстанавливается по $M(G)$ в том смысле, что из $M(G_1) \cong M(G_2)$ следует, что G_1 и G_2 изоморфны. В случае дискретной группы $M(G) \cong \ell_1(G)$, поэтому аналогичный результат выполняется для алгебр $\ell_1(G)$, см. [21, с. 131–140]. При этом для групповой алгебры соответствующее утверждение неверно. Пример двух неизоморфных групп, имеющих одинаковые групповые алгебры, можно найти в том же источнике на с. 129.

Известно, что существуют банаховы и даже C^*-алгебры, в которых не все дифференцирования являются внутренними. Одним из примеров является алгебра $K(H)$, состоящая из компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Если рассмотреть ограниченный оператор $u \notin K(H) + \mathbb{C}\,\mathrm{id}$, то отображение $D_u(a) = ua - au$ является не внутренним дифференцированием $K(H) \to K(H)$, см. [18]. Однако в 1966 году Сакаи доказал [25], что для каждого дифференцирования в C^*-алгебре A найдется элемент b из слабого замыкания $\overline{A}$ такой, что $d(a) = [b, a]$ для каждого $a \in A$.

Заметим, что случаи C^*-алгебр и случай групповой алгебры $L_1(G)$ «не пересекаются». Имеется в виду, что $L_1(G)$ является C^*-алгеброй тогда и только тогда, когда группа G тривиальна, см [9, Prop. 2.6.2].

Отметим, что в вышеперечисленных результатах от дифференцирований не требовалось непрерывности. Это связано с явлением т. н. автоматической непрерывности. Оно заключается в том, что для ряда банаховых алгебр и бимодулей над ними все дифференцирования являются непрерывными. Для C^*-алгебр этот результат был доказан Сакаи в 1960 году в статье [24].

Определение 1.3 (см. [23, Definition 2.3.1])**.** *Радикалом* R банаховой алгебры A называется пересечение ядер всех неприводимых представлений A. Если $R = \{0\}$, то A называется *полупростой.*

В 1968 году в работе [14] Джонсон показал, что в полупростых банаховых алгебрах все дифференцирования автоматически непрерывны. Более того, если вместо линейности дифференцирования D потребовать только аддитивность, то найдется подпространство конечной коразмерности, ограничение D на которое будет непрерывным. Известно, что для всякой локально компактной группы G алгебра $L_1(G)$ является полупростой, см. [4, с. 440]. Следовательно, все дифференцирования в $L_1(G)$ автоматически непрерывны.

В групповых алгебрах, не оснащенных нормировкой, алгебра внешних дифференцирований часто оказывается нетривиальной. В работах [2, 3] изучена структура данной алгебры и приведено ее описание в терминах исходной группы G. Там же разработана техника исследования дифференцирований с использованием характеров.

Простейшим семейством дифференцирований, которые не являются внутренними, являются центральные дифференцирования, см. [1, определение 3]. Здесь существенную роль играет то, что характер, соответствующий этому классу дифференцирований, нетривиален на некоторой петле (эндоморфизме в группоиде).

В [6] было показано, что необходимым условием для непрерывности дифференцирования является его квазивнутренность, т. е. тривиальность на петлях.

Важным приложением этих вопросов является поиск неподвижных точек действий групп. Поясним связь между ними на примере дискретной группы G. Пусть A — банахов бимодуль над $\ell_1(G)$, $D\colon \ell_1(G) \to A$ — некоторое дифференцирование. Сопоставим ему действие группы G на A по формуле

$$g \circ a = gag^{-1} + D(g)g^{-1}, \quad \text{где } g \in G,\ a \in A. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что

$$\forall g \in G \quad g \circ a = a \quad \Leftrightarrow \quad D(g) = ga - ag. \tag{1.6}$$

То есть у действия есть неподвижная точка тогда и только тогда, когда дифференцирование является внутренним. В 2012 году рядом соавторов [7] была доказана теорема о неподвижной точке, применимая для действия локально компактной группы на $M(G)$, и с помощью нее получено альтернативное, более короткое решение проблемы Джонсона.

Также стоит отметить связь алгебры дифференцирований с когомологиями Хохшильда. Пространство, полученное факторизацией всех дифференцирований по внутренним, совпадает с первой группой когомологий Хохшильда, см. [22, Sec. 11.1]. То есть то, что все дифференцирования $A \to M$ внутренние, равносильно тому, что первая группа когомологий $HH^1(G, M)$ тривиальна. В работах [16, 17] дано геометрическое описание когомологий Хохшильда. В работах [19, 26] исследован вопрос нетривиальности когомологий Хохшильда в групповых алгебрах и скрученных групповых алгебрах над полем конечной характеристики.

Помимо вышеперечисленного, методы изучения дифференцирований групповых алгебр имеют приложение к теории кодирования, это показано в работе [10].

1.2. Основной результат. Мы определим класс групп, который мы будем называть BC-группами. Этот класс состоит из групп, в которых для каждого ограниченного множества B выполнено условие

$$\sup_{g\in G} \operatorname{diam}(g^{-1}Bg) < \infty. \tag{1.7}$$

То есть в таких группах сопряжения не слишком сильно меняют расстояния между элементами группы (см. определение 3.1). Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть G — BC-группа, размер всех конечных классов сопряженности в которой равномерно ограничен. Тогда каждое непрерывное дифференцирование $d\colon \ell_1(G) \to \ell_p(G)$ является внутренним.*

Этот результат может быть также выведен из более ранних работ. В частности, в [11] показано, что полученный результат верен для всех аменабельных групп (подробнее в приложении, раздел 5). Отметим, что найденные нами примеры BC-групп являются аменабельными. В монографии [8] показано, что при $p \in (1, +\infty)$ результат верен для произвольной локально компактной группы (см. [8, Corollary 5.6.52]).

Однако, повторим, что наше доказательство опирается на совсем иные идеи и является более простым. Кроме того, заметим, что фактически дословное повторение наших рассуждений применимо, например, к случаю (σ, τ)-дифференцирований.

2. Основные определения

Мы будем работать только с дискретными конечно порожденными группами. Всюду ниже, если не оговорено противное, считаем, что группа G задана образующими и соотношениями $G = \langle \mathcal{X} \mid R\rangle$, где $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное множество порождающих, $R = \{r_i \mid i \in I\}$ — множество соотношений.

Определение 2.1. Назовем *ℓ_p-нормой* на групповом кольце $\mathbb{C}[G]$ норму вида

$$\left\| \sum_{g\in G} \alpha(g) g \right\|_{\ell_p} := \sqrt[p]{\sum_{g\in G} |\alpha(g)|^p}. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Через $\left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|\right)$ будем обозначать пополнение группового кольца по обозначенной норме. Как правило, именно это пространство будет играть роль бимодуля. Для пространства $\left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_{\ell_p}\right)$ будем использовать стандартное обозначение $\ell_p(G)$.

Заметим, что в случае ℓ_p-нормы на $\mathbb{C}[G]$ умножение на элемент группы G является непрерывным оператором из $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ и потому корректно продолжается до оператора $\ell_p(G) \to \ell_p(G)$. Поэтому $\ell_p(G)$ является бимодулем над $\mathbb{C}[G]$. Также отметим, что непрерывное дифференцирование $d\colon (\mathbb{C}[G], \|\cdot\|_1) \to \left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_2\right)$, как и всякий непрерывный оператор, продолжается до оператора $\hat{d}\colon \left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_1\right) \to \left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_2\right)$.

В [2] была развита техника, которая позволяет сопоставить каждому дифференцированию характер, заданный на группоиде Γ действия сопряжениями. Напомним, как это делается. Будем использовать обозначения из статьи [1].

По каждой группе G можно построить следующий группоид.

Определение 2.3. *Группоидом действия сопряжениями* Γ назовем малую категорию, объектами которой являются элементы $g \in G$. Множество морфизмов $\mathrm{Hom}(\Gamma)$ есть множество всевозможных пар элементов $(u, v) \in G \times G$. При этом стрелка $\phi = (u, v)$ ведет из элемента $s(\phi) = v^{-1}u$ в элемент $t(\phi) = uv^{-1}$.

Рассмотрим два морфизма $\phi = (u_1, v_1)$ и $\psi = (u_2, v_2)$ таких, что $t(\phi) = s(\psi)$, т. е. таких, что для них определена композиция $\psi \circ \phi$. Она задается формулой

$$\psi \circ \phi := (v_2 u_1, v_2 v_1)\,. \tag{2.2}$$

Определение 2.4. *Характером* χ на группоиде Γ будем называть такое отображение χ : $\mathrm{Hom}(\Gamma) \to \mathbb{C}$, что для любых двух морфизмов ϕ и ψ, между которыми определена композиция $\psi \circ \phi$, выполняется соотношение $\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\phi) + \chi(\psi)$.

Класс сопряженности элемента u будем обозначать как u^G.

Определение 2.5. Обозначим через $\Gamma_{[u]}$ подгруппоид Γ с объектами

$$\mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]}) = \{g \in G : \mathrm{Hom}(u, g) \neq \varnothing\} = u^G \tag{2.3}$$

и всевозможными морфизмами между ними, т. е.

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_{[u]}) = \{(u, v) \in \mathrm{Hom}(\Gamma) \mid v^{-1}u, uv^{-1} \in \mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]})\}. \tag{2.4}$$

Иногда мы будем называть $\Gamma_{[u]}$ *компонентой связности* элемента u в группоиде Γ.

Обозначим через δ_h отображение $\widehat{\mathbb{C}}[G] \to \mathbb{C}$, действующее по правилу $\delta_h\left(\sum\limits_{g\in G} \alpha(g) g\right) = \alpha(h)$. Теперь мы можем отождествить дифференцирования и характеры на группоиде.

Предложение 2.1. *Отображения*

$$d \mapsto \left((h, g) \xmapsto{\chi} \delta_h(d(g))\right), \quad \chi \mapsto \left(g \xmapsto{d} \sum_{h\in G} \chi(h, g) h\right) \tag{2.5}$$

задают взаимно обратные изоморфизмы между пространством дифференцирований $\{d \mid \mathbb{C}[G] \to \ell_q(G)\}$ *и пространством «суммируемых» характеров* $\left\{\chi \mid \sum_{h \in G} |\chi(h,g)|^q < \infty \text{ для всех } g \in G\right\}$.

Доказательство. Легко видеть, что если d — отображение из $\mathbb{C}[G]$ в $\ell_q(G)$, тогда соответствующее ему отображение $\chi\colon \mathrm{Hom}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\sum_{h \in G} |\chi(h,g)|^q < \infty$ для всех $g \in G$. Несложно видеть, что верно и обратное.

Пусть d — дифференцирование. То, что χ является характером, проверяется аналогично доказательству теоремы 1 в [2]. Для ясности, проделаем эту проверку.

Если определена композиция $(h_2, g_2) \circ (h_1, g_1)$ то

$$h_1 g_1^{-1} = g_2^{-1} h_2, \tag{2.6}$$

$$(h_2, g_2) \circ (h_1, g_1) = (g_2 h_1, g_2 g_1). \tag{2.7}$$

С учетом этого получаем

$$\begin{aligned} \chi(g_2h_1, g_2g_1) &= \delta_{g_2h_1}(d(g_2g_1)) = \delta_{g_2h_1}(d(g_2)g_1) + \delta_{g_2h_1}(g_2 d(g_1)) = \\ &= \delta_{g_2h_1g_1^{-1}}(d(g_2)) + \delta_{h_1}(d(g_1)) \overset{(2.6)}{=} \delta_{h_2}(d(g_2)) + \delta_{h_1}(d(g_1)) = \chi(h_2,g_2) + \chi(h_1,g_1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

То есть χ действительно характер.

Проверку того, что каждому характеру соответствует дифференцирование и указанные отображения являются взаимно обратными, оставим читателю в качестве легкого упражнения. $\square$

Таким образом, характеры можно отождествить с дифференцированиями, и они связаны формулой

$$d(g) = \sum_{h \in G} \chi(h,g) h = g \left(\sum_{t \in G} \chi(gt, g) t \right), \quad \forall g \in G, \tag{2.9}$$

где последнее равенство получено с помощью замены $h = gt$.

Определение 2.6. Дифференцирование $d\colon \mathbb{C}[G] \to \ell_q(G)$ называется *квазивнутренним*, если соответствующий ему характер тривиален на петлях, т. е. морфизмах вида (h,g) таких, что $g^{-1}h = hg^{-1}$.

Несложно видеть, что все внутренние дифференцирования являются квазивнутренними. В [6] было показано, что для групповых алгебр с нормой, подчиненной супремумной, все дифференцирования обязаны быть квазивнутренними. В случае, когда характер равен нулю на всех петлях, его можно задать через функцию на вершинах.

Определение 2.7. *Потенциалом* характера χ назовем такую функцию $\phi\colon G \to \mathbb{C}$, что

$$\chi(h,g) = \phi(hg^{-1}) - \phi(g^{-1}h). \tag{2.10}$$

Легко видеть, что для каждого тривиального на петлях характера можно найти потенциал ϕ, который его задает. И наоборот, каждая функция $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ задает по формуле (2.10) некоторый характер. При этом, изменив ϕ на константу на некотором классе сопряженности u^G, мы не изменим значения характера.

Переписав формулу (2.9) в терминах потенциалов, получим:

$$d(g) = \sum_{h \in G} \left(\phi(hg^{-1}) - \phi(g^{-1}h)\right) h = \sum_{t \in G} \left(\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)\right) gt. \tag{2.11}$$

Рассмотрим формальную сумму $a = \sum_{t \in G} \phi(t) t$, тогда формула переписывается как

$$d(g) = \sum_{t \in G} \phi(t)\,(tg - gt) = [a, t]. \tag{2.12}$$

Эта формула объясняет смысл термина «квазивнутреннее дифференцирование». Действительно, мы представили наше дифференцирование в виде коммутатора, но элемент a является произвольной функцией из $G \to \mathbb{C}$. Тем самым дифференцирование $\mathbb{C}[G] \to \ell_q(G)$ является внутренним тогда и только тогда, когда возможно подобрать потенциал ϕ так, чтобы a являлся элементом $\left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_{\ell_q}\right)$, что равносильно тому, что $\|a\|_{\ell_q} < \infty$.

Определение 2.8. Пусть G — группа, $\mathcal{X}$ — набор ее образующих. *Графом сопряженности* $\mathrm{sk} = \mathrm{sk}(G, \mathcal{X})$ назовем раскрашенный ориентированный граф, построенный по G и $\mathcal{X}$ следующим образом:

- каждый элемент g задает вершину графа, т. е. $V(\mathrm{sk}) = G$;
- из вершины g в вершину h ведет ребро цвета $x \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$, если $h = xgx^{-1}$.

Компоненту связности элемента u в графе сопряженности обозначим как $\mathrm{sk}_u(G, \mathcal{X})$. Если понятно о какой группе и о какой системе образующих идет речь, то будем сокращать обозначение до sk_u. Легко видеть, что множество вершин, принадлежащих компоненте связности $\mathrm{sk}_u(G)$, совпадает с множеством объектов $\mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]})$. Оба множества равны классу сопряженности u^G.

Обобщенной метрикой на множестве X будем называть функцию $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty]$ такую, что для каждых $x, y, z \in X$ выполняется $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Отличие от метрики в том, что ρ может принимать бесконечное значение.

Определение 2.9. *Обобщенная метрика* ρ в группе G с системой образующих $\mathcal{X}$ определяется как минимальное количество ребер в графе сопряженности $\mathrm{sk}(G, \mathcal{X})$, по которым от одной вершины можно дойти до другой. Мы считаем расстояние бесконечным, если вершины лежат в различных компонентах связности графа.

Всюду дальше, если не оговорено противное, мы будем работать именно с данной метрикой. Заметим, что все ограниченные множества в $\mathrm{sk}(G)$ содержат конечное число элементов.

Замечание. Граф сопряженности можно вложить в группоид Γ. Действительно, множество вершин и там, и там индексируется группой G. Ребро цвета x, соединяющее g и xgx^{-1}, отобразим в морфизм $(xg, x) \in \mathrm{Hom}(g, xgx^{-1})$.

Для наглядности приведем конкретный пример графа сопряженности.

Определение 2.10. *Группой Гейзенберга* называется группа, элементами которой являются матрицы вида

$$H_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{2.13}$$

Ее можно задать образующими и соотношениями следующим образом:

$$\begin{gathered} H_3(\mathbb{Z}) = \langle x, y, z \mid [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = e \rangle, \quad \text{где} \\ x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Пример 2.1. На рисунке ниже изображена компонента $\mathrm{sk}_x(H_3(\mathbb{Z}))$ графа сопряженности группы Гейзенберга. Так как $yxz^ky^{-1} = xz^{k-1}$, то ребра цвета y соединяют различные вершины. Ребра с цветами x, z являются петлями. Чтобы не было лишнего нагромождения, ребра с цветами y^{-1}, x^{-1}, z^{-1} не изображены на рисунке. Также, поскольку нас интересуют тривиальные на циклах характеры, петли в дальнейшем изображаться не будут.

Определение 2.11. Будем говорить, что потенциал ϕ *выравнивается к значению* a_0 в компоненте sk_{u_0}, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K : \forall g \in u_0^G \setminus K \hookrightarrow |\phi(g) - a_0| < \varepsilon, \tag{2.15}$$

где $K \subseteq u_0^G$ — некоторое конечное множество. Заметим, что для конечных компонент связности графа сопряженности определение тривиально выполняется, так как в качестве K мы можем взять все вершины компоненты.

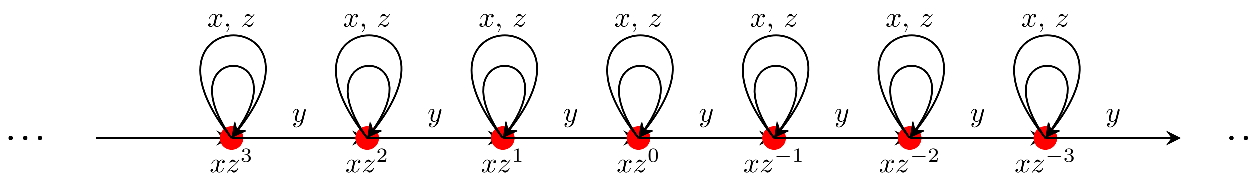

Рис. 1. Граф сопряженности $\mathrm{sk}_x(H_3(\mathbb{Z}))$
Fig. 1. Conjugacy graph $\mathrm{sk}_x(H_3(\mathbb{Z}))$

Мы можем менять значение потенциала на константу, поэтому в тех случаях, когда он выравнивается, будем считать, что он выравнивается к 0. В следующих разделах будет показано, что для определенного класса групп у непрерывных дифференцирований потенциал обязательно выравнивается.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 2.2. *Как-нибудь пронумеруем все вершины* sk_{u_0}. *Потенциал* ϕ *выравнивается в* sk_{u_0} *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{\phi(g_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *имеет конечный предел.*

Прежде всего, покажем, что необходимым условием для того, чтобы образ дифференцирования лежал в $\ell_p(G)$, является отсутствие резких изменений потенциала от точки к точке при стремлении к бесконечности. Более строго это сформулировано в нижестоящем предложении.

Предложение 2.3. *Пусть потенциал* ϕ *задает дифференцирование* $d\colon \mathbb{C}[G] \to \ell_p(G)$, *где* $p \in [1, \infty)$, *по формуле* (2.10). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется конечное множество* $K \subseteq G$ *такое, что для любых* g_1, g_2, *являющихся смежными в графе сопряженности, выполнено неравенство* $|\phi(g_1) - \phi(g_2)| < \varepsilon$. *Здесь не предполагается, что* d *непрерывно.*

Доказательство. В противном случае в $\mathrm{sk}(G)$ найдется бесконечно много ребер, на которых разность потенциала больше ε. Поскольку группа конечно порождена, то для хотя бы одного порождающего элемента $x \in \mathcal{X}$ множество $\{g \in G \mid |\chi(g, x)| > \varepsilon\}$ будет бесконечным. В силу формулы $d(g) = \sum_{g \in G} \chi(h, g) g$ имеем $d(x_i) \notin \ell_p(G)$. □

Изначально стояла задача исследовать дифференцирования $\ell_p(G) \to \ell_q(G)$, т. е. такие линейные операторы между данными пространствами, которые удовлетворяют тождеству Лейбница на элементах группы G. Однако каждое такое дифференцирование можно ограничить на $\ell_1(G) \subset \ell_p(G)$ и снова получить непрерывное дифференцирование. Так как $\ell_1(G)$ всюду плотно в $\ell_p(G)$, то оба дифференцирования одновременно либо являются, либо не являются внутренними. Но исследовать дифференцирования из $\ell_1(G) \to \ell_p(G)$ удобнее по двум причинам. Во-первых, $\ell_p(G)$ является *банаховым* бимодулем над $\ell_1(G)$; во-вторых, для определения нормы в $\ell_1(G)$ достаточно смотреть только на нормы базисных элементов.

Предложение 2.4. *Пусть* X — *банахово пространство,* $\mathcal{A}\colon \ell_1(G) \to X$ — *непрерывное линейное отображение. Тогда* $\|\mathcal{A}\| = \sup\limits_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\|$.

Доказательство. Очевидно, что $\|\mathcal{A}\| \geqslant \sup\limits_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\|$. Покажем, что верно обратное неравенство. Пусть $w = \sum_{g \in G} \alpha(g) g$, тогда

$$\|\mathcal{A}(w)\| = \left\| \sum_{g \in G} \alpha(g) \mathcal{A}(g) \right\| \leqslant \sup_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\| \left(\sum_{g \in G} |\alpha(g)| \right) = \sup_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\| \, \|w\|. \tag{2.16}$$

Значит, $\|\mathcal{A}\| \leqslant \sup\limits_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\|$. □

В силу всего вышесказанного в дальнейшем будем работать с дифференцированиями $\ell_1(G) \to \ell_p(G)$.

3. Условие ограниченности сопряжений

В отличие от действия группы левыми сдвигами на своем графе Кэли, действия сопряжениями на графе сопряженности не являются изометриями и могут довольно сильно изменять расстояния между элементами. Например, в свободной группе $F_2 = \langle a, b \mid \varnothing \rangle$ вершины a и bab^{-1} являются смежными, т. е. находятся на расстоянии 1 друг от друга. При этом расстояние $\rho(a^n a a^{-n}, a^n bab^{-1}a^{-n}) = n+1$, т. е. стремится к бесконечности. Мы будем рассматривать группы, в которых сопряжения действуют в некотором смысле контролируемо, т. е. не слишком сильно меняют расстояния между элементами.

Определение 3.1. Будем говорить, что G удовлетворяет *условию ограниченности сопряжений* (для краткости будем называть такие группы *BC-группами*), если

$$\forall h_1, h_2 : \rho(h_1, h_2) = 1 \ \exists C > 0 : \forall g \in G \hookrightarrow \rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C. \tag{3.1}$$

Несложно видеть, что группа G является BC-группой тогда и только тогда, когда для каждого ограниченного подмножества $K \subset G$ верно, что

$$C(K) = \sup_{g \in G} \operatorname{diam}(g^{-1}Kg) < \infty. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Свойство ограниченности сопряжений не зависит от выбора* (*конечной*) *системы образующих.*

Доказательство. Зафиксируем две системы образующих $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Будем обозначать метрику в графе сопряженности $(G, \mathcal{X})$ символом ρ, а в графе $(G, \mathcal{Y})$ символом d. Предположим, что условие ограниченности сопряжений выполнено относительно системы образующих $\mathcal{X}$, т. е. для каждого $h \in G$ найдется константа $C = C(B_1(h))$ такая, что для всех $g \in G$ и $x_i \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство $\rho(gxhx^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) < C$.

Зафиксируем числа L и M, определенные по формулам

$$L = \max_{y \in \mathcal{Y}} |y|_{\mathcal{X}}, \quad M = \max_{x \in \mathcal{X}} |x|_{\mathcal{Y}}, \tag{3.3}$$

где $|y|_{\mathcal{X}}$ — длина слова y относительно системы образующих $\mathcal{X}$, т. е. минимальный номер n такой, что y может быть представлено в виде $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, где $x_{i_k} \in \mathcal{X}$. Тогда для произвольных $h, g \in G$, $y \in \mathcal{Y}$ получаем

$$d(gyhy^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) \leqslant L\rho(gyhy^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) = L\rho(gw(x)hw(x)^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) \leqslant LC\left(B_M^{\mathcal{X}}(h)\right),$$

где $w(x)$ — кратчайшее слово, выражающее y через образующие $\mathcal{X}$, $C(B_M^{\mathcal{X}})$ — константа из условия ограниченности сопряжений для шара радиуса M относительно метрики ρ. Это завершает доказательство. ☐

3.1. Примеры.

Приведем примеры групп, для которых выполняется условие ограниченности сопряжений.

Пример 3.1. Любая нильпотентная группа ранга 2 удовлетворяет условию ограниченности сопряжений, поскольку для таких групп граф $\mathrm{sk}_u(G)$ изоморфен графу Кэли $G/Z(u)$, см. [1, лемма 4]. Группа $G/Z(u)$ — абелева, поэтому константу C из условия ограниченности сопряжений можно взять равной единице. В частности, группа Гейзенберга

$$H_3(\mathbb{Z}) = \langle x, y, z \mid [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = e \rangle$$

является BC-группой.

Определение 3.2. Группа называется *FC-группой*, если в ней все классы сопряженности конечны. Группа называется *BFC-группой*, если найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $g \in G$ выполнено $|g^G| < N$, где $|g^G|$ — количество элементов в классе сопряженности.

Пример 3.2. FC-группы удовлетворяют условию ограниченности сопряжений, поскольку по определению в них все компоненты связности графа сопряженности (т. е. классы сопряженности) конечны. Они же являются BFC-группами, так как мы работаем только с конечно порожденными группами. Они же являются группами с конечным коммутантом, см. [20, Theorem 3.1].

Пример 3.3. Два предыдущих примера можно обобщить следующим образом. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию $|G'/(Z(G) \cap G')| < \infty$, тогда G является BC-группой.

Действительно, пусть $\{[a_1], \ldots, [a_k]\}$ — элементы $G'/(Z(G) \cap G')$, а $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — множество их представителей. Тогда для каждого $x \in \mathcal{X}$, $g \in G$ верно, что $gx = zaxg$, где $a \in A$, $z \in Z(G)$. Отсюда получаем

$$\rho(gug^{-1}, gxux^{-1}g^{-1}) = \rho(gug^{-1}, axgu(axg)^{-1}) \leqslant |a| + 1 \leqslant \max_{a' \in A} |a'| + 1. \tag{3.4}$$

Здесь $|a|$ — длина элемента $a \in G$ относительно множества образующих $\mathcal{X}$.

Пример 3.4. Рассмотрим бесконечную диэдральную группу $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle$. В приведенном виде элементы группы — слова, состоящие из букв a, b, в которых все буквы, идущие подряд, различны. Опишем классы сопряженности. Если слово w начинается и заканчивается одной и той же буквой, то оно лежит либо в $[a]$, либо в $[b]$. Если же слово w начинается и кончается различными буквами, то оно имеет вид $(ab)^n$ или $(ba)^n$. Для слов такого вида имеем $[(ab)^n] = [(ba)^n] = \{(ab)^n, (ba)^n\}$. Нас интересуют бесконечные классы сопряженности, для определенности будем работать с $[a]$.

Проверим выполнение условия ограниченности сопряжений. Рассмотрим элемент вида $(ba)^k b$. Соседние с ним элементы — $a(ba)^k ba$ и $a(ba)^{k-1}$. Посмотрим, как изменится расстояние между элементами $h_1 = (ba)^k b$, $h_2 = a(ba)^k ba$ при сопряжении посредством g. Запишем g как приведенное слово и будем по очереди сопрягать на каждую букву. Если a — крайняя справа буква в g, то h_1 сдвинется на 1 вправо (см. рис. 2), а h_2 на 1 влево. Затем при сопряжении на b элемент ah_1a вновь сдвинется вправо, а ah_2a влево, и т. д. до тех пор, пока один из них не достигнет начала луча. Если это случится, то после этого они начнут сдвигаться в одну сторону. То есть $B_1(h_1) = 2\rho(h_1, a) + 1$. Единица появилась потому что, достигнув конца отрезка, т. е. вершины a, нам придется снова сопрягать элементом a, и на этом этапе движения вправо не начнется.

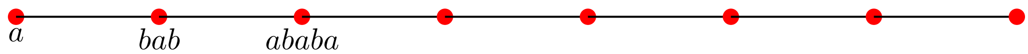

Рис. 2. Граф сопряженности $\mathrm{sk}_a(D_\infty)$

Fig. 2. Conjugacy graph $\mathrm{sk}_a(D_\infty)$

Предложение 3.1.

a) *Пусть G, H — BC-группы, тогда $G \times H$ также является BC-группой.*
b) *Пусть G — BC-группа, $H \subseteq G$ — нормальная подгруппа. Тогда G/H тоже BC-группа.*

Доказательство. a) Пусть G порождается $x_1, \ldots, x_n$, группа H порождается $y_1, \ldots, y_n$. Тогда $G \times H$ порождается объединением образов этих элементов при канонических вложениях. Условие ограниченности сопряжений сразу же получается из следующего соотношения на метрики:

$$\rho_{G \times H}(a_1, a_2) \leqslant \rho_G(\pi_G(a_1), \pi_G(a_2)) + \rho_H(\pi_H(a_1), \pi_H(a_2)), \text{ где } a_1,\ a_2 \in G \times H.$$

В качестве константы ограниченности можно взять сумму констант.

b) Пусть x_i — порождающие группы G. Возьмем $[x_i]$ в качестве порождающих G/H. Из $\rho([g_1], [g_2]) = 1$ следует, что $\left[xg_1x^{-1}\right] = [g_2]$. В силу ограниченности сопряжений в G имеем

$$\forall g \in G \hookrightarrow \rho\left(gxg_1x^{-1}g^{-1}, gg_1g^{-1}\right) < C.$$

А значит, и

$$\rho\left([g]\,[g_1]\left[g^{-1}\right], [g]\,[g_2]\left[g^{-1}\right]\right) < C.$$

То есть факторгруппа также является BC-группой. □

Как следствие, получаем, что конечные произведения вышеперечисленных и конечных групп будут удовлетворять условию ограниченности сопряжений. Теперь рассмотрим случай полупрямых произведений.

Пример 3.5. Рассмотрим $G = D_\infty \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$, где $\phi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(D_\infty)$ — гомоморфизм, определенный равенствами $\phi(a) = b$, $\phi(b) = a$. С помощью порождающих и соотношений эту группу можно задать как $G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e, cac = b\rangle$.

Любое слово в данной группе представляется в виде $u = w(a, b)c^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Если $\varepsilon = 0$, то u принадлежит либо к классу сопряженности $[a] = [b]$, либо к конечному классу сопряженности вида $[(ab)^n]$.

В случае $\varepsilon = 1$ бесконечным является класс $[c] = \{(ab)^n c : n \in \mathbb{Z}\}$. Конечные классы имеют вид $[(ab)^n ac] = \{(ab)^n ac, (ba)^n bc\}$.

Рассуждениями, аналогичными примеру 3.4, показывается, что на бесконечных классах сопряженности условие ограниченности сопряжений выполнено. Бесконечные классы сопряженности представлены на рисунках ниже.

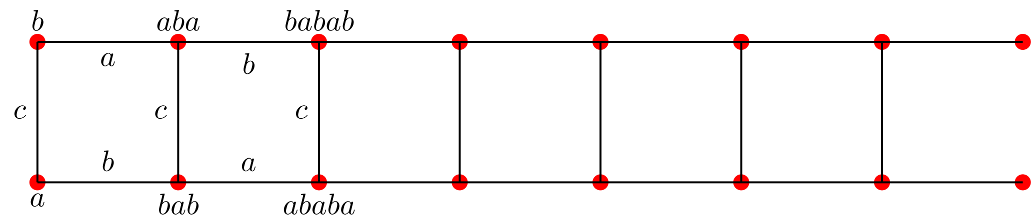

Рис. 3. Компонента связности sk_a .

Fig. 3. Connectivity component sk_a .

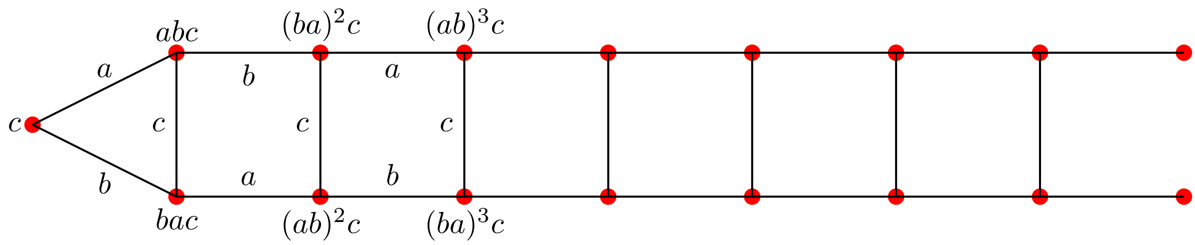

Рис. 4. Компонента связности sk_c .

Fig. 4. Connectivity component sk_c .

Следующий пример показывает, что полупрямое произведение с конечной группой не всегда сохраняет условие ограниченности сопряжений.

Пример 3.6 (не BC-группа)**.** Рассмотрим $G = H_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$, где $\phi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(H_3)$ определен как $\phi(x) = y$, $\phi(y) = x$, $\phi(z) = z^{-1}$. Эти равенства задают гомоморфизм, поскольку соотношения переходят в соотношения. Действительно,

$$[\phi(x), \phi(y)] = [y, x] = [x, y]^{-1} = z^{-1} = \phi(z). \tag{3.5}$$

Два оставшихся соотношения проверяются аналогично.

Рассмотрим класс сопряженности $[y]$. Заметим, что $cyc = x$, при этом $\rho(y^k xy^{-k}, x) \to \infty$, тогда как $\rho(y^k yy^{-k}, y) = 0$. То есть условие ограниченности сопряжений не выполнено.

Этот пример показывает то, что свойство группы быть BC-группой не сохраняется при квазиизометриях, а также что не все графы сопряженности с двумя концами удовлетворяют условию ограниченности сопряжений.

4. Дифференцирования в BC-группах

В данном разделе мы докажем, что в BC-группах с равномерно ограниченными конечными классами сопряженности все непрерывные дифференцирования являются внутренними. Сначала

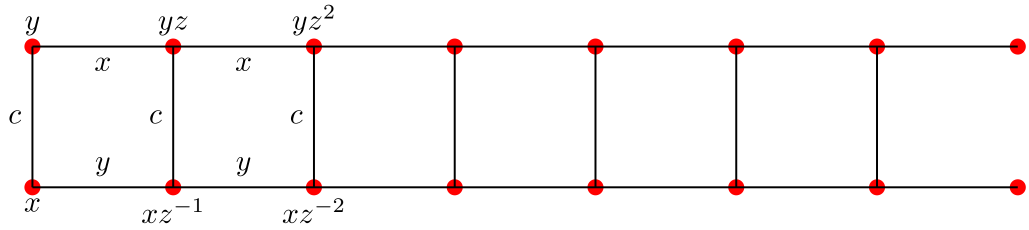

Рис. 5. Компонента связности sk_y.

Fig. 5. Connectivity component sk_y.

мы докажем, что потенциал выравнивается на каждой бесконечной компоненте (см. определение 2.11). Затем мы докажем теорему для дифференцирований с носителем в одной бесконечной компоненте, и, наконец, мы докажем теорему, заявленную во введении.

Определение 4.1. *Носителем* дифференцирования d называется множество

$$\{h \in G \mid \chi(h,g) \neq 0 \text{ для некоторого } g \in G\}, \tag{4.1}$$

где χ — характер, соответствующий дифференцированию d (см. предложение 2.5).

Лемма 4.1. *Пусть $G = \langle \mathcal{X} \mid R\rangle$ — BC-группа, $q \in [1,+\infty)$. Тогда потенциал ϕ, соответствующий непрерывному дифференцированию $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$, выравнивается на каждой компоненте связности.*

Доказательство. Потенциал выравнивается тогда и только тогда, когда выравниваются его вещественная и мнимая части, поэтому, не теряя общности, можно считать, что $\phi\colon G \to \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную бесконечную компоненту связности sk_{g_0}. Введем числа

$$a := \inf_K \left(\sup_{g \in g_0^G \setminus K} \phi(g) \right), \quad b := \sup_K \left(\inf_{g \in g_0^G \setminus K} \phi(g) \right), \quad \delta := a - b, \tag{4.2}$$

где супремум и инфимум берутся по конечным $K \subseteq g_0^G$. Очевидно, что если a или b равняются бесконечности, то дифференцирование не является непрерывным.

Предположим, что потенциал не выравнивается, тогда число δ положительно. Зафиксируем произвольное натуральное число n. Рассмотрим множества $V_a = \{g \mid |\phi(g) - a| < \frac{\delta}{4}\}$, $V_b = \{g \mid |\phi(g) - b| < \frac{\delta}{4}\}$; они не ограничены. Возьмем произвольное n-элементное подмножество $V_n \subset V_a$. Используя условие ограниченности сопряжений, найдем константу C такую, что для всех $h_1, h_2 \in V_n$ и каждого $g \in G$ будет верно, что $\rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C$. По предложению 2.3 найдется $h \in V_b$ такое, что $B_C(h) \subset V_b$. Рассмотрим произвольный $u \in V_n$. Так как u, h лежат в одной компоненте связности, имеем $h = gug^{-1}$. Значит, $gV_ng^{-1} \subset B_C(h) \subset V_b$.

Используя формулу 2.11, получаем

$$\|d(g)\| = \left\| \sum_{t \in G} \left(\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)\right) gt \right\| = \sqrt[q]{\sum_{t \in V_n} |\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)|^q} \geqslant \sqrt[q]{n\frac{\delta}{2}}. \tag{4.3}$$

В силу произвольности выбранного в начале n получаем неограниченность дифференцирования. $\square$

4.1. Случай одной компоненты.

Лемма 4.2. *Пусть G — BC-группа, $q \in [1,+\infty)$. Тогда каждое непрерывное дифференцирование $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ с носителем, сосредоточенным в одной компоненте u_0^G, является внутренним.*

Доказательство. В силу уравнения (2.12) достаточно доказать, что для данного дифференцирования можно выбрать потенциал из ℓ_q. Предположим противное:

$$\sum_{g\in u_0^G} |\phi(g)|^q = \infty. \tag{4.4}$$

Для каждого $M > 0$ найдутся $g_1, \dots, g_n \in u_0^G$ такие, что

$$|\phi(g_1)|^q + \dots + |\phi(g_n)|^q > M^q,$$

причем каждое слагаемое в сумме ненулевое. Положим $m = \dfrac{1}{2}\min\{|\phi(g_1)|, \dots, |\phi(g_n)|\}$. Поскольку в силу леммы 4.1 потенциал выравнивается к 0, найдется такое $R > 0$, что $|\phi(g)| < m$ для каждого $g \in u_0^G \setminus B_R(u_0)$. В силу ограниченности сопряжений найдется конечная константа $C = C(B_R(u_0)) > 0$ такая, что

$$\forall g \in G,\ \forall h_1, h_2 \in B_r(u_0) \hookrightarrow \rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C.$$

Рассмотрим элемент $g \in G$ такой, что $\rho(u_0, gu_0g^{-1}) > R + C$. Тогда, поскольку имеет место $\rho(ghg^{-1}, gu_0g^{-1}) < C$, видим, что

$$\forall h \in B_R(u_0) \hookrightarrow |\phi(ghg^{-1})| < m, \tag{4.5}$$

и потому в силу неравенства треугольника $ghg^{-1} \notin B_R(u_0)$.

Теперь, пользуясь формулой (2.11), оценим снизу норму элемента $d(g)$:

$$\begin{aligned}\|d(g)\| = \left\|\sum_{t\in G}\big(\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)\big)\, gt\right\| = \sqrt[q]{\sum_{t\in G}|\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)|^q} \geqslant \\ \geqslant \sqrt[q]{\sum_{t\in\{g_1,\dots,g_n\}}|\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)|^q} = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}|\phi(g_i) - \phi(gg_ig^{-1})|^q} \geqslant \\ \geqslant \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{m}\big||\phi(g_i)| - m\big|} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}|\phi(g_i)|^q} = \frac{M}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, для произвольно выбранного M мы нашли элемент $g \in G$, для которого выполнено $\|d(g)\| \geqslant \dfrac{M}{2}$. Значит, d не является ограниченным. □

Тем самым для групп, удовлетворяющих условию ограниченности сопряжений, показано, что дифференцированию с носителем в одной компоненте можно сопоставить потенциал из ℓ_q.

4.2. Случай нескольких компонент. Посмотрим, как связаны между собой расстояния $\rho(h, ghg^{-1})$ и $\rho(h, g^{-1}hg)$. Рассмотрим $g = x^k y$, $h = x \in F_2 = \langle x, y \mid \varnothing\rangle$. Тогда

$$\rho(h, ghg^{-1}) = \rho(x, x^k yxy^{-1}x^{-k}) = k + 1,$$
$$\rho(h, g^{-1}hg) = \rho(x, y^{-1}xy) = 1.$$

Таким образом, одно из расстояний может неограниченно возрастать, в то время как второе будет оставаться конечным. Однако, как показывает следующее предложение, в BC-группах такого происходить не может.

Предложение 4.1. *Пусть G — BC-группа, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность элементов группы, что $\rho(u, a_k u a_k^{-1}) \to \infty$. Тогда $\rho(u, a_k^{-1} u a_k) \to \infty$.*

Доказательство. В противном случае найдется константа L и подпоследовательность a_{n_k} такие, что $\rho(u, a_{n_k}^{-1} u a_{n_k}) \leqslant L$, т. е. $a_{n_k}^{-1} u a_{n_k} \in B_L(u)$. Сопрягая на a_{n_k} и используя ограниченность сопряжений, получим $\rho(a_{n_k} u a_{n_k}^{-1}, u) < C(B_L(u))$, что противоречит условию. □

Доказательство леммы 4.2 было основано на том, что сопряжением мы «выкидывали» некоторые элементы группы достаточно далеко. Чтобы проделать то же самое сразу для нескольких компонент, понадобится следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть G — BC-группа, тогда найдется последовательность элементов $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \in G$, такая, что для каждого h из какой-либо бесконечной компоненты связности будет верно $\rho(h, a_k h a_k^{-1}) \to \infty$.*

Доказательство. Пронумеруем все бесконечные компоненты и будем вести индукцию по числу компонент. В каждой компоненте произвольным образом выберем начало u_i.

Сначала докажем, что утверждение верно для u_i из первых k компонент. Будем вести индукцию по k.

База индукции очевидна, существование такой последовательности для одной компоненты следует из того, что мы работаем с бесконечными компонентами.

Пусть a_n — такая последовательность, что $\rho(u_i, a_n u_i a_n^{-1}) \to \infty$ для $i \leqslant k$. Рассмотрим компоненту $\Gamma_{[u_{k+1}]}$. Если из последовательности $\rho(u_{k+1}, a_n u_{k+1} a_n^{-1})$ можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности, то это завершит шаг индукции.

Иначе $\{a_n h a_n^{-1} | n \in \mathbb{Z}\}$ будет ограниченным для каждого $h \in u_{k+1}^G$. Возьмем произвольную последовательность $b_n : \rho(u_{k+1}, b_n u_{k+1} b_n^{-1}) \to \infty$. Выделим подпоследовательность a'_n последовательности a_n такую, что $\min\limits_{i \leqslant k} \rho(u_i, a'_n u_i {a'_n}^{-1}) > 2|b_n|$. Рассмотрим последовательность $c_n = b_n a'_n$. Тогда для каждого $i \leqslant k+1$ верно, что $\rho(u_i, c_n u_i c_n^{-1}) \to \infty$. При $i \leqslant k$ это верно в силу неравенства треугольника. При $i = k+1$ это следует из того, что $\{a_n u_{k+1} a_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ — ограниченное множество, группа удовлетворяет условию ограниченности сопряжений и того, что $\rho(u_{k+1}, b_n u_{k+1} b_n^{-1}) \to \infty$.

В случае произвольного числа компонент по доказанному выше найдется элемент $a_k \in G$ такой, что

$$\min_{i \leqslant k} \rho(u_i, a_k u_i a_k^{-1}) > k.$$

Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ верно, что $\rho(u_i, a_k u_i a_k^{-1}) \to \infty$, а потому для каждого $h \in u_i^G$ выполняется $\rho(h, a_k h a_k^{-1}) \to \infty$. $\square$

Результат леммы 4.2 допускает некоторое обобщение. Определим ℓ_q-норму потенциала ϕ по формуле $\|\phi\|_{\ell_q} = \sqrt[q]{\sum\limits_{g \in G} |\phi(g)|^q}$. Объединение всех бесконечных и всех конечных компонент обозначим как Γ_{inf} и Γ_{f}, соответственно.

Лемма 4.4. *Пусть носитель дифференцирования d с потенциалом ϕ сосредоточен в Γ_{inf}. Будем предполагать, что потенциал ϕ выбран выравнивающимся к нулю. Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для каждого $u \in \mathrm{Obj}(\Gamma_{\mathrm{inf}})$ верно, что $\rho(u_i, a_k u_i a_k^{-1}) \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} \|d(a_k)\| = \sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}$.*

Доказательство. В каждой бесконечной компоненте связности зафиксируем вершину u_i. Выберем $0 < \varepsilon < 1$.

Случай 1: $0 < \|\phi\|_{\ell_q} < \infty$ (в случае нулевой нормы все очевидно).

В этом случае найдется конечное множество $\mathcal{S} = \{g_1, \dots, g_n\} \subset \mathrm{Obj}(\Gamma_{\mathrm{inf}})$ такое, что

$$\sum_{g \in \mathcal{S}} |\phi(g)|^q > \left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{g \notin \mathcal{S}} |\phi(g)|^q < \min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ 2^{-q}\varepsilon \left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q\right), \tag{4.6}$$

и $\phi(g) \neq 0$ для каждого $g \in \mathcal{S}$. Первая часть минимума нам понадобится для того, чтобы сделать оценку снизу, а вторая для того, чтобы оценить $\|d(a_k)\|$ сверху.

Так как множество $\mathcal{S}$ конечно, оно содержится в конечном числе бесконечных компонент связности, т. е. $\mathcal{S} \subset \bigcup\limits_{i \in I} u_i^G$, $|I| < \infty$. Поэтому найдется $r > 0$ такое, что $\{g_1, \dots, g_n\} \subset \bigcup\limits_{i \in I} B_r(u_i)$.

По предположению, на каждой компоненте потенциал выравнивается. Значит, для каждого $m > 0$ можно найти число $R > r > 0$ такое, что для каждого $g \in \bigcup\limits_{i \in I} \left(u_i^G \setminus B_R(u_i)\right)$ будет выполняться неравенство $|\phi(g)| < m$. Положим

$$m = \frac{\varepsilon}{2} \min\{|\phi(g_1)|, \dots |\phi(g_n)|\}.$$

Так как G — ВС-группа, числа $C_i = \sup\limits_{g\in G} \operatorname{diam}(gB_r(u_i)g^{-1})$ являются конечными. Поэтому константа $C = \max\limits_{i\in I} C_i$ конечна и удовлетворяет условию

$$\forall g \in G,\ \forall i \in I, \forall h_1, h_2 \in B_r(u_i) \hookrightarrow \rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C. \tag{4.7}$$

По предположению леммы и предложению 4.1, найдется номер N такой, что для каждого $k \geqslant N$, для каждого $i \in I$ будут верны неравенства $\rho(u_i, a_ku_ia_k^{-1}) > R+C$ и $\rho(u_i, a_k^{-1}u_ia_k) > R+C$ (помним, что I конечно). Тогда для всех $h \in B_r(u_i)$, $k \geqslant N$, верно, что

$$|\phi(a_kha_k^{-1})| < m, \quad |\phi(a_k^{-1}ha_k)| < m. \tag{4.8}$$

Заметим, что по неравенству треугольника $\mathcal{S} \cap \left(a_k^{-1}\mathcal{S}a_k\right) = \varnothing$. Теперь, используя уравнение (2.11), мы можем получить нижнюю оценку:

$$\begin{aligned}
&(\|d(a_k)\|)^q = \left\|\sum_{t\in G} \left(\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right) a_kt\right\|^q = \sum_{t\in G} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q \geqslant \\
&\geqslant \sum_{t\in\mathcal{S}} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q + \sum_{t\in a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\phi(a_kg_ia_k^{-1}) - \phi(g_i)\right|^q + \sum_{i=1}^{n} \left|\phi(g_i) - \phi(a_k^{-1}g_ia_k)\right|^q \geqslant \\
&\geqslant 2\sum_{i=1}^{m} ||\phi(g_i)| - m|^q \geqslant 2(1-\frac{\varepsilon}{2})^q \sum_{i=1}^{n} |\phi(g_i)|^q \geqslant 2\left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Таким образом, получаем

$$\|d(a_k)\| \geqslant \sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q} (1-\frac{\varepsilon}{2}) \sqrt[q]{1-\frac{\varepsilon}{2}} \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}. \tag{4.10}$$

Теперь оценим сверху:

$$\begin{aligned}
&(\|d(a_k)\|)^q = \sum_{t\in G} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\in\mathcal{S}} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q + \sum_{t\in a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q + \sum_{t\notin\mathcal{S}\cup a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q \leqslant \\
&\leqslant 2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q + \sum_{t\notin\mathcal{S}\cup a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} 2^{q-1}\left(\left|\phi(a_kta_k^{-1})\right|^q + |\phi(t)|^q\right) \leqslant 2(1+\frac{\varepsilon}{2})^q \|\phi\|_{\ell_q}^q + \frac{\varepsilon}{2}\|\phi\|_{\ell_q}^q.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Для оценки члена $\sum\limits_{t\notin\mathcal{S}\cup a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_kta_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q$ было использовано неравенство

$$(|a|+|b|)^q \leqslant 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q), \tag{4.12}$$

потом воспользовались тем, что $\sum\limits_{g\notin\mathcal{S}} |\phi(g)|^q < 2^{-q}\varepsilon\left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q$.

Таким образом,

$$\|d(a_k)\| \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q} \sqrt[q]{1+\frac{\varepsilon}{4}} \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}. \tag{4.13}$$

Тем самым получен желаемый результат: $\lim\limits_{k\to\infty} \|d(a_k)\| = \sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}$.

Случай 2: $\|\phi\|_{\ell_q} = \infty$.

Выберем произвольное $M > 0$. Тогда найдутся $g_1, \ldots, g_n \in \bigcup\limits_{i\in I} \operatorname{Obj}(\Gamma_{[u_i]})$, такие, что

$$|\phi(g_1)|^q + \cdots + |\phi(g_n)|^q > M^q.$$

Аналогично тому, как мы выводили оценку снизу в прошлом пункте, для достаточно больших k получаем

$$(\|d(a_k)\|)^q \geqslant 2\sum_{i=1}^{m} ||\phi(g_i)| - m|^q \geqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) M. \tag{4.14}$$

В силу произвольности M заключаем, что последовательность стремится к бесконечности. □

Следствие 4.1. *Пусть группа G — BC-группа, $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ — ограниченное дифференцирование с носителем в Γ_{inf}. Тогда его можно задать с помощью потенциала из ℓ_q.*

Доказательство. В силу леммы 4.1 потенциал ϕ выравнивается к некоторому значению. Выберем такой ϕ, который выравнивается к 0. Рассмотрим последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ из леммы 4.3. Для нее по лемме 4.4 получаем, что

$$\|\phi\|_{\ell_q} \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \|d(a_i)\|\right) \leqslant \|d\| < \infty.$$

Таким образом, ϕ задается потенциалом из ℓ_q. □

Полученные выше результаты позволяют понять, что происходит на бесконечных компонентах. Оказывается, что если размер конечных компонент равномерно ограничен, то аналогичный результат верен и для них.

Предложение 4.2. *Пусть диаметры всех конечных компонент связности группы G равномерно ограничены некоторой константой N. Тогда для непрерывного дифференцирования $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$, носитель характера которого сосредоточен в Γ_{f}, можно выбрать потенциал так, чтобы он был из ℓ_q.*

Доказательство. В каждой конечной компоненте выберем вершину u_i, в которой положим потенциал равным нулю. Рассмотрим новую систему образующих группы G, в которую включим все слова длины не более N. Обозначим ее как $\mathcal{A}$.

Тогда для каждого $g \in \Gamma_f$ найдется вершина u_i (вершина компоненты, в которой лежит g) и порождающий элемент a такие, что $g = a^{-1}u_i a$. Тогда

$$\sum_{g\in\Gamma_f} |\phi(g)|^q \leqslant \sum_{a\in\mathcal{A}} \sum_{u_i\in\Gamma_f} |\phi(a^{-1}u_i a)|^q \leqslant \sum_{a\in\mathcal{A}} \|d(a)\| \leqslant |\mathcal{A}| \, \|d\| \,.$$

Тем самым потенциал будет из ℓ_q. □

Теперь соберем воедино полученные выше результаты и докажем основную теорему.

Теорема 4.1. *Пусть G — BC-группа, в которой конечные компоненты связности G равномерно ограничены. Тогда каждое ограниченное дифференцирование $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ является внутренним.*

Доказательство. Покажем, что для d можно найти потенциал из ℓ_q. Дифференцирование d представляется в виде суммы $d = d_{\mathrm{inf}} + d_{\mathrm{f}}$. Носитель d_{inf} содержится в бесконечных компонентах связности, носитель d_{f} — в конечных. Заметим, что для каждого $g \in G$ верно $\|d_{\mathrm{inf}}(g)\| \leqslant \|d(g)\| \leqslant \|d\|$, аналогично для второго слагаемого. Значит, d_{f}, d_{inf} ограничены, а потому у них найдутся потенциалы из ℓ_q. Тогда, выбирая ϕ как в предложениях 4.1, 4.2, получим

$$\sum_{g\in G} |\phi(g)|^q = \sum_{g\in\Gamma_{\mathrm{inf}}} |\phi(g)|^q + \sum_{g\in\Gamma_{\mathrm{f}}} |\phi(g)|^q = \sum_{g\in G} |\phi_{\mathrm{inf}}(g)|^q + \sum_{g\in G} |\phi_{\mathrm{f}}(g)|^q < \infty. \tag{4.15}$$

Тем самым получаем, что потенциал дифференцирования принадлежит ℓ_q, т. е. дифференцирование является внутренним. □

Пример 4.1. Нильпотентные группы ранга 2 удовлетворяют условиям ограниченности сопряжений и равномерной ограниченности конечных компонент.

Напомним, что группа G называется *нильпотентной группой ранга* 2, если ее факторгруппа по центру Z коммутативна.

Будем считать, что группа задана как $\langle a_1, a_2, \dots a_m, b_{ij} \dots | R\rangle$, где $b_{ij} = [a_i^{-1}, a_j^{-1}]$. Также будем считать, что если a_i — порождающий, то a_i^{-1} — тоже, т. е. найдется j такое, что $a_j = a_i{}^{-1}$. Как и ранее, считаем, что G конечно порождена. Обозначим через Z центр группы. Подгруппу, порожденную коммутаторами образующих, обозначим как $B = \langle b_{ij}\rangle \subset Z$.

Предложение 4.3. *У нильпотентной группы ранга* 2 *ограниченные компоненты связности равномерно ограничены некоторой константой* N.

Доказательство. Группа $G' = [G, G]$ является конечно порожденной. Действительно, в случае нильпотентной группы ранга 2 верно, что $a_i a_j = a_j a_i a_i^{-1} a_j^{-1} a_i a_j = a_j a_i [a_i^{-1}, a_j^{-1}] = a_j a_i b_{ij}$, где $b_{ij} \in Z$. В силу этого коммутатор любых двух элементов равен произведению элементов b_{ij}, а их конечное количество.

У конечно порожденной абелевой группы подгруппа кручения конечна. Рассмотрим конечную компоненту $\Gamma_{[u_0]}$. Заметим, что $g u_0 g^{-1} = u_0 b$, где $b \in \mathrm{Tor}(G')$. Отсюда получаем, что количество элементов в каждой компоненте ограничено числом $N = |\,\mathrm{Tor}(G')|$. □

Следствие 4.2. *В нильпотентной группе ранга* 2 *для произвольного ограниченного дифференцирования* $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ *можно найти потенциал из* ℓ_q, *и тем самым оно является внутренним.*

5. Приложение. Аменабельность и доказательство Джонсона

Для полноты картины приведем доказательство Джонсона, см. [11, Theorem 2.5]. Ради краткости изложения мы ограничимся случаем дискретной групповой алгебры и бимодулями вида $\ell_p(G)$.

Мы будем доказывать следующую теорему:

Теорема 5.1. *Пусть G — аменабельная дискретная конечно порожденная группа. Тогда любое дифференцирование* $D\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ *является внутренним.*

Существует много определений аменабельности, приведем два наиболее часто встречающихся.

Определение 5.1. Конечно порожденная группа G называется *аменабельной*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. Существует непрерывный левоинвариантный функционал $\Lambda\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ такой, что $\Lambda(\mathbf{1}) = 1$.
2. Существует последовательность конечных множеств F_n таких, что $|g \cdot F_n \Delta F_n|/|F_n| \to 0$ для каждого $g \in G$.

Структура банахова бимодуля на сопряженном пространстве. Зафиксируем такое число p, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда $\ell_p(G)^* \cong \ell_q(G)$. Определим на $\ell_p(G)^*$ структуру модуля над $\ell_1(G)$. Пусть $f \in \ell_p(G)^*$, $g \in G$ тогда

$$(gf)[u] := f[g^{-1}u], \quad (fg)[u] = f[ug^{-1}], \quad \forall u \in \ell_p(G).$$

Проверим, что определенное таким образом действие совпадает с обычным умножением элементов $\ell_q(G)$ на элементы $\ell_1(G)$. Действительно, $(g\delta_h)[u] = \delta_h[g^{-1}u] = \delta_{gh}[u]$, здесь $\delta_h\colon G \to \mathbb{C}$ — функция, равняющаяся 1 на h и нулю на всех остальных элементах.

Теперь мы можем смотреть на D, как на дифференцирование $\ell_1(G) \to \ell_p(G)^*$.

Замечание. Каждому ограниченному линейному отображению $\Phi\colon \ell_1[G] \to \ell_p(G)^*$ можно сопоставить элемент $f \in \ell_p(G)^*$ по правилу

$$f[u] = \Lambda(h \mapsto \Phi(h)[u]). \tag{5.1}$$

Здесь мы имеем в виду, что мы взяли среднее от функции $G \to \mathbb{C}$, определенной по правилу $h \mapsto \Phi(h)[u]$. Построенная функция f является непрерывной, так как $|f[u]| \leqslant \|\Phi\|\,\|u\|$.

Можно надеяться, что с помощью данного соответствия по дифференцированию D мы сможем построить $f_0 \in \ell_p(G)^*$ такое, что $D(g) = gf_0 - f_0 g$.

Доказательство теоремы 5.1. Так как G аменабельна, на ней есть левоинвариантное среднее $\Lambda\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$. Рассмотрим $\Phi(g) = D(g)g^{-1}$. Ясно, что $\Phi\colon \ell_1(G) \to \ell_p(G)^*$ ограниченное, причем его норма равняется норме D.

Для f_0, полученной по формуле (5.1), имеем

$$(gf_0 - f_0 g)[u] = f_0[g^{-1}u - ug^{-1}] = \Lambda(h \mapsto \Phi(h)[g^{-1}u - ug^{-1}]) = \Lambda\left(h \mapsto (g\Phi(h) - \Phi(h)g)[u]\right). \quad (5.2)$$

В первом и третьем равенстве было использовано определение структуры бимодуля на сопряженном пространстве, во втором определение f_0. Немного преобразуем полученное выражение:

$$g\Phi(h) - \Phi(h)g = gD(h)h^{-1} - D(h)h^{-1}g = D(gh)h^{-1} - D(h)h^{-1}g - D(g) = (\Phi(gh) - \Phi(h) - \Phi(g))g. \quad (5.3)$$

Теперь можем продолжить цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Lambda\left(h \mapsto (g\Phi(h) - \Phi(h)g)[u]\right) &= \Lambda\left(h \mapsto (\Phi(gh) - \Phi(h) - \Phi(g))[ug^{-1}]\right) = \\ &= \Lambda\left(h \mapsto \Phi(g)[ug^{-1}]\right) = \Lambda\left(h \mapsto (\Phi(g)g)[u]\right) = (\Phi(g)g)[u] = D(g)[u]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Во втором равенстве мы воспользовались тем, что из левоинвариантности

$$\Lambda\left(h \mapsto (\Phi(gh)[ug^{-1}]\right) = \Lambda\left(h \mapsto (\Phi(h)[ug^{-1}]\right). \quad (5.5)$$

В четвертом равенстве использовали то, что мы вычисляем Λ на постоянной функции.

Тем самым $D(g) = gf_0 - f_0 g$, т. е. дифференцирование D является внутренним. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. А.* Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах// Тр. МИАН. — 2020. — *308*. — С. 28–41. — DOI: 10.4213/tm4048.
2. *Арутюнов А. А., Мищенко А. С., Штерн А. И.* Деривации групповых алгебр// Фундам. и прикл. мат. — 2016. — *21*, № 6. — С. 65–78.
3. *Арутюнов А. А., Мищенко А. С.* Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 6. — С. 3–29. — DOI: 10.4213/sm9119.
4. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Физматлит, 2010.
5. *Alekseev A., Arutyunov A., Silvestrov S.* On (σ, τ)-derivations of group algebra as category characters// В сб.: «Non-Commutative and Non-Associative Algebra and Analysis Structures». — Cham: Springer, 2023. — С. 81–99. — DOI: 10.1007/978-3-031-32009-5_5.
6. *Arutyunov A.* A combinatorial view on derivations in bimodules// Adv. Syst. Sci. Appl. — 2023. — *23*, № 2. — С. 178–183. — DOI: 10.25728/assa.2023.23.2.1408.
7. *Bader U., Gelander T., Monod N.* A fixed point theorem for L1 spaces// Invent. Math. — 2010. — *189*. — С. 143–148.
8. *Dales H. G.* Banach Algebras and Automatic Continuity. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2001.
9. *Deitmar A., Echterhoff S.* Principles of Harmonic Analysis. — Cham, etc.: Springer, 2014.
10. *Hurley P., Hurley T.* Codes from zero-divisors and units in group rings// Int. J. Inform. Coding Theory. — 2009. — *1*, № 1. — С. 57–87. — DOI: 10.1504/IJICOT.2009.024047.
11. *Johnson B. E.* Cohomology in Banach Algebras. — Providence: Am. Math. Soc., 1972.
12. *Johnson B. E.* The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups// J. London Math. Soc. — 2001. — *63*, № 2. — С. 441–452. — DOI: 10.1112/S002461070000185X.
13. *Johnson B. E., Ringrose J. R.* Derivations of operator algebras and discrete group algebras// Bull. London Math. Soc. — 1969. — *1*, № 1. — С. 70–74. — DOI: 10.1112/blms/1.1.70.
14. *Johnson B. E., Sinclair A. M.* Continuity of derivations and a problem of Kaplansky// Am. J. Math. — 1968. — *90*, № 4. — С. 1067–1073. — DOI: 10.2307/2373290.
15. *Losert V.* The derivation problem for group algebras// Ann. Math. — 2008. — *168*, № 1. — С. 221–246. — DOI: 10.4007/annals.2008.168.221.
16. *Mishchenko A. S.* Derivations of group algebras and Hochschild cohomology// В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics: Dedicated to the Memory of Boris Sternin». — Cham: Birkhäuser, 2021. — С. 263–272. — DOI: 10.1007/978-3-030-37326-9_16.
17. *Mishchenko A. S.* Geometric description of the Hochschild cohomology of group algebras// В сб.: «Topology, Geometry, and Dynamics: V. A. Rokhlin-Memorial». — Providence: Am. Math. Soc., 2021. — С. 267–280.
18. *Murphy G.* Aspects of the theory of derivations// Banach Center Publ. — 1994. — *30*, № 1. — С. 267–275.

19. *Murphy W.* The nonvanishing first Hochschild cohomology of twisted finite simple group algebras// ArXiv. — 2022. — 2207.03698 [math.GR].
20. *Neumann B. H.* Groups covered By permutable subsets// J. London Math. Soc. — 1954. — *s1-29*, № 2. — С. 236–248. — DOI: 10.1112/jlms/s1-29.2.236.
21. *Palmer Th. W.* Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras: Volume 1: Algebras and Banach Algebras. — Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
22. *Pierce R. S.* Associative Algebras. — New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1982.
23. *Rickart C. E.* General Theory of Banach Algebras. — Princeton: Van Nostrand, 1960.
24. *Sakai Sh.* On a conjecture of Kaplansky// Tohoku Math. J. — 1960. — *12*. — С. 31–33.
25. *Sakai Sh.* Derivations of W*-algebras// Ann. Math. — 1966. — *83*, № 2. — С. 273–279. — DOI: 10.2307/1970432.
26. *Todea C.-C.* Nontriviality of the first Hochschild cohomology of some block algebras of finite groups// ArXiv. — 2022. — 2206.09108 [math.KT].

А. А. Арутюнов
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

А. В. Наянзин
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия
E-mail: naianzin.av@phystech.edu

UDC 517.28+512.552
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374
EDN: PFEHJE

Triviality of outer derivations in $\ell_p(G)$ for one class of groups

A. A. Arutyunov[1] **and A. V. Naianzin**[2]

[1] *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia*

Abstract. In this paper, we study derivations in group rings completed by various types of norms. The main attention is paid to the class of groups in which conjugations act in a controlled manner in some sense. Using the method of identifying derivations and characters on some category, we obtain an alternative way of proving that for this class of groups all derivations are inner.

Keywords: derivation on algebras, outer derivation, inner derivation, character.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. A. A. Arutyunov is supported by a grant from the Russian Science Foundation № 22-11-00042 https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/ in the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences.

For citation: A. A. Arutyunov, A. V. Naianzin, "Triviality of outer derivations in $\ell_p(G)$ for one class of groups," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 356–374. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374

REFERENCES

1. A. A. Arutyunov, “Algebra differentsirovaniy v nekommutativnykh gruppovykh algebrakh” [Derivation algebra in noncommutative group algebras], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2020, **308**, 28–41, DOI: 10.4213/tm4048 (in Russian).
2. A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, and A. I. Shtern, “Derivatsii gruppovykh algebr” [Derivations of group algebras], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2016, **21**, No. 6, 65–78 (in Russian).
3. A. A. Arutyunov and A. S. Mishchenko, “Gladkaya versiya problemy Dzhonsona o derivatsiyakh gruppovykh algebr” [A smooth version of Johnson’s problem on derivations of group algebras], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 6, 3–29, DOI: 10.4213/sm9119 (in Russian).
4. M. A. Naimark, *Normirovannye kol’tsa* [Normed Rings], Fizmatlit, Moscow, 2010 (in Russian).
5. A. Alekseev, A. Arutyunov, and S. Silvestrov, “On (σ,τ)-derivations of group algebra as category characters,” In: *Non-Commutative and Non-Associative Algebra and Analysis Structures*, Springer, Cham, 2023, pp. 81–99, DOI: 10.1007/978-3-031-32009-5_5.
6. A. Arutyunov, “A combinatorial view on derivations in bimodules,” *Adv. Syst. Sci. Appl.*, 2023, **23**, No. 2, 178–183, DOI: 10.25728/assa.2023.23.2.1408.
7. U. Bader, T. Gelander, and N. Monod, “A fixed point theorem for L1 spaces,” *Invent. Math.*, 2010, **189**, 143–148.
8. H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity* [Banach Algebras and Automatic Continuity], Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
9. A. Deitmar and S. Echterhoff, *Principles of Harmonic Analysis*, Springer, Cham, etc., 2014.
10. P. Hurley and T. Hurley, “Codes from zero-divisors and units in group rings,” *Int. J. Inform. Coding Theory*, 2009, **1**, No. 1, 57–87, DOI: 10.1504/IJICOT.2009.024047.
11. B. E. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*, Am. Math. Soc., Providence, 1972.
12. B. E. Johnson, “The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups,” *J. London Math. Soc.*, 2001, **63**, No. 2, 441–452, DOI: 10.1112/S002461070000185X.
13. B. E. Johnson and J. R. Ringrose, “Derivations of operator algebras and discrete group algebras,” *Bull. London Math. Soc.*, 1969, **1**, No. 1, 70–74, DOI: 10.1112/blms/1.1.70.
14. B. E. Johnson and A. M. Sinclair, “Continuity of derivations and a problem of Kaplansky,” *Am. J. Math.*, 1968, **90**, No. 4, 1067–1073, DOI: 10.2307/2373290.
15. V. Losert, “The derivation problem for group algebras,” *Ann. Math.*, 2008, **168**, No. 1, 221–246, DOI: 10.4007/annals.2008.168.221.
16. A. S. Mishchenko, “Derivations of group algebras and Hochschild cohomology,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics: Dedicated to the Memory of Boris Sternin*, Birkhäuser, Cham, 2021, pp. 263–272, DOI: 10.1007/978-3-030-37326-9_16.
17. A. S. Mishchenko, “Geometric description of the Hochschild cohomology of group algebras,” In: *Topology, Geometry, and Dynamics: V. A. Rokhlin-Memorial*, Am. Math. Soc., Providence, 2021, pp. 267–280.
18. G. Murphy, “Aspects of the theory of derivations,” *Banach Center Publ.*, 1994, **30**, No. 1, 267–275.
19. W. Murphy, “The nonvanishing first Hochschild cohomology of twisted finite simple group algebras,” *ArXiv*, 2022, 2207.03698 [math.GR].
20. B. H. Neumann, “Groups covered By permutable subsets,” *J. London Math. Soc.*, 1954, **s1-29**, No. 2, 236–248, DOI: 10.1112/jlms/s1-29.2.236.
21. Th. W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras: Volume 1: Algebras and Banach Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
22. R. S. Pierce, *Associative Algebras*, Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1982.
23. C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1960.
24. Sh. Sakai, “On a conjecture of Kaplansky,” *Tohoku Math. J.*, 1960, **12**, 31–33.
25. Sh. Sakai, “Derivations of W*-algebras,” *Ann. Math.*, 1966, **83**, No. 2, 273–279, DOI: 10.2307/1970432.
26. C.-C. Todea, “Nontriviality of the first Hochschild cohomology of some block algebras of finite groups,” *ArXiv*, 2022, 2206.09108 [math.KT].

A. A. Arutyunov
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: `andronick.arutyunov@gmail.com`

A. V. Naianzin
Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia
E-mail: `naianzin.av@phystech.edu`