Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 2 (2024). С. 278–299
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299
EDN: YKDZHU

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С L_1-ДАННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^n$

Л. М. Кожевникова

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
Елабужский Институт Казанского Федерального университета, Елабуга, Россия

Аннотация. Рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с суммируемой правой частью в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщенной N-функции. В нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева доказано существование ренормализованного решения в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение, эллиптическое уравнение, обобщенная N-функция, пространство Музилака—Орлича—Соболева, ренормализованное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Л. М. Кожевникова.* Существование ренормализованного решения нелинейного эллиптического уравнения с L_1-данными в пространстве $\mathbb{R}^n$// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 2. С. 278–299. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299

1. Введение

В работе рассматривается уравнение

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + b_0(\mathrm{x}, u) + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$. Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}))$, $b_0(\mathrm{x}, s_0)$, $b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ имеют рост, определяемый функцией Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$. При этом на функцию M и сопряженную к ней функцию $\overline{M}$ не требуется дополнительное ограничение по переменной z (обычно это Δ_2-условие). Предполагается, что по переменной $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ функция M подчиняется условию ϕ-регулярности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака—Орлича.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В работе [16] доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.3}$$

в пространствах Музилака—Орлича с неоднородной анизотропной функцией Музилака—Орлича.

Авторы работ [8, 15] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+\mathrm{c}(u))+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

с функцией $\mathrm{c}\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

В работах [9, 14] (при $a_0\equiv 0$) и [22] доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+\mathrm{c}(\mathrm{x},u))+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

с каратеодориевой функцией $\mathrm{c}(\mathrm{x},s_0):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, подчиняющейся условию роста по переменной s_0.

В работе [20] доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (1.2), (1.3), установлена их эквивалентность. Все перечисленные результаты получены в пространствах Музилака—Орлича для ограниченных областей Ω.

Трудность в областях с бесконечной мерой состоит в том, что не работают теоремы вложения и аналог неравенства типа Фридрихса, поэтому установить ключевое соотношение (4.7) весьма проблематично. Автор решает эту проблему за счет свойств младшего члена $b_0(\mathrm{x},u)$ уравнения (1.1). Кроме того, важную роль в полученных результатах имеет теорема об аппроксимации элементов нерефлексивного пространства Музилака—Орлича—Соболева гладкими функциями (см. лемму 2.1). В работе [3] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле (1.1), (1.3) с функцией $b_0(\mathrm{x},s_0)=\dfrac{M(\mathrm{x},s_0)}{s_0}$ в нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева. При этом на младший член $b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})$ уравнения (1.1) накладывается условие знакоопределенности по переменной $s_0\in\mathbb{R}$:

$$b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})s_0\geqslant 0. \tag{1.4}$$

Другим путем в работе [1] в неограниченных областях установлено существование энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с сингулярным мерозначным потенциалом. При этом на сопряженную функцию $\overline{M}$ накладывается Δ_2-условие, а младший член уравнения удовлетворяет условию знака. Следует отметить, что впервые в неограниченных областях, допускающих бесконечную меру, для функции $M(\mathrm{x},z)=|z|^{p(\mathrm{x})}$ существование энтропийного и ренормализованного решений уравнения (1.1) в анизотропных пространствах с переменными показателями нелинейностей было установлено в работах [4, 17, 18]. Более полный обзор результатов представлен в работе [5].

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических задач без условия (1.4) исследовались в работах [6, 13] и др. В настоящей работе впервые в пространстве $\mathbb{R}^n$ без условия знакоопределенности (1.4) доказано существование ренормализованного решения уравнения (1.1) в нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева.

2. Пространства Музилака—Орлича

В этом разделе будут приведены необходимые сведения из теории обобщенных N-функций и пространств Музилака—Орлича (см. [21]).

Определение 2.1. Пусть функция $M(\mathrm{x},z):\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\mathrm{x},\cdot)$ — N-функция по $z\in\mathbb{R}$, т. е. она является выпуклой вниз, неубывающей при $z\in\mathbb{R}_+$, четной, непрерывной, $M(\mathrm{x},0)=0$ для п. в. $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$, и

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n} M(\mathrm{x},z)>0\quad\text{для всех}\quad z\neq 0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{z\to 0}\operatorname*{vrai\,sup}_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=0,$$

$$\lim_{z\to \infty}\operatorname*{vrai\,inf}_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=\infty; \tag{2.2}$$

2) $M(\cdot, z)$ — измеримая функция по $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(\mathrm{x}, z)$ называется *функцией Музилака—Орлича*, или *обобщенной N-функцией.*

Сопряженная функция $\overline{M}(\mathrm{x}, \cdot)$ к функции Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, \cdot)$ в смысле Юнга для п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ и любых $z \geqslant 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\mathrm{x}, z) = \sup_{y \geqslant 0} (yz - M(\mathrm{x}, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга:

$$|zy| \leqslant M(\mathrm{x}, z) + \overline{M}(\mathrm{x}, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Следует отметить, что $\overline{M}$ также является N-функцией (см. [21, пункты 13.4 и 13.6]).

Если для каждой положительной константы l имеем:

$$\lim_{z \to 0} \operatorname{vrai}\sup_{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{P(\mathrm{x}, lz)}{M(\mathrm{x}, z)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{z \to \infty} \operatorname{vrai}\sup_{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{P(\mathrm{x}, lz)}{M(\mathrm{x}, z)} = 0, \tag{2.4}$$

то это обозначается $P \prec\prec M$ и говорят, что P *растет медленнее*, чем M, в 0 или ∞.

Функция Музилака—Орлича N удовлетворяет Δ_2*-условию*, если существуют константы $c > 0$, $z_0 \geqslant 0$ и функция $H \in L_1(\mathbb{R}^n)$ такие, что для п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ и любых $|z| \geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$N(\mathrm{x}, 2z) \leqslant cN(\mathrm{x}, z) + H(\mathrm{x}).$$

В настоящей работе не предполагается, что N-функция M и ее сопряженная $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Существуют три класса Музилака—Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$ — обобщенный класс Музилака—Орлича, состоящий из измеримых функций $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что
$$\varrho_{M,\mathbb{R}^n}(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} M(\mathrm{x}, v(\mathrm{x}))d\mathrm{x} < \infty;$$

2) $L_M(\mathbb{R}^n)$ — обобщенное пространство Музилака—Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$, с нормой Люксембурга
$$\|v\|_{M,\mathbb{R}^n} = \inf\left\{\lambda > 0 \;\middle|\; \varrho_{M,\mathbb{R}^n}\left(\frac{v}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\};$$

3) $E_M(\mathbb{R}^n)$ — наибольшее линейное пространство, содержащееся в классе $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, $E_M(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n) \subset L_M(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что для любого $v \in E_M(\mathbb{R}^n)$ и любого $\mu > 0$ справедливо неравенство $\varrho_{M,\mathbb{R}^n}(v/\mu) < \infty$. Кроме того, для любого $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda > 0$ такое, что $\varrho_{M,\mathbb{R}^n}(v/\lambda) < \infty$ (см. [21, 7.4]).

Ниже в обозначениях $\|\cdot\|_{M,Q}$, $\varrho_{M,Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{\infty,Q}$ будем опускать индекс Q, если $Q = \mathbb{R}^n$.

Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$.

$(M1, \mathrm{loc})$: *Функция $M(\mathrm{x}, z)$ локально интегрируема, т. е.*

$$\varrho_{M,Q}(z) = \int\limits_Q M(\mathrm{x}, z)d\mathrm{x} < \infty, \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

для любого измеримого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $\operatorname{meas} Q < \infty$.

$(M2)$: *Функция $M(\mathrm{x}, z)$ удовлетворяет условию ϕ-регулярности, если существует функция $\phi : [0, 1/2] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что $\phi(\cdot, z)$ и $\phi(r, \cdot)$ — неубывающие функции, и для всех $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $z \in \mathbb{R}^+$ и некоторой константы $c > 0$ выполняется*

$$M(\mathrm{x}, z) \leqslant \phi(|\mathrm{x} - \mathrm{y}|, z)M(\mathrm{y}, z), \qquad \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \phi(\varepsilon, c\varepsilon^{-n}) < \infty.$$

Заметим, что из условий $(M1,\mathrm{loc})$, $(M2)$ следует ограниченность функции $M(\cdot,z)$ по $\mathrm{x}\in Q$, $\operatorname{meas} Q<\infty$, для любого фиксированного $z\in\mathbb{R}$.

Пусть M и $\overline{M}$ подчиняются условию $(M1,\mathrm{loc})$. Тогда пространство $E_M(\mathbb{R}^n)$ является замыканием по норме $\|\cdot\|_M$ простых интегрируемых функций (см. [21, Theorem 7.6]). Пространство $E_M(\mathbb{R}^n)$ — сепарабельное, и $(E_M(\mathbb{R}^n))^*=L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$. Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то $E_M(\mathbb{R}^n)=\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)=L_M(\mathbb{R}^n)$ и $L_M(\mathbb{R}^n)$ — сепарабельное. Пространство $L_M(\mathbb{R}^n)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда функции Музилака—Орлича M и $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Для $v\in L_M(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство:

$$\|v\|_M\leqslant\varrho_M(v)+1.$$

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $L_M(\mathbb{R}^n)$ модулярно сходится к $v\in L_M(\mathbb{R}^n)$ ($v^j\xrightarrow[j\to\infty]{M}v$), если существует константа $\lambda>0$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\varrho_M\left(\frac{v^j-v}{\lambda}\right)=0.$$

Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Также для двух сопряженных функций Музилака—Орлича M и $\overline{M}$, если $u\in L_M(\mathbb{R}^n)$ и $v\in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$, выполняется неравенство Гельдера:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})d\mathrm{x}\right|\leqslant2\|u\|_M\|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим *пространство Музилака—Орлича—Соболева*

$$W^1L_M(\mathbb{R}^n)=\{v\in L_M(\mathbb{R}^n)\bigm||\nabla v|\in L_M(\mathbb{R}^n)\}$$

с нормой $\|v\|_M^1=\|v\|_M+\||\nabla v|\|_M$. Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $W^1L_M(\mathbb{R}^n)$ модулярно сходится к $v\in W^1L_M(\mathbb{R}^n)$, если существует константа $\lambda>0$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\varrho_M\left(\frac{v^j-v}{\lambda}\right)=0,\qquad\lim_{j\to\infty}\varrho_M\left(\frac{|\nabla v^j-\nabla v|}{\lambda}\right)=0.$$

Для краткости записи введем обозначения $(L_M(\mathbb{R}^n))^n=\mathrm{L}_M(\mathbb{R}^n)$, $(L_M(\mathbb{R}^n))^{n+1}=\mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$, $(E_M(\mathbb{R}^n))^n=\mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n)$, $(E_M(\mathbb{R}^n))^{n+1}=\mathbf{E}_M(\mathbb{R}^n)$. Пространство $W^1L_M(\mathbb{R}^n)$ отождествляется с подпространством произведения $\mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$ и является замкнутым по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M,\mathbf{E}_{\overline{M}})$.

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака—Орлича—Соболева (см. [7, Theorem 1]).

Лемма 2.1. *Предположим, что N-функция M удовлетворяет условиям* $(M1,\mathrm{loc})$ *и* $(M2)$, *и пусть $\overline{M}$ удовлетворяет условию* $(M1,\mathrm{loc})$. *Тогда для любого $v\in W^1L_M(\mathbb{R}^n)$ существует последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$v^j\xrightarrow[j\to\infty]{M}v\quad\textit{модулярно в}\;W^1L_M(\mathbb{R}^n),\quad j\to\infty.$$

Примеры функций Музилака—Орлича M, удовлетворяющих условиям леммы 2.1:

1) N-функция $M(\mathrm{x},z)=M(z)$;
2) $M_1(\mathrm{x},z)=|z|^{p(\mathrm{x})}$, $M_2(\mathrm{x},z)=|z|^{p(\mathrm{x})}\ln(1+|z|)$, $M_3(\mathrm{x},z)=|z|\ln^{p(\mathrm{x})}(1+|z|)$, $M_4(\mathrm{x},z)=e^{|z|^{p(\mathrm{x})}}-1$, где $p:\mathbb{R}^n\to[p^-,p^+]$, $p^-=\inf\limits_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n}p(\mathrm{x})>1$, $p^+=\sup\limits_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n}p(\mathrm{x})<\infty$ и существует константа $c>0$ такая, что для всех $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n$, $|\mathrm{x}-\mathrm{y}|\leqslant\dfrac{1}{2}$ и выполняется неравенство

$$|p(\mathrm{x})-p(\mathrm{y})|\leqslant-c/\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|.$$

3. Формулировка результата

Предполагается, что функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n, \quad b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}, \quad b_0(\mathrm{x}, s_0) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1.1), измеримы по $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$, для почти всех $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ и выполнено следующее условие.

Условие (M). *Существуют неотрицательные функции* $\psi, \psi_0 \in E_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и положительные константы* $\widehat{a}, \overline{a}, \overline{d}, \widehat{d}, \widehat{b}_0, \overline{b}_0$ *такие, что для п. в.* $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ *и для любых* $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 \neq t_0$, $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$ *справедливы неравенства*:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}|) - \phi(\mathrm{x}); \tag{3.1}$$

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant \psi(\mathrm{x}) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(\mathrm{x}, M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}|)) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(\mathrm{x}, P(\mathrm{x}, s_0)); \tag{3.2}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0; \tag{3.3}$$

$$b_0(\mathrm{x}, s_0) s_0 \geqslant \overline{b}_0 M(\mathrm{x}, s_0); \tag{3.4}$$

$$|b_0(\mathrm{x}, s_0)| \leqslant \psi_0(\mathrm{x}) + \widehat{b}_0 \overline{M}^{-1}(\mathrm{x}, M(\mathrm{x}, s_0)). \tag{3.5}$$

Здесь функция Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ *подчиняется условиям* $(M1, \mathrm{loc})$, $(M2)$, *сопряженная к* M *функция* $\overline{M}(\mathrm{x}, z)$ *удовлетворяет условию* $(M1, \mathrm{loc})$. *Функция Музилака—Орлича* $P(\mathrm{x}, z)$ *такова, что* $P \prec\prec M$ *в окрестности* 0 *и* ∞, $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i t_i$, $|\mathrm{s}| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2\right)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, непрерывная положительная функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\widehat{b} \in L_1(\mathbb{R}^+)$ такие, что при п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство:

$$|b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant \widehat{b}(|s_0|) \left(M(\mathrm{x}, \widetilde{d}|\mathrm{s}|) + \Phi(\mathrm{x}) \right), \quad \widetilde{d} \leqslant \overline{d}. \tag{3.6}$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество измеримых функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ при любом $k > 0$. Для любой функции $u \in \mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$ и любого $k > 0$ имеем:

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{|u| < k\}} \nabla u \in \mathrm{L}_M(\mathbb{R}^n),$$

где χ_Q — характеристическая функция измеримого множества Q и ∇u — обобщенный градиент u. Введем обозначение $\langle u \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u d\mathrm{x}$.

Определение 3.1. *Ренормализованным решением* уравнения (1.1) называется функция $u \in \mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$ такая, что для любого $k > 0$ выполнены условия:

1) $b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n)$;
2) $b_0(\mathrm{x}, u)\chi_{\{\mathbb{R}^n : |u| < k\}} \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$;
3) $\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\chi_{\{\mathbb{R}^n : |u| < k\}} \in \mathrm{L}_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$;
4) $\lim\limits_{h \to \infty} \int\limits_{\{\mathbb{R}^n : h \leqslant |u| < h+1\}} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u|) d\mathrm{x} = 0$;

и для любых функций $S \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + b_0(\mathrm{x}, u) - f) S(u) \xi \rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot (S'(u) \xi \nabla u + S(u) \nabla \xi) \rangle = 0. \tag{3.7}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (M), *тогда существует ренормализованное решение уравнения* (1.1).

Следует отметить, что в работе [19] без ограничений на меру строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при тех же требованиях на функцию M для уравнения

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + \frac{M(\mathrm{x}, u)}{u} + b(\mathrm{x}, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega,$$

при условии монотонности функции $b(\cdot, s_0)$ установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле и доказана их единственность.

4. Подготовительные сведения

В этом разделе будут приведены вспомогательные леммы. Предполагается, что выполнено условие (M). Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведем теорему Витали в следующей форме (см. [2, гл. III, § 6, теорема 15]).

Лемма 4.1. *Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций из $L_1(\Omega)$ такая, что*

$$v^j \to v \quad \text{п. в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Для сходимости

$$v^j \to v \quad \text{сильно в} \quad L_1(\Omega), \quad j \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имела равностепенно абсолютно непрерывные интегралы: для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и измеримое множество $Q_\varepsilon \subset \Omega$, $\operatorname{meas} Q_\varepsilon < \infty$ такие, что

$$(i) \qquad \int\limits_Q |v^j(\mathrm{x})| d\mathrm{x} < \varepsilon \text{ для любого } Q \subset \Omega, \ \operatorname{meas} Q < \delta, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \qquad \int\limits_{\Omega\setminus Q_\varepsilon} |v^j(\mathrm{x})| d\mathrm{x} < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Замечание 4.1. Очевидно, в случае $\operatorname{meas}\Omega < \infty$ условие (ii) вытекает из условия (i).

Пользуясь выпуклостью функции $\overline{M}$, из (3.2) выводим оценку:

$$3\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|}{3\widehat{a}}\right) \leqslant M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}|) + \overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{\psi}{\widehat{a}}\right) + P(\mathrm{x}, s_0) = M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{s}|) + \Psi(\mathrm{x}) + P(\mathrm{x}, s_0) \qquad (4.1)$$

с функцией $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Применяя (2.3), (4.1), для $\mathrm{s}^1, \mathrm{s}^2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\mu > 0$ устанавливаем неравенства

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}^1)||\mathrm{s}^2| \leqslant 3\widehat{a}\mu\left(\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}^1)|}{3\widehat{a}}\right) + M\left(\mathrm{x}, \frac{|s^2|}{\mu}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{a}\mu\left(M(\mathrm{x}, \widehat{d}|s^1|) + P(\mathrm{x}, s_0) + 3M\left(\mathrm{x}, \frac{|s^2|}{\mu}\right) + \Psi(\mathrm{x})\right). \qquad (4.2)$$

Заметим, что ввиду $P \prec\prec M$, согласно (2.4), для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C(\varepsilon)$ такое, что для п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:

$$P(\mathrm{x}, z) \leqslant C(\varepsilon) M(\mathrm{x}, \varepsilon z). \qquad (4.3)$$

Применяя (2.3), (3.5) и выпуклость функции $\overline{M}$, для $s_0 \in \mathbb{R}$ устанавливаем неравенства

$$|b_0(\mathrm{x}, s_0)| \leqslant \widehat{b}_0\left(M(\mathrm{x}, s_0) + 2M(\mathrm{x}, 1) + \overline{M}(\mathrm{x}, \widehat{b}_0^{-1}\psi_0)\right) = \widehat{b}_0(M(\mathrm{x}, s_0) + 2M(\mathrm{x}, 1) + \Psi_0(\mathrm{x})), \qquad (4.4)$$

$$2\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|b_0(\mathrm{x}, s_0)|}{2\widehat{b}_0}\right) \leqslant M(\mathrm{x}, s_0) + \overline{M}(\mathrm{x}, \widehat{b}_0^{-1}\psi_0) = M(\mathrm{x}, s_0) + \Psi_0(\mathrm{x}) \qquad (4.5)$$

с функцией $\Psi_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 4.1. *Пусть $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что при всех $k \geqslant 1$ имеем $T_k(v) \in W^1L_M(\mathbb{R}^n)$ и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{\mathbb{R}^n : |v| \geqslant k\}} \frac{M(\mathrm{x}, v)}{|v|} d\mathrm{x} \leqslant C_1, \qquad (4.6)$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $k_0(C_1, M, \varepsilon)$ такое, что справедливо неравенство:

$$\operatorname{meas}\{\mathbb{R}^n : |v| \geqslant k\} < \varepsilon, \quad k \geqslant k_0. \qquad (4.7)$$

Доказательство. Из неравенства (4.6), пользуясь монотонностью функции $M(\mathrm{x}, s_0)/s_0$ по переменной s_0, выводим соотношения

$$\operatorname{meas}\{\mathbb{R}^n : |v| \geqslant k\} \inf_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{M(\mathrm{x}, k)}{k} \leqslant \int\limits_{\{\mathbb{R}^n : |v|\geqslant k\}} \frac{M(\mathrm{x}, v)}{|v|} d\mathrm{x} \leqslant C_1.$$

Отсюда, применяя (2.2), устанавливаем (4.7). □

Лемма 4.2 (см. [10, Lemma 2]). *Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность функций из $L_M(\mathbb{R}^n)$ такая, что имеет место сходимость*

$$v^j \to v \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad j \to \infty, \tag{4.8}$$

тогда $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$ и $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, в топологии $\sigma(L_M, E_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\mathbb{R}^n)$.

Имеем следствие из теоремы Витали.

Лемма 4.3 (см. [7, Lemma 2]). *Пусть v, $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — функции из $L_M(\mathbb{R}^n)$ и*

$$v^j \overset{M}{\to} v \quad \text{модулярно в} \quad L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \to \infty.$$

Тогда $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, в топологии $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 4.4. *Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность функций из $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что имеет место сходимость (4.8), тогда $v \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, в топологии $\sigma(L_\infty, L_1)$ пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Если, кроме того, $g \in L_M(\mathbb{R}^n)$ ($g \in E_M(\mathbb{R}^n)$), то

$$v^j g \to vg \quad \text{модулярно (сильно) в } L_M(\mathbb{R}^n) \text{ (в } E_M(\mathbb{R}^n)), \quad j \to \infty.$$

Доказательство леммы 4.4 следует из теоремы Лебега.

Замечание 4.2. Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, v — измеримые в $\mathbb{R}^n$ функции такие, что имеет место сходимость (4.8). Тогда

$$\chi_{\{\mathbb{R}^n : |v^j|\leqslant k\}} \to \chi_{\{\mathbb{R}^n : |v|\leqslant k\}} \quad \text{п. в. на} \quad \mathbb{R}^n, \quad j \to \infty$$

для таких k, что

$$\operatorname{meas}\{\mathbb{R}^n : |v| = k\} = 0. \tag{4.9}$$

Таких k, для которых условие (4.9) не выполнено, может быть не более чем счетное число. Положительные числа k, для которых выполнено условие (4.9), будем называть «*правильными*» для функции v (см. [12, Lemma 9]).

Лемма 4.5 (см. [21, Definition 9.1, Lemma 9.2]). *Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций из $E_M(\Omega)$. Для сходимости*

$$v^j \to 0 \quad \text{в} \quad E_M(\Omega), \quad j \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого измеримого $Q \subset \Omega$, $\operatorname{meas} Q < \infty$,

$$v^j \to 0 \quad \text{по мере в } Q, \quad j \to \infty,$$

и семейство функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имело равностепенно абсолютно непрерывные нормы: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $Q_\varepsilon \subset \Omega$, $\operatorname{meas} Q_\varepsilon < \infty$ и $\delta > 0$ такие, что

$$(iii) \quad \|v^j \chi_Q\|_M < \varepsilon \text{ для любого } Q \subset Q_\varepsilon,\ \operatorname{meas} Q < \delta, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$(iv) \quad \|v^j \chi_{\Omega\setminus Q_\varepsilon}\|_M < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Лемма 4.6. *Пусть M подчиняется условию $(M1, \mathrm{loc})$, тогда для любой функции $v \in E_M(\Omega)$, $\operatorname{meas}(\Omega) < \infty$, ее норма абсолютно непрерывна, т. е. выполнены условия $(iii), (iv)$.*

Доказательство следует из [21, Lemma 13.16] и плотности ограниченных функций в $E_M(\Omega)$.

Утверждение 4.1. *Пусть Q — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ и выполнены условия* (3.1)–(3.3) *и для некоторого фиксированного $k > 0$ для последовательности функций*

$$(T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \in \mathbf{L}_M(Q),\ m \in \mathbb{N},$$

справедливы условия:

$$\nabla T_k(u^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_M, \mathrm{E}_{\overline{M}}) \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_M(Q), \quad m \to \infty,$$

$$T_k(u^m) \to T_k(u) \quad \text{п. в. в} \quad Q, \quad m \to \infty,$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)),\ m \in \mathbb{N}, \quad \text{ограничена в} \quad \mathrm{L}_{\overline{M}}(Q);$$

$$\lim_{s\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int\limits_Q q_s^m(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = 0,$$

$$q_s^m(\mathrm{x}) = (\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s), \tag{4.10}$$

где χ_s — характеристическая функция множества $Q_s = \left\{\mathrm{x} \in Q \;\middle|\; |\nabla T_k(u)| \leqslant s\right\}$. Тогда по некоторой подпоследовательности

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{п. в. в} \quad Q, \quad m \to \infty,$$

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{модулярно в} \quad \mathrm{L}_M(Q), \quad m \to \infty,$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \to \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \text{ в } L_1(Q), \quad m \to \infty.$$

Доказательство утверждения см. в [5, Лемма 4.10] и [3, Утверждение 1].

Лемма 4.7. *Пусть g^j, $j \in \mathbb{N}$, g — такие функции из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$, что $g^j \geqslant 0$ п. в. в $\mathbb{R}^n$,*

$$g^j \to g \quad \text{сильно} \quad \text{в} \quad L_1(\mathbb{R}^n), \quad j \to \infty,$$

и пусть v^j, $j \in \mathbb{N}$, v — измеримые функции в $\mathbb{R}^n$ такие, что имеет место сходимость (4.8) *и*

$$|v^j| \leqslant g^j, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v^j d\mathrm{x} \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} v d\mathrm{x}, \quad j \to \infty.$$

5. Доказательство существования ренормализованного решения

5.1. Аппроксимационная задача. Положим

$$f^m(\mathrm{x}) = T_m f(\mathrm{x}) \chi_{U(m)}, \quad U(m) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathrm{x}| < m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Несложно показать, что

$$f^m \to f \quad \text{в} \quad L_1(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty, \tag{5.1}$$

и при этом

$$|f^m(\mathrm{x})| \leqslant |f(\mathrm{x})|, \quad |f^m(\mathrm{x})| \leqslant m\chi_{U(m)}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим уравнения

$$-\mathrm{div}\ \mathrm{a}^m(\mathrm{x}, u, \nabla u) + a_0^m(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f^m(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.3}$$

с функциями

$$\mathrm{a}^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(s_0), \mathrm{s}), \quad a_0^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = b^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) + b_0(\mathrm{x}, s_0).$$

Здесь

$$\mathrm{a}^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_1^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})), \quad b^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = T_m b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \chi_{U(m)}.$$

Очевидно, что

$$|b^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant |b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|, \quad |b^m(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leqslant m\chi_{U(m)}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (s_0, \mathrm{s}) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{5.4}$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует обобщенное решение $u^m \in \mathring{W}^1 L_M(U(m))$ уравнения (5.3) (см. [11, Theorem 13]). Продолжим u^m нулем на $\mathbb{R}^n \setminus U(m)$, тогда для любой функции $v \in \mathring{W}^1 L_M(U(l)) \cap L_\infty(U(l))$, $l \leqslant m$, выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) + b_0(\mathrm{x}, u^m) - f^m(\mathrm{x}))v\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla v\rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

5.2. Оценки для приближенных решений. Установим априорные оценки для последовательности $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Пусть

$$\widehat{B}(s_0) = \frac{1}{\overline{a}} \int\limits_0^{s_0} \widehat{b}(|z|)dz,$$

тогда $0 \leqslant \widehat{B}(s_0) \leqslant \widehat{B}(+\infty) = \dfrac{1}{\overline{a}} \int\limits_0^{\infty} \widehat{b}(|z|)dz = C_0 < \infty$, $s_0 \in \mathbb{R}^+$. Очевидно, что $\widehat{b}$ ограничена на $\mathbb{R}^+$, следовательно, справедлива оценка $\widehat{b}(|s_0|) \leqslant \widehat{C}$, $s_0 \in \mathbb{R}$.

Положив в (5.5) $v = T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} = T_k(u^m - T_h(u^m)) e^{2\widehat{B}(|u^m|)}$, $h, k > 0$, будем иметь

$$\int\limits_{\{h \leqslant |u^m| < k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} +$$
$$+ \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} (b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) + b_0(\mathrm{x}, u^m)) \, T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} +$$
$$+ \frac{2}{\overline{a}} \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| d\mathrm{x} \leqslant k \int\limits_{\{|u^m| \geqslant h\}} |f^m| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x}.$$

Далее выводим

$$\int\limits_{\{h \leqslant |u^m| < k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} + \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} b_0(\mathrm{x}, u^m) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} + \tag{5.6}$$
$$+ \frac{2}{\overline{a}} \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| d\mathrm{x} \leqslant$$
$$\leqslant k \int\limits_{\{|u^m| \geqslant h\}} |f| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} + \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m)| |T_{k,h}(u^m)| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x}.$$

Применяя (3.4), оценим второй интеграл слева в неравенстве (5.6)

$$\int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} b_0(\mathrm{x}, u^m) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} \geqslant \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} \overline{b}_0 M(\mathrm{x}, u^m) \frac{|\, T_{k,h}(u^m) \,|}{|\, u^m \,|} e^{2\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x}. \tag{5.7}$$

Применяя (3.1), (3.6), оценим третий интеграл слева в неравенстве (5.6)

$$\frac{2}{\overline{a}} \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| d\mathrm{x} \geqslant$$
$$\geqslant 2 \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} \left(M(\mathrm{x}, \overline{d} |\nabla u^m|) - \frac{\phi}{\overline{a}} \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| d\mathrm{x} \geqslant \tag{5.8}$$
$$\geqslant 2 \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{b}(|u^m|) (\frac{\phi}{\overline{a}} + \Phi) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| d\mathrm{x} \geqslant$$
$$\geqslant 2 \int\limits_{\{h \leqslant |u^m|\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{C} (\frac{\phi}{\overline{a}} + \Phi) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| d\mathrm{x}.$$

Соединяя оценки (5.6)–(5.8), выводим неравенство

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m)\cdot\nabla u^m + \phi)\,d\mathrm{x} + \tag{5.9}$$

$$+\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|\}} \left(\overline{b}_0\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|} + |b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)|\right)|T_{k,h}(u^m)|d\mathrm{x} \leqslant C_4 \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} (k\phi_1+\phi)\,d\mathrm{x},$$

где ϕ_1 — положительная функция из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует неравенство

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m)\cdot\nabla u^m + \phi)\,d\mathrm{x} + \tag{5.10}$$

$$+\,k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k+h\}} \left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)| + \overline{b}_0\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)d\mathrm{x} \leqslant C_4 \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} (k\phi_1+\phi)\,d\mathrm{x} \leqslant C_5k + C_6, \quad m\in\mathbb{N}.$$

В частности, полагая в (5.9) $h=0$, устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m) + \phi)\,d\mathrm{x} +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)| + \overline{b}_0\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)|T_k(u^m)|d\mathrm{x} \leqslant C_5k + C_6, \quad m\geqslant k. \tag{5.11}$$

Отсюда, применяя (3.1), выводим

$$\overline{a}\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u^m|)d\mathrm{x} + k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} \left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)| + \overline{b}\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)d\mathrm{x} \leqslant \tag{5.12}$$

$$\leqslant \overline{a}\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u^m|)d\mathrm{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)| + \overline{b}_0\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}\right)|T_k(u^m)|d\mathrm{x} \leqslant C_6 + C_5k, \quad m\geqslant k.$$

Из оценки (5.12) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} M(\mathrm{x},T_k(u^m))d\mathrm{x} = \int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},u^m)d\mathrm{x} + \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} M(\mathrm{x},k)d\mathrm{x} \leqslant \tag{5.13}$$

$$\leqslant \int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},u^m)d\mathrm{x} + k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} \frac{M(\mathrm{x},u^m)}{|u^m|}d\mathrm{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{M(\mathrm{x},u^m)}{u^m}T_k(u^m)d\mathrm{x} \leqslant C_7k + C_8, \quad m\geqslant k.$$

Кроме того, из (5.12) следует оценка

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla u^m|)d\mathrm{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla T_k(u^m)|)d\mathrm{x} \leqslant C_9(k), \quad m\geqslant k. \tag{5.14}$$

Из оценки (5.11), в частности, имеем

$$\|b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)\|_1 \leqslant C_{10}(k), \quad m\geqslant k. \tag{5.15}$$

Кроме того, из оценок (5.13), (5.14) выводим

$$\|T_k(u^m)\|_M + \|\nabla T_k(u^m)\|_M \leqslant C_{11}(k), \quad m\geqslant k. \tag{5.16}$$

5.3. Сходимость почти всюду. Из оценки (5.12), согласно предложению 4.1, имеем:

$$\operatorname{meas}\{|u^m| \geqslant \rho\} \to 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad \rho \to \infty. \tag{5.17}$$

Из (5.10) при $k = 1$ для любого $h > 0$ получаем:

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<1+h\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi)\, d\mathrm{x} +$$
$$+ \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h+1\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m)| + \overline{b}_0 \frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{|u^m|}\right) d\mathrm{x} \leqslant C_4 \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} (\phi_1 + \phi) d\mathrm{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ввиду того, что $\phi_1, \phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, учитывая (5.17), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое $\widetilde{h}(\varepsilon) > 1$ такое, что для $h \geqslant \widetilde{h}$ справедлива оценка:

$$\int\limits_{\{h-1\leqslant|u^m|<h\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi)\, d\mathrm{x} + \tag{5.18}$$
$$+ \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m)| + \overline{b}_0 \frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{|u^m|}\right) d\mathrm{x} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так же, как в [3], устанавливаются сходимость по подпоследовательности:

$$u^m \to u \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m \to \infty, \tag{5.19}$$

и для любого $k > 0$ имеем сходимости:

$$\nabla T_k(u^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_M, \mathrm{E}_{\overline{M}}) \quad \text{в} \quad W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty, \tag{5.20}$$
$$T_k(u^m) \to T_k(u) \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m \to \infty. \tag{5.21}$$

Выполняя предельный переход в (5.13) по $m \to \infty$, заключаем принадлежность

$$M(\mathrm{x}, T_k(u)), \quad \frac{M(\mathrm{x}, u)}{u} T_k(u) \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда, применяя оценку (4.5), заключаем, что условие 2) определения 3.1 выполнено.

Далее докажем, что для любой функции $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ имеет место сходимость

$$b_0(\mathrm{x}, u^m) S(u^m) \to b_0(\mathrm{x}, u) S(u) \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty. \tag{5.22}$$

Учитывая сходимость (5.19), имеем:

$$b_0(\mathrm{x}, u^m) S(u^m) \to b_0(\mathrm{x}, u) S(u) \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m \to \infty. \tag{5.23}$$

Пусть Q — произвольное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\operatorname{supp} S \subset [-K, K]$ для $K > 0$ и $|S(r)| \leqslant K_1$ для любого $r \in \mathbb{R}$. Пользуясь (4.4), получаем следующие соотношения:

$$\int\limits_Q |b_0(\mathrm{x}, u^m)||S(u^m)| d\mathrm{x} = \int\limits_Q |b_0(\mathrm{x}, u^m)||S(u^m)| \chi_{\{\mathbb{R}^n : |u^m| < K\}} d\mathrm{x} \leqslant$$
$$\leqslant K_1 \widehat{b}_0 \int\limits_Q (\Psi_0 + 2M(\mathrm{x}, 1) + M(\mathrm{x}, K)) d\mathrm{x}.$$

Отсюда, ввиду принадлежности $M(\mathrm{x}, K) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, заключаем равномерную интегрируемость последовательности $\{|b(\mathrm{x}, u^m) S(u^m)|\}_{m\in\mathbb{N}}$ для любого $Q \subset \mathbb{R}^n$: $\operatorname{meas} Q < \infty$. Учитывая сходимость (5.23), применяя лемму 4.1, устанавливаем сходимость (5.22).

5.4. Модулярная сходимость градиентов от срезок. Докажем сходимости

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{модулярно в} \quad \mathrm{L}_{M,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty, \tag{5.24}$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \to \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty. \tag{5.25}$$

Пусть $\mathrm{w} \in \mathrm{E}_M(\Omega)$ произвольное, из условия (3.3) следует неравенство

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \mathrm{w})) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \mathrm{w}) \geqslant 0. \tag{5.26}$$

Отсюда получаем:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \mathrm{w} d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) d\mathrm{x} -$$
$$- \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \mathrm{w}) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \mathrm{w}) d\mathrm{x}. \tag{5.27}$$

Далее, применяя (4.1), (4.3) ($\varepsilon = 1$), выводим

$$3 \int\limits_\Omega \overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \mathrm{w})(3\widehat{a})^{-1}|) d\mathrm{x} \leqslant \|\Psi\|_1 + C \int\limits_\Omega M(\mathrm{x}, T_k(u^m)) d\mathrm{x} + \int\limits_\Omega M(\mathrm{x}, \widehat{d}|\mathrm{w}|) d\mathrm{x}.$$

Отсюда, применяя (5.13), устанавливаем оценку

$$\|\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \mathrm{w})\|_{\overline{M}} \leqslant C_{12}, \quad m \geqslant k. \tag{5.28}$$

Соединяя (5.27), (5.11), (5.16), (5.28), получаем оценку:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \mathrm{w} d\mathrm{x} \leqslant C_{13}, \quad m \geqslant k, \quad \forall\, \mathrm{w} \in \mathrm{E}_M(\Omega).$$

Применяя принцип равномерной ограниченности, при любом $k > 0$ имеем оценку:

$$\|\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\|_{\overline{M}} \leqslant C_{14}(k), \quad m \geqslant k. \tag{5.29}$$

Из оценки (5.29) следует сходимость по подпоследовательности

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \tilde{\mathrm{a}}_k \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_{\overline{M}}, \mathrm{E}_M) \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty. \tag{5.30}$$

Для положительных вещественных чисел m, j, s обозначим через $\omega(m, j, s)$ любую величину такую, что

$$\lim_{s\to+\infty} \lim_{j\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \omega(m, j, s) = 0.$$

Пусть $h, k,\ h - 1 > k > 0$.

Согласно лемме 2.1, существует последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$v^j \to T_k(u) \quad \text{модулярно в} \quad W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \to \infty,$$

тогда

$$T_k(v^j) \to T_k(u) \quad \text{модулярно в} \quad W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \to \infty. \tag{5.31}$$

Отсюда, согласно лемме 4.1, следует, что найдется $\lambda > 0$ такое, что для последовательностей

$$\left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|T_k(u) - T_k(v^j)|}{\lambda}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|\nabla(T_k(u) - T_k(v^j))|}{\lambda}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$$
$$\text{выполнены условия } (i), (ii) \tag{5.32}$$

и справедлива сходимость по некоторой подпоследовательности $J \subset \mathbb{N}$ (см. [21, Remark 7.9]:

$$T_k(v^j) \to T_k(u), \quad \nabla T_k(v^j) \to \nabla T_k(u) \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad j \to \infty. \tag{5.33}$$

Замечание 5.1. Пользуясь выпуклостью функции $M(\mathrm{x}, \cdot)$ и тем, что $T_k(u) \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$, несложно установить эквивалентность (5.32) условию:

$$\left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|T_k(v^j)|}{\lambda_1}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}, \left\{M\left(\mathrm{x}, \frac{|\nabla T_k(v^j)|}{\lambda_1}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ подчиняются условиям } (i), (ii)$$

с некоторым $\lambda_1 > 0$.

Кроме того, согласно лемме 4.3, имеем:

$$\nabla T_k(v^j) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_M, \mathrm{L}_{\overline{M}}), \quad j \to \infty.$$

Полагаем

$$z^{mj} = T_k(u^m) - T_k(v^j), \quad z^j = T_k(u) - T_k(v^j), \quad m, j \in \mathbb{N},$$

$\varphi_k(\rho) = \rho \exp(\gamma^2 \rho^2)$, где $\gamma = \dfrac{\widehat{b}_k}{\overline{a}}$, $\widehat{b}_k = \max\{\widehat{b}(|s|) : |s| \leqslant k\}$. Очевидно, что

$$\psi_k(\rho) = \varphi_k'(\rho) - 2\gamma |\varphi_k(\rho)| \geqslant 1/2, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$1/2 \leqslant \psi_k(z^{mj}) \leqslant \max_{[-2k,2k]} \psi_k(\rho) = C_{15}(k), \quad m, j \in \mathbb{N}. \tag{5.34}$$

Ввиду (5.21), (5.33) имеем:

$$\varphi_k(z^{mj}) \to \varphi_k(z^j), \quad \varphi_k'(z^{mj}) \to \varphi_k'(z^j), \quad \psi_k(z^{mj}) \to \psi_k(z^j) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \to \infty, \tag{5.35}$$

$$\varphi_k(z^j) \to \varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k'(z^j) \to \varphi_k'(0) = 1, \quad \psi_k(z^j) \to \psi_k(0) = 1 \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \to \infty, \tag{5.36}$$

а также

$$|\varphi_k(z^{mj})| \leqslant \varphi_k(2k), \quad 1 \leqslant \varphi_k'(z^{mj}) \leqslant \varphi_k'(2k), \quad m, j \in \mathbb{N}, \tag{5.37}$$

$$|\varphi_k(z^j)| \leqslant \varphi_k(2k), \quad 1 \leqslant \varphi_k'(z^j) \leqslant \varphi_k'(2k), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.38}$$

Применяя (5.35)–(5.38), по лемме 4.4 устанавливаем сходимости:

$$|\varphi_k(z^{mj})| \rightharpoonup |\varphi_k(z^j)| \quad \text{в топологии} \quad \sigma(L_\infty, L_1) \quad \text{пространства } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty, \tag{5.39}$$

$$|\varphi_k(z^j)| \rightharpoonup 0 \quad \text{в топологии} \quad \sigma(L_\infty, L_1) \quad \text{пространства } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad j \to \infty. \tag{5.40}$$

Кроме того, для любой функции $g \in E_M(\mathbb{R}^n)$, применяя лемму 4.4, устанавливаем сходимости

$$\varphi_k(z^{mj}) g \to \varphi_k(z^j) g \quad \text{сильно в} \quad E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty, \tag{5.41}$$

$$\varphi_k(z^j) g \to 0 \quad \text{сильно в} \quad E_M(\mathbb{R}^n), \quad j \to \infty. \tag{5.42}$$

Введем обозначения χ_s^j, χ_s, ${}_k\chi^m$, ${}_k\chi$ для характеристических функций множеств $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : |\nabla T_k(v^j)| \leqslant s\}$, $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : |\nabla T_k(u)| \leqslant s\}$, $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : |u^m| \geqslant k\}$, $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : |u| \geqslant k\}$, соответственно. Будем рассматривать «правильные» k, s, для которых $\operatorname{meas}\{\mathbb{R}^n : |u| = k\} = 0$ и $\operatorname{meas}\{\mathbb{R}^n : |\nabla T_k(u)| = s\} = 0$.

Положим $\eta_h(r) = \min(1, \max(0, h - r + 1))$, $r \in \mathbb{R}$. Для краткости записи будем использовать обозначения

$$\zeta_{h-1}^m = \eta_{h-1}(|u^m|), \quad \zeta_{h-1} = \eta_{h-1}(|u|), \quad \eta_R = \eta_R(|\mathrm{x}|).$$

Из (5.19), (5.33) для правильных k, s следуют сходимости:

$$\zeta_{h-1}^m \to \zeta_{h-1} \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m \to \infty, \tag{5.43}$$

$$\chi_s^j \to \chi_s \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad j \to \infty, \tag{5.44}$$

$${}_k\chi^m \to {}_k\chi \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m \to \infty. \tag{5.45}$$

Принимая в качестве тестовой функции в (5.5) $\varphi_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}$, получим

$$\begin{gathered}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla(\varphi_k(z^{mj}) \eta_R \zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)}) d\mathrm{x} + \\
+ \int_{\mathbb{R}^n} b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) \varphi_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} + \\
+ \int_{\mathbb{R}^n} b_0(\mathrm{x}, u^m) \varphi_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^m \varphi_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} = \\
= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad m \geqslant h.
\end{gathered} \tag{5.46}$$

Оценки интегралов I_2–I_4. Ввиду оценки (4.4) имеем:

$$|b_0(\mathrm{x},u^m)|\zeta^m_{h-1}\eta_R \leqslant \widehat{b}_0\left(M(\mathrm{x},h)+2M(\mathrm{x},1)+\Psi_0\right)\eta_R = \Psi_h\eta_R \in L_1(\mathbb{R}^n);$$

из сходимостей (5.39), (5.40), имеем:

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi_h\eta_R|\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x} \leqslant \omega_{h,R}(m) + e^{C_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Psi_h\eta_R|\varphi_k(z^j)|d\mathrm{x} = \omega_{h,R}(m,j). \tag{5.47}$$

Аналогично, благодаря (5.2), ввиду $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$|I_4| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f||\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x} \leqslant \omega(m) + e^{C_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f||\varphi_k(z^j)|d\mathrm{x} = \omega(m,j). \tag{5.48}$$

Применяя (5.4), (3.6), оценим интеграл

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b^m(\mathrm{x},u^m,\nabla u^m)||\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\xi^m_{h-1}d\mathrm{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{b}(|u^m|)\left(M(\mathrm{x},\overline{d}|\nabla T_h(u^m)|)+\Phi(\mathrm{x})\right)|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\xi^m_{h-1}d\mathrm{x}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Используя (3.1), выводим

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{\overline{a}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\overline{a}\Phi(\mathrm{x})+\phi(\mathrm{x})\right)|\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}\widehat{b}(|u^m|)d\mathrm{x} +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}}\left|\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)\right||\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x} +$$

$$+\int\limits_{\{|u^m|>k\}}\frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_h(u^m)|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\xi^m_{h-1}d\mathrm{x} = \tag{5.49}$$

$$= I_{21}+I_{22}+I_{23}.$$

Учитывая то, что $z^{mj}u^m\geqslant 0$ при $|u^m|\geqslant k$, выводим

$$I_1 \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\varphi'_k(z^{mj})\nabla z^{mj}\eta_R\zeta^m_{h-1}e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x} -$$

$$-\int\limits_{\{\mathbb{R}^n:h-1\leqslant|u^m|<h\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla u^m|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x} +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\varphi_k(z^{mj})\nabla\eta_R\zeta^m_{h-1}e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x} - \tag{5.50}$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}}|\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)||\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x} +$$

$$+\int\limits_{\{|u^m|>k\}}\frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\overline{a}}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_h(u^m)|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\xi^m_{h-1}d\mathrm{x} =$$

$$= I_{11}-I_{12}+I_{13}-I_{14}+I_{15}.$$

Теперь, используя то, что $I_{15}=I_{23}$, $I_{22}=I_{14}$, и оценки интегралов (5.47)–(5.50), из (5.46) выводим неравенства

$$I_{11}-2I_{22}\leqslant\omega_{h,R}(m,j)+I_{21}+I_{12}-I_{13}, \quad m\geqslant h. \tag{5.51}$$

Далее, учитывая (3.1), получаем

$$I_{12}+I_{21}+2I_{22}\leqslant \varphi_k(2k)e^{C_0}\int\limits_{\{\mathbb{R}^n:h-1\leqslant|u^m|<h\}}(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla u^m+\phi)\,d\mathrm{x}+$$
$$+C_{16}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\Phi(\mathrm{x})+\phi(\mathrm{x}))\,|\varphi_k(z^{mj})|d\mathrm{x}+ \tag{5.52}$$
$$+2\frac{\widehat{b}_k}{\overline{a}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)|\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}\eta_R d\mathrm{x}=I_{121}+I_{211}+I_{221}.$$

Ввиду (5.39), (5.40), имеем:

$$I_{211}=\omega(m,j). \tag{5.53}$$

Благодаря (5.18), заключаем:

$$I_{121}\leqslant\omega(h). \tag{5.54}$$

Применяя оценку (5.29) и сходимости (5.41), (5.42) с $g=\chi_{U(R+1)}$, устанавливаем соотношения

$$|I_{13}|\leqslant C_{17}\int\limits_{U(R+1)}|\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))|\cdot|\varphi_k(z^{mj})|d\mathrm{x}\leqslant C_{18}(h)\|\varphi_k(z^{mj})\|_{M,U(R+1)}=\omega_{h,R}(m,j). \tag{5.55}$$

Соединяя (5.51)–(5.55), устанавливаем

$$I_5=I_{11}-I_{221}\leqslant\omega(h)+\omega_{h,R}(m,j),\quad m\geqslant h. \tag{5.56}$$

Представление I_5. Выполняя элементарные преобразования, выводим равенства

$$I_5=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)\varphi_k'(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}-$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}-$$
$$-\frac{2\widehat{b}_k}{\overline{a}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(u^m)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}-$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot(\nabla T_k(u^m)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}-$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\varphi_k'(z^{mj})\chi_s^j\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}.$$

Очевидно равенство

$$I_5=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot(\nabla T_k(u^m)-\nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}- \tag{5.57}$$

$$-\frac{2\widehat{b}_k}{\overline{a}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^{mj})|\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(\mathrm{a}(\mathrm{x},T_k(u^m),\nabla T_k(u^m))-\zeta_{h-1}^m\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\big)\cdot\nabla T_k(v^j)_k\chi^m\chi_s^j\varphi_k'(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{a}(\mathrm{x},T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}d\mathrm{x}=$$

$$=I_{51}+I_{52}+I_{53}+I_{54},\quad m\geqslant h.$$

Оценки интегралов I_{52}*–*I_{54}.

Применяя (5.19), (5.35), (5.37) и лемму 4.4 с $g=\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\eta_R\in \mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\eta_R\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^{mj})|e^{\widehat{B}(|u^m|)}\to\eta_R\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^j)|e^{\widehat{B}(|u|)}\ \text{ сильно в } \mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n),\ m\to\infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.30), устанавливаем

$$I_{52}=-\frac{2\widehat{b}_k}{\overline{a}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\mathrm{a}}_k\cdot\nabla T_k(v^j)\chi_s^j|\varphi_k(z^j)|\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}d\mathrm{x}+\omega_R(m).$$

Применяя (5.33), (5.36), (5.38), (5.44), по теореме Лебега устанавливаем:

$$I_{52}=\omega_R(m,j). \tag{5.58}$$

Применяя (5.35), (5.37), (5.45) и лемму 4.4 с $g=\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\eta_R\in \mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\varphi_k'(z^{mj})_k\chi^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\to\nabla T_k(v^j)\chi_s^j\varphi_k'(z^j)_k\chi\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}\ \text{ сильно в } \mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n),\ m\to\infty.$$

Отсюда, ввиду сходимостей (5.30), (5.43), устанавливаем

$$I_{53}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathrm{a}}_k-\zeta_{h-1}\widetilde{\mathrm{a}}_h)\cdot\nabla T_k(v^j)_k\chi\chi_s^j\varphi_k'(z^j)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}d\mathrm{x}+\omega_R(m).$$

Далее, применяя (5.33), (5.36), (5.38), (5.44), по теореме Лебега заключаем:

$$I_{53}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathrm{a}}_k-\zeta_{h-1}\widetilde{\mathrm{a}}_h)\cdot\nabla T_k(u)_k\chi\chi_s\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}d\mathrm{x}+\omega_R(m,j)=\omega_R(m,j). \tag{5.59}$$

Далее, применяя (5.35), (5.37), (5.43) и лемму 4.4 с $g=\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\eta_R\in \mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}\to\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^j)\zeta_{h-1}\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}$$
$$\text{сильно в } \mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n),\ m\to\infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.30), устанавливаем

$$I_{54}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\mathrm{a}}_h\cdot\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^j)\zeta_{h-1}\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}d\mathrm{x}+\omega_R(m).$$

Применяя (5.36), (5.38), (5.44), (5.31) и лемму 4.1 (см. замечание 5.1), получаем

$$\nabla T_k(v^j)(\chi_s^j-1)\varphi_k'(z^j)\eta_R\to\nabla T_k(u)(\chi_s-1)\eta_R \text{ модулярно в } \mathrm{L}_M(\mathbb{R}^n),\ j\to\infty.$$

Отсюда, ввиду принадлежности $\widetilde{\mathrm{a}}_h\zeta_{h-1}e^{\widehat{B}(|u|)}\in \mathrm{L}_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$, имеем:

$$I_{54}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\mathrm{a}}_h\cdot\nabla T_k(u)(\chi_s-1)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)}d\mathrm{x}+\omega_R(m,j).$$

В силу того, что $\widetilde{\mathrm{a}}_h\cdot\nabla T_k(u)e^{\widehat{B}(|u|)}\in L_1(\mathbb{R}^n)$, имеем:

$$I_{54}=\omega_R(m,j,s). \tag{5.60}$$

Из (5.56)–(5.60) следует, что

$$I_{51}\leqslant\omega_{h,R}(m,j,s)+\omega(h). \tag{5.61}$$

Оценим интеграл

$$0 \leqslant I_6 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\big) \times$$
$$\times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} - \tag{5.62}$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} d\mathrm{x} = I_{51} - I_{61}.$$

Из (5.19), (5.21) следует сходимость

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) e^{\widehat{B}(|u^m|)} \to \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) e^{\widehat{B}(|u|)} \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m \to \infty,$$

а из (3.2), (4.3) имеем оценки

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)| \leqslant \widehat{a}\left(M(\mathrm{x}, \widehat{d}s) + 2M(\mathrm{x}, 1) + CM(\mathrm{x}, k)\right) + \psi(\mathrm{x}), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь ограниченностью функции $M(\cdot, z)$ по $\mathrm{x} \in U(R+1)$, для любых фиксированных $z \in \mathbb{R}$ устанавливаем оценку

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)|\eta_R \leqslant \psi(\mathrm{x}) + C_{19}\eta_R \in \mathrm{E}_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая (5.34), (5.35), по леммам 4.5, 4.6 получаем сходимость

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj}) e^{\widehat{B}(|u^m|)}\eta_R \to$$
$$\to \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j) e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R \quad \text{сильно в } \mathrm{E}_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m \to \infty. \tag{5.63}$$

Применяя (5.63), (5.20), выводим

$$I_{61} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} d\mathrm{x} + \omega_R(m), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Применяя оценку (4.2) и сходимости (5.33), (5.36), (5.44), по теореме Лебега устанавливаем

$$I_{61} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u)(1 - \chi_s)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} d\mathrm{x} + \omega_R(m, j).$$

Наконец, благодаря $\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u) e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (см. (4.2)) получаем

$$I_{61} = \omega_R(m, j, s). \tag{5.64}$$

Соединяя (5.62), (5.64), (5.61) и применяя (5.34), выводим

$$I_7 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\big) \times$$
$$\times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\eta_R d\mathrm{x} \leqslant 2I_6 \leqslant \omega_{h,R}(m, j, s) + \omega(h). \tag{5.65}$$

Используя обозначение (4.10), имеем

$$0 \leqslant \int\limits_{U(R)} q_s^m(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leqslant I_7 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(v^j)\chi_s^j - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R d\mathrm{x} -$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R d\mathrm{x} + \tag{5.66}$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\eta_R d\mathrm{x} = I_7 + I_{71} + I_{72} + I_{73}.$$

Для интегралов I_{71}–I_{73} справедливы оценки (см. [3]):

$$I_{71} = \omega_R(m,j), \quad I_{72} = \omega_R(m,s), \quad I_{73} = \omega_R(m,j,s). \tag{5.67}$$

Соединяя (5.65)–(5.67), получаем

$$\int\limits_{U(R)} q_s^m(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leqslant \omega_{R,h}(m,j,s) + \omega(h).$$

Ввиду того, что левая часть последнего неравенства не зависит от j,h, переходя последовательно к пределам по $m\to\infty$, $j\to\infty$, $s\to\infty$, устанавливаем соотношение

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int\limits_{U(R)} q_s^m(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leqslant \omega(h).$$

Выполняя предельный переход при $h\to\infty$, выводим соотношение

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int\limits_{U(R)} q_s^m(\mathrm{x})d\mathrm{x} = 0.$$

По утверждению 4.1 ($Q = U(R)$) ввиду произвольности $R > 0$ имеем сходимости (5.24), (5.25) и сходимость

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m\to\infty. \tag{5.68}$$

Далее так же, как в [4, 5.5], устанавливается сходимость по подпоследовательности

$$\nabla u^m \to \nabla u \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m\to\infty. \tag{5.69}$$

5.5. Предельный переход. Используя оценку (5.29) и сходимости (5.21), (5.68), по лемме 4.2 устанавливаем слабую сходимость

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_k(u), \nabla T_k(u)) \tag{5.70}$$
$$\text{в топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_{\overline{M}}, \mathrm{E}_M) \quad \text{пространства} \quad \mathrm{L}_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m\to\infty.$$

Из непрерывности $b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$ по (s_0, s) и сходимостей (5.19), (5.69) следует, что

$$b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) \to b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^n, \quad m\to\infty. \tag{5.71}$$

Из оценки (5.15), ввиду (5.71), согласно лемме Фату заключаем, что

$$b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, условия 1), 3) определения 3.1 выполнены.

Далее, сходимость

$$b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) \to b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m\to\infty. \tag{5.72}$$

устанавливается так же, как в [5, Шаг 6].

Докажем, что u является ренормализованным решением уравнения (1.1). Условия 1), 2), 3) определения 3.1 доказаны. Докажем условие 4). Применяя (3.1), из неравенства (5.10) получаем

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}} \overline{a}M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u^m|)d\mathrm{x} + k\overline{b}_0 \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k+h\}} \frac{M(\mathrm{x}, u^m)}{|u^m|}d\mathrm{x} \leqslant C_4 \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} (k\phi_1 + \phi)d\mathrm{x}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Отсюда, пользуясь сходимостями (5.69), (5.19), применяя теорему Лебега и лемму Фату, выполним предельный переход при $m\to\infty$ для правильных h и получим неравенство:

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u|<k+h\}} \overline{a}M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u|)d\mathrm{x} + k\overline{b}_0 \int\limits_{\{|u|\geqslant k+h\}} \frac{M(\mathrm{x}, u)}{|u|}d\mathrm{x} \leqslant C_4 \int\limits_{\{|u|\geqslant h\}} (k\phi_1 + \phi)d\mathrm{x}. \tag{5.73}$$

Отсюда, в частности, справедлива оценка вида (4.6). Тогда согласно предложению 4.1 имеем:

$$\mathrm{meas}\,\{\mathbb{R}^n : |u| \geqslant h\} \to 0, \quad h\to\infty. \tag{5.74}$$

Выполняя предельный переход в (5.73) при $h \to \infty$, пользуясь (5.74), устанавливаем соотношение

$$\lim_{h\to\infty} \int\limits_{\{h\leqslant|u|<k+h\}} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u|)d\mathrm{x} = 0.$$

Докажем равенство (3.7). Пусть $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\xi \subset U(l)$, $l \geqslant l_0$ и функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что supp $S \subset [-K,K]$, $K > 0$. Пусть $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательных слабых решений уравнения (5.3). Взяв $S(u^m)\xi \in \mathring{W}^1L_M(U(l))\bigcap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в качестве тестовой функции в (5.5), выводим равенство

$$\begin{gathered}\langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m)\cdot(S'(u^m)\xi\nabla u^m + S(u^m)\nabla\xi)\rangle + \\ + \langle (b^m(\mathrm{x}, u^m, \nabla u^m) + b_0(\mathrm{x}, u^m) - f^m(\mathrm{x}))S(u^m)\xi\rangle = I^m + J^m = 0, \quad m \geqslant l_0.\end{gathered} \tag{5.75}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}I^m &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_m(u^m), \nabla u^m)\cdot(S'(u^m)\xi\nabla u^m + S(u^m)\nabla\xi)d\mathrm{x} = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_K(u^m), \nabla T_K(u^m))\cdot\nabla T_K(u^m)S'(u^m)\xi d\mathrm{x} + \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_K(u^m), \nabla T_K(u^m))\cdot\nabla\xi S(u^m)d\mathrm{x} = I_1^m + I_2^m, \quad m \geqslant \max(K, l_0).\end{aligned} \tag{5.76}$$

Ввиду сходимостей (5.19), (5.25), применяя лемму 4.7, устанавливаем

$$I_1^m = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_K(u), \nabla T_K(u))\cdot\nabla T_K(u)S'(u)\xi d\mathrm{x} + \omega(m), \quad m\to\infty. \tag{5.77}$$

Из сходимости (5.19) по лемме 4.4 получаем:

$$S(u^m)\nabla\xi \to S(u)\nabla\xi \quad \text{сильно в} \quad \mathrm{E}_M(\mathbb{R}^n), \quad m\to\infty.$$

Отсюда, учитывая сходимость (5.70), выводим:

$$I_2^m = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_K(u), \nabla T_K(u))\cdot\nabla\xi S(u)d\mathrm{x} + \omega(m), \quad m\to\infty. \tag{5.78}$$

Соединяя (5.76)–(5.78), получаем:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} I^m &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, T_K(u), \nabla T_K(u))\cdot(S'(u)\xi\nabla T_K(u) + S(u)\nabla\xi)d\mathrm{x} = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\cdot(S'(u)\xi\nabla u + S(u)\nabla\xi)d\mathrm{x}.\end{aligned} \tag{5.79}$$

По лемме 4.4 имеем

$$S(u^m)\xi \rightharpoonup S(u)\xi \quad \text{в топологии} \quad \sigma(L_\infty, L_1), \quad m\to\infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (5.1), (5.22), (5.72), устанавливаем равенство:

$$\lim_{m\to\infty} J^m = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + b_0(\mathrm{x}, u) - f)S(u)\xi d\mathrm{x}. \tag{5.80}$$

Комбинируя (5.75), (5.79), (5.80), получаем равенство (3.7). Таким образом, приходим к выводу, что u является ренормализованным решением уравнения (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вильданова В. Ф., Мукминов Ф. Х.* Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве// Мат. сб. — 2023. — *214*, № 11. — С. 37–62.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
3. *Кожевникова Л. М.* Существование энтропийного решения нелинейной эллиптической задачи в неограниченной области// Теор. мат. физ. — 2024. — *218*, № 1. — С. 124–148.
4. *Кожевникова Л. М.* Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 3. — С. 131–161.
5. *Кожевникова Л. М., Кашникова А. П.* Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака—Орлича// Мат. сб. — 2022. — *213*, № 4. — С. 38–73.
6. *Ahmdatt T., Elemine Vall M. S. B., Benkirane A., Touzani A.* Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1// An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. — 2017. — *44*, № 2. — С. 190–213.
7. *Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A.* Gossez's approximation theorems in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// J. Funct. Anal. — 2018. — *275*, № 9. — С. 2538–2571.
8. *Ait Khellou M., Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak—Orlicz spaces// An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. — 2016. — *43*, № 2. — С. 164–187.
9. *Ait Khelloul M., Douiri S. M., El Hadfi Y.* Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition// Mediterr. J. Math. — 2020. — *17*, № 1. — С. 1–18.
10. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2013. — *20*. — С. 57–75.
11. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* Variational inequalities in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2014. — *21*, № 5. — С. 787–811.
12. *Chlebicka I.* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2023. — *153*, № 2. — С. 588–618.
13. *Douiri S. M., Benkirane A., Ait Khellou M., El Hadfi Y.* Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces// Anal. Math. Phys. — 2021. — *11*, № 2. — С. 66.
14. *Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H.* Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak—Orlicz spaces// Ric. Mat. — 2018. — *67*, № 2. — С. 549–579.
15. *Elemine Vall M. S. B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data// Bol. Soc. Parana. Mat. — 2018. — *36*, № 1. — С. 125–150.
16. *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak—Orlicz space// Differ. Equ. — 2018. — *264*. — С. 341–377.
17. *Kozhevnikova L. M.* On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data// Complex Var. Elliptic Equ. — 2020. — *65*, № 3. — С. 337–367.
18. *Kozhevnikova L. M.* On solutions of elliptic equations with variable exponents and measure data in $\mathbb{R}^n$// В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics». — Cham: Birkhäuser, 2021. — С. 221–239.
19. *Kozhevnikova L. M.* On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1-data in unbounded domains// Lobachevskii J. Math. — 2023. — *44*, № 5. — С. 1879–1901.
20. *Li Y., Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz spaces// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2021. — *61*, № 2. — С. 1–20.
21. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. — Berlin: Springer, 1983.
22. *Talha A., Benkirane A.* Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak—Orlicz spaces// Monatsh. Math. — 2018. — *186*, № 4. — С. 745–776.

Л. М. Кожевникова
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

UDC 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299
EDN: YKDZHU

Existence of a Renormalized Solution to a Nonlinear Elliptic Equation with L_1-Data in the Space $\mathbb{R}^n$

L. M. Kozhevnikova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia

Abstract. We consider a second-order quasilinear elliptic equation with an integrable right-hand side in the space $\mathbb{R}^n$. Restrictions on the structure of the equation are formulated in terms of a generalized N-function. In the nonreflexive Muzilak–Orlicz–Sobolev spaces, the existence of a renormalized solution in the space $\mathbb{R}^n$ is proved.

Keywords: quasilinear equation, elliptic equation, generalized N-function, Muzilak–Orlicz–Sobolev space, renormalized solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. M. Kozhevnikova, "Existence of a Renormalized Solution to a Nonlinear Elliptic Equation with L_1-Data in the Space $\mathbb{R}^n$," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 278–299. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299

REFERENCES

1. V. F. Vil'danova and F. Kh. Mukminov, "Entropiynoe reshenie dlya uravneniya s meroznachnym potentsialom v giperbolicheskom prostranstve" [Entropy solution for an equation with measure-valued potential in hyperbolic space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2023, **214**, No. 11, 37–62 (in Russian).
2. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], IL, Moscow, 1962 (in Russian).
3. L. M. Kozhevnikova, "Sushchestvovanie entropiynogo resheniya nelineynoy ellipticheskoy zadachi v neogranichennoy oblasti" [Existence of an entropy solution to a nonlinear elliptic problem in an unbounded domain], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2024, **218**, No. 1, 124–148 (in Russian).
4. L. M. Kozhevnikova, "Entropiynye i renormalizovannye resheniya anizotropnykh ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami nelineynostey" [Entropy and renormalized solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity exponents], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 3, 131–161 (in Russian).
5. L. M. Kozhevnikova and A. P. Kashnikova, "Sushchestvovanie resheniy nelineynykh ellipticheskikh uravneniy s dannymi v vide mery v prostranstvakh Muzilaka—Orlicha" [Existence of solutions of nonlinear elliptic equations with measure data in Musielak–Orlicz spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2022, **213**, No. 4, 38–73 (in Russian).
6. T. Ahmdatt, M. S. B. Elemine Vall, A. Benkirane, and A. Touzani, "Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1," *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2017, **44**, No. 2, 190–213.
7. Y. Ahmida, I. Chlebicka, P. Gwiazda, and A. Youssfi, "Gossez's approximation theorems in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces," *J. Funct. Anal.*, 2018, **275**, No. 9, 2538–2571.

8. M. Ait Khellou and A. Benkirane, “Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak—Orlicz spaces,” *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2016, **43**, No. 2, 164–187.
9. M. Ait Khelloul, S. M. Douiri, and Y. El Hadfi, “Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition,” *Mediterr. J. Math.*, 2020, **17**, No. 1, 1–18.
10. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013, **20**, 57–75.
11. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “Variational inequalities in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2014, **21**, No. 5, 787–811.
12. I. Chlebicka, “Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2023, **153**, No. 2, 588–618.
13. S. M. Douiri, A. Benkirane, M. Ait Khellou, and Y. El Hadfi, “Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces,” *Anal. Math. Phys.*, 2021, **11**, No. 2, 66.
14. R. Elarabi, M. Rhoudaf, and H. Sabiki, “Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak—Orlicz spaces,” *Ric. Mat.*, 2018, **67**, No. 2, 549–579.
15. M. S. B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, and A. Benkirane, “Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data,” *Bol. Soc. Parana. Mat.*, 2018, **36**, No. 1, 125–150.
16. P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, and A. Zatorska-Goldstein, “Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak—Orlicz space,” *Differ. Equ.*, 2018, **264**, 341–377.
17. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, **65**, No. 3, 337–367.
18. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of elliptic equations with variable exponents and measure data in $\mathbb{R}^n$,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, Birkhäuser, Cham, 2021, pp. 221–239.
19. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1-data in unbounded domains,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 5, 1879–1901.
20. Y. Li, Y. Fengping, and Zh. Shulin, “Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz spaces,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2021, **61**, No. 2, 1–20.
21. J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer, Berlin, 1983.
22. A. Talha and A. Benkirane, “Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak—Orlicz spaces,” *Monatsh. Math.*, 2018, **186**, No. 4, 745–776.

L. M. Kozhevnikova
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia
E-mail: kosul@mail.ru