Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 2 (2024). С. 189–200
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200
EDN: XXWMID

ЗАДАЧА ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ С РАЗЛИЧНЫМ ЧИСЛОМ ВХОДОВ И ВЫХОДОВ

А. Ш. Адхамова, А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами с различным числом входов и выходов и несколькими запаздываниями. Установлена связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Получены априорные оценки решений. Доказана теорема о разрешимости рассматриваемой краевой задачи.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа, система управления с последействием, задача об успокоении, вариационная задача.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00073, https://rscf.ru/project/24-11-00073/.

Для цитирования: *А. Ш. Адхамова, А. Л. Скубачевский.* Задача об успокоении системы управления с последействием с различным числом входов и выходов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 2. С. 189–200. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200

1. Введение

Впервые задача об успокоении системы управления с последействием рассматривалась Н. Н. Красовским [7]. Поведение системы управления описывалось системой линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [11, 15] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [9, 12], а многомерная нестационарная система управления нейтрального типа рассматривалась в [1–4]. Системы управления с последействием запаздывающего типа изучались в [5, 8, 10]. Отметим также работы [13, 14], посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием.

Настоящая работа посвящена исследованию краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, к которым сводится задача об успокоении многомерных нестационарных систем управления нейтрального типа с различным числом входом и выходов.

Статья построена следующим образом. В первом разделе содержится введение, второй раздел посвящен постановке задачи об успокоении многомерной системы управления с последействием. В третьем разделе установлена связь между вариационной задачей, описывающей модель успокоения системы управления с последействием запаздывающего типа, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. В четвертом разделе доказаны априорные оценки, сформулирована теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи и построено фридрихсово расширение, соответствующее краевой задаче.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{k=0}^{M} A_k(t)y'(t-k\tau) + \sum_{k=0}^{M} B_k(t)y(t-k\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.1}$$

Здесь $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_k(t)$, $B_k(t) = \{a_{ij}^k(t)\}$, $\{b_{ij}^k(t)\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ — матрицы порядка $n \times m$ с элементами $a_{ij}^k(t)$, $b_{ij}^k(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = \text{const} > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (2.1) с начальным условием (2.2) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{2.3}$$

где $T > (M+1)\tau,\ T - M\tau = \tau N$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (2.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{k=0}^{M} A_k(t)y'(t-k\tau) + \sum_{k=0}^{M} B_k(t)y(t-k\tau) \right|^2 dt \to \min. \tag{2.4}$$

3. Вариационная и краевая задачи

Для того, чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (2.4), (2.2), (2.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

В данной статье рассмотрим случай $n > m$.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой:

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N},$ — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0 \leqslant i \leqslant k} \sup_{t \in \mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$, со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t)w^{(i)}(t)dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0,\dots,k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^m(a,b) = \prod_{i=1}^{m} L_2(a,b), \quad W_2^{k,m}(a,b) = \prod_{i=1}^{m} W_2^k(a,b), \quad \mathring{W}_2^{k,m}(a,b) = \prod_{i=1}^{m} \mathring{W}_2^k(a,b)$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{L_2(a,b)},$$

$$(v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\dots,v_m)^T,\ w = (w_1,\dots,w_m)^T$.

Обозначим через $\dot{C}^{\infty,m}(a,b)$ прямое произведение m линейных многообразий $\dot{C}^{\infty}(a,b)$, где $\dot{C}^{\infty}(a,b)$ — множество финитных бесконечно дифференцируемых функций на (a,b).

Покажем, что вариационная задача (2.2)–(2.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Воспользуемся схемой доказательств из [3].

Пусть $y \in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ — решение вариационной задачи (2.2)–(2.4), где $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau,0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^m(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,m}(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2^m(0,T-M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y+sv$ принадлежит $W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ и удовлетворяет краевым условиям (2.2), (2.3) для всех $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y+sv) = F(s)$. Поскольку $J(y+sv) \geqslant J(y),\ s \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0. \tag{3.1}$$

Положим

$$B(y,v) := \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{M} A_k(t)y'(t-k\tau) + \sum_{k=0}^{M} B_k(t)y(t-k\tau)\right)^T \times$$
$$\times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t)v'(t-l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t)v(t-l\tau)\right) d\tau. \tag{3.2}$$

Из равенства (3.1) следует, что

$$B(y,v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{3.3}$$

Проведем преобразования одного из слагаемых, полученных при раскрытии скобок. Обозначим

$$B_{k,l}(y,v) = \int_0^T \left(A_k(t)y'(t-k\tau) + B_k(t)y(t-k\tau)\right)^T \left(A_l(t)v'(t-l\tau) + B_l(t)v(t-l\tau)\right) d\tau.$$

В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t-l\tau$. Получим

$$B_{k,l}(y,v) = \int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_k(\xi+l\tau)y'(\xi+(l-k)\tau) + B_k(\xi+l\tau) \times \\ \times y(\xi+(l-k)\tau))^T(A_l(\xi+l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi+l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Вернемся к старой переменной t, полагая $t=\xi$. Учитывая, что $v(t)=0$ при $t\in(-M\tau,0)\cup(T-M\tau,T)$, будем иметь

$$B_{k,l}(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} (A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) + B_k(t+l\tau) \times \\ \times y(t+(l-k)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t) + B_l(t+l\tau)v(t))dt. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2) и интегрируя по частям, получим:

$$B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,k=0}^{M} \{(A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t)) + \\ + [(A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T B_l(t+l\tau) - \\ - ((B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))^T A_l(t+l\tau))' + \\ + (B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))^T B_l(t+l\tau)]v(t)\}dt. \tag{3.5}$$

Из (3.5) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) \in W_2^{1,n}(0,T-M\tau). \tag{3.6}$$

В силу (3.6), подставляя (3.4) в (3.3), мы можем произвести интегрирование по частям. Тогда мы получим

$$-\left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau)\right)' + \\ + \sum_{l,k=0}^{M} \{B_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) - \\ - \left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\right)' + \\ + \sum_{l,k=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\} = 0 \ (t\in(0,T-M\tau). \tag{3.7}$$

Таким образом, вектор-функция $y\in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (3.7) почти всюду на интервале $(0,T-M\tau)$.

Определение 3.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ называется *обобщенным решением* задачи (3.7), (2.2), (2.3), если выполняется условие (3.6), $y(t)$ почти всюду на $(0,T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (3.7), а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 3.1.

Определение 3.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (3.7), (2.2), (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} B(y,v) = &\int_0^{T-M\tau} \sum_{l,k=0}^{M} (A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T v'(t)dt + \\ &+ \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,k=0}^{M} \{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T - \\ &- ((A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))')^T + \\ &+ (B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))^T\}v(t)dt = 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

и краевым условиям (2.2), (2.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ является решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ является обобщенным решением краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3), то она будет решением вариационной задачи (2.2)–(2.4).

Докажем это.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ — обобщенное решение краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y+v) = J(y) + J(v) + 2B(y,v),$$

где $J(v)$ — неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку y — обобщенное решение задачи (3.7), (2.2), (2.3), то $B(y,v) = 0$. Следовательно,

$$J(y+v) \geqslant J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau, 0)$. *Функционал* (2.4) *с краевыми условиями* (2.2), (2.3) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (3.7), (2.2), (2.3).

4. Априорные оценки. Разрешимость краевой задачи. Фридрихсово расширение

Введем оператор $R_0 : \widetilde{L} \to L_2^m(0, T - M\tau)$ по формуле

$$R_0 u(t) = \sum_{k=0}^{M} A_k(t) u(t - k\tau).$$

Лемма 4.1. *Пусть существует минор m-ого порядка матрицы $A_0(t)$, который не равен 0 при $t \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $w \in \widetilde{W}(0, T - M\tau)$*

$$J_0(w) \geqslant c_0 ||w||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}, \tag{4.1}$$

где $c_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от w,

$$J_0(v) := \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{M} A_k(t) v'(t - k\tau)\right)^T \left(\sum_{k=0}^{M} A_k(t) v'(t - k\tau)\right) dt. \tag{4.2}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что первые m строк матрицы $A_0(t)$ образуют минор m-ого порядка, не равный 0 при $t \in \mathbb{R}$.

Введем матрицу $\widetilde{A}_0(t)$, полученную из $A_0(t)$ вычеркиванием $(n - m)$ последних строк.

1. Предположим противное: для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J_0(w_k) \leqslant \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}. \tag{4.3}$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что $||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Тогда в силу компактности вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^m(0,T-M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\} \subset \widetilde{W}$, сходящаяся в $L_2^m(0,T-M\tau)$ при $k\to\infty$ к некоторой вектор-функции $w_0 \in L_2^m(0,T-M\tau)$.

2. Пусть $0<t<\tau$. Тогда выражение $(R_0w'_{k_m})(t)$ имеет вид $(R_0w'_{k_m})(t) = A_0(t)w'_{k_m}(t)$. Следовательно, в силу невырожденности матрицы $\widetilde{A}_0(t)$ и неравенства (4.3) имеем $w'_{k_s} \to 0$ в $L_2^m(0,\tau)$ при $m\to\infty$.

3. Пусть теперь $\tau<t<2\tau$. Тогда $(R_0w'_{k_m})(t) = A_0(t)w'_{k_m}(t) + A_1(t)w'_{k_m}(t-\tau)$. Отсюда в силу неравенства (4.3) и п. 2 доказательства имеем

$$(R_0w'_{k_m})(t) \to 0 \quad \text{и} \quad A_1(t)w'_{k_m}(t-\tau)\to 0 \quad \text{в } L_2^m(\tau,2\tau) \text{ при } \ m\to\infty.$$

Следовательно, поскольку матрица $\widetilde{A}_0(t)$ — невырождена, то $w'_{k_m}\to 0$ в $L_2^m(\tau,2\tau)$ при $m\to 0$.

4. Аналогично за конечное число шагов мы докажем, что $w'_{k_s}\to 0$ в $L_2^m(l\tau,L)$ для любого $l\in\mathbb{N}$ такого, что $2\tau\leqslant l\tau<L$, где $L=\min\{(l+1)\tau, T-M\tau\}$. Таким образом, $w_0\in \mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)$ и $w_0 = \mathrm{const}\neq 0$. Мы получили противоречие, которое доказывает лемму 4.1. □

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие леммы* 4.1. *Тогда для всех* $w\in\widetilde{W}$

$$J(w)\geqslant c_1||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{4.4}$$

где $c_1>0$ — *постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\det\widetilde{A}_0(t)\neq 0$.

1. Предположим противное: неравенство (4.4) не выполняется. Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ существует $w_k\in\widetilde{W}$ такое, что

$$J(w_k)\leqslant \frac{1}{k}||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что $||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}=1$. Тогда мы имеем

$$J(w_k)\leqslant\frac{1}{k}. \tag{4.5}$$

Введём оператор $R_1:\widetilde{L}\to L_2^n(0,T-M\tau)$ по формуле

$$(R_1v)(t)=\sum_{k=0}^{M}B_k(t)v(t-k\tau). \tag{4.6}$$

Из неравенства

$$\alpha^2\leqslant 2(\alpha+\beta)^2+2\beta^2 \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}),$$

леммы 4.1 и ограниченности оператора $R_1:\widetilde{L}\to L_2^n(0,T-M\tau)$ для любого $v\in\widetilde{W}$ мы получим

$$c_0||v||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\leqslant J_0(v)\leqslant 2J(v)+2\int\limits_0^{T-M\tau}|(R_1v)(t)|^2dt\leqslant 2J(v)+k_1||v||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)}, \tag{4.7}$$

где $c_0,k_1>0$ — постоянные, не зависящие от v.

В силу компактности оператора вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0,T-M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой вектор-функции w_0 в пространстве $L_2^n(0,T-M\tau)$. Таким образом, из (4.5), (4.7) следует, что

$$c_0||w_{k_m}-w_{k_l}||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\leqslant 2J(w_{k_m}-w_{k_l})+k_1||w_{k_m}-w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{k_m}+\frac{4}{k_l}+k_1||w_{k_m}-w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)}\to 0 \quad \text{при} \quad l,m\to\infty.$$

Следовательно, $w_{k_m}\to w_0$ в $\widetilde{W}$ и $||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}=1$. Поэтому в силу (4.5) мы имеем

$$J(w_0)=\int\limits_0^{T-M\tau}\left|\sum_{m=0}^{M}A_m(t)w_0'(t-m\tau)+\sum_{m=0}^{M}B_m(t)w_0(t-m\tau)\right|^2dt=0,$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)w_0'(t-m\tau)+\sum_{m=0}^{M} B_m(t)w_0(t-m\tau)=0, \quad t\in(0,T-M\tau). \tag{4.8}$$

Поскольку $w_0\in\widetilde{W}$, вектор-функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t)=0, \quad t\in[-M\tau,0]. \tag{4.9}$$

Тогда, если $0<t\leqslant\tau$, система уравнений (4.8) примет вид

$$\widetilde{A}_0(t)w_0'(t)+\widetilde{B}_0(t)w_0(t)=0, \tag{4.10}$$

при этом в силу (4.9)

$$w_0(0)=0,$$

где $\widetilde{B}_0(t)$ — матрица порядка $m\times m$, полученная из матрицы $B_0(t)$ вычеркиванием последних $(n-m)$ строк.

Поскольку по условию $\det\widetilde{A}_0(t)\neq 0$, мы имеем

$$w_0(t)=0, \quad t\in[0,\tau]. \tag{4.11}$$

В силу (4.9), (4.11) для $\tau<t\leqslant 2\tau$ система уравнений (4.8) примет вид (4.10), при этом в силу (4.11) $w_0(\tau)=0$. Решая полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуинтервале $(\tau,2\tau]$, имеем $w_0(t)=0$, $t\in(\tau,2\tau]$, и т. д.

Таким образом, $w_0(t)\equiv 0$ при $t\in[0,T-M\tau]$. Это противоречит равенству $||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}=1$. □

Теорема 4.1. *Пусть существует минор m-ого порядка матрицы $A_0(t)$, который не равен 0 при $t\in\mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi\in W_2^{1,m}(-M\tau,0)$ существует единственное обобщенное решение краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3) $y\in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$, при этом*

$$||y||_{W_2^{1,m}(-M\tau,T)}\leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}, \tag{4.12}$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{если} \quad -M\tau\leqslant t\leqslant 0;\\ 0, & \text{если} \quad T-M\tau\leqslant t\leqslant T;\\ \varphi(0)-\dfrac{\varphi(0)t}{T-M\tau}, & \text{если} \quad 0<t<T-M\tau.\end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi\in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$. Кроме того, в силу непрерывности оператора вложения $W_2^1(-M\tau,T)$ в $C[-M\tau,0]$ имеем

$$||\Phi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,T)}\leqslant k_1||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}, \tag{4.13}$$

где $k_1>0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Пусть $x=y-\Phi$, тогда $x\in\widetilde{W}$. Интегральное тождество (3.3) примет вид

$$B(\Phi,v)+B(x,v)=0, \quad v\in\widetilde{W}. \tag{4.14}$$

Поскольку $B(v,v)=J(v)$, $v\in\widetilde{W}$, по лемме 4.2 в пространстве $\mathring{W}_2^1(0,T-M\tau)$ мы можем ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x,v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)}=B(x,v). \tag{4.15}$$

Следовательно, тождество (4.14) может быть записано в виде

$$B(\Phi,v)+(x,v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)}=0. \tag{4.16}$$

Для фиксированного $\Phi \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ функционал $B(\Phi, v)$ линеен по $v \in \widetilde{W}$. Используя неравенство Коши—Буняковского и неравенства (4.13), (4.4), мы получаем

$$\begin{aligned} |B(\Phi, v)| &\leqslant k_2||\Phi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,T)}||v||_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \leqslant \\ &\leqslant k_3||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}||v||_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \leqslant k_4||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}||v||'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

где $k_2, k_3, k_4 > 0$ — постоянные, не зависящие от φ и v.

Таким образом, при фиксированном Φ функционал $B(\Phi, v)$ ограничен по v на $\widetilde{W}$. В силу неравенства (4.17) норма функционала $B(\Phi, v)$ на $\mathring{W}_2^{1,m}(0, T - M\tau)$ не превышает $k_4||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}$. Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, существует функция $F \in \widetilde{W}$ такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)}$$

и

$$||F||'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \leqslant k_4||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}. \tag{4.18}$$

Эта функция единственна. Таким образом, тождество (4.16) можно записать в виде

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} + (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} = 0.$$

Следовательно, задача (3.7), (2.2), (2.3) имеет единственное обобщенное решение $y = \Phi - F$, при этом в силу (4.13) и (4.18) выполняется неравенство (4.12). Это доказывает теорему. $\square$

Идея доказательства теоремы 3.1 состоит по существу в сведении однородной системы дифференциально-разностных уравнений (3.7) с неоднородными краевыми условиями (2.2) и однородными условиями (2.3) к неоднородной системе дифференциально-разностных уравнений с однородными краевыми условиями. Таким образом, возникает вопрос о построении соответствующего неограниченного оператора, действующего в пространстве $\widetilde{L}$, и изучении его свойств.

Пусть $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ — неограниченный оператор, заданный по формуле:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_R y)(t) = &-\left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau)\right)' + \\ &+ \sum_{l,k=0}^{M}\{B_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) - \\ &- \left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\right)' + \\ &+ \sum_{l,k=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\} \ (t \in (0, T-M\tau)) \end{aligned} \tag{4.19}$$

при $y \in D(\mathcal{A}_R)$, где

$$D(\mathcal{A}_R) = \left\{ y \in \widetilde{W} : \sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) \in W_2^{1,m}(0, T-M\tau) \right\},$$

см. условие (3.6).

Обозначим через A_R сужение оператора $\mathcal{A}_R$ на $\dot{C}^{\infty,m}(0, T - M\tau)$, т. е. $A_R : \widetilde{L} \supset D(A_R) \to \widetilde{L}$ есть неограниченный оператор, заданный следующим образом: $A_R y = \mathcal{A}_R y$ при $y \in D(A_R) := \dot{C}^{\infty,m}(0, T - M\tau)$.

Теорема 4.2. *Оператор $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ является самосопряженным фридрихсовым расширением оператора A_R с нижней гранью $c_{\mathcal{A}_R} \geqslant c_1 > 0$, где c_1 — постоянная из неравенства* (4.4).

Доказательство.

1. Докажем, что оператор A_R симметрический, т. е. $(A_Rv, w)_{\widetilde{L}} = (v, A_Rw)_{\widetilde{L}}$ для любых $v, w \in D(A_R)$.

Действительно, интегрируя по частям выражение:

$$-\int\limits_0^{T-M\tau} \left\{ \sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)v'(t+(l-k)\tau))' \right\}^T w(t)dt,$$

получим

$$(A_Rv, w)_{\widetilde{L}} = B(v, w) = \sum_{l,k=0}^{M} B_{k,l}(v, w), \tag{4.20}$$

где

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v, w) = \int\limits_0^{T-M\tau} &\{-[A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)v'(t+(l-k)\tau)]^T \times \\ &\times w'(t) + [B_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)v'(t+(l-k)\tau)]^T w(t) - \\ &- [A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)v(t+(l-k)\tau))']^T w(t) + \\ &+ [B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)v(t+(l-k)\tau)]^T w(t)\}dt, \end{aligned} \tag{4.21}$$

см. (3.4).

Сделаем в выражении для $B_{k,l}(v, w)$ замену переменной $\xi = t+(l-k)\tau$. Тогда из (4.21) следует, что

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v, w) = \int\limits_0^{T-M\tau} &\{(v'(\xi))^T(A_k^T(\xi+k\tau)A_l(\xi+k\tau)w'(\xi+(k-l)\tau)) + \\ &+ (v'(\xi))^T(A_k^T(\xi+k\tau)B_l(\xi+k\tau)w(\xi+(k-l)\tau)) - \\ &- (v(\xi))^T(B_k^T(\xi+k\tau)A_l(\xi+k\tau)w'(\xi+(k-l)\tau)) + \\ &+ (v(\xi))^T(B_k^T(\xi+k\tau)B_l(\xi+k\tau)w(\xi+(k-l)\tau))dt. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной t, полагая $t = \xi$, и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v, w) = \int\limits_0^{T-M\tau} &(v(t))^T\{-[A_k^T(t+k\tau)A_l(t+k\tau)w'(t+(k-l)\tau)]' - \\ &- (A_k^T(t+k\tau)B_l(t+k\tau)w(t+(k-l)\tau)]' + \\ &+ [B_k^T(t+k\tau)A_l(t+k\tau)w'(t+(k-l)\tau)] + \\ &+ [B_k^T(t+k\tau)B_l(t+k\tau)w(t+(k-l)\tau)\}dt. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Суммируя левые и правые части (4.22) по k, l и меняя k, l местами, получим равенство $(A_Rv, w)_{\widetilde{L}} = (v, A_Rw)_{\widetilde{L}}$, для любых $v, w \in D(A_R)$.

2. Рассмотрим теперь квадратичную форму $(A_Rv, v)_{\widetilde{L}}$, $v \in D(A_R)$.

В силу (4.20)

$$(A_Rv, v)_{\widetilde{L}} = B(v, v) = J(v), \quad v \in D(A_R).$$

Из леммы 4.2 следует, что

$$(A_Rv, v)_{\widetilde{L}} \geqslant c_1 ||v||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}, \quad v \in D(A_R). \tag{4.23}$$

3. Из теоремы 2 в [6, гл. 12, п. 5] и следствия 3 в [6, гл. 12, п. 5], а также симметричности оператора A_R и неравенства (4.23) вытекает справедливость теоремы 4.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адхамова А. Ш.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — *68*, № 1. — С. 14–24.
2. *Адхамова А. Ш.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием нейтрального типа на всем интервале// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 1. — С. 1–17.
3. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 547–556.
4. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа// Докл. РАН. — 2020. — *490*, № 1. — С. 81–84.
5. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа// Дифф. уравн. — 2022. — *58*, № 6. — С. 747–755.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы, Т. 2. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
9. *Леонов Д. Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 28–37.
10. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
11. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
12. *Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L.* Damping problem for multidimensional control system with delays// Distrib. Comput. Commun. Networks. — 2016. — *678*. — С. 612–623.
13. *Banks H. T., Kent G. A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// SIAM J. Control. — 1972. — *10*, № 4. — С. 567–593.
14. *Kent G. A.* A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 4. — С. 565–570.
15. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Ш. Адхамова
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: adkhamova_ash@pfur.ru

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: alskubachevskii@yandex.ru

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200
EDN: XXWMID

Damping Problem for Control System with Delay with Different Number of Inputs and Outputs

A. Sh. Adkhamova, A. L. Skubachevskii

Abstract. We consider the damping problem for a nonstationary control system described by a system of differential-difference equations of neutral type with smooth matrix coefficients and several delays. A connection has been established between the variational problem corresponding to the problem of calming a system with delay and the boundary value problem for a system of second-order differential equations. A priori estimates of solutions are obtained. A theorem on the solvability of the considered boundary value problem is proved.

Keywords: differential-difference equation of neutral type, control system with delay, damping problem, variational problem.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 24-11-00073, https://rscf.ru/project/24-11-00073/.

For citation: A. Sh. Adkhamova, A. L. Skubachevskii, "Damping Problem for Control System with Delay with Different Number of Inputs and Outputs," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 189–200. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova, "Gladkost' resheniy zadachi ob uspokoenii nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem" [Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 1, 14–24 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova, "Gladkost' resheniy zadachi ob uspokoenii nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem neytral'nogo tipa na vsem intervale" [Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay of neutral type on the whole interval], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 1–17 (in Russian).
3. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem" [On one damping problem for a nonstationary control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
4. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral'nogo tipa" [On damping of a control system with aftereffect of neutral type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **490**, No. 1, 81–84 (in Russian).
5. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob odnoy kraevoy zadache dlya sistemy differentsial'no-raznostnykh uravneniy zapazdyvayushchego tipa" [On one boundary-value problem for a system of differential-difference equations of retarded type], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 6, 747–755 (in Russian).
6. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. II. Spektral'naya teoriya. Samosopryazhennye operatory v gil'bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).

7. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
8. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [About positional modeling in dynamic systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
9. D. D. Leonov, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
10. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On stabilization of controllable systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
12. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Damping problem for multidimensional control system with delays,” *Distrib. Comput. Commun. Networks*, 2016, **678**, 612–623.
13. H. T. Banks and G. A. Kent, “Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space,” *SIAM J. Control*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
14. G. A. Kent, “A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

A. Sh. Adkhamova
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `adkhamova_ash@pfur.ru`

A. L. Skubachevskii
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `alskubachevskii@yandex.ru`