Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 2 (2024). С. 215–236
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.518+512.813.52
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236
EDN: YHQGYL

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ СОБОЛЕВСКИХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

С. К. Водопьянов, С. В. Павлов

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. Исследуются функциональные и геометрические свойства пределов гомеоморфизмов с интегрируемым искажением областей в группах Карно. Гомеоморфизмы принадлежат классам Соболева. Получены условия, при выполнении которых пределы последовательностей таких гомеоморфизмов также принадлежат классу Соболева, имеют конечное искажение и обладают $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина. В случае групп Карно H-типа получены достаточные условия, налагаемые на области и последовательность гомеоморфизмов, при выполнении которых предельное отображение является инъективным почти всюду. Эти результаты играют ключевую роль при нахождении экстремальных решений задач математической теории упругости на группах Карно H-типа, которым посвящены последующие работы авторов.

Ключевые слова: класс отображений Соболева, группа Карно, отображение с конечным искажением, внешняя операторная функция искажения, свойство предела соболевских отображений, $\mathcal{N}^{-1}$-свойство Лузина, инъективность почти всюду.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа подготовлена в рамках выполнения гранта РНФ (код проекта № 23-21-00359).

Для цитирования: *С. К. Водопьянов, С. В. Павлов.* Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 2. С. 215–236. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236

1. Введение

Некоторые задачи нелинейной теории упругости (например, для гиперупругих материалов) сводятся к задаче минимизации функционала полной энергии [19]. В этой ситуации, в отличие от случая линейной теории упругости, подынтегральная функция почти всегда невыпуклая, что делает невозможным применение стандартных методов решения вариационных задач. Тем не менее, существует заложенная Боллом математическая теория, в рамках которой можно исследовать функционалы полной энергии и моделировать достаточно широкий класс прикладных задач [20, 22].

В работе [27] к вопросу о существовании решения вариационной задачи была применена современная теория квазиконформного анализа (основы теории отображений с ограниченным искажением заложены в 60-ые годы прошлого века в работах Ю. Г. Решетняка [15]), с помощью которой удалось существенно ослабить предположения о суммируемости производных допустимых деформаций. Более того, экстремальная деформация оказывается гомеоморфизмом, что соответствует физическому содержанию задачи.

В настоящей работе мы закладываем основы математической теории для решения вариационных задач нелинейной теории упругости [21,26] на группах Карно. В случае произвольных групп Карно мы устанавливаем функциональные и геометрические свойства отображения, предельного для последовательности гомеоморфизмов с интегрируемым искажением, а в случае групп Карно H-типа — его свойство инъективности почти всюду. Многие ключевые результаты и методы квазиконформного анализа на группах Карно H-типа, необходимые для решения поставленных задач, получены в недавних работах [1,2,9]. Обобщения работы [2] на случай произвольных групп Карно пока неизвестны.

2. Предварительные сведения

Группы Карно. Напомним, что *стратифицированной градуированной нильпотентной группой*, или *группой Карно* (см., например, [23]), называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что её алгебра левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$ подпространств $\mathfrak{g}_i$, удовлетворяющих условиям $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$. Группа *двухступенчатая*, если $m = 2$.

Фиксируем скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ называется *горизонтальным пространством* алгебры $\mathfrak{g}$, его элементы — *горизонтальными векторными полями*. Пусть $N = \dim \mathfrak{g}$, $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, m$. Для удобства также обозначим $n = n_1$. Фиксируем ортонормированные базисы $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ подпространств $\mathfrak{g}_i$. Поскольку экспоненциальное отображение $g = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij} X_{ij}\Big)(e)$ (где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) есть глобальный диффеоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{G}$ (см. [23]), мы можем отождествить точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$. Тогда $e = 0$ и $x^{-1} = -x$. Растяжения δ_λ, заданные как $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$, суть автоморфизмы группы для всех $\lambda > 0$.

Однородной нормой на $\mathbb{G}$ называется непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0, +\infty)$ класса $C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ такая, что

(a) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
(b) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$ и $\rho(\delta_\lambda x) = \lambda \rho(x)$.

Из определения также следует (см. [23]):

(c) существует число $c > 0$ такое, что $\rho(xy) \leqslant c\big(\rho(x) + \rho(y)\big)$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$;
(d) любые две однородные нормы эквивалентны, т. е. для любых двух однородных норм ρ_1, ρ_2 найдутся числа $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ такие, что $\alpha\rho_1(x) \leqslant \rho_2(x) \leqslant \beta\rho_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{G}$.

Кусочно-гладкая кривая $\gamma : [a; b] \to \mathbb{G}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in \mathfrak{g}_1(\gamma(t))$ для п. в. t. *Расстоянием Карно—Каратеодори* $d_{cc}(x, y)$ между точками x, $y \in \mathbb{G}$ называется точная нижняя грань длин $\int\limits_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$ горизонтальных кривых с концевыми точками x и y. Отметим, что согласно теореме Рашевского—Чоу (см., например, [24]) любые две точки можно соединить кусочно-гладкой горизонтальной кривой конечной длины. Метрика d_{cc} и однородная норма ρ эквивалентны: существуют положительные постоянные α и β такие, что

$$\alpha d_{cc}(x, y) \leqslant \rho(y^{-1}x) \leqslant \beta d_{cc}(x, y). \tag{2.1}$$

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i\, n_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$. Мера нормирована так, чтобы её значение на единичном шаре $B(0,1)$ равно единице, $|B(0,1)| = 1$. Здесь $B(0,1) = \{x \in \mathbb{G} \mid d_{cc}(0,x) < 1\}$ — шар в метрике Карно—Каратеодори.

Группа Карно $\mathbb{H}$ называется *группой Карно H-типа*, если она является двухступенчатой и её алгебра Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ может быть снабжена скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ таким, что $\mathfrak{h}_1 \perp \mathfrak{h}_2$ и для каждого поля $Z \in \mathfrak{h}_2$ единичной длины линейное отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_1$, определённое соотношением

$$\langle J_Z(X), Y\rangle = \langle Z, [X, Y]\rangle, \ X,\, Y \in \mathfrak{h}_1,$$

ортогональное.

Пример 2.1. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^k = (\mathbb{R}^{2k+1}, *)$ с групповой операцией

$$(x,y,z)*(x',y',z') = \big(x+x', y+y', z+z'+\tfrac{x\cdot y'-x'\cdot y}{2}\big), \quad x,x',y,y' \in \mathbb{R}^k,\ z,z' \in \mathbb{R},$$

— классический пример неабелевой группы Карно H-типа. Её алгебра Ли $\mathfrak{h}^k$ образована векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1,\dots,k, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь $\mathfrak{h}_1^k = \operatorname{span}\{X_i, Y_i \mid i = 1,\dots,k\}$, $\mathfrak{h}_2^k = \operatorname{span}\{Z\}$, а нетривиальными скобками Ли являются лишь $[X_i, Y_i] = Z$, $i = 1,\dots,k$. Однородная размерность $\mathbb{H}^k$ равна $\nu = 2k+2$. Если скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ таково, что векторные поля $X_i, Y_i, i = 1,\dots,k, Z$ образуют ортонормированную систему, то отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1^k \to \mathfrak{h}_1^k$ определяется соотношениями $J_Z(X_i) = Y_i$, $J_Z(Y_i) = -X_i$ и, очевидно, является ортогональным.

Отображения класса Соболева. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область (непустое связное открытое множество в $\mathbb{G}$). Пространство $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, состоит из измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, интегрируемых в p-ой степени. Норма на $L_p(\Omega)$ определяется как

$$\|u \mid L_p(\Omega)\| = \bigg(\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Функция u принадлежит $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если $u \in L_p(K)$ для всякого компакта $K \subset \Omega$.

Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1,\dots,X_n$ образуют базис горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$, и пусть Π_j — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{G} \mid x_j = 0\}$, $j = 1,\dots,n$. Мера $d\mu_j = \imath(X_j)dx$ на Π_j задаётся внутренним произведением X_j с формой объёма. Каждому $y \in \Pi_j$ соответствует интегральная линия $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$. Отображение $\varphi : \Omega \to M$ из области $\Omega \subset \mathbb{G}$ в метрическое пространство M *абсолютно непрерывно на линиях*, $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; M)$, если его можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы для каждого $j = 1,\dots,n$ оно было абсолютно непрерывным на $\exp(tX_j)(y) \cap \Omega$ для μ_j-почти всех $y \in \Pi_j$. Полагаем $\mathrm{ACL}(\Omega) = \mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{R})$.

Пространство функций Соболева $L_p^1(\Omega)$, $p \geqslant 1$, состоит из функций $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathrm{ACL}(\Omega)$ таких, что производные $X_j u$ (существующие п. в.) принадлежат $L_p(\Omega)$, $j = 1,\dots,n$. Полунорма функции $u \in L_p^1(\Omega)$ равна $\|u \mid L_p^1(\Omega)\| = \big\| |\nabla_h u| \mid L_p(\Omega)\big\|$, где $\nabla_h u = (X_1 u,\dots,X_n u)$ — *горизонтальный градиент* u. Далее вместо $\big\| |\nabla_h u| \mid L_p(\Omega)\big\|$ мы будем писать $\|\nabla_h u \mid L_p(\Omega)\|$.

Эквивалентное определение пространства $L_p^1(\Omega)$ основано на понятии обобщённой производной: локально суммируемая функция $u_i : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *обобщённой производной функции* $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *вдоль векторного поля* X_i, $i = 1,\dots,n$, если

$$\int\limits_\Omega u_i(x)v(x)\,dx = -\int\limits_\Omega u(x)X_i v(x)\,dx$$

для любой тестовой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Локально суммируемая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит $L_p^1(\Omega)$ в том и только том случае, когда существуют её обобщённые производные $u_i \in L_p(\Omega)$, $i = 1\dots,n$. При этом $u_i = X_i u$, где $X_i u$ — классические производные функции $u \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, существующие п. в.

Пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$ и снабжено нормой

$$\|u \mid W_p^1(\Omega)\| = \|u \mid L_p(\Omega)\| + \|u \mid L_p^1(\Omega)\|.$$

Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — две группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область. Рассмотрим $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$. Тогда $X_j\varphi(x) \in \tilde{\mathfrak{g}}_1(\varphi(x))$ для п. в. $x \in \Omega$ (см. [28, предложение 4.1]). Матрица $D_h\varphi(x) = (X_i\varphi_j)$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,\widetilde{n}$, определяет линейный оператор $D_h\varphi(x) : \mathfrak{g}_1 \to \tilde{\mathfrak{g}}_1$, который называется *горизонтальным дифференциалом* φ. Известно (см. [31, теорема 1.2]), что для п. в. $x \in \Omega$ отображение $D_h\varphi(x)$ определено и может быть продолжено до гомоморфизма алгебр Ли $\widehat{D}\varphi(x) : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$, который также можно рассматривать как линейный оператор $\widehat{D}\varphi(x) : T_x\mathbb{G} \to T_{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{G}}$. Нормы обоих операторов находятся в отношении

$$\big|D_h\varphi(x)\big| \leqslant \big|\widehat{D}\varphi(x)\big| \leqslant C\big|D_h\varphi(x)\big|, \tag{2.2}$$

где C зависит только от структуры групп. Последнему гомоморфизму также соответствует гомоморфизм групп $D_{\mathcal{P}}\varphi(x) = \widetilde{\exp} \circ \widehat{D}\varphi(x) \circ \exp^{-1}$, известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом φ по отношению к структуре группы [31].

Определение 2.1. Класс отображений Соболева $W_p^1(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$ состоит из отображений $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, для которых величина

$$\big\|\varphi \mid W_p^1(\Omega)\big\| = \|\rho \circ \varphi \mid L_p(\Omega)\| + \| \, |D_h\varphi| \mid L_p(\Omega)\|$$

конечна. Отображение φ принадлежит $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, если $\varphi \in W_p^1(U; \widetilde{\mathbb{G}})$ для всякой компактно вложенной области $U \Subset \Omega$. Далее мы пишем $\|D_h\varphi \mid L_p(\Omega)\|$ вместо $\||D_h\varphi| \mid L_p(\Omega)\|$.

Эквивалентные описания отображений групп Карно класса Соболева можно найти в [31, предложение 4.2]. Заметим, что если $\varphi \in W_p^1(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, то все координатные функции φ_i, $i = 1, \dots, \widetilde{N}$, принадлежат $W_p^1(\Omega)$.

Отображение φ класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ называется отображением *с конечным искажением*, если $D_h\varphi = 0$ п. в. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \mid \det \widehat{D}\varphi(x) = 0\}$. Класс отображений $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ с конечным искажением обозначается символом $FD(\Omega; \mathbb{G})$. *Внешняя функция искажения* $K_{\varphi,p}$, $p \in [1; \infty)$, определяется по правилу

$$K_{\varphi,p}(x) = \begin{cases} \dfrac{|D_h\varphi(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пространство $\mathrm{Lip}(\Omega)$ состоит из липшицевых в метрике Карно—Каратеодори функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, а пространство $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — из заданных на Ω функций, липшицевых в метрике Карно—Каратеодори на каждом компакте $K \Subset \Omega$. Через $\mathbb{H}$ мы будем обозначать группу Карно H-типа, а через $\mathbb{G}$ — произвольную группу Карно.

Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с описанием ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

Теорема 2.1 (см. [10, теорема 2]). *Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \Omega'$ областей в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L_q^1(\Omega), \ 1 < q \leqslant p < \infty,$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$;
2) φ *имеет конечное искажение*;
3) $K_{\varphi,p} \in L_\sigma(\Omega)$, *где* $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ *при* $q = p$).

При этом норма $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $\|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|$, т. е. для некоторой константы $\alpha_{p,q} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{p,q}\|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\| \leqslant \|\varphi^*\| \leqslant \|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|.$$

Теорема 2.2. *Пусть Ω, Ω' — области на группе Карно H-типа. Если гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \Omega'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L_q^1(\Omega)$, $\nu - 1 < q \leqslant p < \infty$, то обратное отображение φ^{-1} порождает ограниченный оператор композиции $(\varphi^{-1})^* : L^1_{q'}(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to L^1_{p'}(\Omega')$, где $q' = \dfrac{q}{q-(\nu-1)}$, $p' = \dfrac{p}{p-(\nu-1)}$. Более того, $\|K_{\varphi^{-1},q'} \mid L_{\sigma'}(\Omega')\| \leqslant C\|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|^{\nu-1}$, где $\dfrac{1}{\sigma'} = \dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{q'}$ ($\sigma' = \infty$ при $q' = p'$).*

Доказательство. Условия теоремы 2.2 и теорема 2.1 позволяют применить результат [8, предложение 40] или [1, теорема 5], на основании которого отображение $\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega$

1) принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega'; \mathbb{H})$;
2) имеет конечное искажение;
3) $\mathcal{P}$-дифференцируемо п. в. в Ω' (определение $\mathcal{P}$-дифференцируемости см. в разделе 3.4).

В доказательстве свойства $\varphi^{-1} \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega';\mathbb{H})$ работы [1] существенно применяется неравенство для ёмкости конденсатора $E = (F, U)$, где F — континуум (т. е. связный компакт) в связном открытом множестве U:

$$\operatorname{cap}^{\nu-1}\bigl(E; L^1_p(U)\bigr) \geqslant c_{10}^{\nu-1}\frac{(\operatorname{diam} F)^p}{|U|^{p-(\nu-1)}},$$

установленное в [1, лемма 9] на группах Карно H-типа (здесь постоянная c_{10} зависит только структуры группы Карно).

Напомним, что *p-ёмкость конденсатора* $E = (F, U)$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_p(U)\bigr) = \inf_u \int\limits_U |\nabla_h u|^p(x)\,dx,$$

где инфимум берётся по всем финитным в области U функциям $u \in L^1_p(U) \cap \operatorname{Lip}(U)$, равным единице на F.

Обозначим символом $\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(x)$ присоединенную матрицу к матрице $\widehat{D}\varphi(x)$, определяемую из условия $\widehat{D}\varphi(x)\cdot\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(x) = \det\widehat{D}\varphi(x)\cdot\mathrm{Id}$, если определитель $(N\times N)$-матрицы $\widehat{D}\varphi(x)$ отличен от нуля, и по непрерывности в топологии $\mathbb{R}^{N\times N}$ в остальных случаях.

Далее используем легко проверяемое равенство

$$\sigma' = \frac{p'q'}{q'-p'} = \frac{pq}{(p-q)(\nu-1)}.$$

В точках невырожденности матрицы Якоби $\widehat{D}\varphi(x)$ имеем

$$[\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(x)]^{-1} = [\det\widehat{D}\varphi(x)]^{-1}\cdot\widehat{D}\varphi(x).$$

Отсюда с учётом равенств $\widehat{D}\varphi^{-1}(y) = [\widehat{D}\varphi(x)]^{-1}$, $\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi^{-1}(y) = [\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(x)]^{-1}$ и $\det\widehat{D}\varphi^{-1}(y) = \det\widehat{D}\varphi(x)^{-1}$ получаем

$$\bigl|\widehat{D}\varphi^{-1}(y)\bigr| = \bigl|\det\widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))\bigr|^{-1}\bigl|\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))\bigr|, \quad y = \varphi(x).$$

Ниже $Z \subset \Omega$ — борелевское множество, содержащее нули якобиана, такое, что мера образа $\varphi(Z)$ равна нулю, а дизъюнктное с ним борелевское множество $\Sigma \subset \Omega$ — это сингулярное множество нулевой меры функции множества $\Omega \supset A \mapsto |\varphi(A)|$: мера $\varphi(\Sigma)$ положительна, в то время как мера Σ равна нулю.

В случае $\nu - 1 < q < p < \infty$ с учётом последних равенств выводим (в приводимом ниже выводе применяется формула замены переменной, сформулированная ниже в предложении 3.7)

$$\begin{aligned}
&\bigl\|K_{\varphi^{-1},q'} \mid L_{\sigma'}(\Omega')\bigr\|^{\sigma'} \leqslant \int\limits_{\Omega'\setminus\varphi(\Sigma)} \left(\frac{\bigl|\widehat{D}\varphi^{-1}(y)\bigr|}{\bigl|\det\widehat{D}\varphi^{-1}(y))\bigr|^{1/q'}}\right)^{\sigma'} dy = \\
&= \int\limits_{\Omega'\setminus\varphi(\Sigma\cup Z)} \left(\frac{\bigl|\det\widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))\bigr|^{-1}\bigl|\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))\bigr|}{\bigl|\det\widehat{D}\varphi^{-1}(y))\bigr|^{1/q'}}\right)^{p'q'/(q'-p')} dy = \\
&= \int\limits_{\Omega\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{\bigl|\det\widehat{D}\varphi(x)\bigr|^{-1}\bigl|\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(x)\bigr|}{\bigl|\det\widehat{D}\varphi(x)\bigr|^{-1/q'}}\right)^{p'q'/(q'-p')} |\det\widehat{D}\varphi(x)|\,dx = \\
&= \int\limits_{\Omega\setminus Z} \left(\frac{|\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(x)|}{\bigl|\det\widehat{D}\varphi(x)\bigr|^{(\nu-1)/p}}\right)^{\sigma'} dx \leqslant \int\limits_{\Omega\setminus Z} \left(\frac{|\widehat{D}\varphi(x)|}{\bigl|\det\widehat{D}\varphi(x)\bigr|^{1/p}}\right)^{\sigma'(\nu-1)} dx \leqslant \\
&\leqslant C^{\sigma}\,\|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Неравенство в предпоследней строке возникает из соотношения $|\operatorname{adj}\widehat{D}\varphi(x)| \leqslant |\widehat{D}\varphi(x)|^{\nu-1}$, а постоянная C в последней строке — это множитель в правой части (2.2). Случай $\nu - 1 < q = p < \infty$ проще рассмотренного (см. детали в [6]). $\square$

3. Функциональные и геометрические свойства предельного отображения

В первую очередь в общем случае мы установим ряд свойств отображения, предельного для последовательности гомеоморфизмов с интегрируемым искажением, из которых в ситуации групп Карно H-типа будет выведено, что предельное отображение инъективно почти всюду.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $1 < q \leqslant p < \infty$, Ω, $\Omega' \subset \mathbb{G}$ — ограниченные области, $\varphi_0 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$. Пусть $\{\varphi_k : \Omega \to \Omega'\}$ — последовательность гомеоморфизмов класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G}) \cap FD(\Omega;\mathbb{G})$ таких, что:*

1) *$\{\varphi_k\}$ сходится[1] к φ_0 в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$;*
2) *последовательность $\{K_{\varphi_k,p}\}$ ограничена в $L_\sigma(\Omega)$, где $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).*

Тогда φ_0:

a) *индуцирует ограниченный оператор композиции*
$$\varphi_0^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_q(\Omega),$$
где W — ограниченная область, содержащая $\overline{\Omega'}$;

b) $\|\varphi_0^*\| \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\|$;

c) *принадлежит классу $W^1_q(\Omega;\mathbb{G})$;*

d) *имеет конечное искажение.*

Если ещё $p \leqslant \nu$, и φ_0 — непостоянное отображение, то

e) *φ_0 обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина, т. е. $|\varphi_0^{-1}(E)| = 0$ при $|E| = 0$, $E \subset W$.*

Замечание 3.1. Отметим, что из условий теоремы 3.1 в силу теоремы 2.1 вытекает, что последовательность $\Big\{\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^q\,dx\Big\}$ ограничена. Действительно, пусть $Z_k = \{x \in \Omega \mid \det \widehat{D}\varphi_k(x) = 0\}$. Так как φ_k имеет конечное искажение, то
$$\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^q\,dx = \int\limits_{\Omega\setminus Z_k} \frac{|D_h\varphi_k(x)|^q}{|\det \widehat{D}\varphi_k(x)|^{q/p}} |\det \widehat{D}\varphi_k(x)|^{q/p}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega\setminus Z_k} \left(\frac{|D_h\varphi_k(x)|^q}{|\det \widehat{D}\varphi_k(x)|^{q/p}}\right)^{\frac{p}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int\limits_\Omega |\det \widehat{D}\varphi_k(x)|\,dx\right)^{q/p} \leqslant \|K_{\varphi_k,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|^q \cdot |\Omega'|^{q/p}.$$

Доказательство теоремы 3.1 содержится в следующих утверждениях, в которых последовательно устанавливаются свойства предельного отображения φ_0.

3.1. Ограниченность предельного оператора композиции.

Предложение 3.1. *Предположим, что $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность действительнозначных функций класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, сходящаяся в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ к функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$, где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область на группе Карно $\mathbb{G}$. Предположим, что $f_k \in L^1_q(\Omega)$, $q \in (1,\infty)$, и выполнено поточечное неравенство*
$$|\nabla_h f_k(x)| \leqslant g_k(x) \text{ для п. в. } x \in \Omega$$
при каждом $k \in \mathbb{N}$, где последовательность функций $g_k \in L_q(\Omega)$ ограничена в $L_q(\Omega)$. Тогда $f \in L^1_q(\Omega)$ и для всякой ограниченной неотрицательной измеримой функции $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство
$$\int\limits_\Omega |\nabla_h f(x)|^q\,\alpha(x)\,dx \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega g_k^q(x)\alpha(x)\,dx. \tag{3.1}$$
Более того, если g — слабый предел в $L_q(\Omega)$ последовательности $\{g_k\}$, то
$$|\nabla_h f(x)| \leqslant g(x) \text{ для п. в. } x \in \Omega. \tag{3.2}$$

[1] Это означает, что для любого компакта $K \subset \Omega$ последовательность интегралов $\int\limits_K d_{cc}(\varphi_k(x), \varphi_0(x))\,dx$ стремится к нулю при $k \to \infty$.

Доказательство. Приводимое ниже доказательство — это модификация рассуждений работ [16, 17], [4, лемма 12]. Фиксируем функцию $\alpha(x) \geqslant 0$ и выбираем подпоследовательность $\{g_{k_l}\}$ такую, что

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_{k_l}^q(x)\alpha(x)\,dx = \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_k^q(x)\alpha(x)\,dx.$$

Поскольку пространство $L_q(\Omega)$, $q \in (1,\infty)$, рефлексивно, выделяя подпоследовательность, можно считать, что последовательность $X_i f_{k_l}$ сходится слабо в $L_q(\Omega)$ к функции $h_i \in L_q(\Omega)$ для каждого $i = 1,\dots,n$, а подпоследовательность g_{k_l} сходится слабо в $L_q(\Omega)$ к функции $g \in L_q(\Omega)$ при $l \to \infty$. Переходя в соотношении

$$\int\limits_{\Omega} f_{k_l}(x) X_i v(x)dx = -\int\limits_{\Omega} X_i f_{k_l}(x) v(x) dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega),$$

к пределу при $l \to \infty$, получаем, что h_i — обобщённая производная $X_i f$ функции f. Функция

$$\operatorname{sgn} \nabla_h f(x) = \begin{cases} \dfrac{\nabla_h f(x)}{|\nabla_h f(x)|}, & \text{если } |\nabla_h f(x)| \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

измерима и ограничена. Подпоследовательность $\langle \nabla_h f_{k_l}, \operatorname{sgn} \nabla_h f\rangle\, \alpha^{1/q}$ сходится слабо в $L_q(\Omega)$ к функции $|\nabla_h f|\, \alpha^{1/q}$ при $l \to \infty$. Пусть $0 \leqslant v \in L_{q'}(\Omega)$, $q' = q/(q-1)$, — произвольная функция. Перейдём в выражении

$$\left| \int\limits_{\Omega} \langle \nabla_h f_{k_l}(x), \operatorname{sgn} \nabla_h f(x)\rangle\, \alpha^{1/q}(x) v(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{\Omega} g_{k_l}(x)\alpha^{1/q}(x)v(x)\,dx$$

к пределу при $l \to \infty$. В результате приходим к соотношению

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla_h f(x)|\, \alpha^{1/q}(x) v(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} g(x)\alpha^{1/q}(x)v(x)\,dx, \quad 0 \leqslant v \in L_{q'}(\Omega).$$

Отсюда выводим неравенство $|\nabla_h f(x)|\, \alpha^{1/q}(x) \leqslant g(x)\alpha^{1/q}(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Учитывая последнее соотношение и то, что $g\alpha^{1/q}$ — слабый предел в $L_q(\Omega)$ подпоследовательности $\{g_{k_l}\alpha^{1/q}\}$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla_h f(x)|^q\, \alpha(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} g^q(x)\alpha(x)\,dx \leqslant \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_{k_l}^q(x)\alpha(x)\,dx = \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} g_k^q(x)\alpha(x)\,dx.$$

Таким образом, соотношения (3.1) и (3.2) доказаны. □

Предложение 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *отображение* φ_0 *индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \operatorname{Lip}(W) \to L_q^1(\Omega),$$

и

$$\|\varphi_0^*\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Приводимое ниже доказательство представляет собой модификацию рассуждений работ [16, 17], [4, теорема 9]. Пусть $u \in L_p^1(W) \cap \operatorname{Lip}(W)$. В силу липшицевости функции u последовательность $\{u \circ \varphi_k\}$ сходится к $u \circ \varphi_0$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Согласно теореме 2.1 из ограниченности последовательности $\{K_{\varphi_k,p}\}$ в $L_\sigma(\Omega)$ вытекает, что последовательность $\{\nabla_h(u \circ \varphi_k)\}$ ограничена в $L_q(\Omega)$. Более того,

$$\left\| u \circ \varphi_k \mid L_q^1(\Omega) \right\| \leqslant \|\varphi_k^*\| \cdot \left\| u \mid L_p^1(\Omega') \right\|. \tag{3.4}$$

Применяя предложение 3.1 с $f_k = u \circ \varphi_k$, $g_k = |\nabla_h(u \circ \varphi_k)|$ и $\alpha = 1$, получаем, что $u \circ \varphi_0 \in L_q^1(\Omega)$, причём

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla_h(u \circ \varphi_0)(x)|^q\,dx \leqslant \varliminf_{k} \int\limits_{\Omega} |\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x)|^q\,dx. \tag{3.5}$$

Положим $C = \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\| < \infty$. Теперь из (3.4) и (3.5) выводим

$$\big\|u\circ\varphi_0 \mid L_q^1(\Omega)\big\| \leqslant \varliminf_{k}\big\|\varphi_k^* u \mid L_q^1(\Omega)\big\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\|\cdot\big\|u \mid L_p^1(\Omega')\big\| \leqslant C\big\|u \mid L_p^1(W)\big\|. \tag{3.6}$$

Отсюда получаем неравенство (3.3). Предложение 3.2 доказано. □

Предложение 3.3. *Пусть $1 < q < \infty$, $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область, и пусть $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{G}$ — произвольная последовательность отображений класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$, сходящаяся в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ к некоторому отображению $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{G}$. Если последовательность $\big\{\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^q\,dx\big\}$ ограничена, то φ_0 принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ и $\int\limits_\Omega |D_h\varphi_0(x)|^q\,dx < \infty$.*

Доказательство. Приводимое ниже доказательство основано на рассуждениях работ [4, теорема 9] и [11, лемма 2]. Последовательность функций $g_k(x) = |D_h\varphi_k|(x)$ ограничена в $L_q(\Omega)$. Поскольку пространство $L_q(\Omega)$ рефлексивно, последовательность $\{g_k\}$ можно считать слабо сходящейся к неотрицательной функции $g \in L_q(\Omega)$.

Фиксируем точку $z \in \mathbb{G}$. С точкой z ассоциируем функцию

$$x \in \Omega \mapsto u_z(x) = d_{cc}(x,z).$$

Последовательности функций $f_k(x) = u_z\circ\varphi_k(x)$ и $g_k(x) = |D_h\varphi_k|(x)$ удовлетворяют всем условиям предложения 3.1. Пределом в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ последовательности функций f_k является функция $f(x) = u_z\circ\varphi_0(x)$, поэтому для неё поточечное неравенство (3.2) можно записать в следующем виде:

$$|\nabla_h(u_z\circ\varphi_0)(x)| \leqslant g(x) \text{ для п. в. } x\in\Omega. \tag{3.7}$$

Выберем в $\mathbb{G}$ счётное всюду плотное множество Z_0. Неравенство (3.7) можно считать выполненным одновременно для всех $z \in Z_0$ при п. в. $x \in \Omega$.

Рассмотрим слоение Γ_j области Ω, порождённое каким-либо горизонтальным векторным полем X_j. На $d\gamma$-п. в. линиях γ слоения Γ_j, выбор которых не зависит от точки $z \in Z_0$, функция $(u_z\circ\varphi_0)|_\gamma$ абсолютно непрерывна, $g|_\gamma \in L_q$ и

$$\big|X_j(u_z\circ\varphi_0)|_\gamma\big|(x) \leqslant \big|\nabla_h(u_z\circ\varphi_0)|_\gamma(x)\big| \leqslant g|_\gamma(x)$$

для п. в. $x \in \gamma\cap\Omega$. Отсюда для отрезка $[x,y]$ слоя γ имеем

$$|(u_z\circ\varphi_0)|_\gamma(y) - (u_z\circ\varphi_0)|_\gamma(x)| \leqslant \int\limits_{[x,y]} g\,dt.$$

Таким образом, приращение функции $u_z\circ\varphi_0|_\gamma$ вдоль слоя γ контролируется интегралом от интегрируемой функции g, не зависящим от выбора $z \in Z_0$. Следовательно, возможен предельный переход по $z \in Z_0$, а так как совокупность точек $z \in Z_0$ плотна в $\overline{\Omega'}$, то последнее неравенство справедливо для любой точки $z \in \overline{\Omega'}$. Полагая $z = \varphi_0(x)$, получим

$$d_{cc}(\varphi_0(x),\varphi_0(y)) \leqslant \int\limits_{[x,y]} g\,dt.$$

Отсюда вытекают абсолютная непрерывность отображения φ_0 на п. в. линиях горизонтальных слоений и оценка $|X_j\varphi_0(x)| \leqslant g(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Следовательно, φ_0 принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ и $\int\limits_\Omega |D_h\varphi_0(x)|^q\,dx < \infty$. □

3.2. Конечность искажения предельного отображения. Фиксируем произвольное открытое множество $U \subset W$. Обозначим через $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U)$ пространство липшицевых в метрике Карно—Каратеодори функций $u : W \to \mathbb{R}$, носители которых содержатся в U.

Обозначим через $\|\varphi_U^*\|$ норму сужения оператора композиции φ_0^* на подпространство $L_p^1(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U)$. При $q < p$ определим функцию множества Φ, сопоставляя открытому множеству $U \subset W$ число

$$\Phi(U) = \|\varphi_U^*\|^\sigma = \sup_{\substack{u\in L_p^1(W)\cap\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U),\\ u\neq 0}} \left(\frac{\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\|}{\|u \mid L_p^1(W)\|}\right)^\sigma. \tag{3.8}$$

Лемма 3.1. *Функция множества Φ, определённая на открытых множествах $U \subset W$ формулой* (3.8), *монотонна и счётно-аддитивна.*

Простое доказательство леммы 3.1 можно получить, рассуждая аналогично [10, лемма 3.1] (ср. с первоначальным доказательством в [11, лемма 1]).

Предложение 3.4 (см. [29, 30]). *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{G}$, а монотонная и счётно-аддитивная функция множества Φ определена на некоторой системе $\mathcal{O}(D)$ открытых подмножеств в D, содержащей все шары $B(x,r)$ такие, что $\overline{B}(x,r) \subset D$. Тогда*:

a) *в почти каждой точке $x \in D$ существует конечная производная*

$$\lim_{\substack{B_\delta \ni x, \\ \delta \to 0}} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|} = \Phi'(x),$$

где $B_\delta \Subset D$ — шар в метрике Карно—Каратеодори радиуса δ, содержащий точку x;

b) *для любого открытого множества $U \in \mathcal{O}(D)$ справедливо неравенство*

$$\int_U \Phi'(x)\,dx \leqslant \Phi(U).$$

Сформулируем применяемое ниже свойство евклидовых шаров в группе Карно (см. [12, 18], где доказаны свойства 1, 2 предложения 3.5, и [3], где доказано свойство 3 предложения 3.5). Евклидово расстояние между точками $x = (x_{ij})$, $y = (y_{ij}) \in \mathbb{G}$ определяется как

$$\left(\sum_{i,j} (x_{ij} - y_{ij})^2\right)^{1/2}.$$

Предложение 3.5 (см. [3, 12, 18]). *Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^N$ с непустой границей существует не более чем счётное семейство $\mathcal{F} = \{B_i^E\}$ евклидовых шаров такое, что*

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} 2B_i^E = U$, *где* $2B_i^E = B^E(z_i, 2r_i)$;
2) *семейства $\mathcal{F} = \{B_i^E\}$ и $2\mathcal{F} = \{2B_i^E\}$ образуют конечнократное покрытие множества U*;
3) *семейство $\{2B_i^E\}$ может быть разбито на конечное число β_N (зависящее только от размерности N) подсемейств таких, что внутри каждого из них шары не пересекаются.*

Следствие 3.1. *Если покрытие $\{B^E(x_j, 2r_j)\}$ открытого множества $U \subset \mathbb{G}$ выбрано в соответствии с предложением* 3.5, *то*

$$\sum_j \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) \leqslant \beta_N \Phi(U),$$

где постоянная β_N зависит только от топологической размерности N группы $\mathbb{G}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_i$ — подсемейства семейства $\{B^E(x_j, 2r_j)\}$, состоящие из взаимно-непересекающихся шаров, и такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\beta_N} \mathcal{B}_i = \{B^E(x_j, 2r_j)\}$. Тогда очевидно имеем

$$\sum_j \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) = \sum_{i=1}^{\beta_N} \sum_{B^E(x_j, 2r_j) \in \mathcal{B}_i} \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) \leqslant \sum_{i=1}^{\beta_N} \Phi(U) = \beta_N \Phi(U).$$

□

Доказательство следующего предложения основано на модификации рассуждений из [10, лемма 3.4].

Предложение 3.6. *Пусть отображение $\varphi_0 : \Omega \to W$, где Ω, W — области в группе Карно $\mathbb{G}$, принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_0^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 < q \leqslant p < \infty.$$

Тогда φ_0 имеет конечное искажение.

Доказательство. Будем предполагать, что $q < p$; случай $q = p$ рассматривается аналогично. Применяя функцию множества Φ, определённую выше, для любой функции $u \in L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$ можно записать

$$\|\varphi_0^* u \mid L^1_q(\Omega)\| \leqslant \Phi(V)^{1/\sigma} \|u \mid L^1_p(V)\|,$$

где $V \subset W$ — открытое ограниченное подмножество. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, равную единице на $B^E(0,1)$ и нулю вне шара $B^E(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $h_j(z) = (z-y)_j \eta\Big(\dfrac{z-y}{r}\Big)$, $j = 1, \dots, n$, где $(z-y)_j$ обозначает j-ю координату точки $z - y \in \mathbb{G}$, $B^E(y, 2r) \subset W$, приходим к неравенству

$$\bigg(\int\limits_{\varphi_0^{-1}(B^E(y,r))} |D_h \varphi_0|^q(x)\, dx \bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\Phi(B^E(y,2r))^{1/\sigma} |B^E(y,2r)|^{\frac{1}{p}}, \tag{3.9}$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от N.

Здесь и далее при выводе неравенств типа (3.9) следует учесть, что $|\nabla_h h_j(z)| \leqslant |\nabla h_j(z)| \leqslant L$ для всех $j \in \mathbb{N}$, где $\nabla h_j(z)$ — риманов градиент функции h_j, а постоянная L не зависит от j.

Пусть $Z = \{x \in \Omega \setminus \Sigma_{\varphi_0} \mid \det \widehat{D}\varphi_0(x) = 0\}$, где Σ_{φ_0} — множество сингулярности отображения φ_0 нулевой мерой. Покажем, что

$$\int\limits_Z |D_h \varphi_0|^q(x)\, dx = 0. \tag{3.10}$$

По формуле замены переменной имеем $|\varphi_0(Z)| = 0$. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \subset W$ такие, что $U \supset \varphi_0(Z)$ и $|U| < \varepsilon$. Выберем согласно предложению 3.5 конечнократное покрытие $\{B^E(y_i, r_i)\}$ открытого множества U евклидовыми шарами. Имеем

$$\sum_i |B^E(y_i, 2r_i)| < \beta_N \varepsilon.$$

Теперь, применяя неравенство (3.9) к каждому шару $B^E(y_i, 2r_i)$, и следствие 3.1, выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_Z |D_h\varphi_0|^q(x)\, dx = \int\limits_{Z \setminus \Sigma_{\varphi_0}} |D_h\varphi_0|^q(x)\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi_0^{-1}(B(y_i,r_i))} |D_h\varphi_0|^q(x)\, dx \leqslant \\ \leqslant C^q \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(B^E(y_i,2r_i))^{\frac{q}{\sigma}} \big(|B^E(y_i,2r_i)|\big)^{\frac{q}{p}} \leqslant C_2^q \Phi(U)^{\frac{p-q}{p}} |U|^{\frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

В последней строке применено неравенство Гёльдера: $\dfrac{q}{\sigma} + \dfrac{q}{p} = 1$. Так как $\Phi(U) \leqslant \|\varphi_0^*\|^\sigma < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то (3.10) доказано, и следовательно, $|D_h\varphi_0| = 0$ почти всюду на множестве Z. $\square$

3.3. $\mathcal{N}^{-1}$-свойство предельного отображения. Далее мы будем применять формулу замены переменной с функцией кратности.

Предложение 3.7 (см. [31, Theorem 5.3])**.** *Пусть $\varphi : U \to \mathbb{G}$ — любое отображение класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U)$. Тогда существует некоторое подмножество $\Sigma_\varphi \subset U$ меры ноль такое, что отображение $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \to \mathbb{G}$ удовлетворяет $\mathcal{N}$-условию Лузина.*

Кроме того, для любой неотрицательной измеримой функции $u : U \to \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:

1) *функция $\mathbb{G} \ni y \mapsto \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)$ измерима;*

2) *верно равенство*

$$\int\limits_U u(x) |\det \widehat{D}\varphi(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)\, dy; \tag{3.11}$$

3) *если функция* $u : U \to \mathbb{R}$ *измерима, а функция*

$$U \ni x \mapsto u(x)|\det \widehat{D}\varphi(x)|$$

интегрируема, то и вторая функция в формуле (3.11) *также интегрируема, и верна формула* (3.11).

В следующем утверждении мы установим двухсторонние оценки для нормы оператора композиции φ_0^*.

Для отображения $\varphi_0 : \Omega \to W$ определим функцию искажения[1]

$$W \ni y \mapsto H_q(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus \Sigma_{\varphi_0} \mid \det \widehat{D}\varphi_0(x) \neq 0\} = \varnothing, \\ \left(\sum\limits_{\substack{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus \Sigma_{\varphi_0}, \\ \det \widehat{D}\varphi_0(x) \neq 0}} \dfrac{|D_h\varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.12}$$

Напомним, что в доказываемых ниже соотношениях (3.13) V — открытое множество в W, φ_V^* — ограничение оператора композиции φ_0^* на подпространство $L_p^1(V) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$, а $\|\varphi_V^*\|$ — норма оператора $\varphi_V^* : L_p^1(V) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V) \to L_q^1(\Omega)$.

Предложение 3.8. *Пусть отображение* $\varphi_0 : \Omega \to W$, *где* Ω, W *— области в* $\mathbb{G}$, *принадлежит классу Соболева* $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ *и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \leqslant p < \infty.$$

Тогда

$$\alpha_{q,p}\|H_q \mid L_\sigma(V)\| \leqslant \|\varphi_V^*\| = \Phi(V)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant \|H_q \mid L_\sigma(V)\| \tag{3.13}$$

для любого открытого множества $V \subset W$, *где* $\alpha_{q,p}$ *— положительная постоянная,* $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$, *если* $q < p$, *и* $\Phi(V)^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi_V^*\|$, $\sigma = \infty$ *при* $q = p$.

Доказательство. Пусть $q < p$. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, равную единице на субримановом шаре $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Подставляя в неравенство (3.9) субриманов шар $B(y,2r) \subset W$ вместо евклидова $B^E(y,2r)$, и функции $h_j(z) = (y^{-1}z)_j \eta\big(\delta_{r^{-1}}(y^{-1}z)\big)$, где $(y^{-1}z)_j$ обозначает j-ю координату точки $y^{-1}z \in \mathbb{G}$, $j = 1, \ldots, n$, в случае $q < p$ получаем

$$\int\limits_{\varphi_0^{-1}(B(y,r))} |D_h\varphi_0|^q(x)\,dx \leqslant \widetilde{C}^q \left(\frac{\Phi(B(y,2r))}{|B(y,2r)|} \right)^{\frac{q}{\sigma}} |B(y,r)|.$$

Применим к левой части этого соотношения формулу (3.11) замены переменной

$$\int\limits_{\varphi_0^{-1}(B(y,r))} |D_h\varphi_0|^q(x)\,dx = \int\limits_{\varphi_0^{-1}(B(y,r))\setminus Z} \frac{|D_h\varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|} |\det \widehat{D}\varphi_0(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_{B(y,r)} \sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h\varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|}\,dy \leqslant \widetilde{C}^q \left(\frac{\Phi(B(y,2r))}{|B(y,2r)|} \right)^{\frac{q}{\sigma}} |B(y,r)|.$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной аддитивной функции множества (см. предложение 3.4) вытекает

$$H_q^\sigma(y) = \left(\sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h\varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|} \right)^{\frac{p}{p-q}} \leqslant \widetilde{C}^\sigma \Phi'(y)$$

[1]Функция (3.12) определена в [5] для операторов композиции в евклидовых пространствах.

для п. в. $y \in W$ таких, что $\varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z) \neq \varnothing$, где H_q определена формулой (3.12). Интегрируя последнее неравенство по открытому множеству $V \subset W$, получим

$$\|H_q \mid L_\sigma(V)\|^\sigma = \int\limits_V \Biggl(\sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|} \Biggr)^{\frac{p}{p-q}} dy \leqslant \widetilde{C}^\sigma \int\limits_V \Phi'(y)\, dy \leqslant \widetilde{C}^\sigma \Phi(V) = \widetilde{C}^\sigma \, \|\varphi_V^*\|^\sigma .$$

Таким образом, для любого открытого множества $V \subset W$ доказано $\|H_q \mid L_\sigma(V)\| \leqslant \widetilde{C}\, \|\varphi_V^*\|$.

Фиксируем открытое множество $V \subset W$. Покажем, что для любой функции $u \in L_p^1(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$ выполняется неравенство $\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leqslant \|H_q \mid L_\sigma(V)\| \cdot \|u \mid L_p^1(W)\|$, $q < p$. Так как $u \circ \varphi_0$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega)$, то

$$\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leqslant \Biggl(\int\limits_{\Omega \setminus Z} (|\nabla_h u|(\varphi_0(x)) |D_h \varphi_0|(x))^q \, dx \Biggr)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \Biggl(\int\limits_V |\nabla_h u|^q(y) \Biggl(\sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|} \Biggr) dy \Biggr)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Гёльдера, выводим оценку

$$\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leqslant \Biggl(\int\limits_V H_q^\sigma(y)\, dy \Biggr)^{1/\sigma} \Biggl(\int\limits_V |\nabla_h u|^p(y)\, dy \Biggr)^{1/p}.$$

Из этого неравенства получаем правую часть соотношений (3.13). При $q = p$ доказательство упрощается. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть F — измеримое подмножество шара $B = B(0,r)$ положительной меры. Для всех $u \in W_q^1(B)$, $1 \leqslant q < \nu$, $u|_F = 0$, выполняется неравенство*

$$\Biggl(\int\limits_B |u(x)|^{q^*} dx \Biggr)^{\frac{1}{q^*}} \leqslant \frac{C r^{\frac{\nu}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}} \Biggl(\int\limits_B |\nabla_h u(x)|^q \, dx \Biggr)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.14}$$

где $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{\nu}$, а C — некоторая постоянная, не зависящая от функции u.

Доказательство. Идея приводимого ниже доказательства заимствована из [14, § 10.1] (см. в [6] её применение в $\mathbb{R}^n$). Достаточно доказать лемму для шара $B = B(0,1)$, а затем воспользоваться растяжением $x \mapsto \delta_t x$, $t > 0$. Напомним, что мера шара $B(0,1)$ равна 1: $|B(0,1)| = 1$. Рассмотрим произвольную функцию $u \in W_q^1(B)$, $u|_F = 0$, и положим $M = \|u \mid L_q(B)\| > 0$. Пусть для определённости $u_B = \dfrac{1}{|B|} \int\limits_B u\, dx \geqslant 0$ (иначе вместо u следует рассмотреть функцию $-u$). Тогда

$$|F| \leqslant \|1 - M^{-1} u \mid W_q^1(B)\|^q \leqslant C M^{-q} \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q + C \|1 - M^{-1} u \mid L_q(B)\|^q.$$

Отсюда получаем

$$M^q |F| \leqslant C \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q + C \|M - u \mid L_q(B)\|^q. \tag{3.15}$$

Заметим, что $|M - u_B| = \bigl| \|u \mid L_q(B)\| - \|u_B \mid L_q(B)\| \bigr| \leqslant \|u - u_B \mid L_q(B)\|$. Следовательно, применяя неравенство Пуанкаре [25, Theorem 4] во второй строке формулы (3.16), имеем

$$\|M - u \mid L_q(B)\| \leqslant \|M - u_B \mid L_q(B)\| + \|u - u_B \mid L_q(B)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|u - u_B \mid L_q(B)\| \leqslant C_0 \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|, \tag{3.16}$$

где C_0 — постоянная, не зависящая от u. Отсюда и из (3.15) вытекает неравенство

$$\|u \mid L_q(B)\| \leqslant \frac{C_1}{|F|^{\frac{1}{q}}} \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|,$$

где $C_1 = (C + C C_0^q)^{\frac{1}{q}}$.

Из теоремы вложения Соболева [25, Theorem 5] и последнего неравенства выводим

$$\|u \mid L_{q^*}(B)\|^q \leqslant c(\|u \mid L_q(B)\|^q + \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q) \leqslant \\ \leqslant \frac{C}{2}\left(1 + \frac{1}{|F|}\right)\|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q \leqslant \frac{C}{|F|}\|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q. \quad (3.17)$$

Из (3.17) получаем доказательство леммы. □

Сформулируем на группах Карно применяемую ниже лемму о покрытиях типа Уитни.

Лемма 3.3 (см. [23, Lemma 1.67]). *Пусть U — открытое подмножество группы $\mathbb{G}$ конечной меры. Существует счётное покрытие U субримановыми шарами $\{B(y_i, r_i)\}$ такое, что*:

1) $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B(y_i, r_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B(y_i, 2r_i)$;
2) *кратность M покрытия $\{B(y_i, 2r_i)\}$ не превосходит 48^ν.*

Предложение 3.9. *Пусть непостоянное отображение $\varphi_0 : \Omega \to W$, где Ω, W — ограниченные области в $\mathbb{G}$, принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_0^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 < q \leqslant p \leqslant \nu.$$

Тогда $|\varphi^{-1}(E)| = 0$ при $|E| = 0$, $E \subset W$.

Доказательство. Поскольку области Ω и W ограничены, можно считать, что $p = \nu$ и $1 < q < \nu$. Действительно, если отображение φ_0^* индуцирует ограниченный оператор композиции φ_0^* : $L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_q(\Omega)$, $1 < q \leqslant p < \infty$, то в силу неравенства Гёльдера для всех $q' \in (1; q)$, $p' \in (p; \infty)$ и $u \in L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}(W)$ имеем

$$|\Omega|^{\frac{q'}{q}-1}\left\|\varphi_0^* u \mid L^1_{q'}(\Omega)\right\| \leqslant \left\|\varphi_0^* u \mid L^1_q(\Omega)\right\| \leqslant \|\varphi_0^*\| \cdot \|u \mid L^1_p(W)\| \leqslant |W|^{1-\frac{p}{p'}}\|\varphi_0^*\|\left\|u \mid L^1_{p'}(W)\right\|.$$

Последнее означает, что φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции φ_0^* : $L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_{q'}(\Omega)$. Полагаем далее $p = \nu$, $1 < q < \nu$.

$1^{\text{ый}}$ **шаг**. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, равную единице на субримановом шаре $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Подставляя в неравенство (3.9) субриманов шар $2B = B(y, 2r) \subset W$ вместо евклидова $B^E(y, 2r)$, и функции $f(z) = \eta\big(\delta_{r^{-1}}(y^{-1}z)\big)$, получаем

$$\left\|\varphi_0^* f \mid L^1_q(\Omega)\right\| \leqslant C_1 \Phi(2B)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Фиксируем в W произвольное борелевское множество E нулевой меры. Так как отображение φ_0 имеет конечное искажение (см. предложение 3.6), то $\varphi_0^{-1}(E) \neq \Omega$ (в противном случае $\det \widehat{D}\varphi_0 = 0$ в Ω и, следовательно, $D_h\varphi_0 = 0$ п. в. в Ω, откуда получаем, что φ_0 — постоянное отображение). Поэтому найдётся шар $Q \subset \Omega$ такой, что $2Q \subset \Omega$ и $\left|Q \setminus \varphi_0^{-1}(E)\right| > 0$ (здесь $2Q$ — субриманов шар с тем же центром, что и Q, и вдвое большим радиусом сравнительно с радиусом шара Q).

Поскольку компоненты данного отображения измеримы, то по теореме Лузина найдётся компакт $T \subset Q \setminus \varphi_0^{-1}(E)$ положительной меры такой, что $\varphi_0 : T \to W$ непрерывно. Тогда образ $\varphi_0(T) \subset W$ компактен и $\varphi_0(T) \cap E = \varnothing$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $U \supset E$, $\varphi_0(T) \cap U = \varnothing$, $U \subset W$. Пусть $\{B(y_i, r_i)\}$ — набор шаров, выбранный согласно лемме 3.3, такой, что наборы $\{B(y_i, r_i)\}$ и $\{B(y_i, 2r_i)\}$ образуют покрытия множества U, и кратность M покрытия $\{B(y_i, 2r_i)\}$ конечна ($B(y_i, 2r_i) \subset U$ для всех $i \in \mathbb{N}$).

Тогда для функции f_i, ассоциированной с шаром $B(y_i, r_i)$, $f_i(z) = \eta\big(\delta_{r_i^{-1}}(y_i^{-1}z)\big)$, имеем $\varphi_0^* f_i = 1$ на множестве $\varphi_0^{-1}\big(B(y_i, r_i)\big)$ и $\varphi_0^* f_i = 0$ вне прообраза $\varphi_0^{-1}\left(B(y_i, 2r_i)\right)$, в частности, $\varphi_0^* f_i = 0$ на множестве T. Кроме того, для неё справедлива оценка

$$\left\|\varphi_0^* f_i \mid L^1_q(Q)\right\| \leqslant \left\|\varphi_0^* f_i \mid L^1_q(\Omega)\right\| \leqslant C_1 \Phi(B(y_i, 2r_i))^{\frac{1}{\sigma}}.$$

В силу неравенства Пуанкаре (3.14) справедливо соотношение

$$\left(\int\limits_Q |u|^{q^*}\,dx\right)^{\frac{1}{q^*}} \leqslant \frac{Cr^{\frac{\nu}{q}}}{|T|^{\frac{1}{q}}}\left(\int\limits_Q |\nabla_h u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $q^* = q\nu/(\nu-q)$, r — радиус шара Q, $u \in W_q^1(Q)$ — произвольная функция, равная нулю на множестве $T \subset Q$, а C — постоянная, не зависящая от функции u. Применяя неравенство Пуанкаре к функции $\varphi_0^* f_i$ вместо u, с учётом двух последних оценок и равенства $\sigma = q^*$ получаем

$$\left|\varphi_0^{-1}\left(B\left(y_i, r_i\right)\right) \cap Q\right| \leqslant C_3 \Phi\left(B\left(y_i, 2r_i\right)\right).$$

Применяя правую часть соотношений (3.13), выводим неравенства

$$|\varphi_0^{-1}(E) \cap Q| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_0^{-1}(B(y_i, r_i)) \cap Q| \leqslant C_3 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(B(y_i, 2r_i)) \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \sum_{i=1}^{\infty} \|H_q \mid L_\sigma(B(y_i, 2r_i))\|^\sigma \leqslant C_3 M \|H_q \mid L_\sigma(U))\|^\sigma. \quad (3.18)$$

В силу свойств интеграла Лебега функция множества $U \mapsto \|H_q \mid L_\sigma(U))\|^\sigma$ абсолютно непрерывна. Следовательно, правая часть (3.18) может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе открытого множества $U \supset E$.

Таким образом, $\mathcal{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi_0 : Q \to \mathbb{G}$ доказано.

2ой шаг. Покажем, что отображение φ_0 обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина на любом другом субримановом шаре $Q_1 = B(z, r_1) \subset \Omega$ таком, что $B(z, 2r_1) \subset \Omega$. Шар, выбранный на предыдущем шаге, обозначим символом $Q_0 = Q = B(x_0, r_0)$. Пусть $\gamma : [0, l] \to \Omega$ — спрямляемая в метрике Карно—Каратеодори кривая с концевыми точками $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(l) = z$ и параметризованная длиной дуги (построение кривой с указанными свойствами можно найти в [7, лемма 3]). Пусть ещё $\Delta = \operatorname{dist}(\gamma, \partial\Omega) = \inf\limits_{t\in[0,l]} \operatorname{dist}(\gamma(t), \partial\Omega)$ На отрезке $[0, l]$ отметим точки $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_j < \ldots < s_m = l$ так, чтобы $d_{cc}(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leqslant \Delta/4$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим $x_j = \gamma(s_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $\gamma(s_m) = \gamma(l) = z$.

Очевидно, шар $B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))$ имеет с шаром Q_0 непустое пересечение W_1, на котором $|\varphi_0^{-1}(E) \cap W_1| = 0$. Следовательно, шар $B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))$ можно взять в качестве шара Q на первом шаге рассуждения. В результате придём к выводу, что

$$\left|\varphi_0^{-1}(E) \cap B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))\right| = 0.$$

Продолжая этот процесс по индукции, докажем $\mathcal{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi_0 : B_1 \to \mathbb{G}$ (на последнем шаге индукции следует взять шар $Q_1 = B(z, r_1) = B(\gamma(s_m), r_1))$.

3ий шаг. Остается заметить, что область Ω можно покрыть счётным набором субримановых шаров $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k, \ldots$, на каждом из которых мера пересечения $\varphi_0^{-1}(E) \cap Q_k$ равна нулю. Следовательно, прообраз $\varphi_0^{-1}(E)$ имеет нулевую меру, □

Предложение 3.9 завершает доказательство теоремы 3.1.

3.4. Доказательство равенства $|D_h\varphi_0|(x) = |\nabla\varphi_0|(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Мы предполагаем, что в этом пункте выполнены условия теоремы 3.1.

Пусть $Z = \{y \in \Omega \mid \det \widehat{D}\varphi_0(y) = 0\}$ — множество нулей якобиана отображения φ_0. Дополнение $\Omega \setminus Z$ с точностью до множества Σ нулевой меры можно представить в виде не более чем счётной дизъюнктной совокупности измеримых множеств T_i $\Bigl($т. е. $\Omega \setminus Z = \Sigma \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i\Bigr)$, на каждом из которых отображение $\varphi_0 : T_i \to \mathbb{G}$ липшицево относительно метрики Карно—Каратеодори [31]. Известно [31], что липшицево отображение $\varphi_0 : T_i \to \mathbb{G}$ $\mathcal{P}$-дифференцируемо в почти всех точках плотности 1 множества T_i, $i \in \mathbb{N}$. Если $x \in T_i$ — точка $\mathcal{P}$-дифференцируемости, то для некоторого гомоморфизма $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x) : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ групп Карно имеем

$$d_{cc}([D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)\langle x^{-1}y\rangle]^{-1}\varphi_0(x)^{-1}\varphi_0(y)) = o(d_{cc}(x^{-1}y)) \quad \text{при } y \to x,\ y \in T_i, \qquad (3.19)$$

где $d_{cc}(z) = d_{cc}(z, 0)$. Соответствующий гомоморфизму $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)$ гомоморфизм $\widehat{D}\varphi_0(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ алгебр Ли однозначно определяется горизонтальным дифференциалом $D_h\varphi_0(x)$ и связан с $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)$ соотношением $D_{\mathcal{P}}\varphi(x) = \exp \circ \widehat{D}\varphi(x) \circ \exp^{-1}$. Мы полагаем $\det D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x) = \det \widehat{D}\varphi_0(x)$.

Свойство 3.1. *Пусть $z \in \mathbb{G}$ — фиксированная точка, а $\Omega \ni x \mapsto (u_z \circ \varphi_0)(x) = d_{cc}(\varphi_0(x), z)$ — композиция отображения φ_0 с функцией u_z. Тогда для п. в. $x \in \Omega$ имеем равенство*

$$\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x) = \begin{cases} [\nabla_h u_z](\varphi_0(x))[D_h\varphi_0(x)]^{\mathrm{tr}}, & \text{если } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0, & \text{если } x \in Z. \end{cases} \tag{3.20}$$

Отсюда, в частности, получаем

$$|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)| \leqslant |D_h\varphi_0(x)|. \tag{3.21}$$

Доказательство. Пусть $S \subset \mathbb{G}$ — множество нулевой меры. Заметим, что если мера прообраза $\varphi^{-1}(S)$ положительна, то по формуле замены переменной $\det D_{\mathcal{P}}\varphi(x) = 0$ для п. в. $x \in \varphi^{-1}(S)$. Следовательно, с точностью до множества меры нуль (т. е. $|\varphi^{-1}(S) \setminus Z| = 0$) имеем $\varphi^{-1}(S) \subset Z$. В силу конечности искажения имеем также $D_h\varphi(x) = 0$ на Z.

Если $x \in Z$ — точка аппроксимативной $\mathcal{P}$-дифференцируемости отображения φ_0, то $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)=0$. Из (3.19) выводим

$$\begin{aligned} |(u_z \circ \varphi_0)(y) - (u_z \circ \varphi_0)(x)| &= |d_{cc}(\varphi_0(y), z) - d_{cc}(\varphi_0(x), z)| \leqslant d_{cc}(\varphi_0(y), \varphi_0(x)) = \\ &= d_{cc}(D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)\langle x^{-1}y\rangle) + o(d_{cc}(x^{-1}y)) = o(d_{cc}(x^{-1}y)) \quad \text{при } Z \ni y \to x. \end{aligned}$$

Таким образом, второе равенство в (3.20) доказано.

Для доказательства первого равенства в (3.20) рассмотрим точку $x \in T_i$ плотности 1, в которой отображение φ_0 $\mathcal{P}$-дифференцируемо (как отмечено выше, таковыми будут п. в. точки T_i). Можно предполагать, что $\varphi_0(x)$ — точка $\mathcal{P}$-дифференцируемости функции $\mathbb{G} \ni y \mapsto d_{cc}(y, z)$. Функция $T_i \ni x \mapsto u_z(\varphi_0(x))$ $\mathcal{P}$-дифференцируема как композиция $\mathcal{P}$-дифференцируемых отображений [32, § 2, теорема 2.1].

Таким образом, (3.20) доказано. □

Определение 3.1. Пусть $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{G}$ — отображение класса $W_q^1(\Omega; \mathbb{G})$. Семейство функций $\big(|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)|\big)_{z\in\mathbb{G}}$ ограничено в $L_q(\Omega)$ в силу неравенств $|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)| \leqslant |D_h\varphi_0(x)|$, выполняющихся п. в. в Ω (см. (3.21)). Ввиду известных результатов теории K-пространств [13] совокупность всех верхних мажорант для семейства $\big(|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)|\big)_{z\in\mathbb{G}}$ имеет наименьший элемент. Он обозначается символом $|\nabla\varphi_0|(x)$ и называется *верхним градиентом* отображения φ_0.

Лемма 3.4. *Сильный градиент совпадает с верхним: для п. в. $x \in \Omega$ имеет место равенство*

$$|D_h\varphi_0|\,(x) = |\nabla\varphi_0|(x).$$

Доказательство. В доказательстве этой леммы мы применяем некоторые идеи и результаты работ [16, 17, 31].

Для доказательства неравенства $|D_h\varphi_0|\,(x) \leqslant |\nabla\varphi_0|(x)$ рассмотрим точку $x \in T_i$ плотности 1, в которой существуют горизонтальные производные $X_i(u_z \circ \varphi_0)(x)$, $i = 1, \dots, n$, и отображение φ_0 $\mathcal{P}$-дифференцируемо (как отмечено выше, таковыми будут п. в. точки T_i).

Пусть ещё $D_h\varphi_0(x)$ — горизонтальная часть аппроксимативного дифференциала $D\varphi_0(x)$ в точке x, а её норма достигается на векторе $v \in \mathfrak{g}_1$ единичной длины: $|D_h\varphi_0(x)| = |D_h\varphi_0(x)\langle v\rangle|$.

Ниже и далее в доказательстве счётный набор векторов $\{w_l \in \mathfrak{g}_1\}_{l\in\mathbb{N}}$ единичной длины всюду плотен на сфере $S(0,1) \cap \mathfrak{g}_1$ подпространства $\mathfrak{g}_1$. Если E — измеримое множество в $\mathbb{G}$, то почти все точки E будут точками линейной плотности 1 вдоль w_l:

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\{s \in [-t, t] \mid x \exp tw_l \in E\}}{2t} = 1, \quad l \in \mathbb{N}$$

(см. [31, Property 2.1])).

Если $x \in T_i \setminus \varphi_0^{-1}(z)$ — точка $\mathcal{P}$-дифференцируемости отображения φ_0, то для точки $y = x\exp(tw_l) \in T_i$, $w_l \in S(0,1) \cap \mathfrak{g}_1$, применяя (3.19), получаем

$$|u_z(x\exp(tw_l)) - u_z(x)| = |u_z(y) - u_z(x)| = |d_{cc}(\varphi_0(y), z) - d_{cc}(\varphi_0(x), z)| \leqslant d_{cc}(\varphi_0(y), \varphi_0(x)) =$$

$$= d_{cc}(D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)\langle x^{-1}y\rangle) + o(d_{cc}(x^{-1}y)) = td_{cc}(\exp D_h\varphi_0(x)\langle w_l\rangle) + o(t) \quad \text{при } t \to 0. \quad (3.22)$$

В этих обозначениях имеем

$$|D_h\varphi_0|(x) = |D_h\varphi_0(x)\langle v\rangle| = \sup_{\substack{w_l\in\mathfrak{g}_1,\\ |w_l|=1}} |D_h\varphi_0(x)\langle w_l\rangle| =$$

$$= \sup_{\substack{w_l\in\mathfrak{g}_1,\\ |w_l|=1}} \lim_{\substack{t\to 0,\\ x\exp(tw_l)\in T_i}} \frac{d_{cc}(\varphi_0(x\exp tw_l),\varphi_0(x))}{t} = \sup_{\substack{w_l\in\mathfrak{g}_1,\\ |w_l|=1}} \lim_{\substack{t\to 0,\\ x\exp(tw_l)\in T_i}} \frac{u_{\varphi_0(x)}(\varphi_0(x\exp tw_l))}{t} =$$

$$= \sup_{\substack{w_l\in\mathfrak{g}_1,\\ |w_l|=1}} \left|\langle\nabla_h(u_{\varphi_0(x)}\circ\varphi_0)(x), w_l\rangle\right| \leqslant \left|\nabla_h(u_{\varphi_0(x)}\circ\varphi_0)(x)\right| \leqslant |\nabla\varphi_0|(x). \quad (3.23)$$

Для доказательства обратного неравенства к (3.23) применим (3.21). В точках дополнения $x\in T_i\setminus Z$ имеем

$$|\nabla_h(u_z\circ\varphi_0)(x)| = \sup_{w_l\in\mathfrak{g}_1, |w_l|=1} |D_h\varphi_0(x)|\cdot|w_l| \leqslant |D_h\varphi_0(x)|.$$

А в точках $x\in Z$ получаем $|\nabla_h(u_z\circ\varphi_0)(x)| = |D_h\varphi_0(x)| = 0$. Лемма 3.4 доказана. □

Предложение 3.10. *В условиях теоремы* 3.1 *отображение* φ_0 *не только принадлежит* $W^1_q(\Omega;\mathbb{G})$, *но и удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_\Omega |D_h\varphi_0(x)|^q\alpha(x)\,dx \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^q\alpha(x)\,dx \quad (3.24)$$

для любой неотрицательной ограниченной измеримой функции $\alpha:\Omega\to\mathbb{R}$.

Доказательство. В предложении 3.3 доказано, что если последовательность $\Big\{\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^q\,dx\Big\}$ ограничена, то φ_0 принадлежит классу $W^1_q(\Omega;\mathbb{G})$.

Последовательность функций $g_k(x) = |D_h\varphi_k|(x)$ ограничена в $L_q(\Omega)$. Поскольку пространство $L_q(\Omega)$ рефлексивно, последовательность g_k можно считать слабо сходящейся к неотрицательной функции $g\in L_q(\Omega)$.

Так как неравенство (3.7) выполняется для всех $z\in\mathbb{G}$, для верхней огибающей $|\nabla\varphi_0|(x)$ (см. определение 3.1) имеем неравенство $|\nabla\varphi_0|(x)\leqslant g(x)$ для п. в. $x\in\Omega$. Отсюда получаем (3.24). Действительно, с одной стороны,

$$\int\limits_\Omega |\nabla\varphi_0|^q(x)\alpha(x)\,dx \leqslant \int\limits_\Omega g^q(x)\alpha(x)\,dx \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega g_k^q(x)\alpha(x)\,dx = \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k|^q(x)\alpha(x)\,dx,$$

а с другой $|D_h\varphi_0|^q(x)\leqslant|\nabla\varphi_0|^q(x)$ (см. неравенство (3.23)). Предложение 3.10 доказано. □

4. Инъективность почти всюду

В этом разделе мы формулируем условия, при которых предельное отображение $\varphi_0:\Omega\to\mathbb{H}$ почти всюду инъективно. Напомним, что отображение $\varphi:\Omega\to\mathbb{G}$ называется *инъективным почти всюду*, если найдётся множество S такое, что $|S|=0$ и отображение $\varphi:\Omega\setminus S\to\mathbb{G}$ — инъекция (здесь $\Omega\subset\mathbb{G}$ — область на группе $\mathbb{G}$).

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbb{H}$ — *группа Карно* H*-типа,* $q\in(\nu-1;\nu]$, Ω, $\Omega'\subset\mathbb{H}$ — *ограниченные области с условием* $|\partial\Omega'|=0$, $\varphi_0\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{H})$ — *непостоянное отображение. Пусть* $\{\varphi_k:\Omega\to\Omega'\}$ — *последовательность гомеоморфизмов класса* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{H})\cap FD(\Omega;\mathbb{H})$ *таких, что*:

1) $\{\varphi_k\}$ *сходится к* φ_0 *в* $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{H})$;

2) *последовательность* $\{K_{\varphi_k,\nu}\}$ *ограничена в* $L_\sigma(\Omega)$, *где* $\dfrac{1}{\sigma}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{\nu}$ ($\sigma=\infty$ *при* $q=\nu$).

Тогда справедливы заключения теоремы 3.1 *с* $p=\nu$ *и отображение* φ_0 *почти всюду инъективное.*

Предложение 4.1. *Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H-типа, $\Omega' \subset \mathbb{H}$ — область, а $\psi \in W^1_\nu(\Omega';\mathbb{H})$ — гомеоморфизм.*

Тогда для точек $x, y \in \Omega'$, $y \in B_\rho(x,r)$, $r < r_0/2$, $r_0 = \dfrac{1}{13c}\rho(x,\partial\Omega')$ выполняется соотношение

$$d_{cc}(\psi(x),\psi(y)) \leqslant C_1\Big(\ln\frac{r_0}{r}\Big)^{-\frac{1}{\nu}}\Bigg(\int\limits_{B_\rho(a,r_0)} [M_{6r_0}(D_h\psi)(z)]^p\,dz\Bigg)^{\frac{1}{\nu}}, \tag{4.1}$$

где c — постоянная в обобщённом неравенстве треугольника (см. определение однородной нормы и её свойства в разделе 2 работы), $B_\rho(x,r)$ — шар в однородной норме, а постоянная C_1 не зависит ни от x, y, ни от ψ.

В доказательстве неравенства (4.1) мы применим следующий результат:

Теорема 4.2 (см. [1, теорема 3])**.** *Пусть $\mathbb{G}$ — двухступенчатая группа Карно, $\rho \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{G}\setminus\{0\})$ — однородная норма на $\mathbb{G}$, $f \in L^1_p(\mathbb{G})$, $p > \nu - 1$. Тогда функцию f можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы для п. в. $r > 0$ она была непрерывной по Гёльдеру на сфере $S_\rho(r) = \{x \in \mathbb{G} : \rho(x) = r\}$ и*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\rho(x,y)^{1-\frac{\nu-1}{p}}\Bigg(\int\limits_{S_\rho(r)} [M_{6r}(\nabla_h f)(\omega)]^p\,d\omega\Bigg)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2}$$

для всех $x, y \in S_\rho(r)$, где постоянная $C > 0$ не зависит от выбора f и r.

Здесь $d\omega$ — поверхностная мера на сфере $S_\rho(r)$ (см. [1, Lemma 4]), а

$$M_t(g)(z) = \sup_{0<s\leqslant t}\frac{1}{|B_\rho(z,s)|}\int\limits_{B_\rho(z,s)} |g(y)|\,dy$$

— усеченная максимальная функция Харди—Литтлвуда.

Доказательство предложения 4.1. Фиксируем точку $a \in \Omega'$ и число r_0 такое, чтобы $\rho(z,\partial\Omega') > 12r_0$ для любой точки $z \in S_\rho(a,r_0)$ (это то же самое, что $\rho(S_\rho(a,r_0),\partial\Omega') > 12r_0$). Для этого положим $\alpha = 13cr_0$ и проверим, что при выполнении условий $\alpha \leqslant \rho(a,\partial\Omega') \leqslant c(\rho(a,S_\rho(a,r_0)) + \rho(S_\rho(a,r_0),\partial\Omega'))$ имеем

$$13cr_0 \leqslant cr_0 + c\rho(S_\rho(a,r_0),\partial\Omega') \Longrightarrow 12r_0 < \rho(S_\rho(a,r_0),\partial\Omega').$$

Теперь фиксируем точку $a \in \Omega'$ и число r_0 такие, чтобы $\rho(z,\partial\Omega') \geqslant 12r_0$ для любой точки $z \in S_\rho(a,r_0)$. Пусть ещё Z_0 — счётное всюду плотное множество в $\mathbb{G}$.

Для фиксированной точки $z \in Z_0$ рассмотрим функцию

$$\Omega' \ni x \mapsto d_{cc}(z,\psi(x)).$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 4.2 при $p = \nu$, и кроме того

$$|\nabla_h d_{cc}(z,\psi(x))| \leqslant |D_h\psi(x)|$$

для п. в. $x \in \Omega'$. При $p = \nu$ из неравенства (4.2) на почти каждой сфере $S_\rho(a,t)$, $t < r_0$, имеем оценку

$$|d_{cc}(z,\psi(x)) - d_{cc}(z,\psi(y))| \leqslant C\rho(x,y)^{\frac{1}{\nu}}\Bigg(\int\limits_{S_\rho(a,t)} [M_{6t}(D_h\psi)(\omega)]^\nu\,d\omega\Bigg)^{\frac{1}{\nu}} \tag{4.3}$$

для всех точек $x, y \in S_\rho(a,t)$. Заметим, что в неравенстве (4.3) возможен предельный переход при $z \to \psi(x)$, $z \in Z_0$. Следовательно,

$$d_{cc}(\psi(x),\psi(y)) \leqslant C\rho(x,y)^{\frac{1}{\nu}}\Bigg(\int\limits_{S_\rho(a,t)} [M_{6t}(D_h\psi)(\omega)]^\nu\,d\omega\Bigg)^{\frac{1}{\nu}} \tag{4.4}$$

для всех точек $x, y \in S_\rho(a,t)$.

Пусть $y_1,\ y_2 \in S_\rho(a,t)$ — пара точек, на которых достигается максимальное колебание ψ:

$$\operatorname{osc}(\psi, S_\rho(a,t)) = \sup\{d_{cc}(\psi(w_1),\psi(w_2)) :\ w_1,\ w_2 \in S_\rho(a,t)\} = d_{cc}(\psi(y_1),\psi(y_2)).$$

Подставляя в (4.4) точки $y_1, y_2 \in S_\rho(a,t)$ вместо x, y, с учётом $\rho(y_1,y_2) \leqslant 2ct$ выводим

$$\frac{\operatorname{osc}(\psi, S_\rho(a,t))^\nu}{t} \leqslant C_1 \int\limits_{S_\rho(a,t)} [M_{6t}(D_h\psi)(\omega)]^\nu\, d\omega. \tag{4.5}$$

Далее мы воспользуемся свойством монотонности гомеоморфизмов: колебание отображения на шаре контролируется колебанием отображения на граничной сфере:

$$\operatorname{osc}(\psi, B_\rho(a,t)) = \sup\{d_{cc}(\psi(w_1),\psi(w_2)) :\ w_1,\ w_2 \in B_\rho(a,t)\} \leqslant \\ \leqslant \operatorname{osc}(\psi, S_\rho(a,t)) = \sup\{d_{cc}(\psi(w_1),\psi(w_2)) :\ w_1,\ w_2 \in S_\rho(a,t)\}. \tag{4.6}$$

Интегрируя (4.5) по t в пределах от $0 < r < r_0/2$ до r_0, с учётом $\operatorname{osc}(\psi, S_\rho(a,r)) \leqslant \operatorname{osc}(\psi, S_\rho(a,t))$ для всех $r < t < r_0$, по формуле коплощади [1, Lemma 4] получаем

$$\operatorname{osc}(\psi, B_\rho(a,r)) \leqslant C_1 \Big(\ln\frac{r_0}{r}\Big)^{-\frac{1}{\nu}} \Bigg(\int\limits_{B_\rho(a,r_0)} [M_{6r_0}(D_h\psi)(z)]^p\, dz\Bigg)^{\frac{1}{\nu}}, \tag{4.7}$$

так как в силу (4.6) $\operatorname{osc}(\psi, B_\rho(a,r)) \leqslant \operatorname{osc}(\psi, S_\rho(a,r))$ для всех $t \in [r, r_0]$.

Для произвольных точек $x, y \in B_\rho(a,r)$ имеем

$$d_{cc}(\psi(x),\psi(y)) \leqslant \operatorname{osc}(\psi, B_\rho(a,r)). \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) для $x, y \in B_\rho(a,r)$ выводим (4.1).

Пусть теперь $x, y \in \Omega'$, $d_{cc}(x,y) < r$, $r < r_0/2$. В силу вышесказанного $r \leqslant \dfrac{1}{2\cdot 13c}\rho(x, \partial\Omega')$ и для любой точки $y \in B_\rho(x,r)$ выполнено соотношение (4.1). □

Следствие 4.1. *В условиях теоремы* 4.1 *найдётся подпоследовательность последовательности* $\{\psi_k = \varphi_k^{-1}\}$*, сходящаяся локально равномерно в* Ω' *к некоторому непрерывному отображению* $\psi_0 : \Omega' \to \overline{\Omega}$.

Доказательство. По теореме 2.2 гомеоморфизмы ψ_k индуцируют ограниченные операторы композиции

$$\psi_k^* : L^1_{q'} \cap \operatorname{Lip}_{\rm loc}(\Omega) \to L^1_\nu(\Omega'),\ q' = \frac{q}{q-\nu+1},$$

причём $\sup\|\psi_k^*\| < \infty$. Из теоремы 2.1 следует, что последовательность $\{D_h\psi_k\}$ ограничена в $L_\nu(\Omega')$, так как области Ω и Ω' имеют конечную меру (см. замечание 3.1).

Из (4.1) получаем, что семейство отображений $\{\psi_k\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на каждой компактно вложенной области $U \Subset \Omega'$. Так как область Ω ограничена, то существование нужной подпоследовательности стандартным образом вытекает из теоремы Асколи—Арцела, и диагонального выбора Кантора. □

Предложение 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *отображение* φ_0 *инъективно почти всюду в* $\Omega \setminus \varphi_0^{-1}(\partial\Omega')$.

Доказательство. Пусть $\{\psi_k\}$ — подпоследовательность из следствия 4.1. Можно считать, что $\{\varphi_k\}$ поточечно сходится к φ_0 вне некоторого множества S меры нуль.

Пусть точка $x \in \Omega \setminus S$ такова, что $\varphi_0(x) \in \Omega'$. Тогда из соотношений

$$\psi_k \circ \varphi_k(x) = x, \quad k \in \mathbb{N},$$

и равномерной сходимости $\{\psi_k\}$ к ψ_0 на некоторой компактно вложенной в Ω' окрестности внутренней точки $\varphi_0(x) \in \Omega'$, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\psi_0 \circ \varphi_0(x) = x.$$

Последнее означает, что φ_0 инъективно на множестве $\Omega \setminus (S \cup \varphi_0^{-1}(\partial\Omega'))$, т. е. φ_0 почти всюду инъективно на $\Omega \setminus \varphi_0^{-1}(\partial\Omega')$. □

Из предложения 4.2, условия $|\partial\Omega'| = 0$ и того, что φ_0 обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством, следует его инъективность почти всюду в Ω. Таким образом, теорема 4.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathcal{P}$-дифференцируемость соболевских отображений// Сиб. мат. ж. — 2023. — *64*, № 4. — С. 700–719.
2. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно// Сиб. мат. ж. — 2023. — *64*, № 6. — С. 1151–1159.
3. *Брудный Ю. А., Котляр Б. Д.* Одна задача комбинаторной геометрии// Сиб. мат. ж. — 1970. — *11*, № 5. — С. 1171–1173.
4. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно// Мат. тр. — 2002. — *5*, № 2. — С. 92–137.
5. *Водопьянов С. К.* Операторы подстановки пространств Соболева// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложений», Тез. докл. конференции, г. Саратов, 2002 г. — Саратов, 2002. — С. 42–43.
6. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 10. — С. 3–32.
7. *Водопьянов С. К.* Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 1. — С. 63–112.
8. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским и теория $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов// Сиб. мат. ж. — 2020. — *61*, № 6. — С. 1257–1299.
9. *Водопьянов С. К.* Непрерывность отображений класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением на группах Карно// Сиб. мат. ж. — 2023. — *64*, № 5. — С. 912–934.
10. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно// Сиб. мат. ж. — 2022. — *63*, № 2. С. 283–315.
11. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно// Сиб. мат. ж. — 1998. — *39*, № 4. — С. 776–795.
12. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. — М.: Мир, 1978.
13. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
14. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Ленингр. ун-т, 1985.
15. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982.
16. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве// Сиб. мат. ж. — 1997. — *38*, № 3. — С. 657–675.
17. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II// Сиб. мат. ж. — 2004. — *45*, № 4. — С. 855–870.
18. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. — Новосибирск: Научная книга, 2002.
19. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1977. — *63*. — С. 337–403.
20. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter// Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. — 1981. — *88*. — С. 315–328.
21. *Christodoulou D.* On the geometry and dynamics of crystalline continua// Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1998. — *69*, № 3. — С. 335–358.
22. *Ciarlet P. G.* Mathematical Elasticity, Vol. I. Three-Dimensional Elasticity. — Amsterdam: North-Holland, 1988.
23. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
24. *Gromov M.* Carnot—Caratheodory spaces seen from within// В сб.: «Sub-Riemannian Geometry». — Basel: Birkhäuser, 1996. — С. 79–323.
25. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups// Eurasian Math. J. — 2010. — *1*, №3. — С. 58–96.
26. *Maione A.* Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields// Дисс. канд. наук. — University of Trento, 2020. — С. 1–145.
27. *Molchanova A., Vodopyanov S.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2019. — *59*, № 17. — С. 2–25.

28. *Pansu P.* Métriques de Carnot—Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un// Ann. Math. — 1989. — *129*, №1. — С. 1–60.
29. *Ukhlov A. D., Vodopyanov S. K.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I// Sib. Adv. Math. — 2004. — *14*, № 4. — С. 78–125.
30. *Ukhlov A. D., Vodopyanov S. K.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II// Sib. Adv. Math. — 2005. — *15*, № 1. — С. 1–35.
31. *Vodop'yanov S. K.* $\mathcal{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics// В сб.: «Proceedings on Analysis and Geometry». — Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. — С. 603–670.
32. *Vodop'yanov S. K.* Geometry of Carnot—Carathéodory spaces and differentiability of mappings// Contemp. Math. — 2007. — *424*. — С. 247–302.

С.К. Водопьянов
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: `vodopis@mail.ru`

С.В. Павлов
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: `s.pavlov4254@gmail.com`

UDC 517.518+512.813.52
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236
EDN: YHQGYL

Functional Properties of Limits of Sobolev Homeomorphisms with Integrable Distortion

S. K. Vodopyanov and S. V. Pavlov

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Abstract. The functional and geometric properties of limits of homeomorphisms with integrable distortion of domains in Carnot groups are studied. The homeomorphisms belong to Sobolev classes. Conditions are obtained under which the limits of sequences of such homeomorphisms also belong to the Sobolev class, have a finite distortion, and have the $\mathcal{N}^{-1}$-Luzin property. In the case of Carnot groups of H-type, sufficient conditions are obtained that are imposed on domains and a sequence of homeomorphisms under which the limit mapping is injective almost everywhere. These results play a key role in finding extremal solutions to problems in the mathematical theory of elasticity on H-type Carnot groups, which are the subject of subsequent works by the authors.

Keywords: class of Sobolev mappings, Carnot group, mapping with finite distortion, external operator distortion function, limit property of Sobolev mappings, $\mathcal{N}^{-1}$-Luzin property, injectivity almost everywhere.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was prepared within the framework of the grant from the Russian Science Foundation (project code No. 23-21-00359).

For citation: S. K. Vodopyanov, S. V. Pavlov, "Functional Properties of Limits of Sobolev Homeomorphisms with Integrable Distortion," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 215–236. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236`

REFERENCES

1. S. G. Basalaev and S. K. Vodopyanov, "Nepreryvnost' po Gel'deru sledov funktsiy klassa Soboleva na giperpoverkhnostyakh grupp Karno i $\mathcal{P}$-differentsiruemost' sobolevskikh otobrazheniy" [Hölder continuity of traces of functions of the Sobolev class on hypersurfaces of Carnot groups and $\mathcal{P}$-differentiability of Sobolev mappings], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 4, 700–719 (in Russian).
2. S. G. Basalaev and S. K. Vodopyanov, "Otkrytost' i diskretnost' otobrazheniy s konechnym iskazheniem na gruppakh Karno" [Openness and discreteness of mappings with finite distortion on Carnot groups], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 6, 1151–1159 (in Russian).
3. Yu. A. Brudnyy and B. D. Kotlyar, "Odna zadacha kombinatornoy geometrii" [One combinatorial geometry problem], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 1970, **11**, No. 5, 1171–1173 (in Russian).
4. S. K. Vodopyanov, "Closure of classes of mappings with bounded distortion on Carnot groups," *Sib. Adv. Math.*, 2004, **14**, No. 1, 84–125.
5. S. K. Vodopyanov, "Operatory podstanovki prostranstv Soboleva" [Substitution operators for Sobolev spaces], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniy* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications], Abstracts Conf., Saratov, 2002, pp. 42–43 (in Russian).
6. S. K. Vodopyanov, "O regulyarnosti otobrazheniy, obratnykh k sobolevskim" [On the regularity of mappings inverse to Sobolev ones], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 10, 3–32 (in Russian).
7. S. K. Vodopyanov, "Dopustimye zameny peremennykh dlya funktsiy klassov Soboleva na (sub)rimanovykh mnogoobraziyakh" [Admissible changes of variables for functions of Sobolev classes on (sub)Riemannian manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 1, 63–112 (in Russian).
8. S. K. Vodopyanov, "The regularity of inverses to Sobolev mappings and the theory of $\mathcal{Q}_{q,p}$-homeomorphisms," *Sib. Math. J.*, 2020, **61**, No. 6, 1002–1038.
9. S. K. Vodopyanov, "Nepreryvnost' otobrazheniy klassa Coboleva $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ s konechnym iskazheniem na gruppakh Karno" [Continuity of the mappings with finite distortion of the Sobolev class $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ on Carnot groups], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 5, 912–934 (in Russian).
10. S. K. Vodopyanov and N. A. Evseev, "Functional and analytical properties of a class of mappings of quasiconformal analysis on Carnot groups," *Sib. Math. J.*, 2022, **63**, No. 2, 233–261.
11. S. K. Vodopyanov and A. D. Ukhlov, "Sobolev spaces and (P,Q)-quasiconformal mappings of Carnot groups," *Sib. Math. J.*, 1998, **39**, No. 4, 665–682.
12. M. de Guzmán, *Differentsirovanie integralov v* $\mathbb{R}^n$ [Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
13. L. V. Kantorovich, B. Z. Vulikh, and A. G. Pinsker, *Funktsional'nyy analiz v poluuporyadochennykh prostranstvakh* [Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces], Gostekhizdat, Moscow—Leningrad, 1950 (in Russian).
14. V. G. Maz'ya, *Prostranstva S. L. Soboleva* [S. L. Sobolev Spaces], Leningrad Univ., Leningrad, 1985 (in Russian).
15. Yu. G. Reshetnyak, *Prostranstvennye otobrazheniya s ogranichennym iskazheniem* [Spatial Mappings with Bounded Distortion], Nauka, Novosibirsk, 1982 (in Russian).
16. Yu. G. Reshetnyak, "Sobolevskie klassy funktsiy so znacheniyami v metricheskom prostranstve" [Sobolev classes of functions with values in a metric space], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 1997, **38**, No. 3, 657–675 (in Russian).
17. Yu. G. Reshetnyak, "Sobolevskie klassy funktsiy so znacheniyami v metricheskom prostranstve. II" [Sobolev classes of functions with values in a metric space. II], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2004, **45**, No. 4, 855–870 (in Russian).
18. L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Teoriya mery i tonkie svoystva funktsiy* [Measure Theory and Fine Properties of Functions], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 2002 (Russian translation).
19. J. M. Ball, "Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1977, **63**, 337–403.
20. J. M. Ball, "Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter," *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A*, 1981, **88**, 315–328.
21. D. Christodoulou, "On the geometry and dynamics of crystalline continua," *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1998, **69**, No. 3, 335–358.
22. P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. I. Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
23. G. B. Folland and E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1982.
24. M. Gromov, "Carnot—Caratheodory spaces seen from within," In: *Sub-Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 79–323.

25. D. V. Isangulova and S. K. Vodopyanov, "Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups," *Eurasian Math. J.*, 2010, **1**, No. 3, 58–96.
26. A. Maione, "Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields," *PhD Thesis*, University of Trento, 2020, pp. 1–145.
27. A. Molchanova and S. Vodopyanov, "Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2019, **59**, No. 17, 2–25.
28. P. Pansu, "Métriques de Carnot—Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un," *Ann. Math.*, 1989, **129**, No. 1, 1–60.
29. A. D. Ukhlov and S. K. Vodopyanov, "Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I," *Sib. Adv. Math.*, 2004, **14**, No. 4, 78–125.
30. A. D. Ukhlov and S. K. Vodopyanov, "Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II," *Sib. Adv. Math.*, 2005, **15**, No. 1, 1–35.
31. S. K. Vodop'yanov, "$\mathcal{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics," In: *Proceedings on Analysis and Geometry*, Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000, pp. 603–670.
32. S. K. Vodop'yanov, "Geometry of Carnot—Carathéodory spaces and differentiability of mappings," *Contemp. Math.*, 2007, **424**, 247–302.

S. K. Vodopyanov
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: `vodopis@mail.ru`

S. V. Pavlov
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: `s.pavlov4254@gmail.com`