УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214
EDN: XYLGMK

ТРЕТЬЯ СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В. В. Ахлынина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями, когда на части границы заданы однородные условия Дирихле, а на другой части границы — краевые условия третьего рода. Показана взаимосвязь таких задач с нелокальными смешанными задачами для сильно эллиптических дифференциальных уравнений. Показана их однозначная разрешимость, гладкость обобщенных решений.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, эллиптическое уравнение, смешанные краевые условия, краевые условия Дирихле, краевые условия третьего рода.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

Для цитирования: *В. В. Ахлынина.* Третья смешанная краевая задача для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченной области// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 2. С. 201–214. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214

1. Введение

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения рассматривались в работах многих математиков: Ф. Хартмана и Г. Стампакья [10], А. Б. Антоновича [1], В. С. Рабиновича [4] и др. Интерес к этим уравнениям связан с их важными приложениями: к теории многослойных пластин и оболочек [13–15], к нелинейной оптике [7], к теории многомерных диффузионных процессов [15], к теории нелокальных эллиптических задач [2,7–9,15], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [7, 11, 16] и др.

Общая теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах А. Л. Скубачевского и его учеников [5, 7, 15], см. также имеющуюся там библиографию.

В работе [12] исследуется смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в случае, когда на части границы заданы однородные условия Дирихле, а на другой части границы — краевые условия второго рода. В настоящей работе исследуется третья смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения, когда на части границы заданы однородные условия Дирихле, а на другой части границы — краевые условия третьего рода. Установлена взаимосвязь такой задачи с нелокальной смешанной задачей для сильно эллиптического дифференциального уравнения. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости и гладкости обобщенных решений таких задач.

2. Свойства разностных операторов

Рассмотрим вспомогательные результаты о свойствах разностных операторов. Доказательства см. в [15, гл. II].

2.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ или $Q = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a, b)$, если $n = 2$.

Пусть $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathscr{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus (\bigcup\limits_{h \in \mathsf{M}} (\partial Q + h))$.

Определение 2.1. Множество Q_r будем называть *подобластью*. Множество $\mathscr{R}$ всех подобластей Q_r $(r = 1, 2, \dots)$ — *разбиением* области Q.

Для множества подобластей Q_r справедливы следующие результаты:

1) $\bigcup\limits_r \partial Q_r = (\bigcup\limits_{h \in \mathsf{M}} (\partial Q + h)) \cap \overline{Q}$.
2) $\bigcup\limits_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$.
3) Для любых Q_{r_1} и $h \in \mathsf{M}$ либо существует Q_{r_2} такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.

Разбиение $\mathscr{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся *классы*: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathscr{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in \mathsf{M}$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, \dots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, что каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}. Будем предполагать, что множество различных классов конечно. Обозначим число различных классов через s_1.

2.2. Введем множество

$$\mathscr{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in \mathsf{M}} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что множество $\mathscr{K} \cap \partial Q$ имеет нулевую $(n-1)$-мерную меру Лебега $\mu_{n-1}(\cdot)$. Однако в общем случае может оказаться, что $\mu_{n-1}(\mathscr{K} \cap \partial Q) \neq 0$, см. [15, пример 7.6].

Граница ∂Q разбивается множеством $\mathscr{K}$ на открытые связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q \setminus \mathscr{K}$, которые мы будем обозначать Γ_p.

Можно показать, что если $(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ при некотором $h \in \mathsf{M}$, то либо $\Gamma_p + h \subset Q$, либо существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathscr{K}$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$. Отсюда следует, что множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, p = 1, 2, \dots; h \in \mathsf{M}\}$ можно разбить на классы следующим образом: множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если:

1) существует $h \in \mathsf{M}$ такое, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$, и
2) в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$ направления внешних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Будем предполагать, что число различных классов конечно и равно r_1.

Очевидно, что множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более, чем двум классам. Будем обозначать множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \dots, r_1$ — номер класса, j — номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r, J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r))$.

Из определения множества $\mathscr{K}$ вытекают следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$; при этом $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$, если $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.*

Лемма 2.2. *Для любого $r = 1, 2, \dots, r_1$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и после некоторой перенумерации $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$.*

Лемма 2.3. *Для любого $\Gamma_{rj} \subset Q$ существуют $Q_{s_1 l_1}$ и $Q_{s_2 l_2}$ такие, что $Q_{s_1 l_1} \neq Q_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$ и $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3 l_3} = \varnothing$, если $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.*

2.3. Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h\in\mathscr{M}} a_h u(x+h), \tag{2.2}$$

где $a_h \in \mathbb{C}$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Введем оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q, \tag{2.3}$$

где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, а $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Легко показать, что операторы $R_Q, R_Q^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограничены и

$$R_Q^* = P_Q R^* I_Q, \quad R^*u(x) = \sum_{h\in\mathscr{M}} \overline{a_h} u(x-h).$$

Для каждого класса s определим объединение всех его подобластей как $\Omega_s := \bigcup\limits_{l=1}^{N(s)} Q_{sl}$. Обозначим через $L_2(\Omega_s)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне Ω_s. Обозначим через $P_s : L_2(Q) \to L_2(\Omega_s)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2(\Omega_s)$. Можно показать, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2(\Omega_s). \tag{2.4}$$

Более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.4. *$L_2(\Omega_s)$ — инвариантное подпространство оператора R_Q.*

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2(\Omega_s) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{2.5}$$

где $l = 1,\dots,N = N(s)$, h_{sl} такое, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, и $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{s1})$.

Справедлива следующая лемма, см. [15, лемма 8.6].

Лемма 2.5. *Оператор $R_{Qs} : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, определяемый формулой*

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{2.6}$$

является оператором умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами вида

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sj} - h_{si} \in \mathscr{M}), \\ 0 & (h_{sj} - h_{si} \notin \mathscr{M}). \end{cases} \tag{2.7}$$

Определение 2.2. Будем называть разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *невырожденным*, если $0 \notin \sigma(R_Q)$. В противном случае будем называть его *вырожденным.*

Замечание 2.1. Из леммы 2.5 следует, что оператор R_Q является невырожденным в том случае, когда все матрицы R_s $(s = 1,\dots,s_1)$ имеют отличные от нуля определители. Для невырожденного оператора $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, имеющий вид

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s. \tag{2.8}$$

Пример 2.1. Пусть $Q = \left(0, 2\dfrac{1}{3}\right) \times (0,1)$, разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$(Ru)(x) = a_{-2}u(x_1-2,x_2) + a_{-1}u(x_1-1,x_2) + a_0 u(x_1,x_2) + a_1 u(x_1+1,x_2) + a_2 u(x_1+2,x_2).$$

Тогда $\mathscr{M} = \{(-2,0); (-1,0); (0,0); (1,0); (2,0)\}$, $M = \{(j,0)\}$ $(j \in \mathbb{Z})$. Множество $\mathscr{K}$ состоит из двенадцати точек: $(j,0)$; $\left(j+\dfrac{1}{3},0\right)$; $(j,1)$; $\left(j+\dfrac{1}{3},1\right)$ $(j=0,1,2)$. Сдвиги, порожденные разностным оператором, разбивают область Q на два класса подобластей (см. рис. 1):

1) $Q_{11} = \left(0,\dfrac{1}{3}\right) \times (0,1)$, $Q_{12} = \left(1,1\dfrac{1}{3}\right) \times (0,1)$, $Q_{13} = \left(2,2\dfrac{1}{3}\right) \times (0,1)$;

2) $Q_{21} = \left(\dfrac{1}{3},1\right) \times (0,1)$, $Q_{22} = \left(1\dfrac{1}{3},2\right) \times (0,1)$.

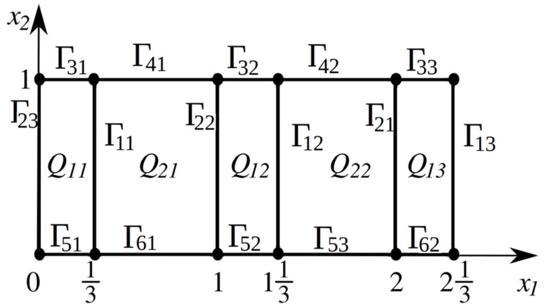

Рис. 1

Разностному оператору R соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

3. Разностные операторы в пространствах Соболева

3.1. Пусть $W_2^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, — пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q \mathscr{D}^\alpha u \cdot \overline{\mathscr{D}^\alpha v} dx,$$

где $\mathscr{D}^\alpha = \mathscr{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathscr{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathscr{D}_j = -i\partial/\partial x_j$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Обозначим через $\mathring{W}_2^k(Q)$ замыкание в пространстве $W_2^k(Q)$ множества $C_0^\infty(Q)$ финитных, бесконечно дифференцируемых в Q функций с компактными носителями.

Пусть $S \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$-мерная поверхность класса C^k. Через $W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим пространство следов функций из $W_2^k(Q)$ с нормой

$$\|\phi\|_{W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)} = \inf \|u\|_{W_2^k(Q)} \quad (u \in W_2^k(Q): \quad u|_S = \phi).$$

Следующая лемма доказывается аналогично результату [15, лемма 8.15].

Лемма 3.1. *Пусть для некоторых $s = 1, \ldots, s_1$, $l = 1, \ldots, N(s)$, функция $u \in L_2(Q)$ принадлежит пространству $W_2^k(Q_{sl})$. Тогда функция $R_Q u$ также принадлежит пространству $W_2^k(Q_{sl})$ и выполняется оценка нормы*

$$\|R_Q u\|_{W_2^k(Q_{sl})} \leqslant c_1 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})}. \tag{3.1}$$

Если, кроме того, $\det R_s \neq 0$ *для всех $s = 1, 2, \ldots, s_1$, то существует ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, функция $R_Q^{-1} u$ также принадлежит пространству $W_2^k(Q_{sl})$, и выполняется оценка нормы*

$$\|R_Q^{-1} u\|_{W_2^k(Q_{sl})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})}. \tag{3.2}$$

Здесь $c_1, c_2 > 0$ — константы, не зависящие от u.

Обозначим через $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ подпространство функций из пространства $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \tag{3.3}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, $B = \{r : J_0(r) > 0\}$; $\Gamma = \{\Gamma_{rl}\}$, $r \in B$, $l = J_0 + 1, \dots, J$.

Справедлива следующая лемма, см. [12, лемма 3.2].

Лемма 3.2. *Разностный оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ в $W^1_2(Q)$, при этом для любой функции $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ справедливо равенство*

$$(R_Q u)_{x_j} = R_Q u_{x_j} \quad (j = 1, \dots, n). \tag{3.4}$$

3.2. Ниже мы приведем результат об осуществляемом регулярным разностным оператором изоморфизме пространства $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ и подпространства функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Этот результат используется, чтобы установить связь между смешанной краевой задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптическим дифференциальным уравнением со смешанными нелокальными краевыми условиями.

В силу леммы 2.2 для любого $r = 1, 2, \dots, r_1$ существует единственный класс $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$, и можно перенумеровать подобласти s-го класса так, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, .., N(s))$.

Введем матрицы R^1_s, получаемые из матриц R_s путем вычеркивания последних $N - J_0$ столбцов, и матрицы R^0_s порядка $J_0 \times J_0$, получаемые из матрицы R^1_s путем вычеркивания последних $N - J_0$ строк.

Пусть e^r_i $(i = 1, \dots, N)$ — i-я строка матрицы R^1_s.

Определение 3.1. Будем называть разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *регулярным*, если матрицы R_s $(s = 1, \dots, s_1)$ и R^0_s $(s = s(r), r \in B)$ невырождены.

Замечание 3.1. Заметим, что если оператор R_Q регулярный, то матрицы R^0_s невырождены. Следовательно, существует такие коэффициенты γ^r_{ij} $(r \in B;\ i = J_0(r) + 1, \dots, J(r);\ j = 1, \dots, J_0(r))$, что выполняются следующие соотношения:

$$e^r_l = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} e^r_j \quad (l = J_0 + 1, \dots, J(r)). \tag{3.5}$$

Введем $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w(x + h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} w(x + h_{sj})\big|_{\Gamma_{r1}} \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \tag{3.6}$$

где $\gamma^r_{ij} \in \mathbb{C}$, $\gamma = \{\gamma^r_{ij}\}$.

Справедлива следующая теорема, см. [12, теорема 3.1].

Теорема 3.1. *Регулярный разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ на $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ для некоторых $\gamma = \{\gamma^r_{ij}\}$.*

3.3. Рассмотрим некоторое $r \in B$ и соответствующие $J = J(r)$ и $J_0 = J_0(r)$. По лемме 2.2 существует единственный класс $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и элементы Γ_{rl} лежат в ∂Q_{sl} для всех $l = 1, \dots, N(s)$ после некоторой перенумерации подобластей s-го класса. В силу леммы 2.3 существуют такие $p = p(r)$ и $m = m(r)$, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{pm}$, $Q_{pm} \neq Q_{s1}$. Перенумеруем подобласти p-го класса таким образом, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}$ $(l = 1, \dots, J_0)$, $J_0 \leqslant N(p)$.

Введем матрицу R'_s, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и первых J_0 столбцов. Если $N(p) > J_0$, введем также матрицу R'_p, полученную из матрицы R_p вычеркиванием последних $N(p) - J_0$ строк и первых J_0 столбцов. Если $N(p) > J_0$, обозначим через $T_r = (R'_s | R'_p)$ матрицу размера $J_0 \times (N(s) + N(p) - 2J_0)$, полученную объединением столбцов матриц R'_s и R'_p.

Замечание 3.2. Пусть $N(p) > J_0$. Рассмотрим множество $\Gamma_{r1} + h_{pk}$ для некоторого $J_0 + 1 \leqslant k \leqslant N(p)$, где h_{pk} таково, что $Q_{pk} = Q_{p1} + h_{pk}$, $h_{p1} = 0$. Из условия $J_0 + 1 \leqslant k \leqslant N(p)$ следует, что $\Gamma_{r1} + h_{pk} \neq \Gamma_{ri}$ для $1 \leqslant i \leqslant J_0$. Из соотношений $\partial Q_{pk} = \partial Q_{p1} + h_{pk}$, $\Gamma_{r1} + h_{pk} \subset \partial Q_{pk} \subset \overline{Q}$ и свойств множеств Γ_{rl} следует существование v-го класса $\{\Gamma_{vl}\}$, $v \neq r$, такого, что $\Gamma_{r1} + h_{pk} = \Gamma_{vt} \subset \partial Q$ для некоторого t, где $1 \leqslant t \leqslant J(v)$. Легко показать, что для такого класса значение $J(v)$ совпадает с $N(p)$ и можно перенумеровать множества Γ_{vl} и подобласти Q_{pl}, что $\Gamma_{rl} = \Gamma_{vl} \subset Q$ $(l = 1, \ldots, J_0)$, $\Gamma_{vl} \subset \partial Q$ $(l = J_0 + 1, \ldots, N(p))$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}$ $(l = 1, \ldots, N(p))$. Таким образом, матрица T_v, построенная для v-го класса, будет совпадать с матрицей T_r с точностью до перенумерации некоторых строк и столбцов. Отметим, что класс подобластей $\{Q_{pk}\}$, $k = 1, \ldots, N(p)$, может совпадать с перенумерованным классом $\{Q_{sl}\}$, $l = 1, \ldots, N(s) = N(p)$.

Справедлива следующая теорема, см. [12, теорема 3.2].

Теорема 3.2. *Пусть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный, и пусть*

$$\begin{cases} \text{для всех } r \in B \text{ таких, что } N(p) > J_0, \text{ столбцы матрицы } T_r \\ \text{линейно независимы, и для всех } r \in B \text{ таких, что } N(p) = J_0, \\ \text{столбцы матрицы } R'_s \text{ линейно независимы.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Предположим также, что $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, где H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Тогда $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

Пример 3.1. Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, заданный формулой

$$(Ru)(x) = 2u(x_1 - 1, x_2) + u(x_1, x_2) + u(x_1 + 1, x_2).$$

Пусть область $Q = \left(0, 2\dfrac{1}{3}\right) \times (0, 1)$ (см. рис. 1).

Оператору R соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители $\det R_1 = -3$, $\det R_2 = -1$ ненулевые, а значит оператор R_Q является регулярным.

Подпространство $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ — подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих условиям $u|_{x_1=0} = u|_{x_1=2\frac{1}{3}} = 0$, а $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ — подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w|_{x_1=0} = \gamma_{31}^2 \, w|_{x_1=1} + \gamma_{32}^2 \, w|_{x_1=2},$$

$$w|_{x_1=2\frac{1}{3}} = \gamma_{32}^1 \, w|_{x_1=1\frac{1}{3}} + \gamma_{31}^1 \, w|_{x_1=\frac{1}{3}},$$

где коэффициенты $\gamma_{ij}^{\pm}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{31}^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{32}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{32}^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{31}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т. е. $\gamma_{31}^2 = -1$, $\gamma_{32}^2 = 1$, $\gamma_{32}^1 = -2$, $\gamma_{31}^1 = 4$.

Здесь $\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\} \cup \left\{(x_1, x_2) : x_1 = 2\dfrac{1}{3}, x_2 \in (0, 1)\right\}$, $\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$ $(r = 1, 2;$ $i = 3;$ $j = 1, 2)$.

Векторы $c^1 = (0 \quad 2)^T$ и $c^2 = (1 \quad 0)^T$ ненулевые, т. е. условие (3.7) выполняется. Пусть H_1 — некоторое линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Тогда, в силу теоремы 3.2, если $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, то $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

Замечание 3.3. Теорема 3.2 показывает, что для регулярного разностного оператора R_Q при дополнительном условии (3.7) на коэффициенты наличие «минимальной гладкости» функций из некоторого подпространства H_1 и его прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ означает, что функции из прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ имеют нулевые следы на многообразиях Γ_{rl} $(r \in B,\ l = J_0+1,\dots,J)$, а функции из самого пространства H_1 удовлетворяют нелокальным краевым условиям. Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вида (4.1) естественно задавать однородные условия Дирихле на многообразиях Γ_{rl} $(r \in B,$ $l = J_0+1,\dots,J)$ и краевые условия третьего рода на многообразиях Γ_{rl} $(r \notin B,\ l = 1,\dots,J)$. Такие задачи эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений (см. раздел 4). Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями третьего рода на сдвигах многообразий Γ_{rl} $(r \notin B,\ l = 1,\dots,J)$ приводит к переопределенным задачам.

4. Смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения

4.1. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{4.1}$$

Будем говорить, что оператор A *сильно эллиптический*, если выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \quad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{4.2}$$

Здесь $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$AR_Qu(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{4.3}$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \in B, l = J_0(r)+1,\dots,J(r)), \tag{4.4}$$

$$\Big(\sum_{i,j} a_{ij}R_Qu_{x_j}\cos(\nu,x_i) + \sigma(x)R_Qu\Big)\Big|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \notin B, l = 1,\dots,J(r)), \tag{4.5}$$

где $f_0 \in L_2(Q)$, $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(x) = \sigma(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathsf{M}$, — вещественная неотрицательная функция, ν — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_{rl}, $R_Q = P_QRI_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — ограниченный разностный оператор, оператор R задается формулой (2.2).

Будем предполагать, что матрицы R_s, соответствующие разностному оператору R_Q, удовлетворяют условию

$$R_s + R_s^* > 0 \quad (s = 1,\dots,s_1). \tag{4.6}$$

Далее в этом разделе будем предполагать, что условия (4.2), (4.6) выполнены. В таком случае уравнение (4.3) будем называть *сильно эллиптическим.*

4.2. Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (4.3)–(4.5).

Определение 4.1. Будем называть функцию $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *обобщенным решением* задачи (4.3)–(4.5), если интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}R_Qu_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma R_Qu, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)} \tag{4.7}$$

выполняется для любого $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$.

Здесь $(\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = \big((\sigma R_Q u)|_{\Gamma_\sigma}, v|_{\Gamma_\sigma} \big)_{L_2(\Gamma_\sigma)}$, $\Gamma_\sigma = \cup \Gamma_{rl}$, $r \notin B$, $l = 1, \ldots, J(r)$. Всюду далее через $(f, g)_{L_2(\Gamma_\sigma)}$ будем обозначать скалярное произведение следов функций f, g, т. е. $(f, g)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f|_{\Gamma_\sigma}, g|_{\Gamma_\sigma})_{L_2(\Gamma_\sigma)}$.

Введем в пространстве $L_2(Q)$ полуторалинейную форму $a(u, v)$ с областью определения $\mathscr{D}(a) = \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ следующим образом:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R_Q u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)}. \tag{4.8}$$

Лемма 4.1. *Пусть выполняются условия* (4.2), (4.6). *Тогда в пространстве* $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле*

$$(u, v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} = \operatorname{Re} a(u, v) \quad (u, v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)). \tag{4.9}$$

Доказательство. В силу ограниченности операторов R_Q и R_Q^* в $L_2(Q)$ и неравенства Коши—Буняковского для любых функций u, v из $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{Re} a(u, v)| \leqslant k_1 \|u\|_{W_2^1(Q)} \|v\|_{W_2^1(Q)}, \tag{4.10}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u и v.

С другой стороны, в силу (2.5)–(2.7) и (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R_Q u_{x_j}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \Big) &= \operatorname{Re} \sum_s \sum_{i,j} (a_{ij} R_s (U_s P_s u)_{x_j}, (U_s P_s u)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} = \\ &= \sum_s \sum_{i,j} (a_{ij} \Big(\sqrt{R_s^H} U_s P_s u \Big)_{x_j}, \Big(\sqrt{R_s^H} U_s P_s u \Big)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} \geqslant \\ &\geqslant k_2 \sum_s \sum_i \Big(\Big(\sqrt{R_s^H} U_s P_s u \Big)_{x_i}, \Big(\sqrt{R_s^H} U_s P_s u \Big)_{x_i} \Big)_{L_2^N(Q_{s1})} \geqslant k_3 \sum_i \|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $k_2, k_3 > 0$ — постоянные, не зависящие от u, $R_s^H = (R_s + R_s^*)/2$.

Очевидно, в пространстве $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} = \sum_i (u_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \operatorname{Re}(\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)}. \tag{4.12}$$

Из (4.11), (4.12), для всех $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ имеем

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant k_4 \|u\|^2_{W_2^1(Q)},$$

где $k_4 > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

Таким образом, формулой (4.9) действительно можно задать в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ эквивалентное скалярное произведение. □

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (4.2), (4.6). *Тогда для любой правой части* $f_0 \in L_2(Q)$ *у задачи* (4.3)–(4.5) *существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, *при этом*

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{4.13}$$

где $c_0 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f_0.

Доказательство. Представим полуторалинейную форму $a(u, v)$ в виде:

$$a(u, v) = p(u, v) + i\, q(u, v), \tag{4.14}$$

где

$$p(u, v) = \sum_{i,j} \Big(a_{ij} \frac{R_Q + R_Q^*}{2} u_{x_j}, v_{x_i} \Big)_{L_2(Q)}, \tag{4.15}$$

$$q(u,v) = \sum_{i,j} \left(a_{ij} \frac{R_Q - R_Q^*}{2i} u_{x_j}, v_{x_i} \right)_{L_2(Q)}. \tag{4.16}$$

Из ограниченности операторов R_Q и R_Q^* в $L_2(Q)$, используя неравенства Коши—Буняковского и лемму 3.1, получим для любых $u, v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$

$$|q(u,v)| \leqslant k_1 \|u\|'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} \|v\|'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}, \tag{4.17}$$

где $k_1 > 0$ постоянная, не зависящая от u, v.

Отсюда в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве и симметричности формы $q(u,v)$ в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ следует, что существует такой самосопряженный ограниченный оператор $S : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, что

$$q(u,v) = (Su, v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} \quad (u, v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)). \tag{4.18}$$

По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует линейный ограниченный оператор $B : L_2(Q) \to \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такой, что

$$(f_0, v)_{L_2(Q)} = (Bf_0, v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} \quad (f_0 \in L_2(Q), v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)). \tag{4.19}$$

Из равенств (4.14)–(4.16), (4.18), (4.19) и леммы 3.1 получим, что равенство (4.7) эквивалентно интегральному тождеству

$$(u + iSu, v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} = (Bf_0, v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} \quad (v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)), \tag{4.20}$$

которое, в свою очередь, можно переписать в виде уравнения в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$:

$$(I + iS)u = Bf_0. \tag{4.21}$$

Очевидно, оператор $S : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ является ограниченным и самосопряженным. Отсюда следует существование ограниченного обратного оператора для $I + iS$ в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Таким образом, для любой $f_0 \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u = (I + iS)^{-1} B f_0$ задачи (4.3)–(4.5), при этом имеет место оценка (4.13). □

4.3. Перейдем к вопросу о гладкости обобщенных решений задачи (4.3)–(4.5).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (4.2), (4.6), $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *— обобщенное решение задачи* (4.3)–(4.5). *Тогда* $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* s, l $(s = 1, \dots, s_1;\ l = 1, \dots, N(s))$, *где* $\mathscr{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathscr{K}) < \varepsilon\}$.

Доказательство. Из неравенства (4.11) следует, что дифференциально-разностный оператор AR_Q удовлетворяет условиям теоремы 11.1 из гл. II в [15] о локальной гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в подобластях Q_{sl} и условиям теоремы 11.2 в [15] о гладкости вблизи части границы, на которой задается краевое условие Дирихле.

С другой стороны, можно показать гладкость обобщенного решения вблизи части границы, на которой задается краевое условие третьего рода, см. [3, теорема 2, §14].

Из этих утверждений получим $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$. □

4.4. Рассмотрим следствия из теоремы 4.2, объясняющие, в каком смысле обобщенное решение задачи (4.3)–(4.5) удовлетворяет уравнению (4.3) и краевому условию (4.5).

Следствие 4.1. *Пусть выполняются условия* (4.2), (4.6). *Тогда обобщенное решение задачи* (4.3)–(4.5) $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *удовлетворяет уравнению* (4.3) *почти всюду в* Q_{sl} $(s = 1, \dots, s_1;$ $l = 1, \dots, N(s))$.

Доказательство. В силу теоремы 4.2 и леммы 3.1 $R_Q u_{x_j} \in W^1_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ для любых $\varepsilon > 0$ и s, l. Выберем произвольным образом $s = s_0$, $l = l_0$ и область Ω так, что $\overline{\Omega} \subset Q_{s_0 l_0}$, $\partial\Omega \in C^\infty$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega, \partial Q_{s_0 l_0})$. Тогда $R_Q u_{x_j} \in W_2^1(\Omega)$, следовательно, для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$, интегрируя по частям в тождестве (4.7), получим

$$-\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} R_Q u_{x_j})_{x_i} \overline{v} dx = \int\limits_\Omega f_0 \overline{v} dx, \tag{4.22}$$

где $s = s_0$, $l = l_0$.

В силу произвольности области Ω и функции v мы убеждаемся, что уравнение (4.3) удовлетворяется почти всюду в $Q_{s_0 l_0}$. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть выполняются условия* (4.2), (4.6), *и пусть* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (4.3)–(4.5). *Тогда след функции* $\sum\limits_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x) R_Q u$ *определен на поверхности* $M_{rl\varepsilon} := (\Gamma_{rl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* r, l, $r \notin B, l = 1, \dots, J(r)$, *при этом краевое условие второго рода* (4.5) *выполняется почти всюду на этой поверхности.*

Доказательство. Выберем произвольным образом $r = r_0 \notin B$ и $l = l_0$, $1 \leqslant l \leqslant J(r_0)$ и функцию $\widetilde{u}(x) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma R_Q u$. По лемме 2.1 существует единственное $s^* = s^*(r)$ такое, что $N(s^*) = J(r^*)$, и после некоторой перенумерации подобластей $Q_{s^* l}$ будут справедливы вложения $\Gamma_{r^* l} \subset \partial Q_{s^* l}$ $(l = 1, \dots, N(s^*))$. Возьмем произвольную функцию $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ с носителем в $\overline{Q_{s^* l^*}} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$. В силу леммы 3.1, функция $\widetilde{u}$ принадлежит пространству $W_2^1(Q_{s^* l^*} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$, а ее след определен на поверхности $\partial Q_{s^* l^*} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$.

Выберем произвольным образом $r = r_0 \notin B$ и $l = l_0$, $1 \leqslant l \leqslant J(r_0)$. В силу леммы 2.2 существует единственное $s_0 = s_0(r)$ такое, что $N(s_0) = J(r_0)$ и после некоторой перенумерации подобластей $Q_{s_0 l}$ будут справедливы вложения $\Gamma_{r_0 l} \subset \partial Q_{s_0 l}$ $(l = 1, \dots, N(s_0))$. В силу теоремы 4.2 мы можем проинтегрировать по частям левую часть выражения (4.7) для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такой, что $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q_{s_0 l_0}} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$. По теореме 4.2 и лемме 3.1 получим, что $\widetilde{u}(x) \in W_2^1(Q_{s_0 l_0} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ и след функции $\widetilde{u}(x)$ определен на поверхности $\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$. Следовательно, используя следствие 4.1 и равенства $v|_{\Gamma_{rl}} = 0$ $(r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J)$, получим

$$\int\limits_{\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon} \widetilde{u}(x)|_{\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon} \cdot \overline{v}|_{\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon} \, dS = 0. \tag{4.23}$$

В силу произвольности выбора функции v мы видим, что краевое условие (4.5) выполняется почти всюду на поверхности $\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$, в том числе на $M_{r_0 l_0 \varepsilon}$. $\square$

5. Приложения к теории нелокальных эллиптических краевых задач

5.1. Рассмотрим приложения результатов предыдущего раздела о разрешимости смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения к исследованию нелокальной смешанной задачи для сильно эллиптического дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Будем предполагать, что оператор A сильно эллиптический, т. е. выполняется условие (4.2).

Рассмотрим уравнение

$$Aw(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{5.1}$$

с нелокальными смешанными краевыми условиями

$$w(x + h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} \, w(x + h_{sj})|_{\Gamma_{r1}} \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \tag{5.2}$$

$$\Big(\sum_{i,j} a_{ij} w_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x) w \Big)\Big|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \notin B, l = 1, \dots, J). \tag{5.3}$$

Здесь $f_0 \in L_2(Q)$, $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(x) = \sigma(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathsf{M}$ — вещественная неотрицательная функция, ν — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_{rl}, а γ_{ij}^r — комплексные числа.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

$$\begin{cases} \textit{Для заданных чисел } \gamma_{ij}^r \in \mathbb{C}\ (r \in B;\ i = J_0+1, \dots, J; \\ j = 1, \dots, J_0)\ \textit{существуют числа } a_h\ (h \in \mathscr{M})\ \textit{такие, что} \\ \textit{выполняются равенства } (3.5), \textit{ при этом матрицы} \\ R_s\,(s = 1, \dots, s_1)\ \textit{вида } (2.7)\ \textit{удовлетворяет условию } (4.6). \end{cases} \tag{5.4}$$

Напомним, что через $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ мы обозначили подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям (3.6).

Определение 5.1. Будем называть функцию $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ *обобщенным решением* нелокальной смешанной краевой задачи (5.1)–(5.3), если интегральное тождество

$$\sum_{i,j} (a_{ij} w_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma w, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)} \tag{5.5}$$

выполняется для любого $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* (4.2), (5.4). *Тогда для любой* $f_0 \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (5.1)–(5.3), *при этом*

$$\|w\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c_1 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{5.6}$$

где $c_1 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f_0.

Доказательство. В силу условий (5.4), оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный. Следовательно, в силу теоремы 3.1 $R_Q : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — изоморфизм. Поэтому интегральное тождество (5.5) примет вид

$$\sum_{i,j} (a_{ij} (R_Q u)_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma (R_Q u), v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}, \tag{5.7}$$

где $u = R_Q^{-1} w \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$.

В силу леммы 3.2 интегральное тождество (5.7) можно записать в виде

$$\sum_{i,j} (a_{ij} R_Q u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}, \tag{5.8}$$

т. е. функция $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ является обобщенным решением задачи (4.3)–(4.5). У такой задачи существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ в силу теоремы 4.1, при этом выполняется априорная оценка (4.13). Отсюда получаем, что у задачи (5.1)–(5.3) также существует единственное обобщенное решение $w = R_Q u \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$, при этом в силу леммы 3.2 и неравенства (4.13) для некоторой независящей от u константы k_1 имеем

$$\|w\|_{W^1_2(Q)} = \|R_Q u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant k_1 \|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant k_1 c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)}. \tag{5.9}$$

Таким образом, доказано неравенство (5.6). □

5.2. Докажем теперь теорему о гладкости обобщенных решений задачи (5.1)–(5.3).

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* (4.2), (5.4), *и пусть* $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (5.1)–(5.3). *Тогда* $w \in W^2_2(Q \setminus (\partial Q \cap \mathscr{K})^\varepsilon)$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В силу теоремы о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач вблизи гладкого куска границы имеем $w \in W^2_2(\Omega_1)$, где $\Omega_1 = \{x \in Q : \operatorname{dist}(x, \Gamma_{rl}) \geqslant \delta\ \forall r \in B,\ l = 1, \dots, J_0(r)\}$ для любого достаточно малого $\delta > 0$. Отсюда и из краевых условий (5.2) следует, что

$$w|_{\Gamma_{rj} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon} \in W^{3/2}_2(\Gamma_{rj} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon), \quad j = 1, \dots, J_0.$$

Применяя теорему о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач с неоднородными краевыми условиями вблизи гладкого куска границы, получим, что $w \in W^2_2(\Omega_2)$, где $\Omega_2 = \{x \in Q : \operatorname{dist}(x, \Gamma_{rl}) \geqslant \delta \ \forall r \notin B,\ l = 1, \dots, J(r)\}$. Полагая $\delta = \varepsilon/\sqrt{2}$, имеем $w \in W_2^2(Q \setminus (\partial Q \cap \mathscr{K})^\varepsilon)$. □

5.3. Аналогично доказательству следствий 4.1 и 4.2 можно доказать следующие утверждения, вытекающие из теоремы 5.2.

Следствие 5.1. *Пусть выполняются условия* (4.2), (5.4), *и пусть* $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (5.1)–(5.3). *Тогда* $w(x)$ *удовлетворяет уравнению* (5.1) *почти всюду в* Q.

Следствие 5.2. *Пусть выполняются условия* (4.2), (5.4), *и пусть* $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (5.1)–(5.3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* r, l, $r \notin B$, $l = 1, \dots, J(r)$ *на поверхности* $M_{rl\varepsilon} = \Gamma_{rl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$ *определен след функции* $\sum\limits_{i,j} a_{ij} w_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma w$, *при этом краевое условие* (5.3) *выполняется почти всюду на этой поверхности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
3. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: МАИ, 1992.
4. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.
5. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
6. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 4. — С. 548–558.
7. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
8. *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems// Am. J. Math. — 1964. — *86*, № 4. — С. 735–750.
9. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
10. *Hartman F., Stampacchia G.* On some non-linear elliptic differential-functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–230.
11. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Jpn. — 1961. — *13*, № 3. — С. 246–274.
12. *Liiko V. V.* Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a bounded domain// Complex Var. Elliptic Equ. — 2023. — *68*, № 12. — С. 2034–2058.
13. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — С. 192–207.
14. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the mininum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — С. 491–500.
15. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
16. *Skubachevskii A. L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem// Math. Nachr. — 2018. — *291*. — С. 2660–2692.

В. В. Ахлынина
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: vikalijko@gmail.com

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214
EDN: XYLGMK

The Third Mixed Boundary-Value Problem for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations in a Bounded Domain

V. V. Akhlynina

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. We consider strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a bounded domain. There are homogeneous Dirichlet conditions on a part of the boundary, and boundary conditions of the third kind on the other part of the boundary. We establish the connection between these problems and nonlocal mixed problems for strongly elliptic differential equations. We prove the uniqueness and the smoothness of their solutions.

Keywords: differential-difference equation, elliptic equation, mixed boundary conditions, Dirichlet boundary conditions, boundary conditions of the third kind.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement № 075-15-2022-1115).

For citation: V. V. Akhlynina, "The Third Mixed Boundary-Value Problem for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations in a Bounded Domain," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 201–214. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214`

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, "Ob indekse i normal'noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigov na granitse" [On the index and normal solvability of a general elliptic boundary-value problem with a finite group of translations on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. G. A. Kamenskii and A. L. Skubachevskii, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1992 (in Russian).
4. V. S. Rabinovich, "O razreshimosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy na $\mathbb{R}^n$ i v poluprostranstve" [On the solvability of differential-difference equations on $\mathbb{R}^n$ and in a half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
5. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
6. A. L. Skubachevskii, "O spektre nekotorykh nelokal'nykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On the spectrum of some nonlocal elliptic boundary-value problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **117**, No. 4, 548–558 (in Russian).

7. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
8. F. Browder, “Non-local elliptic boundary value problems,” *Am. J. Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
9. T. Carleman, “Sur la théorie des équations intégrales et ses applications,” *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich*, 1932, **1**, 138–151.
10. F. Hartman and G. Stampacchia, “On some non-linear elliptic differential-functional equations,” *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–230.
11. T. Kato, “Fractional powers of dissipative operators,” *J. Math. Soc. Jpn.*, 1961, **13**, No. 3, 246–274.
12. V. V. Liiko, “Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a bounded domain,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2023, **68**, No. 12, 2034–2058.
13. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
14. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, “On the mininum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
16. A. L. Skubachevskii, “Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem,” *Math. Nachr.*, 2018, **291**, 2660–2692.

V. V. Akhlynina
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: vikalijko@gmail.com