

УДК 517.5+519.6+629.195.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326

EDN: XNCXFF

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ И ГРАВИТАЦИИ

И. И. КОСЕНКО

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается относительное движение космического аппарата (КА) под действием моментов сил гравитации и светового давления. Под КА мы подразумеваем небесное тело, способное отражать световой поток от Солнца. Орбитальное движение КА считается известным. КА совершает плоские движения в горизонтальной плоскости относительно центра масс. Отражающее зеркало может быть размещено перпендикулярно плоскости орбиты.

Основная задача, решаемая в работе — это исследование устойчивости эксцентриситетных колебаний. Данная технология разворачивается постепенно. Сначала устанавливается существование колебаний заданного типа. Здесь штатным образом применяется теорема о неявной функции. Последующий затем анализ устойчивости опирается на линейную теорию и сводится к рассмотрению систем в вариациях. Завершает работу рассмотрение нелинейного случая.

Ключевые слова: эксцентриситетные колебания, устойчивость колебаний, возмущение с малым параметром, световое давление, орбита спутника.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: И. И. Косенко. Вынужденные колебания спутника под действием сил светового давления и гравитации // Современ. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 300–326. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326>

1. ВВЕДЕНИЕ

Следуя работам [3, 4, 18], будем исходить из уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите, представленного в форме

$$\ddot{\delta} = c f(\delta) - \mu(1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(\delta - 2\nu(t) + 2\varphi), \quad (1.1)$$

где конфигурационная переменная $\delta = 2\theta - 2\varphi$, θ — угол между направлением на перицентр орбиты спутника и одной из его главных центральных осей инерции (рис. 1), φ — азимут источника светового потока (Солнца) относительно перицентра орбиты, e — эксцентриситет орбиты, c — постоянная, характеризующая отражающую/поглощающую характеристику внешней поверхности спутника, функция $f(\delta)$ задает момент сил светового давления:

$$f(\delta) = \begin{cases} 1 - \cos \delta & \text{при } \sin \frac{\delta}{2} \geq 0, \\ -1 + \cos \delta & \text{при } \sin \frac{\delta}{2} < 0, \end{cases}$$

где μ — параметр динамической асимметрии спутника, $\nu(t)$ — истинная аномалия (известная функция времени).

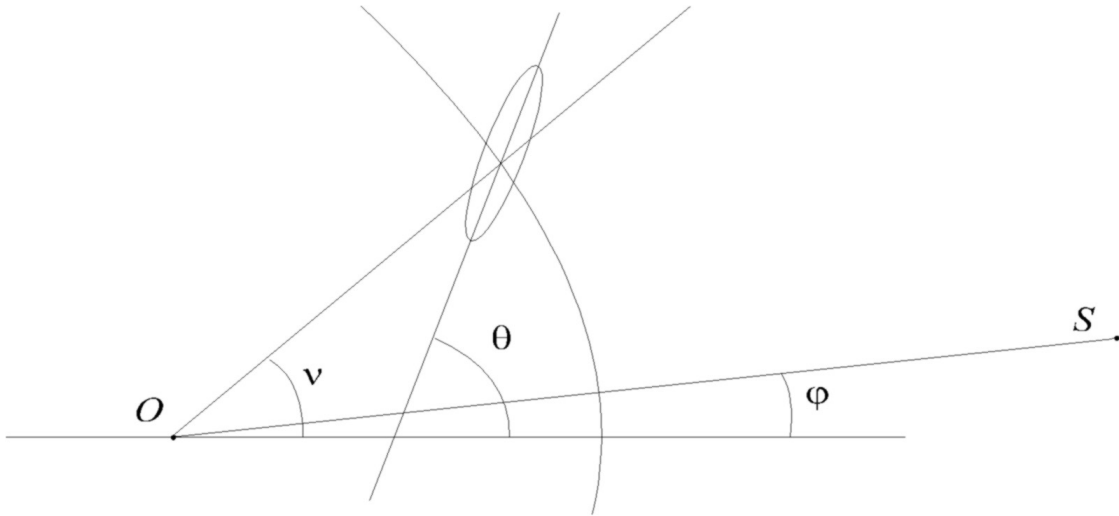


Рис. 1. Расположение спутника на орбите.

Уравнение вращательного движения (1.1) «обезразмерено» так что фокальный параметр орбиты и гравитационная постоянная оказались равными единице.

Как и в работе [18], здесь мы рассматриваем динамику вращательного движения спутника в рамках теории возмущений с малым параметром $\mu \ll 1$. Это означает, что спутник с динамической точки зрения представляет собой почти цилиндрическое тело, что естественно для большинства запускаемых на орбиту объектов.

Нетрудно проверить также, что в пределе, когда излучение отсутствует, мы получим известное уравнение Белецкого [1]. Что касается модели солнечного света, то здесь мы будем использовать, как и ранее, модели Карымова [2].

С учетом выбора размерных величин укажем полезные в дальнейшем выражения

$$a = \frac{1}{1 - e^2}, \quad T = 2\pi a^{3/2}.$$

для большой полуоси кеплеровой орбиты a и периода орбитального движения T . Параметры s, e, φ в общем случае малыми не являются. Параметр e , кроме того, считается не слишком близким к своему предельному значению $e = 1$, соответствующему случаю параболической орбиты.

Истинная аномалия удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\nu} = (1 + e \cos \nu)^2, \tag{1.2}$$

так что система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (1.1) и (1.2) является замкнутой относительно фазовых переменных $\delta, \dot{\delta}, \nu$.

Фазовое пространство исходной, невозмущенной при $\mu = 0$, задачи (1.1) представляет собой цилиндр с конфигурационной координатой $\delta \pmod{4\pi}$. При $\mu = 0$ рассматриваемая механическая система имеет два положения равновесия: $\delta = 0 \pmod{4\pi}$, $\delta = 2\pi \pmod{4\pi}$. Первое соответствует ориентации «отражающего зеркала» спутника вдоль солнечного ветра на источник света. Эта ориентация неустойчива в невозмущенной задаче, и при малых возмущениях начальных данных зеркало подобно маятнику в поле силы тяжести начинает совершать либо вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты, либо либрации относительно другой, устойчивой ориентации (от источника света).

Нашей целью является исследование динамики либрационного возмущенного движения спутника в малой окрестности положения устойчивого равновесия $\delta = 2\pi$ при $\mu > 0$. Вечная сохраняемость «больших» квазипериодических колебаний была установлена в работе [18]. Однако с практической точки зрения было бы желательно избежать больших (хотя и устойчивых) разворотов аппарата с отражающим зеркалом, что может приводить к нежелательным колебательным

процессам в его упругих компонентах. Устойчивость малых эксцентриситетных колебаний означает возможность «остронаправленной» ориентации аппарата, почти неподвижно «зависающего» в потоке солнечного ветра несмотря на наличие «раскачивающего» гравитационного момента от планеты.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Вместо переменной δ будем рассматривать в качестве конфигурационной координаты локальную переменную $x = \delta - 2\pi$ отклонения от исследуемого положения равновесия. Тогда вместо (1.1) для описания динамики можно использовать следующее ОДУ:

$$\ddot{x} = -c \operatorname{sgn}(x)(1 - \cos x) - \mu(1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(x - 2\nu(t) + 2\varphi). \quad (2.1)$$

Теперь для оценки вклада различных возмущений проведем масштабирование переменной $x \mapsto y$ по формуле

$$x = \mu y, \quad (2.2)$$

после чего уравнение (2.1) трансформируется к виду

$$\ddot{y} = -\frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(y)(1 - \cos \mu y) - (1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(\mu y - 2\nu(t) + 2\varphi). \quad (2.3)$$

Дальнейшая методика построения вынужденных колебаний частично заимствована из [9], где, в отличие от данного случая, рассмотрен случай аналитической правой части. При $\mu = 0$ уравнение (2.3) принимает вид

$$\ddot{y} = Y_0(t), \quad Y_0(t) = (1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(2\nu(t) - 2\varphi), \quad (2.4)$$

При малых значениях μ уравнение (2.3) записывается как

$$\ddot{y} = Y_0(t) + \mu Y_1(t, y, \mu) = Y(t, y, \mu), \quad (2.5)$$

$$Y_1(t, y, \mu) = -\frac{1}{\mu} a(\nu(t)) \sin \mu y - \frac{1}{\mu} \left[b(\nu(t)) + \frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(y) \right] (1 - \cos \mu y), \quad (2.6)$$

$$a(\nu) = (1 + e \cos \nu)^3 \cos(2\nu - 2\varphi), \quad b(\nu) = (1 + e \cos \nu)^3 \sin(2\nu - 2\varphi).$$

Функция $Y_1(t, y, \mu)$ аналитична по переменным t, μ , но лишь один раз непрерывно дифференцируема по переменной y . Полученные разложения имеют место потому, что функции

$$\alpha \mapsto \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha \mapsto \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha}, \quad \alpha \mapsto \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha^2}$$

равномерно ограничены при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и регулярны при $\alpha \neq 0$.

Из уравнения (2.5) видно, что член $Y_0(t)$ задает главный гравитационный вклад в вынужденные эксцентриситетные колебания. Кроме того, из (2.2) следует, что при $\mu \rightarrow 0$ эти колебания вырождаются в положения равновесия невозмущенной задачи.

Среднее значение функции $Y_0(t) = b(\nu(t))$ на отрезке $t \in [0, T]$, соответствующем орбитальному периоду, равно нулю. В самом деле, в силу (1.2) периодическая первообразная от $Y_0(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} c_1(\nu(t)) &= \int Y_0(t) dt = \int (1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(2\nu(t) - 2\varphi) dt = \\ &= \int (1 + e \cos \nu) \sin(2\nu - 2\varphi) d\nu = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2\nu(t) - 2\varphi) - \frac{e}{6} \cos(3\nu(t) - 2\varphi) - \frac{e}{2} \cos(\nu(t) - 2\varphi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обозначим через

$$[c_1] = \frac{1}{T} \int_0^T c_1(\nu(t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{c_1(\nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu$$

среднее значение функции (2.7) и центрируем эту функцию с помощью

$$c_1^0(\nu(t)) = c_1(\nu(t)) - [c_1].$$

Введем также обозначение для второй первообразной

$$c_0(\nu(t)) = \int_0^{\nu(t)} \frac{c_1^0(\sigma)}{(1 + e \cos \sigma)^2} d\sigma$$

и так же центрируем ее по t :

$$c_0^0(\nu(t)) = c_0(\nu(t)) - [c_0].$$

Таким образом, периодическая функция

$$y^0(\nu(t)) = c_0^0(\nu(t)) + \eta \tag{2.8}$$

является решением уравнения (2.4), и она задает главную часть искомого вынужденного колебания. Постоянная η произвольна и подлежит дальнейшему уточнению.

Решение $y(t)$ уравнения (2.5) является периодическим тогда и только тогда, когда выполняются условия периодичности

$$\int_0^T \dot{y}(t) dt = 0, \quad \int_0^T Y(t, y(t), \mu) dt = 0. \tag{2.9}$$

В силу того, что функция $Y_0(t)$ имеет нулевое среднее, второе из условий (2.9) можно переписать в виде

$$\int_0^T Y_1(t, y(t), \mu) dt = 0.$$

Из общих теорем теории ОДУ [10] следует, что общее решение $y(t, y_0, \dot{y}_0, \mu)$ уравнения (2.5) непрерывно дифференцируемо по начальным условиям y_0, \dot{y}_0 и параметру μ .

Введем обозначения

$$f(y_0, \dot{y}_0, \mu) = [\dot{y}], \quad g(y_0, \dot{y}_0, \mu) = [Y_1] \tag{2.10}$$

и перепишем систему уравнений (2.9) в виде

$$f(y_0, \dot{y}_0, \mu) = 0, \quad g(y_0, \dot{y}_0, \mu) = 0. \tag{2.11}$$

Функции f и g непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. В пределе при $\mu = 0$ в силу вышеприведенного анализа получим

$$f(y_0, \dot{y}_0, 0) = \dot{y}_0 + [c_1], \quad g(y_0, \dot{y}_0, 0) = \frac{1}{T} \int_0^T Y_1(t, y(t), 0) dt.$$

С другой стороны,

$$y(t, y_0, \dot{y}_0, 0) = y_0 + [c_0] + (\dot{y}_0 + [c_1])t + c_0^0(\nu(t)). \tag{2.12}$$

Это равенство при выполнении первого из (2.9) условия периодичности совпадет с (2.8), если положить $\eta = y_0 + [c_0]$. Так что второе условие периодичности из (2.10) при $\mu = 0$ можно записать в виде соотношения

$$\int_0^T Y_1(t, \eta + c_0^0(\nu(t)), 0) dt = 0, \tag{2.13}$$

которое можно рассматривать в качестве уравнения относительно величины η .

Если $\eta = \eta_*$ является решением уравнения (2.13), то начальные данные $y_0 = \eta_* - [c_0], \dot{y}_0 = -[c_1]$ будут соответствовать порождающему решению (2.8) и при $\mu = 0$ удовлетворять системе уравнений (2.11). Как известно [12], эта система будет задавать величины $y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu)$ в виде однозначных непрерывных функций параметра μ в окрестности нуля, если выполнено условие

$$\left| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} \neq 0 \tag{2.14}$$

невыврожденности из соответствующей теоремы о неявной функции для системы (2.11). Условие следует проверять при $\mu = 0$.

Выполним проверку условия (2.14). Используя выражения (2.10) и дифференцируя сложные функции по y_0, \dot{y}_0 под знаком соответствующих интегралов, получим

$$\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} = \int_0^T \left. \frac{\partial(\dot{y}, Y_1)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} dt = \int_0^T \left. \frac{\partial(\dot{y}, Y_1)}{\partial(y, \dot{y})} \right|_{\mu=0} \left. \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} dt. \quad (2.15)$$

Прямые вычисления показывают

$$\left. \frac{\partial(\dot{y}, Y_1)}{\partial(y, \dot{y})} \right|_{\mu=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left. \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right|_{\mu=0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Поэтому

$$\left| \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} \right| = - \int_0^T \frac{\partial Y_1}{\partial y}(t, y_0 + [c_0] + c_0^0(\nu(t)), 0) dt, \quad (2.17)$$

и условие невырожденности можно записать в виде

$$\int_0^T \frac{\partial Y_1}{\partial y}(t, \eta + c_0^0(\nu(t)), 0) dt \neq 0. \quad (2.18)$$

Запишем уравнение (2.13) в более компактной форме

$$\psi(\eta) = 0, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &= - \int_0^T Y_1(t, \eta + c_0^0(\nu(t)), 0) dt = B + \frac{c}{2} \int_0^T \operatorname{sgn}(\eta + c_0^0(\nu(t))) (\eta + c_0^0(\nu(t)))^2 dt, \\ B &= \int_0^T a(\nu(t)) c_0^0(\nu(t)) dt. \end{aligned}$$

Условие (2.18) после преобразований принимает вид

$$\left. \frac{d\psi}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_*} = c \int_0^T |\eta + c_0^0(\nu(t))| dt \neq 0. \quad (2.20)$$

Ясно, что при $\eta \rightarrow \pm\infty$ функция $\psi(\eta) \rightarrow \pm\infty$ финально монотонна. Пусть для определенности это свойство выполняется вне достаточно большого отрезка $\eta \in [-A, A]$. Однако в пределах самого этого отрезка в силу формулы (2.20) и того, что функция $c_0^0(\nu(t))$ не является тождественной константой, величина $d\psi/d\eta$ всегда строго положительна. Кроме того, она непрерывна по переменной η , т. к. подынтегральная функция в (2.20) непрерывна по своим аргументам.

Поэтому на отрезке $[-A, A]$ функция $d\psi/d\eta$ строго положительна и существует такое положительное $\alpha > 0$, что

$$\frac{d\psi}{d\eta} \geq \alpha > 0, \quad \eta \in [-A, A].$$

Отсюда следует, что функция $\psi(\eta)$ строго монотонно растет не только вне отрезка $[-A, A]$, но и внутри него. Поэтому $\psi(\eta)$ строго монотонна при любых $\eta \in \mathbb{R}$. В итоге мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.1. *При любых фиксированных значениях параметров задачи $c > 0$, $0 \leq e < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ существует такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при $|\mu| \leq \mu_0$ существует единственное периодическое вынужденное колебание $x(t, \mu)$ спутника, стремящееся равномерно при $\mu \rightarrow 0$ к положению равновесия $x = 0$.*

Замечание 2.1. Если дополнительно отделить значение эксцентриситета от его предела 1: $0 \leq e \leq 1 - \varepsilon$ (где ε — некоторая малая положительная величина), то амплитуда колебаний функции $c_0(\nu(t))$ и ее среднее значение $[c_0]$ могут быть равномерно оценены сверху. Кроме того, функция $Y_1(t, y, \mu)$ и ее производная

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y}(t, y, \mu) = -a(\nu(t)) \cos \mu y - \left(b(\nu(t)) + \frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(y) \right) \sin \mu y, \tag{2.21}$$

используемые в условиях периодичности, сходятся при $\mu \rightarrow 0$ к своим пределам равномерно по параметрам и по переменной y , ограниченной некоторой фиксированной константой (порядка амплитуды $c_0^0(\nu(t))$).

Замечание 2.2. Решение задачи Коши для (2.5) на отрезке $[0, T]$ зависит от y_0, \dot{y}_0, μ равномерно непрерывно по упомянутым параметрам. Из всего вышесказанного следует, что равномерно по параметрам можно получить требуемые оценки в теореме о неявной функции и найти единое для всех допустимых значений параметров c, e, φ значение μ_0 такое, что при $|\mu| \leq \mu_0$ будет существовать единственное периодическое решение $x(t, \mu) = \mu y(t, \mu)$, переходящее при $\mu \rightarrow 0$ в положение равновесия $x = 0$.

3. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассматривается устойчивость найденного выше периодического решения уравнения (2.5), существующего и единственного для достаточно малых $\mu > 0$. Исследование устойчивости в смысле Ляпунова будем проводить по отношению к масштабированным переменным y, \dot{y} , поведение которых задается дифференциальным уравнением (2.5).

В силу уже упоминавшейся выше теоремы теории ОДУ общее решение уравнения (2.5) непрерывно дифференцируемо по начальным данным y_0, \dot{y}_0 и параметру μ . Более того, проведенный в предыдущем разделе анализ разрешимости условий периодичности (2.11) показывает, что неявные функции $y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu)$ — решения системы (2.11) — по крайней мере в окрестности значения $\mu = 0$, в которой выполняются условия невырожденности, являются функциями, непрерывно дифференцируемыми по μ (см. [12]).

Для унификации дальнейшего изложения перейдем от уравнения (2.5) к системе Гамильтона второго порядка вида

$$\dot{\mathbf{z}} = I H_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}, \mu) \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2), \tag{3.1}$$

где $z_1 = y, z_2 = \dot{y}$, I — симплектическая матрица второго порядка, а функция Гамильтона имеет вид

$$H(t, \mathbf{z}, \mu) = \frac{1}{2} z_2^2 - \int Y(t, z_1, \mu) dz_1$$

и может быть разложена на невозмущенную и возмущающую части в виде

$$H(t, \mathbf{z}, \mu) = H_0(t, \mathbf{z}) + \mu H_1(t, \mathbf{z}, \mu)$$

так, что слагаемые следует представить в форме

$$H_0(t, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} z_2^2 - b(\nu(t)) z_1, \quad H_1(t, \mathbf{z}, \mu) = - \int Y(t, z_1, \mu) dz_1.$$

Функция H_0 аналитична по своим аргументам, а H_1 аналитична по t, μ и дважды непрерывно дифференцируема по z_1 . Общее решение невозмущенной гамильтоновой системы (при $\mu = 0$) имеет вид (2.12).

Исследуемые вынужденные (эксцентриситетные) колебания спутника задаются периодическим решением $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(t, \mu)$ системы (3.1), имеющим при $\mu = 0$ в качестве порождающего решение

$$z_1^*(t, 0) = \eta_* + c_0^0(\nu(t)), \quad z_2^*(t, 0) = c_1^0(\nu(t)). \tag{3.2}$$

При $\mu = 0$ это решение невозмущенной задачи является неустойчивым. Однако вся порождающая задача вследствие соотношения (2.2) соответствует только одному решению $x = 0$ исходной задачи (2.1) о колебаниях спутника. Это решение, как можно видеть из (2.1), устойчиво при $\mu = 0$. При $\mu > 0$ решения уравнений (2.1), (2.3), (3.1) однозначно соответствуют друг другу, и задача об устойчивости построенного периодического решения приобретает механический смысл. Вне пределов малой окрестности, но все еще при малых μ , действует результат работы [18] о сохранении

колебаний невозмущенной задачи и устойчивости невозмущенных движений вне пределов упомянутой окрестности, размер которой на самом деле убывает вместе с $\mu \rightarrow 0$.

Представим далее систему (3.1) в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}, \mu) \quad (3.3)$$

и перейдем в (3.3) к переменной $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^*(t, \mu)$ — отклонению от найденного периодического решения. Эта векторная переменная удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \Delta \mathbf{z}, \mu) - \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu). \quad (3.4)$$

Вследствие непрерывной дифференцируемости функции $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}, \mu)$ по переменной \mathbf{z} по теореме Лагранжа при $0 \leq \theta \leq 1$ имеем

$$\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \Delta \mathbf{z}, \mu) - \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \theta \Delta \mathbf{z}, \mu) \Delta \mathbf{z},$$

и уравнение (3.4) можно представить в виде

$$\Delta \dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu) \Delta \mathbf{z} + B(t, \Delta \mathbf{z}, \mu) \Delta \mathbf{z}, \quad (3.5)$$

$$A(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu), \quad B(t, \Delta \mathbf{z}, \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \theta \Delta \mathbf{z}, \mu) - \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu).$$

Отсюда видно, что при $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ матрица $B(t, \Delta \mathbf{z}, \mu) \rightarrow 0$ равномерно по t (а также и параметрам μ, c, φ, e). Поэтому в (3.5) второй член имеет более высокий порядок малости по сравнению с первым, и к (3.5) можно применять теоремы об устойчивости нулевого решения периодической по t системы по первому приближению [5].

Рассмотрим теперь вместо (3.5) линейную систему в вариациях

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(t, \mu) \boldsymbol{\xi} \quad (3.6)$$

и исследуем ее устойчивость.

Как и система (3.1), система (3.6) является гамильтоновой. Для исследования ее устойчивости достаточно [17] вычислить ее мультипликаторы ρ_1, ρ_2 . В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - 2\alpha\rho + 1 = 0, \quad (3.7)$$

где величина $\alpha = \text{Tr } \Xi(T)/2$ определяет устойчивость/неустойчивость решений системы (3.6). Матрицант $\Xi(t)$ системы (3.6) имеет вид

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^1(t) & \xi_1^2(t) \\ \xi_2^1(t) & \xi_2^2(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из общей теории [17] известно, что мультипликаторы могут либо находиться на единичной окружности комплексной плоскости ($|\alpha| < 1$), либо на вещественной прямой ($|\alpha| > 1$), либо быть кратными: $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$ ($|\alpha| = 1$). Нас интересует анализ устойчивости при малых $\mu \neq 0$.

Матрица $A(t, \mu)$ в правой части (3.6) имеет вид

$$A(t, \mu) = IH_{zz}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

причем выражение для $\partial Y_1 / \partial z_1$ задается при помощи формулы (2.21). При $\mu = 0$ система (3.6) записывается как

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует случаю кратного нулевого характеристического показателя и кратного единичного мультипликатора. Матрицант в этом случае имеет вид

$$\Xi(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда $\alpha(0) = 1$. При $\mu > 0$ возможны два варианта деформации матрицанта: либо $\alpha(\mu) > 1$, и тогда кратный мультипликатор распадается на два вещественных (гиперболический случай); либо $\alpha(\mu) < 1$, и тогда появляются два комплексно сопряженных мультипликатора на единичной окружности (эллиптический случай).

Чтобы выяснить, какой из этих вариантов имеет место, вычислим производную $d\alpha/d\mu$ при $\mu = 0$. Для этого достаточно подсчитать производную от матрицанта $\partial\Xi/\partial\mu$ при $\mu = 0$. Сам матрицант составляется из столбцов координат фундаментальных решений. Так что на самом деле нужно вычислить производную по μ от фиксированного базисного решения $\xi = \xi^i(t, \mu)$ ($i = 1, 2$) при $\mu = 0$. Подставляя такое решение в (3.6) и дифференцируя по μ обе стороны (3.6), получаем уравнение для производных по μ от фундаментальных решений в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \mu} \right) = A(t, \mu) \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(t, \mu) \xi^i(t, \mu). \quad (3.9)$$

Начальные условия для этой системы уравнений следует брать нулевыми

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial \mu}(0, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остановимся более подробно на проблеме корректности вывода уравнения (3.9). Из формулы (2.21) следует, что производная по μ матрицы $A(t, \mu)$ — функция, кусочно-непрерывная по t . Как будет видно позднее, в общем положении изучаемое периодическое решение имеет не более четырех участков непрерывности. В самом деле, из (2.21) видно, что регулярность при дифференцировании $A(t, \mu)$ по μ может нарушиться только из-за члена $c\mu^{-1} \operatorname{sgn} y \sin \mu y$, который вследствие малости μ и ограниченности $z_1^*(t, \mu)$ удобно представить в виде

$$\frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(z_1^*(t, \mu)) \sin(\mu z_1^*(t, \mu)) = c \left| \frac{\sin(\mu z_1^*(t, \mu))}{\mu} \right|.$$

Так что, если $z_1^*(t, \mu) > 0$, то производная по μ от исследуемого выражения при проходе точки нарушения регулярности, соответствующей условию $z_1^*(t, \mu) = 0$, будет менять знак на противоположный. Получим в худшем случае разрывы первого рода по t . Если же учесть, что эта производная домножается в матрице $\partial A/\partial \mu$ на множитель μ , то при $\mu \rightarrow 0$ возможные разрывы этой матричной функции исчезнут.

Действуя более формально, применим здесь известный результат [14], справедливый для систем ОДУ, удовлетворяющих условиям Каратеодори. Наша задача состоит в том, чтобы доказать дифференцируемость решения задачи Коши для линейной системы ОДУ (3.6) по параметру μ при фиксированных начальных условиях. Дифференцируемость по μ будем проверять для значения $\mu = 0$.

Обозначим, как и выше, символом $\xi(t, \mu)$ решение (3.6) при фиксированном начальном условии $\xi(0, \mu) = \xi_0$. Составим векторную функцию — конечную разность по параметру μ в виде

$$\zeta(t, \mu) = \frac{\xi(t, \mu) - \xi(t, 0)}{\mu}.$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \zeta(t, \mu) = A(t, 0) \zeta(t, \mu) + C(t, \mu) \xi(t, \mu), \quad (3.10)$$

где матрица $C(t, \mu)$ составляет конечную разность по параметру μ для матрицы $A(t, \mu)$

$$C(t, \mu) = \frac{A(t, \mu) - A(t, 0)}{\mu}.$$

При $\mu \rightarrow 0$ система (3.10) стремится к предельной системе

$$\frac{d}{dt} \zeta(t, 0) = A(t, 0) \zeta(t, 0) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(t, 0) \xi(t, 0) \quad (3.11)$$

относительно неизвестной функции $\zeta(t, 0)$. Задачи Коши для (3.10) и (3.11) имеют, очевидно, нулевые начальные данные

$$\zeta(0, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система (3.11) при $\mu = 0$ совпадает с системой (3.9). В силу (3.8) матрица $C(t, \mu)$ имеет только один ненулевой элемент $c_{21}(t, \mu) = \mu\gamma(t, \mu)$, где, как уже было замечено выше, функция $\gamma(t, \mu)$ является кусочно-дифференцируемой и ограниченной.

Чтобы применить упомянутый выше результат [14] о равномерном по t пределе для решений $\zeta(t, \mu) \rightarrow \zeta(t, 0)$ при $\mu \rightarrow 0$, необходимо проверить свойства функций

$$B(t, \mu) = \int_0^t A(\tau, 0) d\tau, \quad \mathbf{g}(t, \mu) = \int_0^t C(\tau, \mu) \boldsymbol{\xi}(\tau, \mu) d\tau.$$

Матричная функция $B(t, \mu)$ является по t достаточно регулярной, а от μ вообще не зависит. Рассмотрим вектор-функцию $g(t, \mu)$ и оценим разность

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(t, \mu) - \mathbf{g}(t, 0)\| &\leq \int_0^t \left\| \frac{A(\tau, \mu) - A(\tau, 0)}{\mu} \boldsymbol{\xi}(\tau, \mu) - \frac{\partial A}{\partial \mu}(\tau, 0) \boldsymbol{\xi}(\tau, 0) \right\| d\tau = \\ &= \int_0^t |\gamma(\tau, \mu) \xi_1(\tau, \mu) - \gamma(\tau, 0) \xi_1(\tau, 0)| d\tau. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция здесь является непрерывной, ограниченной и сходящейся к нулю поточечно при $\mu \rightarrow 0$. Поэтому по известной теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла [15] вся оцениваемая разность также стремится к нулю. Причем, т. к. при любом $t \in [0, T]$ указанная разность не превосходит соответствующего интеграла на отрезке $[0, T]$, то предельный переход $\mathbf{g}(t, \mu) \rightarrow \mathbf{g}(t, 0)$ при $\mu \rightarrow 0$ является равномерным по $t \in [0, T]$. Все условия теоремы А. Ф. Филиппова [14] выполнены.

Применяя теперь эту теорему, получаем, что $\zeta(t, \mu) \rightarrow \zeta(t, 0)$ при $\mu \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. С другой стороны,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \zeta(t, \mu) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mu}(t, 0).$$

Поэтому решения задачи Коши для уравнения (3.6) являются дифференцируемыми по μ при $\mu = 0$.

Положим теперь $\mu = 0$ в уравнении (3.9) и найдем искомое приращение элементов матрицанта. Поскольку при $\mu = 0$ справедливы соотношения

$$A(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \mu}(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma(t, 0) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma(t, 0) = -a(\nu(t)) - c|z_1^*(t, 0)|$, то, обозначая неизвестную функцию символом

$$\zeta(t) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mu}(t, 0),$$

получим для двух фундаментальных решений две задачи Коши

$$\ddot{\zeta}_i^i = \gamma(t, 0) \xi_1^i(t, 0), \quad \zeta_1^i(0) = \dot{\zeta}_1^i(0) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

При этом функции правых частей в этих ОДУ второго порядка имеют вид

$$\xi_1^1(t, 0) \equiv 1, \quad \xi_1^2(t, 0) \equiv t.$$

Таким образом, для производных диагональных элементов матрицанта имеем выражения

$$\begin{aligned} \zeta_1^1(t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\tau \gamma(\sigma, 0) d\sigma = t \int_0^t \gamma(\tau, 0) d\tau - \int_0^t \tau \gamma(\tau, 0) d\tau, \\ \zeta_2^2(t) &= \int_0^t \tau \gamma(\tau, 0) d\tau, \end{aligned}$$

из которых следует искомая производная

$$\frac{d\alpha}{d\mu}(0) = \frac{1}{2} (\zeta_1^1(T) + \zeta_2^2(T)) = \frac{T}{2} \int_0^T \gamma(t, 0) dt.$$

Но аналогично тому, как это было сделано выше для функции $b(\nu(t))$, можно убедиться, что для функции $a(\nu(t))$ среднее равно нулю. Поэтому

$$\frac{d\alpha}{d\mu}(0) = -\frac{cT}{2} \int_0^T |z_1^*(t, 0)| dt = -\alpha_1 < 0,$$

что означает, что при малых $\mu > 0$ величина $\alpha(\mu)$ всегда удовлетворяет условию $0 < \alpha(\mu) < 1$, отвечающему эллиптическому случаю пары чисто мнимых характеристических показателей. Таким образом, мы убедились, что имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. *Эксцентриситетные колебания спутника с солнечным зеркалом под действием гравитационного возмущения всегда устойчивы в первом приближении.*

4. РЕДУКЦИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Нелинейный анализ устойчивости найденного периодического решения в значительной степени затруднен недостаточной регулярностью по переменной y в правой части дифференциального уравнения движения (2.3). Однако в нашем случае анализ показывает, что по крайней мере в обратимом симметричном случае, когда $\varphi = 0$, и даже достаточно далеко от него траектория вынужденных колебаний описывает на фазовой плоскости переменных y, \dot{y} замкнутую кривую, которая при изменении переменной $\nu \in [0, 2\pi]$ дважды обходит начало координат (рис. 2), четыре раза трансверсально пересекая прямую $y = 0$ нарушения регулярности правой части. Это обстоятельство обеспечивает возможность анализировать динамику задачи в малой окрестности исследуемого периодического движения. При этом роль «времени» будет играть новая быстрая переменная u , характеризующая полярный угол изображающей точки на фазовой плоскости (рис. 2). Тогда «моментам» пересечения множества нерегулярности будут в точности соответствовать значения $u = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$, а в интервалах между этими значениями динамическая система аналитична.

В предыдущем разделе было вычислено только начальное («нулевое») приближение (2.8) к искомому вынужденному колебанию

$$\begin{pmatrix} y(t, \mu) \\ \dot{y}(t, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0(\nu(t)) \\ c_1^0(\nu(t)) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y^1(t, \mu) \\ \dot{y}^1(t, \mu) \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Справедливость формулы (4.1) также следует из теоремы о неявной функции для системы уравнений (2.11). В силу этой формулы начальные данные $y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu)$, отвечающие периодическому решению, дифференцируемы по μ при $\mu = 0$, т. е.

$$y_0(\mu) = y_0(0) + \mu\alpha(\mu), \quad \dot{y}_0(\mu) = \dot{y}_0(0) + \mu\beta(\mu),$$

где величины $\alpha(\mu), \beta(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ имеют конечные пределы. В силу же уже упоминавшейся общей теоремы теории ОДУ общее решение уравнения (2.5) непрерывно дифференцируемо по y_0, \dot{y}_0, μ . Поэтому периодическое решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t, y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu), \mu) \\ \dot{y}(t, y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu), \mu) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y(t, y_0(0), \dot{y}_0(0), 0) \\ \dot{y}(t, y_0(0), \dot{y}_0(0), 0) \end{pmatrix} + \\ &+ \mu \left[\frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \Big|_{\mu=0} \cdot \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial y / \partial \mu \\ \partial \dot{y} / \partial \mu \end{pmatrix} \Big|_{\mu=0} \right] + o(\mu), \end{aligned}$$

причем величина $o(\mu)$ оценивается равномерно на отрезке $[0, T]$. Формула (4.1) следует из полученного разложения. Таким образом, точное периодическое решение расположено в μ -окрестности начального приближения.

Далее по примеру работы [18] перейдем от ОДУ (2.5) к системе Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{y} &= H_{p_y}, & \dot{p}_y &= -H_y, \\ \dot{\nu} &= H_{p_\nu}, & \dot{p}_\nu &= -H_\nu \end{aligned} \tag{4.2}$$

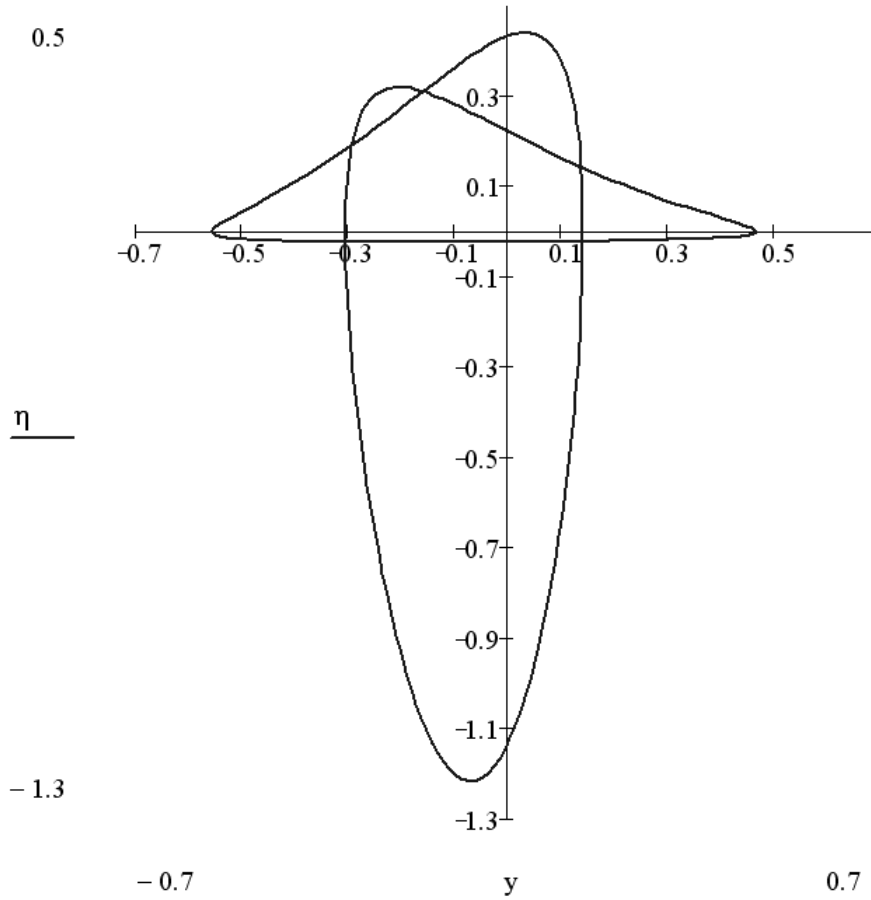


Рис. 2. Невозмущенное периодическое решение при $e = 0,9$, $\varphi = 0,1$, $c = 1$.

с двумя степенями свободы и гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu) &= H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) + \mu H_1(y, \nu, \mu), \\
 H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) &= \frac{1}{2} p_y^2 - b(\nu)y + p_\nu(1 + e \cos \nu)^2, \\
 H_1(y, \nu, \mu) &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{c}{\mu} \operatorname{sgn} y + b(\nu) \right) \left(y - \frac{\sin \mu y}{\mu} \right) - \frac{1}{\mu^2} a(\nu)(\cos \mu y - 1),
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

обобщенными координатами y, ν и обобщенными импульсами p_y, p_ν . При этом $p_y = \dot{y}$, а импульс p_ν является избыточной переменной, канонически сопряженной координате ν .

Для выполнения анонсированной выше задачи регуляризации, приводящей динамику в окрестности рассматриваемого периодического решения к неаналитическому по t потоку аналитических отображений, выполним последовательность канонических преобразований системы Гамильтона (4.2)

$$(y, \nu, p_y, p_\nu) \mapsto (u, \nu, I, p_\nu) \mapsto (u, z_1, I, z_2),$$

задаваемых по формулам

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{2I} \sin u, & p_y &= \sqrt{2I} \cos u, \\
 z_1 &= \sqrt{2p_\nu} \sin \nu, & z_2 &= \sqrt{2p_\nu} \cos \nu.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оба преобразования пар переменных $(y, \nu, p_y) \mapsto (u, I)$, $(\nu, p_\nu) \mapsto (z_1, z_2)$ удовлетворяют условию каноничности. Далее фиксируем достаточно большую постоянную энергии в интеграле

$$H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu) = h \tag{4.5}$$

и опишем более подробно методику подбора этой постоянной. В силу (1.2) можно считать, что на найденном периодическом движении в качестве независимой переменной используется истинная

аномалия ν :

$$y = y^\mu(\nu), \quad p_y = p_y^\mu(\nu).$$

Упомянутая траектория при $\mu = 0$ имеет вид

$$y = y^0(\nu), \quad p_y = p_y^0(\nu).$$

Теперь из уравнения (4.5) при помощи формул (4.3) выразим зависимость обобщенного импульса p_ν от параметра ν в виде $p_\nu^*(\nu)$. При $\mu = 0$ это выражение выглядит особенно просто:

$$p_\nu^0(\nu) = \frac{h - \frac{1}{2} [p_y^0(\nu)]^2 + b(\nu)y^0(\nu)}{(1 + e \cos \nu)^2}.$$

Ясно, что при фиксированном $e \in [0, 1)$ и достаточно большом $h > 0$ это выражение будет отделено от нуля при любом $\nu \in [0, 2\pi]$. В этом случае и близкая к $p_\nu^0(\nu)$ функция $p_\nu^*(\nu)$ также будет отделена от нуля так, что переменная p_ν в окрестности вынужденного колебания может играть роль радиуса в канонических полярных фазовых переменных ν, p_ν .

Далее, следуя [13], проведем изоэнергетическую редукцию нашей автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности периодического решения так, чтобы угловая переменная u оказалась новой независимой переменной вместо t . Это сделать возможно, поскольку в рассматриваемом нами случае общего положения переменная $u \in [0, 4\pi]$ растет вместе с t строго монотонно.

Новая функция Гамильтона $K(u, \nu, p_\nu, \mu)$ должна задаваться в неявном виде при помощи уравнения

$$G(u, \nu, -K, p_\nu, \mu) - h = 0, \quad (4.6)$$

где следует положить

$$G(u, \nu, I, p_\nu, \mu) = H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu),$$

выражая в H величины y, p_y в соответствии с формулами (4.4). Так же, как и в (4.3), получим разложение гамильтониана

$$G(u, \nu, I, p_\nu, \mu) = G_0(u, \nu, I, p_\nu) + \mu G_1(u, \nu, I, p_\nu, \mu),$$

причем невозмущенную часть легко преобразовать к форме

$$G_0(u, \nu, I, p_\nu, \mu) = I \cos^2 u - \sqrt{2I} b(\nu) \sin u + p_\nu(1 + e \cos \nu)^2.$$

Проверим условие невырожденности уравнения (4.6) относительно переменной K в окрестности периодического движения. При достаточно малых μ для этого достаточно вычислить производную на порождающем решении

$$\left. \frac{\partial G_0}{\partial I} \right|_{\mu=0} = \cos^2 u - \frac{b(\nu) \sin u}{\sqrt{2I}} = \frac{(p_y^0(\nu))^2 - b(\nu)y^0(\nu)}{(y^0(\nu))^2 + (p_y^0(\nu))^2} = \left. \frac{\dot{y}^2(t) - y(t)\ddot{y}(t)}{y^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right|_{\mu=0}.$$

В числителе здесь стоит скалярное произведение вектора $(\dot{y}(t), \ddot{y}(t))^T$, касательного к фазовому вектору $(y(t), \dot{y}(t))^T$, и перпендикулярного к нему вектора $(\dot{y}(t), -y(t))^T$, направленного в сторону движения изображающей точки. В знаменателе стоит длина фазового вектора. Ясно, что на порождающей траектории в исследуемом нами случае общего положения величина $\partial G_0 / \partial I$ при $\mu = 0$ отделена от нуля. Поэтому по непрерывности локально, в окрестности исследуемого периодического движения, уравнение (4.6) однозначно разрешимо относительно переменной K , задавая тем самым неявную функцию $K(u, \nu, p_\nu, \mu)$.

В упомянутой окрестности переменная u может рассматриваться в качестве быстрой. В самом деле,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial G}{\partial I} = \frac{\partial G_0}{\partial I} + \mu \frac{\partial G_1}{\partial I}.$$

Но в силу проведенного анализа на порождающем решении и, значит, в окрестности точного решения величина $du/dt > 0$. Поэтому на периоде исследуемого периодического движения величина $u(t)$ строго монотонно растет. Таким образом, переменная u пригодна в качестве нового «времени» в новой неавтономной периодической системе Гамильтона с одной степенью свободы,

фазовыми переменными ν , p_ν и функцией Гамильтона $K(u, \nu, p_\nu, \mu)$. На самом деле, мы будем исследовать устойчивость периодического движения, задаваемого соотношениями

$$z_1 = z_1^*(u), \quad z_2 = z_2^*(u), \quad (4.7)$$

и представляющего то же самое периодическое движение, но в другой карте переменных (u, z_1, z_2) на трехмерном многообразии M_h^3 постоянной энергии, задаваемом уравнением (4.5). Так что символом $K(u, z_1, z_2, \mu)$ будем обозначать функцию Гамильтона редуцированной системы во введенной таким образом системе координат.

Легко видеть, что на M_h^3 в окрестности найденного периодического движения системы координат (y, ν, p_y) и (u, z_1, z_2) задают эквивалентные карты $\varphi_1, \varphi_2 : M_h^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ соответственно. В карте φ_1 траектория найденного периодического движения имеет вид, задаваемый уравнениями

$$y = y^*(\nu), \quad p_y = p_y^*(\nu).$$

Используя ν как параметр, это решение в карте φ_2 можно выразить по формулам

$$u = u^*(\nu) = \arg(p_y^*(\nu) + iy^*(\nu)), \quad (4.8)$$

$$z_1 = \sqrt{2p_\nu^*} \sin \nu, \quad z_2 = \sqrt{2p_\nu^*} \cos \nu.$$

Для перехода от этих параметрических уравнений к уравнениям (4.7) необходимо разрешить уравнение (4.8) относительно ν . Это можно сделать, например, при помощи интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{d\nu}{du} = \frac{G_{p_\nu}(\nu)}{G_I(u^*(\nu), \nu, I^*(\nu), p_\nu^*(\nu))}$$

вдоль найденного решения. Используя исходные переменные y, p_y , это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\nu}{du} = \frac{(1 + e \cos \nu)^2 [(y^*(\nu))^2 + (p_y^*(\nu))^2]}{H_y|_* y^*(\nu) + H_{p_y}|_* p_y^*(\nu)}, \quad (4.9)$$

где, как можно видеть, например,

$$\left. \frac{\partial H}{\partial p_y} \right|_* p_y^*(\nu) = (p_y^*(\nu))^2.$$

Начальные данные для уравнения (4.9) подбираются в виде $\nu(0) = \nu_0$ из условия пересечения фазовой кривой на плоскости (y, p_y) оси p_y слева направо.

Как было установлено ранее, в характеристическом уравнении (3.7) характеристическая постоянная Ляпунова [17] может быть представлена в виде

$$\alpha = 1 - \alpha_1 \mu + o(\mu) = 1 - a_1(\mu).$$

Тогда мультипликаторы имеют вид

$$\rho_{1,2} = 1 - a_1 \pm i\sqrt{a_1} \sqrt{2 - a_1} = \exp(\lambda_{1,2} T).$$

Отсюда с учетом того, что величины a_1 малы вместе с μ ,

$$\lambda_{1,2} T = \pm i \arcsin(\sqrt{a_1} \sqrt{2 - a_1}) = \pm i\sqrt{a_1} \sqrt{2 - a_1} + o(a_1) = \pm i\sqrt{2a_1} \sqrt{\mu} + o(\mu). \quad (4.10)$$

Замечание 4.1. Система в вариациях для трехмерной динамической системы на M_h^3 , заданная на периодическом движении, помимо показателей λ_1, λ_2 имеет еще один, третий, показатель $\lambda_3 = 0$. Он соответствует сдвигу вдоль траектории периодического движения, в нашем случае — вдоль координаты ν .

Желая перейти к описанию динамики на M_h^3 при помощи координат u, z_1, z_2 , используем в дальнейшем легко выводимое в общей теории ОДУ [16] методическое утверждение.

Утверждение 4.1. Пусть заданы две автономные динамические системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}); \quad \mathbf{x} \in M^n, \quad \mathbf{y} \in N^n; \quad M^n, N^n \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.11)$$

имеющие T -периодические решения $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{y}^*(t)$ с начальными условиями $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ соответственно. Пусть в окрестностях указанных решений динамические системы эквивалентны, и эта эквивалентность устанавливается при помощи диффеоморфизма $\mathbf{g} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$.

Тогда системы в вариациях этих динамических систем имеют идентичные системы характеристических показателей, а соответствующие этим показателям решения взаимно однозначно соответствуют друг другу при помощи касательного отображения

$$d\mathbf{g} : T_{\mathbf{x}^*(t)}M^n \rightarrow T_{\mathbf{y}^*(t)}N^n,$$

рассматриваемого в каждой точке периодического решения $\mathbf{x}^*(t)$.

Доказательство. В силу эквивалентности динамических систем заключаем, что

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

Рассмотрим системы в вариациях

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{y}}\boldsymbol{\eta}, \quad (4.13)$$

заданные на соответствующих друг другу при помощи диффеоморфизма \mathbf{g} периодических движениях. Пусть матрицы-функции $\Xi(t)$, $\mathbf{H}(t)$ являются матрицантами этих систем в вариациях.

Поскольку для любого $t \in [0, T]$ справедливо соответствие $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$, то касательное отображение можно задать по формуле

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}, \quad (4.14)$$

где матрица $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}$ задает обратимый линейный оператор $d\mathbf{g}$ из касательного пространства $T_{\mathbf{x}^*(t)}M^n$ в касательное пространство $T_{\mathbf{y}^*(t)}$. отождествим при каждом $t \in [0, T]$ эти касательные пространства с координатным пространством \mathbb{R}^n .

Решения систем в вариациях можно представить в виде

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \Xi(t)\boldsymbol{\xi}_0, \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\eta}_0,$$

где $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}_0$ — векторы начальных данных для (4.13). Формула (4.14) задает линейный оператор в линейном пространстве вектор-функций вида $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Этот линейный оператор обеспечивает линейную эквивалентность систем в вариациях (4.13). Проверим это прямым вычислением. Имеем с одной стороны

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right] \boldsymbol{\xi} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \boldsymbol{\eta}.$$

Убедимся, что матрица перед вектором $\boldsymbol{\eta}$ совпадает с $\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{y}$. Заметим, что вычисление всех дифференциальных объектов производится на решениях систем (4.11), соответствующих друг другу в силу диффеоморфизма \mathbf{g} . Получаем далее в покоординатном представлении

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right\}_{i,k} &= \sum_{l=1}^n \left[\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_l} \right)' + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \right] \frac{\partial x_l}{\partial y_k} \\ &= \sum_{l=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_l \partial x_j} X_j + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \right) \right] \frac{\partial x_l}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

С другой стороны, предполагая, что диффеоморфизм \mathbf{g} достаточно регулярен, а также используя правила вычисления производных от сложных функций и изменяя очередность дифференцирования в производных второго порядка, с учетом (4.12) можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} &= \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} X_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_k} \right) X_j + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \sum_{l=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_k} \right] = \sum_{l=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_l \partial x_j} X_j + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \right) \right] \frac{\partial x_l}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, отправляясь от формулы соответствия (4.14) и системы в вариациях для ξ , мы приходим к системе в вариациях для η . Зададим теперь для ξ начальное условие $\xi(0) = \xi_0$. Ему соответствует начальное условие

$$\eta(0) = \eta_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \xi_0,$$

где \mathbf{x}_0 предполагается в качестве начального условия для периодического решения исходной задачи (в переменных \mathbf{x}). Далее, при любом $t \in [0, T]$ решение системы для η можно представить двумя способами:

$$\eta(t) = \mathbf{H}(t) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad \xi_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \Xi(t) \xi_0.$$

В силу произвольности выбора вектора начальных данных ξ_0 получим матричное равенство

$$\mathbf{H}(t) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \Xi(t),$$

справедливое для любого t . При $t = T$ решение исходной задачи возвращается в начальную точку $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(T)$ либо сдвигается по угловым переменным на период их изменения. Поэтому, обозначая символом

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

невыврожденную матрицу Якоби, задающую касательное отображение, получим соотношение подобия

$$\mathbf{H}(t) = A \Xi(t) A^{-1}$$

матрицантов систем в вариациях (4.13) за период. Это означает, что эти системы в вариациях имеют совпадающие характеристические уравнения. Доказательство завершает замечание о том, что собственные векторы, соответствующие мультипликаторам, и их инвариантные подпространства в силу линейного изоморфизма (4.14) для систем (4.13) взаимно однозначно соответствуют друг другу. \square

Доказанное утверждение 4.1 позволяет заключить, что система в вариациях для гамильтоновой системы

$$\frac{dz_1}{du} = \frac{\partial K}{\partial z_2}(u, z_1, z_2), \quad \frac{dz_2}{du} = -\frac{\partial K}{\partial z_1}(u, z_1, z_2) \quad (4.15)$$

вдоль периодического решения (4.7) имеет в точности два чисто мнимых характеристических показателя, вычисляемых при помощи (4.10). На многообразии M_h^3 нулевой характеристический показатель соответствует смещению вдоль координаты u .

Построенная система Гамильтона (4.15) является аналитической почти во всех точках окрестности периодического движения. Функция Гамильтона, как уже сказано выше, имеет нарушения аналитичности только при $u = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Но поскольку u здесь является независимой переменной, то канонические отображения в силу системы ОДУ (4.15) будут аналитичны по своим аргументам (начальным данным) при любом фиксированном u . Это обстоятельство позволяет для нелинейного анализа устойчивости применить далее методы КАМ-теории и строить разложения коэффициентов и показателей в ряды по малому параметру.

Замечание 4.2. Платой за регулярность в системе (4.15) является значительная аналитическая сложность ее правых частей и практическая невозможность выполнить параметрическое исследование устойчивости задачи аналитическими методами. Для решения подобного рода задач, к счастью, имеются развитые методы численного анализа устойчивости [7].

Таким образом, характеристические показатели (4.10) системы в вариациях для (4.15) могут быть разложены в сходящиеся степенные ряды по малому параметру $\varepsilon = \sqrt{\mu}$ в силу двукратности соответствующего показателя при $\mu = 0$ (см. [6]).

Для вычисления нормальной формы нам, помимо показателей λ_1, λ_2 , потребуются также решения для системы в вариациях

$$\frac{d}{du} \delta \mathbf{z} = I K_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \delta \mathbf{z} \quad (\delta \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2), \quad (4.16)$$

построенной для нелинейной системы (4.15) вдоль периодического решения (4.7).

В карте φ_1 периодическое решение имеет показатели λ_1, λ_2 , а также $\lambda_3 = 0$. Кроме того, в этой же карте мы можем приблизительно вычислять решения системы в вариациях, соответствующие этим показателям. Ввиду того, что переход к регуляризованной задаче (4.15) сопровождается одновременно ее аналитическим усложнением, прямое вычисление базисных решений системы в вариациях оказывается невозможным. Поэтому остается единственный путь — использовать линейное отображение касательных пространств вида (4.14), т. е. касательное отображение диффеоморфизма $\mathbf{g} : (y, \nu, p_y) \mapsto (u, z_1, z_2)$ на периодическом решении.

В этом случае остается открытым вопрос о соответствии между решениями системы в вариациях в карте φ_2 и (4.16). Для решения этой задачи используем еще одно техническое утверждение о редукции решений систем в вариациях. Пусть динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad (4.17)$$

имеет периодическое решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ с периодом T . Среди переменных x_i ($i = 1, \dots, n$) могут быть как позиционные, так и угловые, от которых функции $X_i(x_1, \dots, x_n)$ зависят периодически. Как обычно, периодичность угловых переменных предполагается равной 2π . Пусть, кроме того, переменная x_1 является быстрой угловой, т. е. ее производная вдоль периодического решения строго положительна

$$X_1(\mathbf{x}^*(t)) > 0 \quad (t \in [0, T]).$$

В этом случае вместо (4.17) в окрестности решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ можно рассмотреть неавтономную периодическую по x_1 динамическую систему

$$\xi' = \Xi(x_1, \xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^{n-1}), \quad (4.18)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})^T$, а правые части задаются известными формулами

$$\Xi(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \frac{X_i(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{X_1(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})}.$$

Задача Коши для (4.18) естественным образом переформулируется из задачи Коши для (4.17).

Утверждение 4.2. *Решение системы ОДУ в вариациях*

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t)) \delta \mathbf{x}, \quad (4.19)$$

составленной для (4.17) на решении $\mathbf{x}^*(t)$, взаимно однозначно соответствует решениям системы в вариациях

$$\frac{d}{dx_1} \delta \xi = \frac{\partial \Xi}{\partial \xi}(x_1, \xi^*(x_1)) \delta \xi, \quad (4.20)$$

составленной для редуцированной системы ОДУ (4.18), по формуле

$$\delta x_{i+1}(t) = \delta \xi_i(x_1^*(t)) + \frac{X_{i+1}(\mathbf{x}^*(t))}{X_1(\mathbf{x}^*(t))} \delta x_1(t) \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (4.21)$$

Замечание 4.3. Предполагается, что функции $\xi_i^*(x_1)$ представляют собой рассматриваемое 2π -периодическое движение в зависимости от новой независимой $x_1 \in [0, 2\pi]$. При этом на самом невозмущенном решении выполняется соотношение

$$\xi_i^*(x_1^*(t)) = x_{i+1}^*(t).$$

Доказательство. Формулу (4.21) проверим непосредственной подстановкой в соответствующее $i+1$ -е уравнение системы в вариациях (4.19). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x_{i+1} &= \frac{d}{dt} \delta \xi_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{X_{i+1}}{X_1} \right) \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \frac{d}{dt} \delta x_1 = \\ &= X_1 \frac{d}{dx_1} \delta \xi_i + \left(\frac{1}{X_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} X_j - \frac{X_{i+1}}{X_1^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} X_j \right) \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta x_j. \end{aligned}$$

Используем теперь то, что $\delta\xi_i(x_1)$ удовлетворяет системе ОДУ в вариациях (4.20), т. е.

$$\frac{d}{dx_1}\delta\xi_i = \frac{1}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \delta\xi_{j-1} - \frac{X_{i+1}}{X_1^2} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta\xi_{j-1}.$$

Подставим правую часть этого равенства в правую часть предыдущего равенства. Получим с учетом (4.21)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta x_{i+1} &= \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \delta x_j - \left(\sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 - \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta x_j + \\ &+ \left(\frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 + \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_1} \delta x_1 + \left(\sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 - \\ &- \frac{X_{i+1}}{X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \delta x_1 - \left(\frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \delta x_j. \end{aligned}$$

Поэтому переменные δx_{i+1} удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям системы в вариациях (4.18). Обратная декомпозиция позволяет из функций $\delta x_1(t)$, $\delta x_{i+1}(t)$ ($i = 1, \dots, n-1$) вычислить функции $\delta\xi_i(x_1^*(t))$. Чтобы построить функции $\delta\xi_i(x_1)$, нужно вдоль периодического движения обратить уравнение $x_1 = x_1^*(t)$.

Если же после решения системы (4.20) найдены функции $\delta\xi_i(x_1)$, то, подставляя выражения (4.21) в правую часть первого из уравнений (4.19), получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\delta x_1(t)$. Решая его, получим остальные δx_{i+1} как функции времени по формуле (4.21). \square

Пусть для простоты система (4.19) имеет один нулевой характеристический показатель (вдоль периодического решения) и остальные ненулевые. Тогда легко убедиться, что нулевому показателю соответствует решение системы (4.19), получающееся из (4.21) при $\delta\xi_i(x_1) \equiv 0$ ($i = 1, \dots, n-1$). В самом деле, положим в (4.20) $\delta\xi_i = 0$. Тогда

$$\delta x_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{X_1} \delta x_1.$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений (4.19), получим дифференциальное уравнение относительно функции $\delta x_1(t)$ в виде

$$\frac{d}{dt}\delta x_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_i} \frac{X_i}{X_1} \delta x_1 = \frac{\delta x_1}{X_1} \sum_{i=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_i} X_i = \frac{\delta x_1}{X_1} \frac{dX_1}{dt},$$

откуда заключаем, что имеет место равенство

$$X_1 \frac{d}{dt}\delta x_1 = \delta x_1 \frac{dX_1}{dt},$$

из которого следует, что

$$\delta x_1(t) = C X_1(\mathbf{x}^*(t)),$$

где C — постоянная интегрирования, параметризующая одномерное линейное подпространство решений системы (4.19), соответствующее упомянутому нулевому характеристическому показателю. Функции из этого пространства имеют вид

$$\delta \mathbf{x}(t) = C \mathbf{X}(\mathbf{x}^*(t)).$$

Найденное решение системы в вариациях (4.19) является периодической функцией периода T (в силу периодичности функции $\mathbf{x}^*(t)$). Поэтому оно соответствует единичному мультипликатору или нулевому характеристическому показателю.

Остальные $n-1$ (ненулевые) показатели и соответствующие им собственные функции вычисляются уже из редуцированной системы в вариациях (4.20). Причем показатели λ_i ($i = 2, \dots, n$) системы (4.19) связаны с показателями \varkappa_i ($i = 1, \dots, n-1$) системы (4.20) соотношениями

$$\lambda_{i+1} T = \varkappa_i 2\pi.$$

В нашем случае роль переменной x_1 играет угловая переменная u с периодом изменения 4π . Поэтому здесь будем иметь

$$\lambda_{1,2}T = \varkappa_{1,2}4\pi,$$

где $\lambda_{1,2}$ — найденные ранее чисто мнимые характеристические показатели системы в вариациях (3.6).

Как было видно выше, при анализе устойчивости вынужденных колебаний спутника в линейном приближении оказалось достаточным ограничиться рассмотрением порождающего решения, отбрасывая члены более высокого (первого) порядка по μ , и членами первого порядка в возмущающей части правых частей системы ОДУ (или, что в данном случае эквивалентно, функции Гамильтона). Следуя и далее той же тактике, всегда при анализе устойчивости в разложениях коэффициентов гамильтониана по малому параметру будем ограничиваться членами наименьшего необходимого порядка.

Так что в процессе вычисления нормальных форм системы Гамильтона (4.15) на основе коэффициентов степенного по $z_i - z_i^*(u)$ ($i = 1, 2$) разложения гамильтониана $K(u, \mathbf{z}, \mu)$ ограничимся приближенными по малому параметру выражениями для этих коэффициентов. На самом деле коэффициенты будут вычисляться на найденном порождающем решении

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}^0(u) = \mathbf{z}^*(u, \mu)|_{\mu=0}.$$

Однако, поскольку система в вариациях на порождающем решении вырождается в резонансную с двукратным нулевым показателем и непростым элементарным делителем, то требуется уточнение коэффициентов этой системы до членов следующего (первого) порядка по малому параметру.

Опишем более аккуратно процедуру анализа устойчивости при помощи нормальных форм функции Гамильтона с учетом малости параметра μ . Диффеоморфизм \mathbf{g} , задающий связь карт φ_1 и φ_2 , строится в окрестности порождающего решения и от малого параметра не зависит. Представим функцию Гамильтона системы (4.15) в этой окрестности в виде следующего разложения по степеням вектора $\Delta\mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^0(u)$ отклонений от порождающего решения:

$$K(u, \mathbf{z}, \mu) = K(u, \mathbf{z}^0(u) + \Delta\mathbf{z}, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(u, \mu) \underbrace{[\Delta\mathbf{z}, \dots, \Delta\mathbf{z}]}_{i \text{ раз}},$$

где $K_i(u, \mu)[\Delta\mathbf{z}, \dots, \Delta\mathbf{z}]$ — однородные формы степени i от компонент вектора $\Delta\mathbf{z}$ с коэффициентами, зависящими от времени t и малого параметра μ . В динамических уравнениях участвуют формы, начиная с $i = 2$.

Переходя в системе Гамильтона (4.15) к отклонениям

$$\boldsymbol{\zeta} = \Delta\mathbf{z} - [\mu\mathbf{z}^1(u) + \mu^2\mathbf{z}^2(u) + \dots],$$

учитывая поправку точного решения $\mu\mathbf{z}^1(u)$ к порождающему решению, получим новый гамильтониан $F(u, \boldsymbol{\zeta}, \mu)$ в виде

$$F(u, \boldsymbol{\zeta}, \mu) = \sum_{i=2}^{\infty} F_i(u, \mu) \underbrace{[\boldsymbol{\zeta}, \dots, \boldsymbol{\zeta}]}, \quad (4.22)$$

где однородная форма $F_i(u, \mu)[\boldsymbol{\zeta}, \dots, \boldsymbol{\zeta}]$ выражается через формы K_j порядков $j \leq i$. Например, форма наименьшего, второго, порядка имеет вид

$$F_2(u, \mu)[\boldsymbol{\zeta}, \dots, \boldsymbol{\zeta}] = K_2^0(u)[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}] + \mu(K_2^1(u)[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}] + K_3^0(u)[\mathbf{z}^1(u), \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}] + K_3^0(u)[\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}^1(u), \boldsymbol{\zeta}] + K_3^0(u)[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}^1(u)]).$$

Поправки более высокого порядка, чем μ , рассматривать не будем. Процесс дальнейшей линейной и нелинейной нормализации следует проводить с функцией Гамильтона (4.22).

5. НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

В гамильтоновой системе (4.15) перейдем к переменным, задающим отклонения от найденного периодического решения,

$$\zeta = \mathbf{z} - \mathbf{z}^*(u, \mu).$$

Для них имеет место система ОДУ

$$\dot{\zeta} = IF_{\zeta}(u, \zeta, \mu), \quad (5.1)$$

в которой функция $F(u, \zeta, \mu)$ аналитична по ζ , μ и допускает разложение (4.22) по однородным относительно ζ формам. Коэффициенты форм $F_i(u, \mu)$ являются функциями, аналитическими по μ и кусочно-аналитическими по u . В самом деле, в регуляризованном «времени» u функция точного периодического движения $\mathbf{z}^*(u, \mu)$ может быть разложена в сходящийся по μ степенной ряд при помощи известных общих алгоритмов [6]. Поэтому функция F также сохранит аналитичность по μ .

Выше уже была установлена устойчивость в линейном приближении, соответствующая эллиптическому случаю поведения гамильтоновой системы (5.1) в окрестности положения равновесия $\zeta = \mathbf{0}$. Поскольку вычисляемые из (4.10) характеристические показатели

$$\varkappa_{1,2} = \frac{T}{4\pi} \lambda_{1,2} = \pm i \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{4\pi} \varepsilon + O(\varepsilon^3)$$

малы вместе с малым параметром ε , то случаи резонансов третьего и четвертого порядков здесь не реализуются. В такой ситуации в общем положении возможна нормализация до четвертого порядка включительно с ненулевым (в общем случае) коэффициентом в форме четвертой степени. В результате становится возможным применить теорему Мозера об инвариантной кривой [8] для закручивающих отображений плоскости, которая, в свою очередь, приводит к устойчивости положения равновесия или, в конечном счете, нашего периодического решения.

Таким образом, в эллиптическом случае для (5.1) в общем положении следует ожидать и строгой нелинейной устойчивости. Соответствующий анализ можно провести при помощи численных процедур для определения на плоскости параметров e , φ кривых вырождения в нормальной форме четвертой степени. Если такие кривые могут быть обнаружены, то для соответствующих точек нужна дальнейшая нормализация гамильтониана.

Общая ситуация (при произвольных e , φ) исключительно затруднительна с аналитической точки зрения. Поэтому строгий аналитический нелинейный анализ устойчивости мы выполним для простейшего случая $e = 0$, $\varphi = 0$. Величину $c > 0$ считаем фиксированным параметром.

Будем исходить из функции Гамильтона, выводимой из (4.3) и представимой в виде

$$\begin{aligned} H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu) &= H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) + \mu H_1(y, \nu) + \dots, \\ H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) &= \frac{1}{2} p_y^2 - y \sin 2\nu + p_\nu, \quad H_1(y, \nu) = \frac{c}{6} y^3 \operatorname{sgn} y - \frac{1}{2} y^2 \cos 2\nu. \end{aligned}$$

В исходной постановке порождающее решение

$$y^0(t) = \eta - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad p_y^0(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t$$

для задачи с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} H(t, y, p_y, \mu) &= H_0(t, y, p_y) + \mu H_1(t, y) + \dots, \\ H_0(t, y, p_y) &= \frac{1}{2} p_y^2 - y \sin 2t, \quad H_1(t, y) = \frac{c}{6} y^3 \operatorname{sgn} y - \frac{1}{2} y^2 \cos 2t \end{aligned}$$

определяется из уравнения (2.19), в котором при подстановке выражений

$$a(\nu(t)) = \cos 2t, \quad c_0^0(\nu(t)) = \sin 2t$$

следует положить $B = 0$ и

$$\psi(\eta) = \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} (\eta + \sin 2t) |\eta + \sin 2t| dt.$$

Легко видеть, что $\psi(0) = 0$. Поскольку же уравнение (2.19) имеет единственное решение, то в рассматриваемом симметричном случае параметр порождающего периодического решения

будет иметь нулевое значение: $\eta = 0$. Поэтому порождающее решение расширенной автономной задачи имеет вид

$$y^0(t) = -\frac{1}{4} \sin 2t, \quad \nu^0(t) = t, \quad p_y^0(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t, \quad p_\nu^0(t) = h - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \sin^2 2t.$$

На плоскости фазовых переменных (y, p_y) кривая порождающего решения образует эллипс. При помощи канонического преобразования $(y, p_y) \mapsto (z, p_z)$ трансформируем этот эллипс в окружность с равномерным движением вдоль нее. Для этого достаточно задать новые переменные по формуле

$$z = \sqrt{2}y, \quad p_z = \frac{1}{\sqrt{2}}p_y.$$

Тогда порождающее решение будет иметь вид

$$z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2t, \quad p_z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2t.$$

Кроме того, поскольку функция Гамильтона при $e = 0$ зависит периодически от переменной ν только в виде двойного аргумента 2ν , при помощи другого канонического преобразования $(\nu, p_\nu) \mapsto (\lambda, p_\lambda)$ вида

$$\lambda = 2\nu, \quad p_\lambda = \frac{1}{2}p_\nu$$

сформируем новый набор канонических переменных задачи $(z, \lambda, p_z, p_\lambda)$ так, что после этого гамильтониан можно записать в виде

$$H(z, \lambda, p_z, p_\lambda, \mu) = H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) + \mu H_1(z, \lambda) + \dots, \quad H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) = p_z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z \sin \lambda + 2p_\lambda,$$

$$H_1(z, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{24}cz^3 \operatorname{sgn} z - \frac{1}{4}z^2 \cos \lambda.$$

Наконец, в расширенном фазовом пространстве переменных $(t, z, \lambda, -H, p_z, p_\lambda)$ перейдем к новому времени по формуле $(t, -H) \mapsto (2t, -H/2)$ и оставим те же обозначения для этих переменных, корректируя гамильтониан на соответствующий множитель. Так что в итоге получим исходное, максимально упрощенное, представление функции Гамильтона

$$H(z, \lambda, p_z, p_\lambda, \mu) = H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) + \mu H_1(z, \lambda) + \dots,$$

$$H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) = \frac{1}{2}p_z^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}z \sin \lambda + p_\lambda, \quad H_1(z, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{48}cz^3 \operatorname{sgn} z - \frac{1}{8}z^2 \cos \lambda.$$

При этом будем рассматривать уже не 4π -, а 2π -периодические решения с порождающим, задаваемым формулами

$$z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin t, \quad \lambda^0(t) = t, \quad p_z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cos t, \quad p_\lambda^0(t) = h - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \sin^2 t. \quad (5.2)$$

Для перехода к новой регуляризирующей независимой быстрой угловой фазовой переменной u выполним каноническое преобразование $(z, p_z) \mapsto (u, I)$ по формулам

$$z = \sqrt{2I} \sin u, \quad p_z = \sqrt{2I} \cos u. \quad (5.3)$$

В переменных $(u, \lambda, I, p_\lambda)$ на многообразии постоянной энергии M_h^3 в качестве координат карты в окрестности порождающего периодического решения теперь можно использовать переменные (u, λ, I) . Далее, в силу уравнения энергии $H = h$ вместо переменной I возьмем импульс p_λ такой, что p_λ будет иметь выражение

$$p_\lambda = h - \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}z \sin \lambda - \mu H_1(z, \lambda) - \dots, \quad (5.4)$$

где всюду вместо z и p_z нужно подставить их выражения (5.3) через u и I .

На найденном периодическом решении

$$z^*(t) = z^0(t) + \mu z^1(t, \mu), \quad p_z^*(t) = p_z^0(t) + \mu p_z^1(t, \mu),$$

$$\lambda(t) = t, \quad p_\lambda^*(t) = p_\lambda^0(t) + \mu p_\lambda^1(t, \mu). \quad (5.5)$$

Отсюда заключаем, что в качестве независимого параметра в этих функциях вместо времени t можно взять угловую переменную λ и считать, что

$$p_\lambda^*(\lambda) = p_\lambda^0(\lambda) + \mu p_\lambda^1(\lambda, \mu).$$

При этом, как видно из (5.3),

$$p_\lambda^0(\lambda) = h - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \sin^2 \lambda. \quad (5.6)$$

При помощи канонического преобразования $(\lambda, p_\lambda) \mapsto (\lambda, \rho)$ перейдем к отклонению в полярных канонических переменных по формуле

$$p_\lambda = p_\lambda^*(\lambda) + \rho.$$

Такое преобразование является каноническим, поскольку

$$p_\lambda d\lambda = p_\lambda^*(\lambda) d\lambda + \rho d\lambda,$$

где, очевидно, выражение $p_\lambda^*(\lambda) d\lambda$ является дифференциалом первообразной от функции $p_\lambda^*(\lambda)$.

Теперь выполним вспомогательное преобразование $(\lambda, \rho) \mapsto (\lambda, p)$ вида

$$p = \frac{1}{2} + \rho,$$

после чего перейдем к прямоугольным переменным обычным образом:

$$z_1 = \sqrt{2p} \sin \lambda, \quad z_2 = \sqrt{2p} \cos \lambda.$$

Так что на фазовой плоскости (z_1, z_2) порождающее решение будет представлять собой равномерное движение изображающей точки по окружности радиуса 1. Итоговое преобразование можно представить в форме соответствия

$$(z, \lambda, p_z, p_\lambda) \mapsto (u, z_1, I, z_2).$$

Теперь, используя ранее полученные результаты, рассмотрим на многообразии M_h^3 в карте $\varphi_1 : M_h^3 \rightarrow (z, p_z, \lambda)$ для найденного периодического решения систему уравнений в вариациях. Для этого, как уже отмечалось выше, достаточно рассмотреть уравнения возмущенного движения вдоль порождающего решения (5.2). Проводя простые вычисления, получим систему в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= 0, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \mu \left(\frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| \right) \xi_2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

в которой были приняты обозначения: $\xi_1 = \delta\lambda$, $\xi_2 = \delta z$, $\xi_3 = \delta p_z$. Легко видеть, что эту систему линейных ОДУ можно свести к системе второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \mu \left(\frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| \right) \xi_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Как уже было вычислено ранее, эта система ОДУ, эквивалентная уравнению Хилла вида

$$\ddot{\xi}_2 + \varepsilon^2 \left(\frac{c}{16} |\sin t| - \frac{1}{4} \cos t \right) \xi_2 = 0,$$

имеет два чисто мнимых характеристических показателя, аналитически зависящих от ε и представимых в виде разложения

$$\lambda_{2,3} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \varepsilon + O(\varepsilon^3). \quad (5.9)$$

Решение задачи Коши и характеристические показатели системы (5.8) зависят от ε аналитически [17]. Из общей теории Флоке–Ляпунова известно, что (5.8) имеет два фундаментальных решения вида

$$\xi_j(t) = \varphi_j(t) e^{\lambda_j t} \quad (j = 2, 3), \quad (5.10)$$

где $\varphi_{2,3}$ являются 2π -периодическими функциями t . Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\varphi}_j = -\lambda_j \varphi_j + A(t, \mu) \varphi_j,$$

где $A(t, \mu)$ является матрицей правой части линейной системы (5.8). Для вычисления разложений функций $\varphi_j(t)$ по малому параметру ε в системе (5.8) выполним преобразование по формулам

$$\xi_2 = \eta_1, \quad \xi_3 = \varepsilon \eta_2$$

и получим новую линейную систему ОДУ с теми же, что и в (5.8), характеристическими показателями $\lambda_{2,3}$ и фундаментальными решениями

$$\eta_i(t) = \psi_i(t) e^{\lambda_{i+1} t} \quad (i = 1, 2)$$

такими, что $\varphi_{i+1,1}(t) = \psi_{i1}(t)$, $\varphi_{i+1,2}(t) = \varepsilon \psi_{i2}(t)$. Ясно, что вектор-функции $\psi_i(t)$ удовлетворяют ОДУ

$$\dot{\psi}_j = -\lambda_{j+1} \psi_j + \varepsilon B(t) \psi_j, \quad (i = 1, 2), \tag{5.11}$$

где матрица $B(t)$ имеет вид

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая разложение (5.9), систему (5.11) можно представить в виде

$$\dot{\psi} = \varepsilon C(t, \varepsilon) \psi, \tag{5.12}$$

где матрица $C(t, \varepsilon) = C^0(t) + \varepsilon^2 C^2 + \dots$ зависит от параметра ε аналитически и может быть представлена в форме

$$C(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mp \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} + O(\varepsilon^2) & 1 \\ \frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| & \mp \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Поскольку *a priori* известно, что система (5.12) при любом достаточно малом ε имеет одномерное линейное пространство периодических решений, то нетрудно задать однопараметрическое, аналитическое по ε семейство периодических решений $\psi(t, \varepsilon)$. Такое семейство может порождаться, например, начальными данными на единичной окружности. Будем использовать для начальных данных условие

$$\psi_1(0, \varepsilon) \equiv 1,$$

из которого в силу аналитичности функции $\psi_1(0, \varepsilon)$ по ε и справедливости разложения

$$\psi_1(0, \varepsilon) = \psi_{01}^0 + \varepsilon \psi_{01}^1 + \dots$$

сразу следует, что

$$\psi_{01}^0 = 1, \quad \psi_{01}^1 = 0, \dots$$

Таким образом, на периодическом решении $\psi(t, \varepsilon)$ для системы (5.12) должно выполняться условие периодичности

$$\int_0^{2\pi} C(t, \varepsilon) \psi(t, \varepsilon) dt = \mathbf{0},$$

из которого следует, что любой коэффициент в разложении левой части по ε имеет нулевое среднее. Подставляя теперь разложение

$$\psi(t, \varepsilon) = \psi^0(t) + \varepsilon \psi^1(t) + \dots$$

в левую и правую части уравнения (5.12), получим, в частности,

$$\dot{\psi}^0 = \mathbf{0}, \quad \dot{\psi}^1 = C^0(t) \psi^0, \dots$$

Условие нулевого среднего

$$\int_0^{2\pi} C^0(t) dt \psi^0 = \mathbf{0}$$

можно записать в виде системы двух уравнений

$$\mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} \psi_{01}^0 + 2\pi \psi_{02}^0 = 0, \quad (5.14)$$

$$-\frac{c}{4} \psi_{01}^0 \mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} \psi_{02}^0 = 0, \quad (5.15)$$

поскольку

$$\int_0^{2\pi} C^0(t) dt = \begin{pmatrix} \mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} & 2\pi \\ -\frac{c}{4} & \mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (5.14) имеем

$$\psi_{02}^0 = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \psi_{01}^0.$$

Подставляя полученную величину для ψ_{02}^0 в (5.15), получим тождество

$$\left(-\frac{c}{4} + \frac{c}{4}\right) \psi_{01}^0 \equiv 0.$$

Величину ψ_{01}^0 здесь можно выбирать произвольно. При нашем выборе аналитического семейства она равна единице. Так что имеем в нулевом приближении

$$\psi_{01}^0 = 1, \quad \psi_{02}^0 = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}}.$$

В дальнейшем нам понадобится также первая компонента первого приближения, имеющего вид

$$\psi^1(t) = \psi_0^1 + \int_0^t C^0(\tau) \psi^0 d\tau.$$

Компонента ψ_0^1 является нулевой. Первая строка матрицы $C^0(\tau)$, умноженная на вектор ψ^0 , также по предыдущему дает нулевой результат. Поэтому периодическое решение системы линейных ОДУ (5.12) можно записать в виде

$$\psi_1(t) = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \psi_2(t) = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} + O(\varepsilon),$$

из чего выводим, что соответствующие периодические функции в (5.10) допускают асимптотическое представление

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_3(t) = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Так что базисные решения, соответствующие характеристическим показателям системы (5.7), можно представить в форме

$$\xi_1(t) = \beta_1(1, 0, 0)^T, \quad \xi_2(t) = \beta_2 \varphi_2(t) e^{\lambda_2 t}, \quad \xi_3(t) = \beta_3 \varphi_3(t) e^{\lambda_3 t},$$

где β_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные. Вычислим эти же решения в карте φ_2 . Для этого представим диффеоморфизм

$$\mathbf{g} : (\lambda, z, p_z) \mapsto (u, z_1, z_1)$$

в виде композиции $\mathbf{g} = \mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}_2 \circ \mathbf{g}_1$, где частичные отображения задаются при помощи соответствий

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 & : (\lambda, z, p_z) \mapsto (u, \lambda, p_\lambda), \\ \mathbf{g}_2 & : (u, \lambda, p_\lambda) \mapsto (u, \lambda, p), \\ \mathbf{g}_3 & : (u, \lambda, p) \mapsto (u, z_1, z_1), \end{aligned}$$

вычисляемых по формулам

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &: \begin{cases} u = \arg(p_z + iz) = \text{atan2}(p_z, z), \\ \lambda = \lambda, \\ p_\lambda = h - \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}z \sin \lambda - \mu H_1(\lambda, z) - \dots, \end{cases} \\ \mathfrak{g}_2 &: \begin{cases} u = u, \\ \lambda = \lambda, \\ p = \frac{1}{2} + p_\lambda - p_\lambda^*(\lambda), \end{cases} \\ \mathfrak{g}_3 &: \begin{cases} u = u, \\ z_1 = \sqrt{2p} \sin \lambda, \\ z_2 = \sqrt{2p} \cos \lambda, \end{cases} \end{aligned}$$

причем функция $p_\lambda^*(\lambda)$ соответствует точному периодическому решению в соответствии с интегралом энергии

$$p_\lambda^*(\lambda) = h - \frac{1}{2}[p_z^*(\lambda)]^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}z^*(\lambda) \sin \lambda - \mu H_1(\lambda, z^*(\lambda)) - \dots$$

Вычислим по отдельности матрицы Якоби этих отображений. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, \lambda, p_\lambda)}{\partial(\lambda, z, p_z)} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{p_z}{z^2 + p_z^2} & -\frac{z}{z^2 + p_z^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial p_\lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial p_\lambda}{\partial z} & -p_z \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial(u, \lambda, p)}{\partial(u, \lambda, p_\lambda)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial p_\lambda^*}{\partial \lambda} & 1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial(u, z_1, z_2)}{\partial(u, \lambda, p)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} \\ 0 & -z_1 & \frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для обеспечения точности порядка ε при представлении решения системы в вариациях в карте φ_2 эти матрицы достаточно вычислить на порождающем решении, т. к. возмущения в решении первого порядка по μ соответствуют по $\varepsilon = \sqrt{\mu}$ второму порядку малости. На порождающем решении те же матрицы Якоби имеют вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(u, \lambda, p_\lambda)}{\partial(\lambda, z, p_z)} \right|_{\mu=0} &= \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \cos t & 2\sqrt{2} \sin t \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} \sin t \cos t & \frac{\sqrt{2}}{4} \sin t & \frac{\sqrt{2}}{4} \cos t \end{pmatrix}, \\ \left. \frac{\partial(u, \lambda, p)}{\partial(u, \lambda, p_\lambda)} \right|_{\mu=0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \sin t \cos t & 1 \end{pmatrix}, \\ \left. \frac{\partial(u, z_1, z_2)}{\partial(u, \lambda, p)} \right|_{\mu=0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено относительное движение КА под действием моментов сил гравитации и светового давления. Под КА подразумевается небесное тело, способное отражать световой поток от Солнца. Орбитальное движение КА считается известным. КА совершает плоские движения в горизонтальной плоскости относительно центра масс. Отражающее зеркало может быть размещено перпендикулярно плоскости орбиты. Основная задача, решенная в работе — это исследование устойчивости эксцентриситетных колебаний КА. Данный процесс развернут поэтапно. Сначала установлено существование колебаний заданного типа. Здесь штатным образом применена теорема о неявной функции. Последующий затем анализ устойчивости опирается на линейную теорию и сводится к рассмотрению систем в вариациях.

Общие вопросы динамики квазистатических систем можно найти в [4, 11]. Завершает работу анализ нелинейного случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
2. *Карымов А. А.* Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве// Прикл. мат. мех. — 1962. — 26, № 5. — С. 865–876.
3. *Косенко И. И.* Топологическая степень и аппроксимация решений нерегулярных задач механики. Колебания спутника на эллиптической орбите// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — 16. — С. 68–95.
4. *Красильников П. С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. — Ижевск: Институт комп. иссл., 2015.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
7. *Маркеев А. П.* Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 3. — С. 355–371.
8. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973.
9. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
10. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
11. *Розо М.* Нелинейные колебания в теории устойчивости. — М.: Наука, 1971.
12. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
13. *Уиттекер Э. Т.* Аналитическая динамика. — Ижевск: Удмуртский унив., 1999.
14. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
15. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972.
16. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. — Москва—Ижевск: Институт комп. иссл., 2004.
17. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
18. *Kossenko I. I.* On preservation of conditionally-periodic satellite librations in elliptic orbit with account of solar light pressure// Regul. Chaotic Dyn. — 2004. — 9, № 1. — С. 47–58.

И. И. Косенко

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

E-mail: kosenkoi@gmail.com

UDC 517.5+519.6+629.195.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326

EDN: XNCXFF

Forced Oscillations of a Satellite under the Influence of Light Pressure and Gravity Forces

I. I. Kosenko

Moscow Aviation Institute (National Research University)), Moscow, Russia

Abstract. The relative motion of a spacecraft under the influence of gravitational forces and light pressure is considered. By spacecraft we mean a celestial body capable of reflecting light from the Sun. The orbital motion of the spacecraft is considered known. The spacecraft makes plane movements in a horizontal plane relative to its center of mass. The reflecting mirror can be placed perpendicular to the orbital plane.

The main problem solved in this paper is the study of the stability of eccentric oscillations. This technology is being rolled out gradually. First, the existence of oscillations of a given type is established. To do this, the implicit function theorem is applied in a standard way. The subsequent stability analysis is based on linear theory and is reduced to the consideration of systems in variations. The paper is concluded with consideration of the nonlinear case.

Keywords: eccentricity oscillations, stability of oscillations, disturbance with a small parameter, light pressure, satellite orbit.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: I. I. Kosenko, “Forced Oscillations of a Satellite under the Influence of Light Pressure and Gravity Forces,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 2, 300–326. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326>

REFERENCES

1. V. V. Beletskiy, *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* [Movement of an artificial satellite relative to the center of mass], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
2. A. A. Karymov, “Opredelenie sil i momentov sil svetovogo davleniya, deystvuyushchikh na telo pri dvizhenii v kosmicheskom prostranstve” [Determination of forces and moments of light pressure forces acting on a body when moving in cosmic space], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1962, **26**, No. 5, 865–876 (in Russian).
3. I. I. Kosenko, “Topologicheskaya stepen' i approksimatsiya resheniy neregulyarnykh zadach mekhaniki. Kolebaniya sputnika na ellipticheskoy orbite” [Topological degree and approximation of solutions for nonregular problems of mechanics: oscillations of satellites on elliptic orbits], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **16**, 68–95 (in Russian).
4. P. S. Krasil'nikov, *Prikladnye metody issledovaniya nelineynykh kolebaniy* [Applied Methods for Studying Nonlinear Oscillations], Inst. Komp. Issl., Izhevsk, 2015 (in Russian).
5. I. G. Malkin, *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [Theory of Motion Stability], GITTL, Moscow–Leningrad, 1952 (in Russian).
6. I. G. Malkin, *Nekotorye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy* [Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations], Editorial URSS, Moscow, 2004 (in Russian).



7. A. P. Markeev, “Konstruktivnyy algoritm normalizatsii periodicheskogo gamil’toniana” [Constructive algorithm for normalizing a periodic Hamiltonian], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2005, **69**, No. 3, 355–371 (in Russian).
8. J. Moser, *Lektsii o gamil’tonovykh sistemakh* [Lectures on Hamiltonian Systems], Mir, Moscow, 1973 (Russian translation).
9. N. N. Moiseev, *Asimptoticheskie metody nelineynoy mekhaniki* [Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
10. L. S. Pontryagin, *Obyknovennyye differentsial’nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Izhevsk, 2001 (in Russian).
11. M. Rozo, *Nelineynyye kolebaniya v teorii ustoychivosti* [Nonlinear Oscillations in Stability Theory], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
12. V. A. Trenogin, *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
13. E. T. Whittaker, *Analiticheskaya dinamika* [A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies], Udmurt. Univ., Izhevsk, 1999 (in Russian).
14. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
15. L. Schwartz, *Analiz. T. 1* [Analyse Mathématique. Cours I et II], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
16. L. P. Shil’nikov, A. L. Shil’nikov, D. V. Turaev, and L. Chua, *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike. Chast’ 1* [Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part 1], Inst. Komp. Issl., Moskva–Izhevsk, 2004 (in Russian).
17. V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskiy, *Lineynyye differentsial’nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
18. I. I. Kosenko, “On preservation of conditionally-periodic satellite librations in elliptic orbit with account of solar light pressure,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004, **9**, No. 1, 47–58.

I. I. Kosenko

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

E-mail: kosenkoi@gmail.com