

УДК 517.925; 517.93; 531.13

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252

EDN: YIWVPRQ

## ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ЗАДАННЫМИ ГЛОБАЛЬНЫМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

С. В. Волков

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье представлен метод построения векторных полей, фазовые портреты которых имеют конечные множества заданных особых траекторий (предельных циклов, простых и сложных особых точек, сепаратрис) и заданные топологические структуры в ограниченных областях фазовой плоскости. Задача построения таких векторных полей является обобщением ряда известных обратных задач качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный метод её решения расширяет возможности математического моделирования динамических систем с заданными свойствами в различных областях науки и техники.

**Ключевые слова:** векторное поле, система ОДУ, качественная теория ОДУ, фазовый портрет, топологическая структура, динамическая система, обратная задача.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** С. В. Волков. Построение плоских векторных полей с заданными глобальными топологическими структурами // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 237–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть плоское векторное поле  $\vec{v}$  описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений класса  $C_k$ ,  $k \geq 1$ :

$$\vec{v}(v_x, v_y) : \begin{cases} \dot{x} = v_x(x, y), \\ \dot{y} = v_y(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

Целью данной статьи является представление метода построения векторных полей вида (1.1), которые имеют:

- (a) конечные множества заданных предельных циклов, простых и сложных особых точек, сепаратрис и
- (b) заданные топологические структуры

в заданных ограниченных областях фазовой плоскости  $Oxy$ .

Построение векторных полей с заданными свойствами их фазовых портретов является обратной задачей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так как её решение равносильно построению соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием понятий и методов этой теории.



Первыми известными работами, в которых были рассмотрены задачи такого типа, являются работы по обратным задачам классической механики И. Ньютона, М. Ж. Бертрана, Г. К. Суллова, Н. Е. Жуковского, И. В. Мещерского на построение механических систем, имеющих заданные интегралы. Подробный анализ этих и других обратных задач динамики и методов их решения проведён А. С. Галиуллиным [5]. Основой дальнейшего развития методов решения обратных задач динамики (см. [6]) явился подход Н. П. Еругина [7] к построению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую.

Задачи построения дифференциальных уравнений вида  $dy/dx = f(x, y)$  и систем уравнений вида (1.1) с заданными свойствами их решений были изучены в работах [1, 2, 4, 8, 11]. А именно, были решены задачи построения уравнений, которые имеют:

- конечное число заданных простых особых точек указанных типов [1];
- конечное число заданных предельных циклов требуемых типов [2];
- конечное число заданных простых особых точек указанных типов с прямолинейными сепаратрисами и предельных циклов указанных типов [8];
- только одну сложную особую точку с заданными прямолинейными сепаратрисами и заданной топологической структурой [4, 11].

Заметим, что глобальные топологические структуры искомым дифференциальных уравнений в работах [1, 2, 7, 8] не рассматривались. Детальный анализ задач, рассмотренных в [1, 2], и методов их решения дан в [12].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной статье представлен метод построения векторных полей вида (1.1), который:

- (i) допускает одновременное существование у этих векторных полей заданных особых траекторий всех типов, рассмотренных в [1, 2, 4, 8, 11], и заданной глобальной топологической структуры в ограниченной односвязной области фазовой плоскости, содержащей эти траектории;
- (ii) основан на использовании вспомогательных векторных полей для представления требуемых свойств искомым векторных полей в аналитической форме с помощью скалярных произведений векторов;
- (iii) допускает, в силу (ii), геометрическую интерпретацию основных действий построения искомым векторных полей, что упрощает процесс их выполнения;
- (iv) сводит поставленную задачу к решению системы линейных уравнений относительно компонентов искомого векторного поля.

Результаты данной статьи строго доказаны методом М. Фроммера [9], приведены примеры их применения. Аналитические решения примеров визуализированы графическими схемами соответствующих им векторных полей с помощью функции *fieldplot* пакета *MAPLE*.

Представленный ниже метод решения основной задачи данной статьи может быть использован в различных областях науки и техники для построения математических моделей динамических систем с требуемыми свойствами их поведения.

**Обозначения.** Для объектов, относящихся к векторному полю (1.1), будут использованы следующие обозначения:

- $P_k(x_k, y_k)$ ,  $k \in I_P = \{1, 2, \dots, m\}$  — изолированная особая точка, отличная от центра и фокуса;
- $\Gamma_i : \omega_i(x, y) = 0$ ,  $i \in I_\Gamma = \{1, 2, \dots, n_1\}$  — интегральная кривая, проходящая через некоторые точки  $P_{k_1}, \dots, P_{k_s}$ ,  $s \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_s \in I_P$ ;
- $L_{ki, \alpha}$ ,  $k \in I_P$ ,  $\alpha = 1, 2$  — одна из двух сепаратрис точки  $P_k$ , расположенных на  $\Gamma_i$ ;
- $C_i : \omega_i(x, y) = 0$ ,  $i \in I_C = \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$  — замкнутая кривая, которая может быть предельным циклом;
- $\Phi_i(x_i, y_i) : \omega_i(x, y) = 0$ ,  $i \in I_\Phi = \{n_2 + 1, \dots, n\}$  — особая точка типа центр или фокус;
- $I = I_\Gamma \cup I_C \cup I_\Phi = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ;
- $I_k = \{i : \omega_i(P_k) = 0, i \in I_\Gamma, k \in I_P\}$ ;
- $U_k(\varepsilon) = \{(x, y) : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = \varepsilon^2\}$  —  $\varepsilon$ -окрестность особой точки  $P_k$  такая, что:

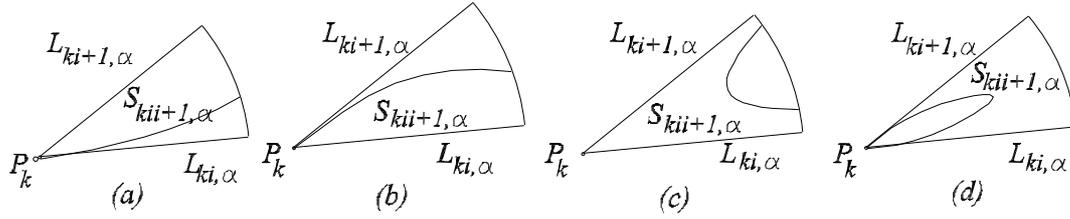


РИС. 1. Секторы особой точки: (а) сектор параболический справа; (б) сектор параболический слева; (с) гиперболический сектор; (д) эллиптический сектор.

- (i)  $\omega_s(P) \neq 0$  для любой точки  $P \in U_k(\varepsilon)$ ,  $k \in I_P$ ,  $s \in I_\Gamma \setminus I_k$ ;
- (ii)  $\overline{U}_k(\varepsilon)$  — замыкание окрестности  $U_k(\varepsilon)$ ,  $k \in I_P$ , не содержащей ни замкнутых траекторий, ни целых особых траекторий, кроме соответствующей точки  $P_k$ ;
- $S_{kij, \alpha}(\varepsilon)$ ,  $k \in I_P$ , где  $i, j \in I_k$  — сектор окрестности  $U_k(\varepsilon)$ , ограниченный смежными сепаратрисами  $L_{ki, \alpha}$  и  $L_{kj, \alpha}$  точки  $P_k$  (см. рис. 1).

### 3. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА И ПОДХОД К ЕЁ РЕШЕНИЮ

**3.1. Постановка основной задачи.** Основной задачей данной статьи является построение векторного поля  $\vec{v}(1.1)$  с заданной топологической структурой в ограниченной области  $D$  фазовой плоскости  $Oxy$  при условии, что заданы:

(а) уравнения

$$\omega_i(x, y) = 0, \quad i \in I \tag{3.1}$$

всех особых траекторий (предельных циклов, простых и сложных особых точек, сепаратрис) этого векторного поля в области  $D$ , где  $\omega_i(x, y)$ ,  $i \in I$ , таковы, что

$$\text{grad } \omega_i \neq 0 \text{ для } i \in I \setminus I_\Phi, \quad \text{и} \quad \text{grad } \omega_i(P) \neq 0 \text{ для } i \in I_\Phi, \quad P \neq \Phi_i; \tag{3.2}$$

(б) направления искомого векторного поля на этих особых траекториях;

(с) локальные топологические структуры всех особых траекторий в области  $D$ .

Предполагается, что область  $D$  не содержит особых траекторий, отличных от указанных в п. (а).

Для упрощения дальнейшего изложения будем считать, что все критические направления особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются простыми обыкновенными в смысле определения, данного в [9]. В этом случае:

- каждое критическое направление особой точки  $P_k$  является касательным к одной, и только одной, интегральной кривой  $\Gamma_i$  в этой точке и, следовательно,

$$\text{grad } \omega_i \neq \text{grad } \omega_j \quad \text{для} \quad i, j \in I_k : i \neq j, \quad k \in I_P; \tag{3.3}$$

- сепаратрисы  $L_{ki, 1}$  и  $L_{ki, 2}$  особой точки  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются для данного  $i \in I_k$  однотипными и только несмешанного типа: либо гиперболическими, либо параболическими в смысле данных ниже определений.

**3.2. Классификация сепаратрис особых точек.** Пусть  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  является криволинейным сектором окрестности  $U_k(\varepsilon)$  с вершиной в точке  $P_k$ , и только одна сепаратриса  $L_{ki, \alpha}$  проходит через её внутренние точки,  $k \in I_P$ ,  $i \in I_k$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Предположим, что:  $L_{ki, \alpha}$  пересекает границу сектора  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  только один раз и только в точке, не принадлежащей его боковой стороне; внутри  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  не содержится ни петель<sup>1</sup>, ни точек других особых траекторий. В этом случае все неособые траектории векторного поля (1.1), проходящие через внутренние точки  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$ , образуют два непересекающихся множества, скажем,  $A$  и  $B$ , видимые из точки  $P_k$  справа и слева от  $L_{ki, \alpha}$ , соответственно. Поведение этих траекторий внутри сектора  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  определяет его топологическую структуру и, следовательно, тип сепаратрисы  $L_{ki, \alpha}$ . А именно, сепаратриса  $L_{ki, \alpha}$  может быть одного из следующих типов:

<sup>1</sup>Петля — это простая замкнутая траектория, состоящая из особой точки и незамкнутой траектории  $L$ , которая стремится к этой точке при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  (см. в [3, гл. VII, § 16, п. 10]).

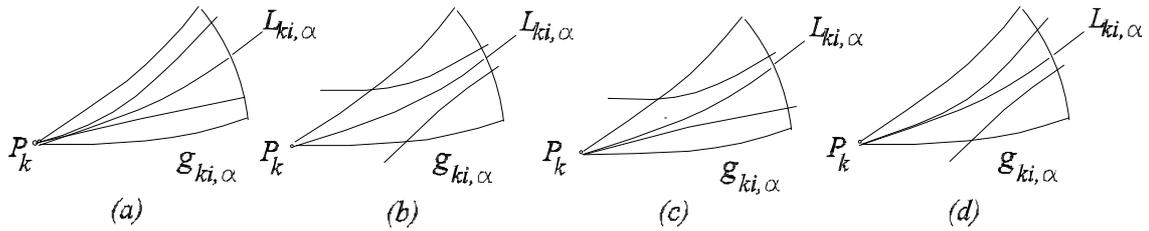


РИС. 2. Классификация сепаратрис особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ : (а) параболическая; (б) гиперболическая; (с) параболическая справа; (д) параболическая слева.

- *параболической*, если любая траектория  $L \in A \cup B$  стремится к точке  $P_k$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) и выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) (рис. 2.а);
- *гиперболической*, если любая траектория  $L \in A \cup B$  выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  как при  $t \rightarrow -\infty$ , так и при  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 2.б);
- *параболической справа*, если любая траектория  $L \in A$  стремится к  $P_k$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) и выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ), в то время как любая траектория  $L \in B$  выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 2.с);
- *параболической слева*, если любая траектория  $L \in A$  выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  как при  $t \rightarrow -\infty$ , так и при  $t \rightarrow +\infty$ , в то время как любая  $L \in B$  стремится к  $P_k$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) и выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) (рис. 2.д).

Сепаратрисы, параболические справа, и сепаратрисы, параболические слева, называются *сепаратрисами смешанного типа*.

Данная выше классификация сепаратрис аналогична той, что дана в [10], но только для прямолинейных сепаратрис особой точки  $(0, 0)$  системы уравнений вида  $\dot{x} = X_m(x, y)$ ,  $\dot{y} = Y_m(x, y)$ , где  $X_m(x, y)$  и  $Y_m(x, y)$  — однородные многочлены одного и того же порядка  $m \geq 1$ .

**Замечание 3.1.** Типы смежных сепаратрис  $L_{ki, \alpha}$  и  $L_{kj, \alpha}$  точки  $P_k$  определяют тип соответствующего сектора  $S_{kij, \alpha}(\varepsilon)$ , который может быть параболическим справа (рис. 1.а), параболическим слева (рис. 1.б), гиперболическим (рис. 1.с) или эллиптическим (рис. 1.д).

**Замечание 3.2.** Сведения об искомом векторном поле, упомянутые в п.п. (б) и (с) раздела 3.1, могут быть представлены в виде списков и таблиц, описывающих его топологическую структуру в заданной области фазовой плоскости (см. [3, гл. XI, § 29]). Однако эти сведения могут быть представлены графической схемой, что наглядно, удобно и целесообразно с точки зрения решения основной задачи.

**3.3. Общая схема решения основной задачи.** В общем случае решение основной задачи является двухшаговой процедурой. На первом шаге выполняется построение некоторой функции  $z = f(x, y)$  в соответствии с требованиями (а)–(с) раздела 3.1. А именно, векторное поле  $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ , касательное к линиям уровней  $f(x, y) = c$ , должно удовлетворять требованиям (а), (б) и частично (с); кривые  $C_j$ ,  $j \in I_C$ , должны быть элементами множеств вложенных замкнутых интегральных кривых, содержащих внутри себя соответствующие особые точки  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ . Заметим, что такое векторное поле  $\vec{\tau}$  само является частным решением основной задачи, если искомое векторное поле  $\vec{v}$  не имеет ни предельных циклов, ни особых точек типа фокус в области  $D$ . В противном случае требуется выполнение второго шага.

На втором шаге векторные поля  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{\tau}$ , где  $\vec{k}$  является единичным направляющим вектором оси  $Oz$  прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$ , используются в качестве вспомогательных векторных полей направлений сравнения. В каждой точке области  $D$  векторы  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  образуют локальный ортогональный базис, который вырождается только в особых точках  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ . Тот факт, что  $|\vec{\tau}| = |\vec{n}|$ , позволяет представить требования (а)–(с) раздела 3.1 в аналитической форме, используя скалярные произведения

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \vec{v} &= \eta \cdot F_1(x, y), \\ \vec{n} \cdot \vec{v} &= \eta \cdot F_2(x, y), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\eta = \eta(x, y)$  — произвольная неотрицательная функция, которая может иметь нулевые значения в области  $D$  только в точках  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ . Такой множитель  $\eta(x, y)$  не влияет на фазовый портрет векторного поля  $\vec{v}$ , соответствующего функциям  $F_1$  и  $F_2$ . Так как система уравнений (3.4) является линейной относительно  $v_x$  и  $v_y$ , то имеет смысл положить этот множитель равным её определителю:  $\eta = \tau_x^2 + \tau_y^2$ . В этом случае из (3.4) получим компоненты искомого векторного поля в виде

$$\begin{aligned} v_x &= F_1\tau_x - F_2\tau_y, \\ v_y &= F_2\tau_x + F_1\tau_y. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, решение основной задачи сводится к построению функций  $F_1$  и  $F_2$ , которые зависят от отношения  $(\vec{\tau} \cdot \vec{v}) : (\vec{n} \cdot \vec{v})$  вблизи особых точек и от знаков произведений  $\vec{\tau} \cdot \vec{v}$  и  $\vec{n} \cdot \vec{v}$  в области  $D$ .

Используя графическую схему фазового портрета искомого векторного поля  $\vec{v}$  и общие свойства скалярного произведения векторов, можно составить предварительные выражения  $F_1$  и  $F_2$  с точностью до некоторых положительных множителей. Затем, чтобы определить эти множители и получить окончательные выражения функций  $F_1$  и  $F_2$ , необходимо исследовать особые точки  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ , дифференциального уравнения  $dy/dx = v_y/v_x$  с функциями  $v_x$  и  $v_y$  из (3.5). Такое исследование предполагает использование подходящего метода качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений для изучения особых точек. В данной статье для этого используется метод Фроммера [9].

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НАПРАВЛЕНИЙ СРАВНЕНИЯ

Предположим, что в (3.1) множество индексов  $I = I_\nu \cup I_\delta$ ,  $I_\nu \cap I_\delta = \emptyset$  и

$$z = \left( \prod_{i \in I_\nu} \omega_i \right) / \left( \prod_{i \in I_\delta} \omega_i \right). \quad (4.1)$$

В плоскости  $Oxy$  множества линий уровней  $z = 0$  и  $z = \pm\infty$  функции (4.1) состоят из кривых  $\Gamma_i$ ,  $i \in I_\Gamma$ ,  $C_j$ ,  $j \in I_C$ , и точек  $\Phi_l$ ,  $l \in I_\Phi$ , которые разбивают эту плоскость на конечное число ячеек, заполненных линиями уровней  $z = c$ , где  $c \neq 0; \pm\infty$ .

Переписывая (4.1) в виде неявного уравнения относительно  $z$

$$F(x, y, z) \equiv z - \left( \prod_{i \in I_\nu} \omega_i \right) / \left( \prod_{i \in I_\delta} \omega_i \right) = 0,$$

найдем

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= \frac{1}{\prod_{i \in I_\delta} \omega_i^2} \times \\ &\times \left( - \sum_{i \in I_\nu} \omega_{ix} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j + \sum_{i \in I_\delta} \omega_{ix} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j, - \sum_{i \in I_\nu} \omega_{iy} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j + \sum_{i \in I_\delta} \omega_{iy} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j, 1 \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что вектор

$$\vec{n}_S = \sum_{i \in I_\nu} \vec{n}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_\delta} \vec{n}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j - \vec{k} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j^2, \quad (4.2)$$

где  $\vec{n}_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}, 0)$ ,  $i \in I$ , является вектором нормали к поверхности  $S$ , заданной уравнением (4.1) в координатной системе  $Oxyz$ . В этом случае векторное поле

$$\vec{\tau} = \vec{k} \times \vec{n}_S = \sum_{i \in I_\nu} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_\delta} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j, \quad \text{где } \vec{\tau}_i = \vec{n}_i \times \vec{k}, \quad i \in I, \quad (4.3)$$

является касательным к линиям уровней функции (4.1), включая кривые  $\Gamma_i$ ,  $i \in I_\Gamma$ , и  $C_j$ ,  $j \in I_C$ ;  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_l$ ,  $l \in I_\Phi$ , являются особыми точками этого векторного поля  $\vec{\tau}$ .

**Замечание 4.1.** Функции  $z = P(x, y)/Q(x, y)$  и  $z = -Q(x, y)/P(x, y)$ , построенные указанным выше способом, порождают одно и то же векторное поле  $\vec{\tau}$ .

## 5. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ $\vec{\tau}$

Для построения функции (4.1), соответствующей условиям п.п. (а)-(с) постановки основной задачи, необходимо знать, как локальные топологические структуры особых траекторий соответствующего векторного поля  $\vec{\tau}$  (4.3) зависят от взаимного расположения множителей  $\omega_i$ ,  $i \in I$ , в правой части равенства (4.1).

**5.1. Локальные топологические структуры особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ .** Локальная топологическая структура особой точки  $P_k(x_k, y_k)$  определяется множеством её сепаратрис  $L_{ki, \alpha}$  и их типами или типами ограниченных ими секторов  $S_{kij, \alpha}$ , где  $i, j \in I_k$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Для получения этих сведений методом Фроммера [9] перепишем (4.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & \left( \sum_{i \in I_{\nu k}} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_{\delta k}} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j \right) \cdot \prod_{s \in I \setminus I_k} \omega_s + \\ & + \left( \sum_{i \in I_{\nu} \setminus I_k} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I \setminus I_k, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_{\delta} \setminus I_k} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I \setminus I_k, j \neq i} \omega_j \right) \cdot \prod_{s \in I_k} \omega_s \end{aligned} \quad (5.1)$$

и обозначим порядки произведений  $\prod_{i \in I_{\nu k}} \omega_i$  и  $\prod_{i \in I_{\delta k}} \omega_i$  относительно  $r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$  через

$$N_{k\nu} = \deg_{r_k} \left( \prod_{i \in I_{\nu k}} \omega_i \right) \quad \text{и} \quad N_{k\delta} = \deg_{r_k} \left( \prod_{i \in I_{\delta k}} \omega_i \right).$$

Положим для простоты  $x_k = y_k = 0$  и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_y(x, y)}{\tau_x(x, y)}. \quad (5.2)$$

Выполнив подстановки  $y = u(x) \cdot x$  и  $x = v(y) \cdot y$  в (5.2), получим уравнения

$$x \frac{du}{dx} = \left( \frac{x\tau_y - y\tau_x}{x\tau_x} \right) \Big|_{y=ux} \quad \text{и} \quad y \frac{dv}{dy} = - \left( \frac{x\tau_y - y\tau_x}{y\tau_y} \right) \Big|_{x=vy}, \quad (5.3)$$

соответственно. При условии, что все критические направления особой точки  $P_k$  являются простыми обыкновенными (см. определение в [9]), из (5.1) следует, что в достаточно малой окрестности  $U_k(\varepsilon)$

$$x\tau_y - y\tau_x = [(-N_{k\nu} + N_{k\delta}) \cdot \alpha + \varphi_0(x, y)] \cdot \prod_{i \in I_k} \omega_i, \quad (5.4)$$

$$x\tau_x = x \cdot \left[ \sum_{i \in I_k} \tau_{ix} \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j \cdot \alpha + o(r_k^{N_{k\nu} + N_{k\delta}}) \right], \quad (5.5)$$

$$y\tau_y = y \cdot \left[ \sum_{i \in I_k} \tau_{iy} \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j \cdot \alpha + o(r_k^{N_{k\nu} + N_{k\delta}}) \right], \quad (5.6)$$

где

$$\alpha = \prod_{j \in I \setminus I_k} \omega_j(0, 0), \quad \varphi_0(0, 0) = 0.$$

Из (5.3)–(5.6) следует, что если  $N_{k\nu} - N_{k\delta} \neq 0$ , то только касательные направления к кривым  $\Gamma_i$ ,  $i \in I_k$ , в точке  $P_k$  являются её критическими направлениями.

**Замечание 5.1.** Если все критические направления особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются простыми обыкновенными и выполняются неравенства (3.2) и (3.3), то из (5.2)–(5.6) следует, что сепаратрисы  $L_{ki, 1}$  и  $L_{ki, 2}$  являются однотипными и, следовательно, однотипными являются секторы  $S_{kij, 1}$  и  $S_{kij, 2}$ ,  $i, j \in I_k$ . Поэтому в обозначениях этих объектов индекс  $\alpha$  далее не используется (см. раздел 2, Обозначения).

Предположим, что сепаратрисы  $L_{ki}$  и  $L_{ki+1}$ , ограничивающие сектор  $S_{kii+1}(\varepsilon)$  особой точки  $P_k$ , расположены так, что  $L_{ki}$  предшествует  $L_{ki+1}$  при обходе границы окрестности  $U_k(\varepsilon)$  в направлении против хода часовой стрелки. При сделанных выше предположениях рассмотрим следующие случаи взаимного расположения множителей  $\omega_i$  и  $\omega_{i+1}$  в правой части уравнения (4.1).

**Утверждение 5.1.**  $S_{kii+1}$  является сектором, параболическим справа (рис. 1.a), если

- (a)  $i \in I_{k\nu}$ ,  $i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$  или
- (b)  $i \in I_{k\delta}$ ,  $i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$ .

**Утверждение 5.2.**  $S_{kii+1}$  является сектором, параболическим слева (рис. 1.b), если

- (a)  $i \in I_{k\nu}$ ,  $i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$  или
- (b)  $i \in I_{k\delta}$ ,  $i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$ .

**Утверждение 5.3.**  $S_{kii+1}$  является гиперболическим сектором (рис. 1.c), если

- (a)  $i, i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$  или
- (b)  $i, i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$ .

**Утверждение 5.4.**  $S_{kii+1}$  является эллиптическим сектором (рис. 1.d), если

- (a)  $i, i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$  или
- (b)  $i, i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$ .

*Доказательство.* Чтобы применить метод Фроммера [9], перепишем равенства (5.4)–(5.6) следующим образом:

$$x\tau_y - y\tau_x = [(-N_{k\nu} + N_{k\delta})B\alpha + \varphi(x, y)]\omega_i\omega_{i+1}, \quad (5.7)$$

$$x\tau_x = x \left[ (-1)^{\xi_i} \tau_{ix} \omega_{i+1} + (-1)^{\xi_{i+1}} \tau_{i+1x} \omega_i \right] B\alpha + \omega_i \omega_{i+1} A_x, \quad (5.8)$$

$$y\tau_y = y \left[ (-1)^{\xi_i} \tau_{iy} \omega_{i+1} + (-1)^{\xi_{i+1}} \tau_{i+1y} \omega_i \right] B\alpha + \omega_i \omega_{i+1} A_y, \quad (5.9)$$

где

$$B = \prod_{j \in I, j \neq i, i+1} \omega_j(x, y), \quad \deg_{r_k} \varphi(x, y) = N_{k\nu} + N_{k\delta} - 1, \quad \xi_j = \begin{cases} 1 & \text{для } i \in I_\delta; \\ 2 & \text{для } i \in I_\nu, \end{cases}$$

$$A_x = x \cdot \sum_{j \in I, j \neq i, i+1} \tau_{jx} \cdot \prod_{s \in I, s \neq j, i, i+1} \omega_s, \quad A_y = y \cdot \sum_{j \in I, j \neq i, i+1} \tau_{jy} \cdot \prod_{s \in I, s \neq j, i, i+1} \omega_s,$$

$$\deg_{r_k} A_x = \deg_{r_k} A_y = N_{k\nu} + N_{k\delta} - 1.$$

Предположим, что для  $i \in I_k$

$$\omega_i \equiv a_i x + b_i y + \sigma_1(x, y), \quad \omega_{i+1} \equiv a_{i+1} x + b_{i+1} y + \sigma_2(x, y), \quad (5.10)$$

где  $a_i, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}$  являются постоянными, а  $\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y)$  — многочленами порядка выше первого. Если  $b_i$  и  $b_{i+1}$  отличны от нуля, то после подстановки (5.7) и (5.8) в первое из уравнений (5.3) получим уравнение

$$x \frac{du}{dx} = \frac{[(-N_{k\nu} + N_{k\delta})B_1 + \varphi](u - u_i)(u - u_{i+1})b_i b_{i+1}}{[(-1)^{\xi_i} \tau_{ix}(u - u_{i+1})b_{i+1} + (-1)^{\xi_{i+1}} \tau_{i+1x}(u - u_i)b_i]B_1 + (u - u_i)(u - u_{i+1})A_1}, \quad (5.11)$$

где

$$\tau_{ix} = b_i, \quad \tau_{i+1x} = b_{i+1}; \quad u_s = -\frac{a_s}{b_s}, \quad s \in I_k;$$

$$B_1 = \alpha \cdot \prod_{j \in I_k, j \neq i, i+1} (u - u_j), \quad \varphi = x\eta_1(x, u), \quad A_1 = x\eta_2(x, u),$$

и  $\eta_s(x, u)$ ,  $s = 1, 2$  — некоторые многочлены. В малых окрестностях точек  $(0; u_i)$  и  $(0; u_{i+1})$  плоскости  $Oxu$  уравнение (5.11) имеет вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{\Delta_i \cdot (u - u_i) + xg_1(x, u)}{x[1 + (u - u_i)g_2(x, u)]} \quad \text{и} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\Delta_{i+1} \cdot (u - u_{i+1}) + xg_3(x, u)}{x[1 + (u - u_{i+1})g_4(x, u)]}, \quad (5.12)$$

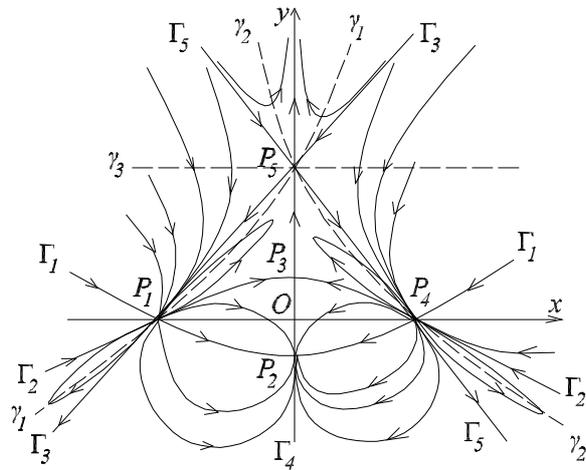


Рис. 3. Схема фазового портрета векторного поля  $\vec{v}$  примера 5.1

соответственно, где  $\Delta_s = (-1)^{\xi_s} \cdot (-N_{k\nu} + N_{k\delta})$ ,  $s = i, i+1$ , а  $g_j = g_j(x, u)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  — некоторые многочлены.

При выполнении условий утверждения 5.1 справедливы неравенства  $\Delta_i > 0$  и  $\Delta_{i+1} < 0$ , поэтому из (5.12) следует, что  $L_{ki}$  и  $L_{ki+1}$  являются сепаратрисами параболического и гиперболического типов соответственно, а сектор  $S_{kii+1}$  — сектором, параболическим справа.

Если в (5.10) один из коэффициентов  $b_i, b_{i+1}$  равен нулю, то одна из сепаратрис  $L_{ki}$  и  $L_{ki+1}$  точки  $P_k$  касается оси  $Oy$ . В этом случае для выяснения типа сектора  $S_{kii+1}$ , следует аналогичным образом исследовать второе из уравнений (5.3) совместно с равенствами (5.7) и (5.9). В результате утверждение 5.1 будет доказано.

Утверждения 5.2–5.4 доказываются аналогично. □

**Замечание 5.2.** Из (5.7) и (5.12) следует, что изменение знака разности  $-N_{k\nu} + N_{k\delta}$  приводит к изменению типа сектора  $S_{kii+1}$ , а именно: сектора, параболического справа, в сектор, параболический слева, и наоборот в случаях, рассмотренных в утверждениях 5.1 и 5.2; параболического сектора в эллиптический и наоборот в случаях, рассмотренных в утверждениях 5.3 и 5.4.

**Замечание 5.3.** Знак разности  $-N_{k\nu} + N_{k\delta}$  можно изменить двумя способами:

- (i) добавлением множителя, например, вида  $[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]^\nu$  в числитель или знаменатель правой части уравнения (4.1), где  $\nu$  — некоторое натуральное число; или
- (ii) заменой некоторого множителя  $\omega_i$  его степенью  $\omega_i^{\beta_i}$  с натуральным показателем  $\beta_i > 1$ .

В случае (i) в правой части равенства (5.1) появится ещё одно слагаемое, а случае (ii) показатель степени  $\beta_i$  войдёт слагаемым с соответствующим знаком в разности  $-N_{l\nu} + N_{l\delta}$ , относящиеся к другим особым точкам  $P_l, l \in I_P$  и  $l \neq k$ , через которые проходит соответствующая кривая  $\Gamma_i$ .

**Пример 5.1.** Построить векторное поле  $\vec{v}$  вида (1.1), топологическая структура которого в области  $D = \{(x, y) : -1,7 < x < 1,7, -1,2 < y < 1,7\}$  эквивалентна топологической структуре фазового портрета, представленного схемой на рис. 3, где

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 : \quad \omega_1 &\equiv y - 0,5 \cdot (x^2 - 1) = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_1 &= (1, x), \\
 \Gamma_2 : \quad \omega_2 &\equiv y + 0,2 \cdot (x^2 - 1) = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_1 &= (1, -0,4x), \\
 \Gamma_3 : \quad \omega_3 &\equiv y - x - 1 = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_3 &= (1, 1), \\
 \Gamma_4 : \quad \omega_4 &\equiv x = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_4 &= (0, -1), \\
 \Gamma_5 : \quad \omega_5 &\equiv x + y - 1 = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_5 &= (1, -1).
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

**Решение.** 1. Построение векторного поля направлений сравнения  $\vec{\tau}$ . Согласно утверждениям 5.1–5.4, схеме фазового портрета на рис. 3 соответствует, в частности, функция

$$z_4 = \frac{\omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{\omega_1^3}$$

и, следовательно, векторное поле

$$\vec{\tau} = -3\vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 + \vec{\tau}_5 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \quad (5.14)$$

с компонентами

$$\begin{aligned} \tau_x &= -3\omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4, \\ \tau_y &= -3x \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 - 0,4x \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \end{aligned} \quad (5.15)$$

и требуемой топологической структурой в области  $D$ . Так как  $D$  не содержит ни предельных циклов, ни особых точек типа фокус, то векторное поле (5.14) само является частным решением задачи.

2. Построение функций  $F_1$  и  $F_2$ . Для нахождения других решений задачи можно использовать  $\vec{\tau}$  (5.14) и  $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{\tau}$  в качестве векторных полей направлений сравнения. В соответствии с пунктом 3.3 составим предварительные выражения функций  $F_1$  и  $F_2$ , соответствующих топологической структуре фазового портрета на рис. 3:

$$F_1 = \vec{\tau} \cdot \vec{v} = -\lambda \omega_{01} \omega_{02} \omega_{03} \omega_{04} \omega_{05}, \quad (5.16)$$

$$F_2 = \vec{n} \cdot \vec{v} = -\mu \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4, \quad (5.17)$$

где  $\lambda, \mu$  — неопределённые неотрицательные множители,  $\omega_{0k} = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , а множители  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , соответствуют следующим кривым и точке:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad \sigma_1 &\equiv \omega_3 - \omega_2 \omega_4 = 0, \\ \gamma_2 : \quad \sigma_2 &\equiv \omega_5 + \omega_2 \omega_4 = 0, \\ \gamma_3 : \quad \sigma_3 &\equiv y - 1 = 0, \\ \gamma_4 : \quad \sigma_4 &\equiv x^2 + (y + 0,5)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из (5.14) и (5.17) следует, что  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , из (5.13) являются интегральными кривыми векторного поля  $\vec{\tau}$ , так как  $\vec{n}$  является вектором нормали для всех его интегральных кривых, включая и кривые  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Если  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , определены, то дальнейшее построение функций  $F_1$  (5.16) и  $F_2$  (5.17) сводится к выбору значений  $\lambda$  и  $\mu$ , которые обеспечивают одновременно требуемые локальные топологические структуры особых точек  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , и глобальную топологическую структуру искомого векторного поля  $\vec{v}(v_x, v_y)$  в области  $D$ . Такой выбор предполагает, прежде всего, исследование особых точек  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}, \quad (5.19)$$

которое мы выполним, используя метод Фроммера [9].

*Исследование точки  $P_1(-1, 0)$ .* Для нахождения критических направлений, отличных от направления  $x = -1$ , выполним в (5.19) подстановку  $y = u(x) \cdot (x + 1)$  и получим уравнение

$$(x + 1) \frac{du}{dx} = \left( \frac{v_y}{v_x} - \frac{y}{x + 1} \right) \Big|_{y=u \cdot (x+1)},$$

которое, после замены в нём  $v_x$  и  $v_y$  их выражениями (3.5), преобразуется в уравнение

$$(x + 1) \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{F_1[(x + 1)\tau_y - y\tau_x] + F_2[(x + 1)\tau_x + y\tau_y]}{(x + 1)[F_1\tau_x - F_2\tau_y]} \right\} \Big|_{y=u \cdot (x+1)}, \quad (5.20)$$

где

$$\begin{aligned} (x + 1)\tau_y - y\tau_x &= \alpha \omega_1 \omega_2 \omega_3 + o(r_1^3), \quad \alpha = (\omega_4 \cdot \omega_5)|_{P_1} = 2, \\ (x + 1)\tau_x &= (x + 1)[(-3\omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_2) \cdot \alpha + o(r_1^3)] \end{aligned} \quad (5.21)$$

согласно (5.12) и (5.16)–(5.18). Предположим для определённости, что  $\lambda$  и  $\mu$  являются положительными постоянными. Тогда вблизи точки  $P_1$  функция  $F_2$  (5.17) имеет более высокий порядок

малости, чем  $F_1$  (5.16):  $\deg_{r_1} F_2 > \deg_{r_1} F_1$ . В этом случае подстановка (5.21) в (5.20) приводит к уравнению

$$(x + 1) \frac{du}{dx} = \frac{-(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \cdot [1 + (x + 1)\varphi_1(x, u)]}{3(u - u_2)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_3) + (u - u_1)(u - u_2) + (x + 1)\varphi_2(x, u)}, \quad (5.22)$$

где  $u_1 = -1, u_2 = 0,4, u_3 = 1$  являются угловыми коэффициентами касательных к соответствующим кривым  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  в точке  $P_1(-1; 0)$ ;  $\varphi_1(x, u), \varphi_2(x, u)$  — многочлены. Из (5.22) следует, что сепаратрисы  $L_{11,1}$  и  $L_{11,2}$  относятся к гиперболическому типу, а  $L_{12,\alpha}$  и  $L_{13,\alpha}, \alpha = 1, 2,$  — к параболическому типу.

Заметим, что  $x = -1$  не является критическим направлением особой точки  $P_1$ , так как предел правой части уравнения (5.22) равен  $-u$  при  $x \rightarrow -1$  и  $u \rightarrow \infty$ . Этот факт может быть проверен подстановкой  $x + 1 = v(y) \cdot y$  в уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y} \quad (5.23)$$

и исследованием особых точек полученного уравнения

$$y \frac{dv}{dy} = \left( \frac{v_x}{v_y} - \frac{x + 1}{y} \right) \Big|_{x+1=v(y) \cdot y}, \quad (5.24)$$

расположенных на оси  $Ov$  координатной плоскости  $Oyv$ . В силу (3.5), первого из равенств (5.21) и второго из равенств (5.15), уравнение (5.24) приводится к виду

$$y \frac{dv}{dy} = - \left\{ \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 + o(r_1^3)}{y[3\omega_2 \omega_3 + 0,4\omega_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_2 + o(r_1^2)]} \right\} \Big|_{x+1=v(y) \cdot y}. \quad (5.25)$$

Так как

$$\omega_1 = y + yv - 0,5 \cdot y^2 v^2, \quad \omega_2 = y - 0,4 \cdot yv + 0,2 \cdot y^2 v^2, \quad \omega_3 = y + yv,$$

то разделив числитель и знаменатель правой части уравнения (5.25) на  $y^3$ , получим

$$y \frac{dv}{dy} = - \frac{(v + 1)(v - 2,5)(v - 1) + y\varphi_3(y, v)}{3 \cdot (v - 2,5)(v - 1) - (v + 1)(v - 1) - (v + 1)(v - 2,5) + y\varphi_4(y, v)}, \quad (5.26)$$

где  $\varphi_3(y, v)$  и  $\varphi_4(y, v)$  — некоторые многочлены. Из вида правой части последнего уравнения следует, что  $(0, 0)$  не является его особой точкой и, следовательно,  $x = -1$  не является критическим направлением точки  $P_1(-1; 0)$ .

**Замечание 5.4.** Если  $\deg_{r_1} F_1 < \deg_{r_1} F_2, \lambda(x_1, y_1) \neq 0$  и  $\mu(x_1, y_1) \neq 0$ , то из (5.22) и (5.26) следует, что топологическая структура особой точки  $P_1$  не зависит от  $\lambda$  и  $\beta$  и является одинаковой у обоих векторных полей  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ .

*Исследование точки  $P_2(0, 0, 2)$ .* После подстановки  $y - 0,2 = u(x) \cdot x$  в (5.19) получим уравнение

$$x \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{F_1 [x\tau_y - (y - 0,2)\tau_x] + F_2 [x\tau_x + (y - 0,2)\tau_y]}{x(F_1\tau_x - F_2\tau_y)} \right\} \Big|_{y-0,2=u \cdot x}, \quad (5.27)$$

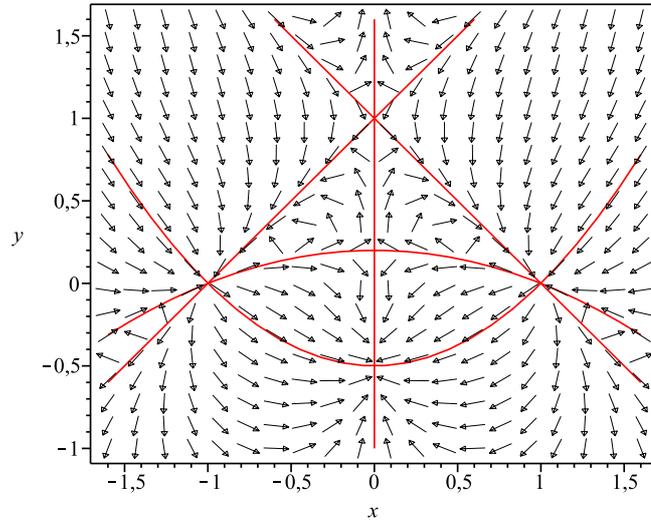
где

$$\begin{aligned} x\tau_y - (y - 0,2)\tau_x &= -2\alpha\omega_2\omega_4 + o(r_2^2), \quad \alpha = (\omega_1\omega_3\omega_5)|_{P_2} \approx 0,768, \\ x\tau_x + (y - 0,2)\tau_y &= [x\omega_4 - (y - 0,2)\omega_2] \alpha + o(r_2^2), \\ xv_x &= x(F_1\omega_4 + F_2\omega_2)\alpha + o(r_2), \\ F_1 &= -\lambda [x^2 + (y - 0,2)^2] \cdot \beta_1, \quad \beta_1 = (\omega_{01}\omega_{03}\omega_{04}\omega_{05})|_{P_2} \approx 0,3992, \\ F_2 &= -\mu\omega_2\omega_4\alpha\beta_2, \quad \beta_2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)|_{P_2} \approx -0,1229312. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Так как  $\omega_2 = y - 0,2 + 0,2 \cdot x^2 = ux + 0,2 \cdot x^2$ , то в силу (5.28) уравнение (5.27) приводится к виду

$$x \frac{du}{dx} = - \frac{[2\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2 + (2\lambda\beta_1 + \mu\alpha\beta_2)u^2] \cdot u + x\varphi_5(x, u)}{\lambda\beta_1 + (\lambda\beta_1 + \mu\alpha\beta_2)u^2 + x\varphi_6(x, u)}, \quad (5.29)$$

где  $2\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2 > 0, \varphi_5(y, v)$  и  $\varphi_4(y, v)$  — некоторые многочлены. Если  $2\beta_1 + \alpha\beta_2 > 0$ , то выражение в квадратных скобках в (5.29) положительно и, следовательно,  $u = 0$  является угловым

РИС. 4. График векторного поля  $\vec{v}$ , построенного в примере 5.1

коэффициентом единственного невертикального критического направления точки  $P_2$ . Это направление является касательным к сепаратрисам  $L_{22,1}$  и  $L_{22,2}$  в этой точке. Эти сепаратрисы являются гиперболическими, что следует из (5.29).

Чтобы убедиться в том, что  $x = 0$  является критическим направлением точки  $P_2$ , подставим  $x = v(y) \cdot (y - 0,2)$  в (5.23). В результате получим

$$(y - 0,2) \cdot \frac{dv}{dy} = - \frac{[2\lambda\beta_1 + \mu\alpha\beta_2 + (2\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2)v^2] \cdot v + (y - 0,2)\varphi_7(y, v)}{\lambda\beta_1 + (\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2)v^2 + (y - 0,2)\varphi_8(y, v)},$$

где  $\varphi_7(y, v)$ ,  $\varphi_8(y, v)$  — некоторые многочлены. Из вида правой части последнего уравнения следует, что  $x = 0$  действительно является критическим направлением точки  $P_2$ ; при этом  $L_{24,1}$  и  $L_{24,2}$  являются её гиперболическими сепаратрисами, если  $2\beta_1 + \alpha\beta_2 > 0$ . Для  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  из (5.28) это неравенство выполняется, в частности, если  $\lambda = \mu = 1$ . В этом случае функциям  $F_1$  (5.16) и  $F_2$  (5.17) соответствует векторное поле  $\vec{v}$  с особой точкой  $P_2$  заданной топологической структуры.

**Замечание 5.5.** Из изложенного выше следует, что если  $\deg_{r_k} F_1 = \deg_{r_k} F_2$ , то топологическая структура соответствующей особой точки  $P_k$  векторного поля  $\vec{v}$  зависит от соотношения значений  $\lambda$  и  $\mu$  вблизи этой точки. В этом случае выбор подходящих значений  $\lambda$  и  $\mu$  предполагает изучение уравнений (5.19) и (5.23) после выполнения в них замен переменных  $y - y_k = u(x)(x - x_k)$  и  $x - x_k = v(y)(y - y_k)$ , соответственно.

Аналогичное изучение особых точек  $P_3, P_4, P_5$  показывает, что при  $\lambda = \mu = 1$  их локальные топологические структуры эквивалентны локальным топологическим структурам этих точек на схеме, представленной на рис. 3.

Таким образом, полагая  $\lambda = \mu = 1$  в (5.16) и (5.17), мы получим окончательные выражения функций  $F_1$  и  $F_2$ . Подстановка этих выражений в (3.5) даёт компоненты  $v_x$  и  $v_y$  искомого векторного поля  $\vec{v}$ . График этого векторного поля, построенный с помощью функции *fieldplot* пакета *MAPLE*, представлен на рис. 4.

**5.2. Локальные структуры особых точек  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельных циклов  $C_j, j \in I_C$ .** Предположим, что искомое векторное поле  $\vec{v}$ (1.1) имеет в области  $D$  не только особые точки  $P_k, k \in I_P$ , но также фокусы  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельные циклы  $C_j, j \in I_C$ , заданных типов. В этом случае  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и  $C_j, j \in I_C$ , ограничивают конечное число двусвязных ячеек, не содержащих внутри себя особых траекторий векторного поля  $\vec{v}$  (см. [3, гл. VII, § 16]). Для построения такого векторного поля способом, описанным в пункте 3.3, следует сначала составить функцию  $z$  (4.1), для которой фокусы  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельные циклы  $C_j, j \in I_C$ , являются элементами некоторых множеств вложенных замкнутых линий уровней  $z = c$ . Это требование выполняется,

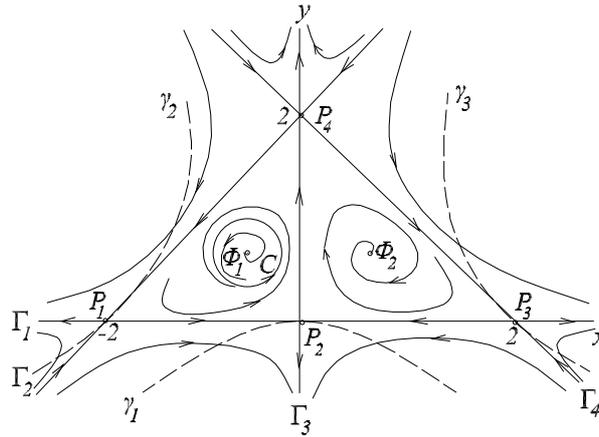


Рис. 5. Схема фазового портрета векторного поля  $\vec{v}$  примера 5.2

если множители  $\omega_i, i \in I$ , соответствующие внутренним и внешним границам одних и тех же упомянутых выше ячеек, располагаются в разных частях дроби из (4.1): один в её числителе, а другой/другие — в знаменателе или наоборот. В этом случае векторы  $\vec{n}_S$  (4.2) и  $\vec{k}$  не являются коллинеарными во внутренних точках этих ячеек, из чего следует, что соответствующий вектор  $\vec{\tau}$  (4.3) отличен от нуля в этих точках. Этот факт позволяет использовать  $\vec{\tau}$  в качестве векторного поля направлений сравнения, для которого кривые упомянутых выше множеств вложенных замкнутых кривых являются интегральными кривыми. Для этого векторного поля каждая точка  $\Phi_i$  является центром, расположенным в одной из этих ячеек, ограниченной внешне (а) некоторой кривой  $C_j, j \in I_C$ , или (б) несколькими интегральными кривыми  $\Gamma_{s_1}, \dots, \Gamma_{s_h}$ , где  $s_1, \dots, s_h \in I_\Gamma$ . В случае (б) каждая вершина ячейки является одной из особых точек  $P_k, k \in I_P$ , а соответствующий сектор  $S_{kij,\alpha}$ , расположенный внутри этой ячейки, является гиперболическим.

При сделанных выше предположениях топологические структуры фокусов  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельных циклов  $C_j, j \in I_C$ , искомого векторного поля  $\vec{v}$  зависят от знаков функций  $F_1$  и  $F_2$  из (3.4) внутри упомянутых выше ячеек. А именно: знак функции  $F_1$  определяет направление векторного поля  $\vec{v}$  на его интегральных кривых, а сочетания знаков функций  $F_1$  и  $F_2$  определяют характер устойчивости фокусов  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельных циклов  $C_j, j \in I_C$ .

**Пример 5.2.** Построить векторное поле  $\vec{v}$  (1.1), которое в области  $D = \{(x, y) : x \in (-3, 3), y \in (-1, 2, 3, 2)\}$  имеет топологическую структуру, эквивалентную топологической структуре фазового портрета, представленного схемой на рис. 5, где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \omega_1 &\equiv y = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 = (1, 0), & \Gamma_2 : \omega_2 &\equiv y - 2 - x = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_2 = (1, 1), \\ \Gamma_3 : \omega_3 &\equiv x = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_3 = (0, -1), & \Gamma_4 : \omega_4 &\equiv y + x - 2 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_3 = (1, -1), \\ C : \omega_5 &\equiv -(x + 0,5)^2 - (y - 0,75)^2 + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_5 = (-2(y - 0,75), 2(x + 0,5)), \\ \Phi_1 : \omega_6 &\equiv -(x + 0,5)^2 - (y - 0,75)^2 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_6 = (-2(y - 0,75), 2(x + 0,5)), \\ \Phi_2 : \omega_7 &\equiv -(x - 0,5)^2 - (y - 0,75)^2 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_7 = (-2(y - 0,75), 2(x - 0,5)). \end{aligned}$$

**Решение. 1.** Построение векторного поля  $\vec{\tau}$ . В соответствии с разделами 4 и 5 топологической структуре фазового портрета, представленного на рис. 5, отвечает, в частности, функция

$$z = \frac{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_6}{\omega_5\omega_7} \tag{5.30}$$

и, следовательно, векторное поле

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & \omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\vec{\tau}_1 + \omega_1\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\vec{\tau}_2 + \omega_1\omega_2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\vec{\tau}_3 + \omega_1\omega_2\omega_3\omega_5\omega_6\omega_7\vec{\tau}_4 - \\ & - \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_6\omega_7\vec{\tau}_5 + \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\omega_7\vec{\tau}_6 - \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6\vec{\tau}_7. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Так как все  $\omega_i, i = 1, \dots, 7$ , входят в (5.30) только в первых степенях, то:

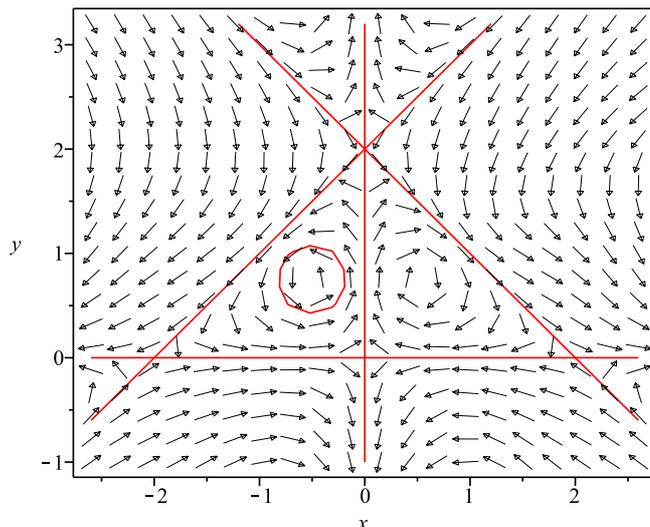


Рис. 6. График векторного поля  $\vec{v}$ , построенного в примере 5.2

- (i) проекция вектора  $\vec{n}_S$  (4.2) на плоскость  $Oxy$  отлична от нуля в области  $D$ , за исключением точек  $P_1(-2, 0)$ ,  $P_2(0, 0)$ ,  $P_3(2, 0)$ ,  $P_4(0, 2)$ ,  $\Phi_1(-0,5, 0,75)$ ,  $\Phi_2(0,5, 0,75)$ ;
- (ii) линии уровней  $z = c$  ( $c = \text{const} \neq 0, \pm\infty$ ), являясь интегральными кривыми векторного поля  $\vec{\tau}$ , образуют, в частности, два множества вложенных замкнутых кривых, которые заполняют области (ячейки), ограниченные кривыми  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , и точками  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  (см. рис. 5);
- (iii) кривая  $C$  является элементом одного из этих множеств.

Из (i) и (ii) следует, что для векторного поля  $\vec{\tau}$  (5.31):

- (a) особые точки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются центрами;
- (b) все секторы особых точек  $P_k(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , являются гиперболическими, что устанавливается методом Фроммера [9] аналогично тому, как это было сделано в примере 5.1.

2. *Построение векторного поля  $\vec{v}$ .* В соответствии с разделом 3.3, используя  $\vec{\tau}$  (5.31) и  $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{\tau}$  в качестве векторных полей направлений сравнения, составим функции  $F_1$  и  $F_2$  из (3.4), которые соответствуют топологической структуре фазового портрета на рис. 5. Такими функциями являются, в частности,

$$F_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{04}\omega_6, \quad F_2 = \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\sigma_1\sigma_2, \tag{5.32}$$

где

$$\omega_{0i} = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \sigma_1 = y + 0,2x^2, \quad \sigma_2 = \omega_2\omega_4 + 0,3\omega_1^2.$$

Заметим, что равенство  $\sigma_1(x, y) = 0$  определяет кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а равенство  $\sigma_2(x, y) = 0$  является уравнением кривой  $\gamma_3$  (см. рис. 5).

Подстановкой  $F_1$  и  $F_2$  из (5.32) в (3.5) получим компоненты искомого векторного поля  $\vec{v}$ . График этого векторного поля, построенный с помощью функции *fieldplot* пакета *MAPLE*, представлен на рис. 6.

Очевидно, что топологические структуры фазового портрета на рис. 5 и векторного поля на рис. 6 эквивалентны друг другу.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При постановке основной задачи (см. пункт 3.1) предполагалось, что все критические направления особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются *простыми обыкновенными* (см. [9]). Снятие этого ограничения и допущение того, что эти точки могут иметь также: (a) *кратные обыкновенные* критические направления, (b) сепаратрисы смешанных типов и (c) *особые* критические направления (определения типов критических направлений, указанных в п.п. (a) и (c), см. в [9]), приводит

к обобщению основной задачи и усложнению возможных топологических структур искомых векторных полей. Решение такой обобщённой задачи представляется возможным с использованием соответствующих векторных полей направлений сравнения.

Результаты решения основной задачи, изложенные в данной статье, могут быть использованы для построения математических моделей динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, в различных областях науки и техники. В частности, сочетание этих результатов с методами решения обратных задач динамики (см. [6]) позволяет составлять кинематические уравнения программных движений механических систем (например, таких как манипуляционные роботы) и использовать эти уравнения для нахождения управляющих сил, обеспечивающих осуществление этих движений и их устойчивость.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альмухамедов М. И.* Обратная задача качественной теории дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1963. — № 4. — С. 3–6.
2. *Альмухамедов М. И.* О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1965. — № 1. — С. 12–16.
3. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1966.
4. *Волков С. В.* Построение плоских векторных полей с непростой особой точкой заданной топологической структуры // Современ. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 4. — С. 575–595.
5. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. — М.: Мир, 1984.
6. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
7. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. мат. мех. — 1952. — 16, № 6. — С. 659–670.
8. *Мухарлямов Р. Г.* К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 1967. — 3, № 19. — С. 1673–1681.
9. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Усп. мат. наук. — 1941. — № 9. — С. 212–253.
10. *Argémi J.* Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$  // Ann. Mat. Pura Appl. — 1968. — 79. — С. 35–69.
11. *Jaumes G.* Synthèse d'un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné // Int. J. Nonlinear Mech. — 1972. — 7, № 6. — С. 597–608.
12. *Sverdlove R.* Inverse problems for dynamical systems // J. Differ. Equ. — 1981. — 42, № 1. — С. 72–105.

С. В. Волков

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: volkov-sv@rudn.ru

UDC 517.925; 517.93; 531.13

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252

EDN: YIWVPQ

## Construction of Flat Vector Fields with Prescribed Global Topological Structures

S. V. Volkov

*RUDN University, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this paper, we present a method for constructing vector fields whose phase portraits have finite sets of prescribed special trajectories (limit cycles, simple and complex singular points, separatrices) and prescribed topological structures in limited domains of the phase plane. The problem of constructing such vector fields is a generalization of a number of well-known inverse problems of the qualitative theory of ordinary differential equations. The proposed method for solving it expands the possibilities of mathematical modeling of dynamic systems with prescribed properties in various fields of science and technology.

**Keywords:** vector field, ODE system, qualitative ODE theory, phase portrait, topological structure, dynamical system, inverse problem.

**Conflict-of-interest.** The author declares no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The author declares no financial support.

**For citation:** S. V. Volkov, “Construction of Flat Vector Fields with Prescribed Global Topological Structures,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 237–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252>

### REFERENCES

1. M. I. Al'mukhamedov, “Obratnaya zadacha kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy” [The inverse problem of qualitative theory of differential equations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1963, No. 4, 3–6 (in Russian).
2. M. I. Al'mukhamedov, “O konstruirovani differentsial'nogo uravneniya, imeyushchego svoimi predel'nye tsiklami zadannye krivye” [On the construction of a differential equation having given curves as its limit cycles], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1965, No. 1, 12–16 (in Russian).
3. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems on the Plane], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
4. S. V. Volkov, “Postroenie ploskikh vektornykh poley s neprostoy osoboy tochkoy zadannoy topologicheskoy struktury” [Construction of planar vector fields with a nonsimple critical point of prescribed topological structure], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 4, 575–595 (in Russian).
5. A. S. Galiullin, *Obratnye zadachi dinamiki* [Inverse Dynamics Problems], Mir, Moscow, 1984 (in Russian).
6. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Methods for Solving Inverse Dynamics Problems], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
7. N. P. Erugin, “Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral'nyuyu krivuyu” [Construction of the entire set of systems of differential equations having a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, **16**, No. 6, 659–670 (in Russian).



8. R. G. Mukharlyamov, “K obratnym zadacham kachestvennoy teorii differentsial’nykh uravneniy” [To inverse problems of the qualitative theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1967, **3**, No. 19, 1673–1681 (in Russian).
9. M. Frommer, “Integral’nye krivye obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya pervogo poryadka v okrestnosti osoboy tochki, imeyushchey ratsional’nyy kharakter” [Integral curves of a first-order ordinary differential equation in the neighborhood of a singular point of rational character], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1941, No. 9, 212–253 (in Russian).
10. J. Argémi, “Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ ,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1968, **79**, 35–69.
11. G. Jaumes, “Synthèse d’un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné,” *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1972, **7**, No. 6, 597–608.
12. R. Sverdlove, “Inverse problems for dynamical systems,” *J. Differ. Equ.*, 1981, **42**, No. 1, 72–105.

S. V. Volkov  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: volkov-sv@rudn.ru