Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 343–355
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355
EDN: PFBHQS

О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУЧЛЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Б. Антоневич, Д. И. Кравцов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Аннотация. В ряде предшествующих работ было обнаружено, что для двучленных функциональных уравнений вида
$$a(x)u(\alpha(x)) - \lambda u(x) = v(x), \quad x \in X,$$
где $\alpha : X \to X$ есть обратимое отображение множества X в себя, возможна ситуация, типичная для дифференциальных уравнений — уравнение разрешимо при любой правой части и при этом нет единственности решения. Как и в случае дифференциальных уравнений, возникает вопрос о постановке корректных краевых задач, т. е. о задании дополнительных условий, при которых решение существует и единственно. В работе обсуждается вопрос о том, какого вида дополнительные условия приводят к корректным краевым задачам для рассматриваемых уравнений.

Ключевые слова: двучленное функциональное уравнение, единственность решения, корректная краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *А. Б. Антоневич, Д. И. Кравцов.* О постановке краевых задач для двучленных функциональных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 343–355. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355

1. Введение

Пусть $\alpha : X \to X$ есть обратимое отображение множества X в себя. Объектом исследования являются функциональные уравнения вида
$$a(x)u(\alpha(x)) - \lambda u(x) = v(x), \tag{1.1}$$
где $a(x)$ есть заданная функция. В операторной записи это уравнение вида
$$(B - \lambda I)u = v, \tag{1.2}$$
где B есть оператор взвешенного сдвига, действующий по формуле
$$(Bu)(x) = a(x)u(\alpha(x)).$$
Такие операторы и уравнения рассматривались в различных пространствах $F(X)$ функций на множестве X многими авторами, причем основное внимание уделялось исследованию спектра таких операторов (см, например, [1]). Проводился также анализ свойств операторов $B - \lambda I$ при спектральных значениях λ [2, 5, 11]. При этом были обнаружены примеры отображений α, для которых существуют такие коэффициенты $a(x)$, что операторы $B - \lambda I$ обратимы справа для

© А. Б. Антоневич, Д. И. Кравцов, 2024
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

некоторого множества спектральных значений, В частности, такое свойство было получено для операторов, порожденных т. н. «некарлемановским сдвигом» [7, 9, 12]. Общий результат получен в [4] — показано, что спектральные значения λ, при которых оператор $B - \lambda I$ обратим справа в пространстве скалярных функций $L_2(X, \mu)$, могут существовать только для операторов, порожденных т. н. *отображениями с разделимой динамикой*. Обзор некоторых результатов в этом направлении, включая случай уравнений в пространствах вектор-функций, приведен в [3]. Если оператор $B - \lambda I$ обратим справа, то уравнение (1.2) разрешимо при любой правой части v, но решение не единственно. Отметим, что такая ситуация типична для дифференциальных уравнений, и поэтому при их исследовании задаются дополнительные условия. Как правило, дополнительное условие записывается в виде $Du = 0$, где D — некоторый вспомогательный оператор. Обычно такие условия задаются на границе области или ее части, и их называют *краевыми условиями*. Классические вопросы теории краевых задач для дифференциальных уравнений заключаются в описании тех краевых условий, при которых поставленная задача однозначно и безусловно разрешима либо является фредгольмовой — однородная задача имеет конечное число линейно независимых условий, и для разрешимости достаточно конечного числа условий на правую часть.

Например, к эллиптическому уравнению в заданной области присоединяются краевые условия на границе Γ рассматриваемой области вида $Du|_\Gamma = 0$, где D — дифференциальный оператор. Основной результат в этом направлении формулируется в виде известных условий Шапиро—Лопатинского [8], являющихся необходимыми и достаточными условиями фредгольмовой разрешимости краевой задачи для эллиптических уравнений в соответствующих пространствах Соболева.

В данной работе рассматриваются такие уравнения вида (1.2), для которых имеет место разрешимость при любой правой части, и, аналогично случаю дифференциальных уравнений, возникает вопрос о том, какого вида дополнительные условия нужно присоединить к уравнению, чтобы получить существование и единственность решения для любой правой части. По аналогии со случаем дифференциальных уравнений такие условия будем называть *краевыми* и записывать в виде $Du = 0$, где D — некоторый оператор. Соответствующие задачи

$$(B - \lambda I)u = v, \quad Du = 0 \tag{1.3}$$

также будем называть *краевыми*.

Заметим, что при постановке задачи существенно только подпространство $L = kerD$, и фактически вопрос сводится к описанию подпространств L, при которых задача

$$(B - \lambda I)u = v, \quad u \in L \tag{1.4}$$

корректна.

Таким образом, сформулированный выше вопрос о том, при каких L поставленная краевая задача корректна, можно трактовать как вопрос об аналоге условий Шапиро—Лопатинского для рассматриваемого класса уравнений. Примеры корректных краевых задач для некоторых конкретных уравнений вида (1.4) рассмотрены в [3, 6, 10].

2. Гиперболические и правосторонне гиперболические операторы и краевые задачи для них

Приведем сначала некоторые результаты о рассматриваемых уравнениях и операторах, полученные в процитированных работах.

При рассмотрении уравнений вида (1.2), где B есть заданный линейный оператор в банаховом пространстве и λ — комплексный параметр, обычно в первую очередь изучается спектр $\sigma(B)$ оператора B и резольвентное множество.

Пусть спектр $\sigma(B)$ принадлежит кольцу

$$\{\lambda : 0 < r \leqslant |\lambda| \leqslant R\}.$$

При $|\lambda| < r$ резольвента $R(\lambda, B) := (B - \lambda I)^{-1}$ задается формулой

$$R(\lambda, B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}, \tag{2.1}$$

а при $|\lambda| > R$ — формулой

$$R(\lambda, B) = -\sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1}. \tag{2.2}$$

Оператор B называется *гиперболическим*, если его спектр не пересекается с единичной окружностью. Тогда резольвента определена в открытом кольце $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$, где

$$r^+ = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B), |\lambda| > 1\},$$
$$r^- = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B), |\lambda| < 1\}$$

Для таких операторов применение известной теоремы о проекторе Рисса приводит к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Если обратимый оператор B является гиперболическим, то формула*

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} R(\lambda, B) d\lambda \tag{2.3}$$

задает проектор Рисса, перестановочный с B и осуществляющий разложение $F = F^+ \bigoplus F^-$ в прямую сумму замкнутых подпространств, инвариантных относительно оператора B.

Это приводит к разложению $B = B^+ \bigoplus B^-$ в прямую сумму операторов, действующих в соответствующих подпространствах, таких, что спектр оператора B^+ в подпространстве F^+ совпадает с частью спектра $\sigma(B)$, лежащей внутри единичной окружности, а спектр оператора B^- в подпространстве F^- совпадает с частью спектра $\sigma(B)$, лежащей вне единичной окружности.

В кольце K резольвента разлагается в операторный ряд Лорана

$$R(\lambda, B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \tag{2.4}$$

причем первый ряд сходится при $|\lambda| < r^+$, а второй ряд сходится при $|\lambda| > r^-$.

Аналогичные утверждения имеют место, если спектр оператора B не пересекается с окружностью произвольного радиуса $r_0 > 0$.

Правосторонней резольвентой для оператора B называется семейство операторов $R_r(\lambda)$, определенное и аналитически зависящее от λ в некоторой области на комплексной плоскости и состоящее из правых обратных к $B - \lambda I$:

$$(B - \lambda I) R_r(\lambda) = I.$$

Оператор B будем называть *правосторонне гиперболическим*, если у него существует правосторонняя резольвента, определенная в кольце вида $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$, где $r^- < 1 < r^+$.

Лемма 2.2 (см. [11]). *Пусть оператор B является правосторонне гиперболическим. Любая правосторонняя резольвента $R_r(\lambda)$ разлагается в ряд вида* (2.4)*, аналогичный разложению обычной резольвенты* (2.4)*, где оператор P задается той же формулой*

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} R_r(\lambda, B) d\lambda, \tag{2.5}$$

что и проектор Рисса. Отличие заключается в том, что здесь оператор P не перестановочен с оператором B.

Если при некотором операторе P ряд (2.4) *сходится, то сумма ряда есть одна из правосторонних резольвент для оператора B.*

Поясним отличие рассмотренных понятий с геометрической точки зрения.

Операторный ряд (2.1) сходится при $|\lambda| > R$. Но при заданном $u \in F$ ряд

$$-\sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} u \tag{2.6}$$

может сходиться на большей области значений λ.

Множество тех $u \in F$, для которых ряд (2.6) сходится при $|\lambda| > t$, образует векторное подпространство, которое обозначим $F^{+}(t)$.

Аналогично, множество $u \in F$, для которых ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k} B^{-k-1} u \tag{2.7}$$

сходится при $|\lambda| < t$, есть векторное подпространство, которое обозначим $F^{-}(t)$.

Гиперболичность оператора B эквивалентна тому, что при некоторых $r^{-} < 1 < r^{+}$ проектор P задает разложение $F = F^{+}(r^{-}) \oplus F^{-}(r^{+})$ в прямую сумму замкнутых векторных подпространств.

В случае правосторонней гиперболичности для каждого $u \in F$ также имеем разложение $u = u^{+} + u^{-}$, где $u^{+} = Pu \in F^{+}(r^{-})$, $u^{-} = (I - P)u \in F^{-}(r^{+})$. Это означает, что F представляется в виде суммы $F = F^{+}(r^{-}) + F^{-}(r^{+})$, но это не прямая сумма подпространств, в частности, подпространства $F^{+}(r^{-})$ и $F^{-}(r^{+})$ пересекаются. Поэтому в этом случае существует много разных операторов P, задающих такие разложения, за счет чего существует много разных правосторонних резольвент.

Пусть у оператора B существует правосторонняя резольвента $R_r(B;\lambda)$, определенная в кольце

$$K = \{\lambda : r^{-} < |\lambda| < r^{+}\}.$$

Как было отмечено выше, требуется выяснить, для каких подпространств L краевая задача

$$(B - \lambda I)u = v, \quad u \in L \tag{2.8}$$

корректна — имеет единственное решение при любой правой части.

Требование корректности краевой задачи при заданном λ_0 равносильно выполнению двух условий, которые в общем случае независимы:

1. $L \cap ker(B - \lambda_0) = \{0\}$, что обеспечивает единственность решения;
2. $(B - \lambda_0 I)(L) = F$, что обеспечивает существование решения при любой правой части.

При выполнении этих условий определен оператор $R_L(\lambda_0)$, задающий решение задачи, который биективно отображает F на L, а оператор

$$R_L(\lambda_0)(B - \lambda_0 I)$$

является проектором на L, осуществляющим разложение в прямую сумму $F = L \oplus ker(B - \lambda_0 I)$.

Поскольку верно и обратное, получаем, что задача (2.8) корректна при заданном λ_0 тогда и только тогда, когда L является одним из подпространств, дополнительных к $ker(B - \lambda_0 I)$.

Резольвентным множеством краевой задачи $\rho(B, L)$ будем называть множество чисел λ, при которых задача (2.8) корректна. Заметим, что резольвентное множество краевой задачи принадлежит той части K спектра оператора B, в которой операторы $B - \lambda I$ правосторонне обратимы. На резольвентном множестве определено семейство операторов $R_L(\lambda, B)$, дающих решения краевой задачи, которое будем называть *резольвентой краевой задачи*.

Соответственно, *спектром краевой задачи* будем называть множество $K \setminus \rho(B, L)$.

Если резольвента краевой задачи определена в точке λ_0, то она однозначно определена в достаточно малой окрестности точки λ_0 и представляется в виде ряда

$$R_r(\lambda, B) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^{k} R_r(\lambda_0, B)^{k+1}. \tag{2.9}$$

Из этого следует, что такая резольвента есть аналитическая операторнозначная функция от λ, как и классическая резольвента оператора.

При исследовании краевых задач для конкретных классов уравнений используются, кроме изложенных общих соображений, свои подходы к построения корректных задач, учитывающие специфику рассматриваемых уравнений. Целью данной работы является выяснение того, как могут быть поставлены корректные краевые задачи для функциональных уравнений вида (1.1).

3. Краевые задачи для дискретных разностных уравнений

Наиболее простой пример уравнений вида (1.1) имеем при $X = \mathbb{Z}$ и отображении $\alpha(k) = k + 1$. Соответствующие дискретные операторы взвешенного сдвига действуют в пространствах последовательностей по формуле

$$(Bu)(k) = a(k)u(k+1), \tag{3.1}$$

а уравнения (1.1) суть разностные уравнения вида

$$a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = v(k).$$

Для конкретности рассмотрим такие операторы в пространстве последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$.

Лемма 3.1. *Пусть B есть оператор вида* (3.1), *у которого существуют конечные пределы*

$$\lim_{k\to\pm\infty} a(k) := a(\pm\infty) \neq 0, \tag{3.2}$$

и при этом $a(k) \neq 0$ для всех k.

Спектром оператора B является кольцо

$$\sigma(B) = \{\lambda : r(a) \leqslant |\lambda| \leqslant R(a)\},$$

где

$$R(a) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}, r(a) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}.$$

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ обратим справа и его ядро одномерно. Решение однородного уравнения, удовлетворяющее условию $\omega_\lambda(0) = 1$, задается формулой

$$\omega_\lambda(k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{\prod\limits_{j=0}^{k-1} a(j)}, & k \geqslant 0; \\ \dfrac{\prod\limits_{j=k}^{-1} a(j)}{\lambda^{-k}}, & k < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

В силу условия

$$|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$$

указанная последовательность $\omega_\lambda(k)$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, откуда следует, что $\omega_\lambda(\tau)$ принадлежит пространству $l_p(\mathbb{Z})$ при любом $p \geqslant 1$.

Правосторонние резольвенты для рассматриваемого оператора, определенные в открытом кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, были построены, например, в [11].

Теорема 3.1. *Пусть P_τ, $\tau \in \mathbb{Z}$, есть оператор в $l_2(\mathbb{Z})$, действующий по формуле*

$$(P_\tau u)(k) = \begin{cases} u(k), & k \geqslant \tau \\ 0, & k < \tau. \end{cases} \tag{3.4}$$

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то ряд

$$R_\tau(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P_\tau) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_\tau \tag{3.5}$$

сходится и задает правостороннюю резольвенту для оператора B, определенную в кольце

$$K = \{\lambda : |a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|\}.$$

При заданном $\tau \in \mathbb{Z}$ образы всех операторов $R_\tau(B; \lambda)$ совпадают с подпространством

$$L_\tau = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(\tau) = 0\}.$$

Таким образом, при каждом τ правосторонняя резольвента $R_\tau(B;\lambda)$ задает решение краевой задачи, определяемой условием $u(\tau)=0$, и такая задача корректна при всех $\lambda\in K$.

Вопрос о постановке других корректных задач для таких операторов рассмотрен в [6, 10]. Поскольку в рассматриваемом случае ядро оператора $B-\lambda I$ одномерно, все дополнительные к нему подпространства L имеют простое описание — в качестве L можно взять любое замкнутое подпространство коразмерности 1, не пересекающееся с ядром. Любое подпространство коразмерности 1 задается с помощью линейного ограниченного функционала и имеет вид

$$L=L_\eta:=\{u:<u,\eta>=0\},$$

где $\eta\in l_2(\mathbb{Z})$.

Условие, что L не пересекается с ядром оператора $B-\lambda I$, записывается в явном виде. После подстановки последовательности ω_λ в выражение для функционала получаем функцию от λ:

$$Q_\eta(\lambda)=<\omega_\lambda,\eta>_{l_2}. \tag{3.6}$$

Поскольку ω_λ задается в виде ряда по положительным и отрицательным степеням переменной λ, получаем, что ω_λ есть аналитическая функция переменной λ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$, и что функция $Q_\eta(\lambda)$ задана в виде ряда Лорана переменной λ, который сходится в кольце K и его сумма является аналитической функцией.

Теорема 3.2 (см. [10]). *Краевая задача* (1.4) *корректна при тех* λ, *для которых выполнены условия*:

1. $|a(-\infty)|<|\lambda|<|a(+\infty)|$,
2. $Q_\eta(\lambda)\neq 0$.

Резольвента краевой задачи для дискретного уравнения может быть записана в виде

$$R_\eta(B;\lambda)v=R_r(\lambda)v-\frac{\Phi_\lambda(v)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda=\Big[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^kB^{-k-1}(I-P_0)v-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^kB^{-k-1}P_0v\Big]-\frac{\Phi_\lambda(v)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda, \tag{3.7}$$

где $\Phi_\lambda(v)$ *есть функционал на* $l_2(\mathbb{Z})$, *заданный формулой*

$$\Phi_\lambda(v)=<R_r(\lambda)v,\eta>.$$

Полученное выражение не изменяется при умножении η на скалярный множитель. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $\|\eta\|=1$. Аналогично без ограничения общности можем считать, что $\|\omega_\lambda\|=1$ для всех λ.

Таким образом, спектр краевой задачи совпадает с множеством нулей аналитической функции $Q_\eta(\lambda)$, принадлежащих кольцу K. Если эта функция аналитична в более широком кольце, то в K она может иметь только конечное множество нулей в K. В общем случае лежащие в K нули аналитической функции образуют дискретное множество, которое может иметь предельные точки на границе кольца.

Обратим внимание на то, что здесь условие $Q_\eta(\lambda)\neq 0$ возникает как условие единственности решения, и оно же оказывается условием корректности задачи, т. е. в рассматриваемом случае из условия 1 следует 2.

4. Краевые задачи для модельного класса функциональных уравнений

Вопрос о том, как могут быть поставлены корректные краевые задачи для более сложных функциональных уравнений обсудим на модельном примере. По аналогичной схеме можно исследовать функциональные уравнения и в общем случае.

Пусть α есть диффеоморфизм отрезка $[0,1]$ такой, что

$$\alpha(0)=0;\ \alpha(1)=1,\ \ \alpha(x)>x,\ \text{если}\ \ 0<x<1.$$

Среди операторов взвешенного сдвига, порожденных α и действующих в $L_p[0,1]$, выделим оператор, заданный формулой

$$(T_\alpha u)(x)=[\alpha'(x)]^{1/p}u(\alpha(x)),$$

поскольку T_α является обратимым изометрическим оператором. Ввиду этого оператор взвешенного сдвига $(Bu)(x) = a(x)u(\alpha(x))$ в $L_p[0,1]$ будем записывать в виде

$$(Bu)(x) = \widetilde{a}(x)(T_\alpha u)(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{a}(x) = [\alpha'(x)]^{1/p}a(x).$$

Такая запись удобна потому, что свойства B описываются с помощью функции $\widetilde{a}$, которая называется *приведенным коэффициентом.* Например, $\|B\|_{L_p} = \|\widetilde{a}\|_{L_\infty}$.

Теорема 4.1. *Пусть $a \in C[0,1]$, $a(x) \neq 0$ для всех x и $|\widetilde{a}(0)| < |\widetilde{a}(1)|$. Если $0 < |\widetilde{a}(0)| < |\lambda| < |\widetilde{a}(1)|$, то оператор $B - \lambda I$ обратим справа в пространстве $L_p[0,1]$.*

Пусть $0 < \xi < 1$ и P_ξ есть оператор умножения на функцию

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi; \\ 1, & x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Ряд из операторов

$$R_\tau(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P_\xi) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_\xi \tag{4.1}$$

сходится по норме при всех λ из кольца $|\widetilde{a}(0)| < |\lambda| < |\widetilde{a}(1)|$ и задает одну из правосторонних резольвент для оператора B, определенную в этом кольце.

Согласно сказанному выше, при выполнении условий теоремы для получения существования и единственности решения соответствующего уравнения при заданном λ_0 нужно задать условие вида $u \in L$, где L есть подпространство, дополнительное к ядру $ker(B - \lambda_0 I)$. Наиболее существенным отличием от случая дискретного оператора является то, что здесь ядро оператора $B - \lambda I$ бесконечномерно и не существует общего метода построения подпространств, дополнительных к бесконечномерному. Покажем, как можно задавать такие подпространства, используя специфику рассматриваемого оператора.

Фундаментальной областью для отображения $\alpha : X \to X$ называется такое измеримое подмножество $\Omega \subset X$, что

1. $\alpha^k(\Omega) \cap \alpha^j(\Omega) = \varnothing$ при $k \neq j$;
2. множество $X_0 = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(\Omega)$ плотно в X и $\mu(X \setminus X_0) = 0$.

В рассматриваемом случае отображения $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ фундаментальной областью является любой полуинтервал вида $\Omega = [\gamma, \alpha(\gamma))$, где $0 < \gamma < 1$, $\alpha^k(\Omega) = [\alpha^k(\gamma), \alpha^{k+1}(\gamma))$, $X_0 = (0,1)$.

Каждая точка из множества $\alpha^k(\Omega) = [\alpha^k(\gamma), \alpha^{k+1}(\gamma))$ единственным образом представляется в виде $\alpha^k(\tau)$, $\tau \in \Omega$. Поэтому определена биекция $\psi : \Omega \times \mathbb{Z} \to (0,1)$, действующая по формуле

$$\psi(\tau, k) = \alpha^k(\tau). \tag{4.2}$$

Это позволяет поставить в соответствие функции, определенной на $X_0 = (0,1)$, функцию на $\Omega \times \mathbb{Z}$, т. е. функцию двух переменных τ и k. В частности, функции $\widetilde{a}(x)$, определенной на X_0, соответствует функция $\widetilde{a}(\tau, k) = \widetilde{a}(\alpha^k(\tau))$, определенная на $\Omega \times \mathbb{Z}$.

Для конкретности будем рассматривать операторы в пространстве $L_2[0,1]$. На множестве $\Omega \times \mathbb{Z}$ естественным образом определена мера и определено пространство $L_2(\Omega \times \mathbb{Z})$. Поскольку отображение ψ не сохраняет меру, зададим отображение J из $L_2[0,1]$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{Z})$ формулой

$$L_2[0,1] \ni u \to \widetilde{u}(\tau, k) = [\alpha'(\alpha^k(\tau))]^{1/2} u(\alpha^k(\tau)),$$

содержащей нормирующий множитель.

Обозначив $u_k(\tau) = \widetilde{u}(\tau, k)$, при отображении J получаем

$$\int_X |u(x)|^2 dx = \sum_k \int_\Omega |u_k(\tau)|^2 d\tau = \int_\Omega \sum_k |u_k(\tau)|^2 d\tau.$$

Здесь, согласно теореме Фубини, при заданном u ряд $\sum\limits_k |u_k(\tau)|^2$ сходится при почти всех τ и выполнено последнее равенство. Отсюда получаем, что J есть изометрический изоморфизм между пространствами $L_2[0,1]$ и $L_2(\Omega \times \mathbb{Z})$.

Возникают два представления пространства $L_2(\Omega\times\mathbb{Z})$. Первое представление есть

$$L_2(\Omega\times\mathbb{Z})\sim l_2(\mathbb{Z},L_2(\Omega)), \tag{4.3}$$

т. е. это пространство двусторонних последовательностей функций $u_k\in L_2(\Omega)$ таких, что ряд $\sum\limits_k ||u_k||^2_{L_2(\Omega)}$ сходится. Заметим, что при таком представлении пространства оператор T_α действует как сдвиг по переменной k: $T_\alpha u_k=u_{k+1}$.

Второе представление есть

$$L_2(\Omega\times\mathbb{Z})\sim L_2(\Omega;l_2(\mathbb{Z})), \tag{4.4}$$

т. е. в виде пространства измеримых функций $U(\tau)$ на Ω со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$ таких, что

$$\int\limits_\Omega ||U(\tau)||^2_{l_2}d\tau<+\infty.$$

Лемма 4.1. *При представлении пространства в виде* (4.4) *оператор B действует как умножение на операторнозначную функцию $B(\tau)$, т. е. задается формулой $B:U(\tau)\to B(\tau)U(\tau)$, где значение $B(\tau)$ в точке τ есть оператор взвешенного сдвига в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, заданный формулой*

$$(B(\tau)u)(k)=\widetilde{a}(\tau,k)u(k+1),\ \ u\in l_2(\mathbb{Z}).$$

Доказательство заключается в непосредственной проверке.

При выполнении условий теоремы 4.1 для каждого дискретного оператора $B(\tau)$ выполнены утверждения из раздела 3. В частности, при каждом τ уравнение

$$B(\tau)U(\tau)-\lambda U(\tau)=V(\tau)$$

разрешимо при любом $V(\tau)\in l_2(\mathbb{Z})$, а ядро оператора $B(\tau)-\lambda I$ одномерно и порождено последовательностью $\omega_{\lambda,\tau}\in l_2(\mathbb{Z})$, заданной формулой вида (3.3). Зададим при каждом λ функцию переменных τ и k

$$\omega_{\lambda,\tau}(k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}a(\tau,j)}, & k\geqslant 0;\\[2ex] \dfrac{\prod\limits_{j=k}^{-1}a(\tau,j)}{\lambda^{-k}}, & k<0.\end{cases}$$

Получаем, что ядро $ker(B-\lambda I)$ состоит из функций вида $l(\tau)\omega_{\lambda,\tau}(k)$, где $l(\tau)$ есть произвольная функция из пространства $L_2(\Omega)$, и является бесконечномерным подпространством.

Полученное представление оператора B подсказывает, какой вид могут иметь подпространства L, при которых краевая задача (1.4) корректна. А именно, подходящим может быть подпространство L, которое при представлении (4.4) задается при каждом τ (или почти при всех τ) условиями вида, описанного в разделе 3, а именно

$$L=\{U(\tau):<U(\tau),\eta(\tau)>_{l_2}=0\ \ \forall\ \ \tau\in\Omega\}, \tag{4.5}$$

где $\eta(\tau)$ есть некоторое зависящее от τ семейство элементов из $l_2(\mathbb{Z})$.

При каждом τ по формуле (3.6) определена аналитическая функция переменной λ

$$Q_\eta(\tau,\lambda)=<\omega_{\lambda,\tau},\eta(\tau)>_{l_2}.$$

Лемма 4.2. *Пусть подпространство L задано в виде* (4.5). *При заданном λ условие, что*

$$Q_\eta(\tau,\lambda)\neq 0\quad \textit{для почти всех}\ \ \tau, \tag{4.6}$$

является необходимым и достаточным для единственности решения краевой задачи.

Действительно, если краевая задача имеет решение $u\in L_2[0,1]$, то при представлении (4.4) этому решению соответствует однозначно определенная функция $U(\tau)$, являющаяся при почти всех τ решением уравнения

$$B(\tau)U(\tau)-\lambda U(\tau)=V(\tau). \tag{4.7}$$

Поэтому из условия (4.6) следует единственность решения.

Пусть условие (4.6) не выполнено, т. е. $Q_\eta(\tau,\lambda)=0$ при $\tau\in N\subset\Omega$, где $\mu(N)>0$. Тогда

$$U(\tau)=\begin{cases}\omega_{\lambda,\tau}, & \tau\in N;\\ 0, & \tau\notin N\end{cases}$$

является нетривиальным решением однородной краевой задачи, что доказывает необходимость условия для единственности решения задачи.

Пусть при некотором λ выполнено необходимое условие (4.6). Тогда для любого $v\in L_2[0,1]$ согласно формуле (3.7) для почти всех τ однозначно определено решение уравнения (4.7), удовлетворяющее условию

$$< U(\tau),\eta(\tau) >_{l_2}=0.$$

Получаем определенную почти всюду на Ω функцию $U(\tau)$ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$

$$U(\tau)=\Big[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)v-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 v\Big]-\frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}\omega_{\lambda.\tau}, \tag{4.8}$$

где

$$\Phi_{\lambda,\tau}(v)=< R_r(\tau,\lambda)v,\eta(\tau) >_{l_2}.$$

Если рассматриваемая краевая задача имеет решение $u\in L_2[0,1]$, то при представлении (4.4) этому решению соответствует построенная по формуле (4.8) функция $U(\tau)$. Однако может оказаться, что $U(\tau)$ не принадлежит $L_2(\Omega;l_2)$, т. е. в общем случае необходимое условие (4.6) не является достаточным для корректности задачи.

Сделаем несколько замечаний, связанных с приведенными рассуждениями. При фиксированном τ выражение $< U(\tau),\eta(\tau) >_{l_2}$ задает ограниченный линейный функционал на $l_2(\mathbb{Z})$, но не задает ограниченный линейный функционал на $L_2[0,1]$. Поэтому приведенное описание подпространства L с помощью неограниченных функционалов требует уточнения, в частности, из этого описания не видна замкнутость такого подпространства.

Семейство $\eta(\tau)$ есть функция на $\Omega\times\mathbb{Z}$, и, переходя к представлению (4.3), получаем, что $\eta(\tau)$ можно рассматривать как последовательность функций $\eta_k(\tau)$, определенных на Ω, и тогда получаем другую запись краевого условия, т. е. другой способ задания подпространства L:

$$L=\{u_k(\tau):\sum_k\eta_k(\tau)u_k(\tau)=0\ \ \forall\ \ \tau\in\Omega\}. \tag{4.9}$$

Полученное условие, задающее подпространство L, можно записать в виде

$$L=\{u:Du(\tau)=0\ \text{ при }\ \tau\in\Omega\},$$

где оператор D задается выражением

$$(Du)(\tau)=\sum_k\eta_k(\tau)(T_\alpha^k u)(\tau). \tag{4.10}$$

Заметим, что каждый оператор из алгебры $\mathcal{B}$, порожденной операторами T_α^k и операторами умножения на функции, представляется в виде

$$\sum_k a_k(x)T_\alpha^k \tag{4.11}$$

с некоторыми коэффициентами $a_k(x)$. Сравнивая (4.10) с (4.11), видим, что здесь оператор D можно записать в виде, аналогичном (4.11), но его коэффициенты определены только в точках фундаментальной области Ω. Поэтому этот оператор действует из $L_2[0,1]$ в пространство функций, определенных на Ω.

Приведенное рассуждение позволяет подчеркнуть аналогию с классическим вопросом о краевых задачах для эллиптических уравнений. Подобно тому, как для эллиптических уравнений рассматривается краевое условие вида $Du|_\Gamma=0$, где D есть некоторый дифференциальный оператор, действующий в пространство функций на границе, полученное краевое условие фактически имеет вид $Du|_\Omega=0$, где D есть оператор из алгебры, порожденной операторами взвешенного сдвига, действующий в пространство функций, определенных на Ω.

Классическое условие Шапиро—Лопатинского для эллиптических уравнений возникает как требование единственности решений семейства некоторых вспомогательных задач. Полученное условие (4.6) также есть условие единственности решений вспомогательных задач, и его можно считать аналогом условия Шапиро—Лопатинского.

Основное утверждение об условиях Шапиро—Лопатинского говорит, что в случае достаточно «хороших» коэффициентов это условие является необходимым и достаточным для фредгольмовости краевой задачи. Покажем, что в общем случае краевых задач для функциональных уравнений необходимое условие (4.6) не является достаточным для корректности задачи, и что в случае краевых задач с достаточно «хорошими» коэффициентами условие (4.6) является и достаточным.

Вопрос сводится к выяснению того, при каких условиях (в зависимости от функций $\eta(\tau)$) функция $U(\tau)$, заданная формулой (4.8), принадлежит пространству $L_2(\Omega; l_2(\mathbb{Z}))$.

Теорема 4.2. *Пусть* $a \in C[0,1]$, $a(x) \neq 0$ *для всех* x *и* $|\widetilde{a}(0)| < |\widetilde{a}(1)|$. *Если* $|\widetilde{a}(0)| < |\lambda| < |\widetilde{a}(1)$, *то краевая задача*

$$(B - \lambda I)u = v, \quad u \in L,$$

где подпространство L *задано с помощью функции* $\eta(\tau)$, *измеримо зависящей от* τ, *корректна при заданном* λ *тогда и только тогда, когда* $\left|\dfrac{1}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}\right| \leqslant C(\lambda)$ *почти всюду как функция переменной* τ.

Доказательство. Утверждение получаем, анализируя формулу (4.8). Здесь первое слагаемое всегда принадлежит L_2, так как есть результат применения одной из правосторонних резольвент к функции v. Поэтому требуется проанализировать только второе слагаемое

$$W(\tau) = \frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)} \omega_{\lambda,\tau}.$$

Это функция от τ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$. Прежде всего, эта функция должна быть измеримой. Это выполнено, если семейство $\eta(\tau)$ измеримо зависит от τ.

Далее, должно выполняться условие

$$\int\limits_{\Omega} \|W(\tau)\|_{l_2}^2 d\tau < +\infty.$$

Как уже отмечалось, без ограничения общности можно считать, что $\|\omega_{\lambda,\tau}\|_{l_2} = 1$ и $\|\eta(\tau)\|_{l_2} = 1$. Тогда

$$\|W(\tau)\|^2 = |\frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}|^2,$$

и возникает вопрос — при каких $\eta(\tau)$ последнее условие выполнено для всех v?

В случае существования правосторонней резольвенты для оператора B резольвенты дискретных операторов ограничены в совокупности, т. е.

$$\|R_r(\tau, \lambda)\|_{l_2} \leqslant C_1(\lambda).$$

Поэтому

$$|\Phi_{\lambda,\tau}(V(\tau)|^2 = | < R_r(\tau, \lambda)V(\tau), \eta(\tau) >_{l_2} |^2 \leqslant C(\lambda)^2 \|V(\tau)\|^2.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|W(\tau)\|^2 = |\frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}|^2 \leqslant C(\lambda)C_1(\lambda)\|V(\tau)\|^2,$$

из которого следует утверждение. □

Рассмотрим геометрический смысл полученного условия. Если $\|\omega_{\lambda,\tau}\|_{l_2} = 1$ и $\|\eta(\tau)\|_{l_2} = 1$, то величина

$$Q_\eta(\tau, \lambda) = < \omega_{\lambda,\tau}, \eta(\tau) >_{l_2}$$

есть косинус угла между векторами $\omega_{\lambda,\tau}$ и $\eta(\tau)$. Поэтому условие $Q_\eta(\tau, \lambda) \neq 0$ означает, что эти вектора не являются ортогональными, т. е. углы между этими векторами меньше, чем $\pi/2$. А требование ограниченности функции $\dfrac{1}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}$ является более сильным условием — при всех τ углы между этими векторами равномерно отделены от $\pi/2$, т. е. меньше, чем $\pi/2 - d$ при некотором положительном d.

Отметим случай, когда необходимое условие корректности задачи является и достаточным.

Теорема 4.3. *Пусть $\eta(\tau)$ есть непрерывная функция от τ со значениями в l_2 на полуинтервале $\Omega = [\gamma, \alpha(\gamma))$, и при $\tau \to \alpha(\gamma)$ существует $\lim \eta(\tau) := \eta(\alpha(\gamma)$. Тогда функция $Q_\eta(\tau, \lambda)$ продолжается до непрерывной функции на отрезке $\overline{\Omega} = [\gamma, \alpha(\gamma)]$, и условие $Q_\eta(\tau, \lambda) \neq 0$ при всех $\tau \in \overline{\Omega}$ является необходимым и достаточным условием корректности краевой задачи. При этих условиях спектр задачи* (1.4) *есть множество*

$$\{\lambda : \exists \tau \in \overline{\Omega},\ \text{что}\ \ Q_{\tau,\eta}(\lambda) = 0\},$$

т. е. объединение нулей функций $Q_{\tau,\eta}(\lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
2. *Антоневич А. Б.* Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке// Функц. анализ и его прилож. — 2005. — *39*, № 1. — С. 52–69.
3. *Антоневич А. Б.* Правосторонняя обратимость двучленных функциональных операторов и градуированная дихотомия// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — 67, № 2. — С. 208–236.
4. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А., Маковска Ю.* Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 3. — С. 3–34.
5. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Корректные краевые задачи, правосторонняя гиперболичность и экспоненциальная дихотомия// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 1. — С. 13–29.
6. *Архипенко О. А.* Краевые задачи для разностных уравнений// Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и инф. — 2018. — № 1. — С. 12–18.
7. *Карлович Ю. И., Мардиев Р.* Об односторонней обратимости функциональных операторов с некарлемановским сдвигом в пространствах Гельдера// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1987. — *3*. — С. 77–80.
8. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям// Укр. мат. ж. — 1953. — *5*. — С. 123–151.
9. *Мардиев Р.* Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом// Докл. Акад. наук УзССР. — 1985. — *2*. — С. 5–7.
10. *Шукур Али А., Архипенко О. А.* Резольвента краевой задачи для разностного уравнения// Пробл. физ., мат. и техн. — 2016. — *28*, № 3. — С. 70–75.
11. *Antonevich A., Makowska Yu.* On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points// Complex Anal. Oper. Theory. — 2008. — *2*. — С. 215–240.
12. *Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I.* One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces// Integral Equ. Oper. Theory. — 2002. — *42*. — С. 201–228.

А. Б. Антоневич
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: aiantonevich@mail.ru

Д. И. Кравцов
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: kravtsov.dmitriy1506@yandex.by

UDC 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355
EDN: PFBHQS

On the formulation of boundary-value problems for binomial functional equations

A. B. Antonevich and D. I. Kravtsov

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Abstract. In a number of previous works it was found that for binomial functional equations of the form

$$a(x)u(\alpha(x)) - \lambda u(x) = v(x), \quad x \in X,$$

where $\alpha : X \to X$ is an invertible mapping of the set X into itself, a situation typical for differential equations is possible: the equation is solvable for any right-hand side and there is no uniqueness of the solution. As in the case of differential equations, the question arises of formulating well-posed boundary value problems, i.e., of specifying additional conditions under which the solution exists and is unique. In this paper, we discuss the question of what kind of additional conditions lead to well-posed boundary-value problems for the equations under consideration.

Keywords: binomial functional equation, uniqueness of solution, well-posed boundary-value problem.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. B. Antonevich, D. I. Kravtsov, "On the formulation of boundary-value problems for binomial functional equations," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 343–355. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355`

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, *Lineynye funktsional'nye uravneniya: operatornyy podkhod* [Linear Functional Equations: Operator Approach], Universitetskoe, Minsk, 1988 (in Russian).
2. A. B. Antonevich, "Kogerentnaya lokal'naya giperbolichnost' lineynogo rasshireniya i sushchestvennye spektry operatora vzveshennogo sdviga na otrezke" [Coherent local hyperbolicity of a linear extension and essential spectra of the weighted shift operator on a segment], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2005, **39**, No. 1, 52–69 (in Russian).
3. A. B. Antonevich, "Pravostoronnyaya obratimost' dvuchlennykh funktsional'nykh operatorov i graduirovannaya dikhotomiya" [Right-sided invertibility of binomial functional operators and graded dichotomy], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, 67, No. 2, 208–236 (in Russian).
4. A. B. Antonevich, A. A. Akhmatova, and Yu. Makovska, "Otobrazheniya s razdelimoy dinamikoy i spektral'nye svoystva porozhdennykh imi operatorov" [Mappings with separable dynamics and spectral properties of the operators generated by them], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2015, **206**, No. 3, 3–34 (in Russian).
5. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Korrektnye kraevye zadachi, pravostoronnyaya giperbolichnost' i eksponentsial'naya dikhotomiya" [Well-posed boundary-value problems, right-sided hyperbolicity and exponential dichotomy], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 1, 13–29 (in Russian).
6. O. A. Arkhipenko, "Kraevye zadachi dlya raznostnykh uravneniy" [Boundary-value problems for difference equations], *Tr. BGTU. Ser. 3. Fiz.-mat. nauki i inf.* [Proc. BGTU. Ser. 3. Phys. Math. Sci. Inf.], 2018, No. 1, 12–18 (in Russian).

© A. B. Antonevich, D. I. Kravtsov, 2024
This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

7. Yu. I. Karlovich and R. Mardiev, “Ob odnostoronney obratimosti funktsional’nykh operatorov s nekarlemanovskim sdvigom v prostranstvakh Gel’dera” [On one-sided invertibility of functional operators with non-Carleman shift in Hölder spaces], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math., 1987, **3**, 77–80 (in Russian).
8. Ya. B. Lopatinskii, “Ob odnom sposobe privedeniya granichnykh zadach dlya sistemy differentsial’nykh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integral’nym uravneniyam” [On a method of reducing boundary-value problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1953, **5**, 123–151 (in Russian).
9. R. Mardiev, “Kriteriy poluneterovosti odnogo klassa singulyarnykh integral’nykh operatorov s nekarlemanovskim sdvigom” [A criterion for the semi-Noetherian property of a class of singular integral operators with non-Carleman shift], *Dokl. Akad. nauk UzSSR* [Rep. Acad. Sci. UzSSR], 1985, **2**, 5–7 (in Russian).
10. A. Shukur Ali and O. A. Arkhipenko, “Rezol’venta kraevoy zadachi dlya raznostnogo uravneniya” [Resolvent of a boundary-value problem for a difference equation], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2016, **28**, No. 3, 70–75 (in Russian).
11. A. Antonevich and Yu. Makowska, “On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points,” *Complex Anal. Oper. Theory*, 2008, **2**, 215–240.
12. A. Yu. Karlovich and Yu. I. Karlovich, “One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces,” *Integral Equ. Oper. Theory*, 2002, **42**, 201–228.

A. B. Antonevich
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: aiantonevich@mail.ru

D. I. Kravtsov
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: kravtsov.dmitriy1506@yandex.by