Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 173–187
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187
EDN: XLJEFP

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. М. Ситник[1], **М. В. Половинкина**[2], **И. П. Половинкин**[3,1]

[1] *Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия*
[2] *Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия*
[3] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

Аннотация. Излагаются результаты, связанные с решением проблемы о наилучшем восстановлении решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с B-эллиптическим оператором Лапласа—Бесселя по пространственным переменным по точно или приближенно известному конечному набору температурных профилей.

Ключевые слова: оператор Лапласа—Бесселя, оптимальное восстановление, преобразование Фурье—Бесселя, уравнение теплопроводности, сингулярное уравнение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *С. М. Ситник, М. В. Половинкина, И. П. Половинкин.* О восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 173–187. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187

1. Введение

Известно, что распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,t),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots \partial^2/\partial x_n^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$.

Авторы работы [12] поставили следующую задачу. Пусть известны температурные распределения $u(\cdot,t_1),\ldots,u(\cdot,t_p)$ в моменты времени $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$, заданные приближенно. Точнее, мы знаем такие функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, что $\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \varepsilon_j$, где $\varepsilon_j > 0$, $j = 1,\ldots,p$. Для каждого набора таких функций мы хотим найти функцию в $L_2(\mathbb{R}^N)$, которая наилучшим образом аппроксимирует реальное распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ в фиксированный момент времени τ в некотором смысле. В работе [13] рассматривалась задача о восстановлении температуры трубы по неточным измерениям, тесно связанная с описанной выше.

Мы исследуем аналогичную задачу для уравнения сингулярного теплового типа с оператором Бесселя [4–11,16,17,19–21]. Особенности вышеуказанного типа возникают в моделях математической физики в таких случаях, когда характеристики сред (например, характеристики диффузии или характеристики теплопроводности) имеют вырожденные степенные неоднородности. Кроме того, к таким уравнениям приводят ситуации, когда исследуются изотропные диффузионные процессы с осевой или сферической симметрией.

Следует отметить тесную связь рассматриваемой задачи с задачей восстановления степеней оператора Лапласа по неполному спектру, рассмотренной в работах [14, 15], результаты которых перенесены на случай оператора Лапласа–Бесселя в [22, 24].

2. Необходимые сведения

Пусть $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x''),\ x'=(x_1, \dots, x_n),\ x''=(x_{n+1}, \dots, x_N),\ x_1>0, \dots, x_n>0\}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\nu_\kappa = (\gamma_\kappa - 1)/2$, $(x')^\gamma = \prod\limits_{\kappa=1}^{n} x_\kappa^{\gamma_\kappa}$, $\gamma_\kappa > 0$, $\kappa = 1, \dots, n$. Через Ω^+ будем обозначать область, прилегающую к гиперплоскостям $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+, расположенной в части пространства $\mathbb{R}^+_N$, и Γ_0, принадлежащей гиперплоскостям $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

Через $L_p^\gamma(\Omega^+)$ будем обозначать линейное пространство функций, для которых

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \left(\int\limits_{\Omega^+} |f(x)|^p \ (x')^\gamma \, dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — объединение множества Ω^+ и множества Ω^-, полученного из Ω^+ симметрией относительно пространства $x' = 0$.

Пусть Ω^+_ε — прилегающая к границе Γ_0 внутренняя подобласть области Ω^+, все точки которой находятся на расстоянии более чем ε от части границы Γ^+ области Ω^+. Тогда область Ω^+_ε будем называть *симметрично внутренней* (*s-внутренней*) подобластью области Ω^+.

Через $L^\gamma_{p,loc}(\Omega^+)$ будем обозначать линейное пространство функций, для которых

$$\int\limits_{\Omega^+_\varepsilon} |f(x)|^p \ (x')^\gamma \, dx < +\infty$$

для любой s-внутренней подобласти Ω^+_ε области Ω^+.

Через $\mathcal{D}_{ev}(\Omega^+)$ $(\mathcal{E}_{ev}(\Omega^+))$ будем обозначать множество всех сужений четных по переменным x' функций из пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ (пространства $\mathcal{E}(\Omega)$) на множество Ω^+. Топология в пространстве $\mathcal{D}_{ev}(\Omega^+)$ (в пространстве $\mathcal{E}_{ev}(\Omega^+)$) индуцирована топологией пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ (пространства $\mathcal{E}(\Omega)$). По определению $\mathcal{D}_{ev} = \mathcal{D}_{ev}(R^N_+)$. Через $\mathcal{S}_{ev}$ обозначим линейное пространство функций $\varphi(x) \in C^\infty_{ev}(R^N_+)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Топология в $\mathcal{S}_{ev}$ вводится таким же образом, как и в пространстве $\mathcal{S}$ (см. [3, 8]). Сопряженное к $\mathcal{D}_{ev}(\Omega^+)$ $(\mathcal{E}_{ev}(\Omega^+),\ \mathcal{S}_{ev})$ пространство со своей слабой топологией будем обозначать $\mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$ $(\mathcal{E}'_{ev}(\Omega^+),\ \mathcal{S}'_{ev})$. Имеют место следующие соотношения: $\mathcal{D}_{ev} \subset \mathcal{S}_{ev} \subset \mathcal{S}'_{ev} \subset \mathcal{D}'_{ev}$.

Действие функционала (распределения, обобщенной функции) f на пробную (основную) функцию φ во всех трех случаях будем обозначать как

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle_\gamma = \langle f(x), \varphi(x) \rangle . \tag{2.1}$$

Индекс γ иногда опускается, если это не вызывает недоразумений.

Будем отождествлять каждую функцию $f(x) \in L^\gamma_{1,loc}(\Omega^+)$ с функционалом $f \in \mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$, действующим по формуле

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_{\Omega^+} f(x)\varphi(x) \ (x')^\gamma \, dx, \tag{2.2}$$

который мы будем называть *регулярным*. Все остальные функционалы из пространства $\mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$ будем называть *сингулярными*. Однако, хотя на сингулярные функционалы нельзя распространить равенство (2.2), следуя [2], кроме обозначения (2.1), можно для всех функционалов (в том числе и сингулярных) использовать обозначение (2.2).

Важным примером сингулярного функционала в $\mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$ является весовая *δ-функция* $\delta_\gamma(x)$, которая определяется равенством

$$\langle \delta_\gamma(x),\ \varphi \rangle_\gamma = \varphi(0).$$

Смешанный обобщенный сдвиг определим формулой

$$T^y f(x) = \prod_{i=1}^{n} T^{y_i}_{x_i} f(x', x'' - y''),$$

где каждый из обобщенных сдвигов $T^{y_i}_{x_i}$ определен по формуле (см. [10])

$$(T^{y_i}_{x_i} f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha}, x_{i+1}, \ldots, x_N\right) \sin^{\gamma_i - 1}\alpha \, d\alpha, \quad (2.3)$$

$i = 1, \ldots, n$, а произведение $\prod\limits_{k=1}^{n} T^{y_k}_{x_k}$ понимается как произведение (суперпозиция) операторов.

Обобщенная свертка функций $f,\ g \in L_p^\gamma(R_N^+)$ определяется формулой

$$(f * g)_\gamma(x) = \int\limits_{R_N^+} f(y) T^y_x g(x) (y')^\gamma dy. \quad (2.4)$$

Если $f \in \mathcal{D}'_{ev},\ g \in \mathcal{E}'_{ev}$, то *обобщенную свертку* $(f * g)_\gamma$ таких распределений определим равенством

$$\langle (f * g)_\gamma(x), \varphi(x) \rangle_\gamma = \langle f(y), \langle g(x), T^y_x \varphi(x) \rangle_\gamma \rangle_\gamma,\ \varphi(x) \in \mathcal{D}_{ev}. \quad (2.5)$$

j-функция Бесселя порядка ν определяется формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{z^\nu} J_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m}\, m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — *гамма-функция Эйлера*,

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}\, m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

— *функция Бесселя* первого рода порядка ν.

Прямое $F_{B,\gamma} = F_B = F_\gamma$ и обратное $F^{-1}_{B,\gamma} = F^{-1}_B = F^{-1}_\gamma$ смешанные *преобразования Фурье—Бесселя* определим формулами

$$F_{B,\gamma}[\varphi(x', x'')](\xi) = \int\limits_{R_N^+} \varphi(x) \prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix''\cdot\xi''} (x')^\gamma \, dx =$$

$$= (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k+1) F^{-1}_{B,\gamma}[\psi(x', -x'')](\xi), \quad (2.6)$$

где

$$x' \cdot \xi' = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n, \quad x'' \cdot \xi'' = x_{n+1}\xi_{n+1} + \ldots + x_N\xi_N, |\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n,$$

Для преобразования Фурье—Бесселя справедлива *формула Парсеваля—順Планшереля* (см. [6]):

$$\|\varphi\|_{L_2^\gamma} = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k+1) \|\widehat{\varphi}\|_{L_2^\gamma}, \quad \widehat{\varphi} = F_B[\varphi].$$

На функциях из $S_{ev}(R_+^N)$ преобразование Фурье—Бесселя определено и обратимо (см. [6]).

Далее иногда будем пользоваться обозначением

$$\mathbf{\Pi} = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k+1). \quad (2.7)$$

B-эллиптический оператор Δ_B (термин и обозначения введены И. А. Киприяновым [7]), называемый также *оператором Лапласа—Бесселя*, определяется формулой

$$\Delta_B u = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} B_{x_k} u + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \quad (2.8)$$

где $B_{x_k} = B_{x_k,\gamma_k}$ — *оператор Бесселя*, действующий по переменной x_k по формуле

$$B_{x_k}u = B_{x_k,\gamma_k}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} = x_k^{-\gamma_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_k^{\gamma_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \tag{2.9}$$

Отметим также полезные соотношения, в которые входят преобразование Фурье—Бесселя и оператор обобщенного сдвига (также см. [6]).

$$F_B\left[T_x^y\varphi(x)\right](\xi) = \prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(\xi_k y_k)e^{-iy''\dot{\xi}''}F_B[\varphi(x)](\xi), \tag{2.10}$$

$$T_x^y F_B\left[\psi(\xi)\right](x) = F_B\left[\prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(\xi_k y_k)e^{iy''\dot{\xi}''}\psi(\xi)\right](x). \tag{2.11}$$

$$T_x^y\delta_\gamma(x) = \delta_\gamma(y), \tag{2.12}$$

$$F_B\left[\Delta_B u(\cdot)\right](\xi) = -|\xi|^2 F_B\left[u(\cdot)\right](\xi). \tag{2.13}$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_B u, \quad x \in \mathbb{R}_+^N,\ t > 0, \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N. \tag{3.2}$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$. Единственное решение этой задачи для случая $N = n = 1$ было получено в [4]. Оно выражается следующей формулой, обобщающей хорошо известную формулу Пуассона:

$$u(x,t) = P_t\, u_0(\cdot)(x,t) = \frac{1}{2tx^\nu}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \eta^{\nu+1}\, u_0(\eta)\, I_\nu\left(\frac{\eta x}{2t}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2+x^2}{4t}\right)d\eta, \tag{3.3}$$

где

$$I_\nu\left(z\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(m+\nu+1)}$$

— *модифицированная функция Бесселя* первого рода порядка ν, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. При $N \geqslant n \geqslant 1$ явное представление единственного решения задачи (3.1)-(3.2) имеет вид

$$u(x,t) = P_t\, u_0(\cdot)(x,t) =$$
$$= \frac{1}{2^N\pi^{(N-n)/2}t^{(N+n)/2}x^\nu}\int\limits_{\mathbb{R}_+^N}\exp\left(-\frac{|x-\eta|^2 - 2x''\cdot\eta''}{4t}\right)\prod_{\kappa=1}^{n}\left(\eta_\kappa^{\nu_\kappa+1}\ I_{\nu_\kappa}\left(\frac{\eta_\kappa x_\kappa}{2t}\right)\right)u_0(\eta)\,d\eta. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) может быть получена с помощью применения преобразования Фурье—Бесселя. Однако нет смысла приводить здесь метод получения этой формулы, поскольку в работе [21] получена более общая формула для дифференциально-разностного уравнения.

Поставим следующую задачу. Пусть функции $y_j(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ известны в моменты $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$ и

$$\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \varepsilon_j,\ j = 1,\ldots,p,$$

где $\varepsilon_j > 0,\ j = 1,\ldots,p$. Требуется каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в $\mathbb{R}_+^N$ в фиксированный момент времени τ. Для случая $N = n = 1$ эта задача рассмотрена в [23]. Здесь мы полагаем $N \geqslant n \geqslant 1$.

Следуя [12], любое отображение $m : L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N) \times \cdots \times L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N) \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ мы называем *методом восстановления* (температуры в $\mathbb{R}_+^N$ в момент τ согласно этой информации). Значение

$$e(\tau,\overline{\varepsilon},m) = \sup_U \|u(\cdot,\tau) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)},$$

где $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot))$, $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$,

$$U = \{(u_0(\cdot), \overline{y}(\cdot)) : u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N),\ \overline{y}(\cdot) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p,\quad \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \varepsilon_j,\ j = 1, \dots, p\},$$

называется *ошибкой* этого метода. Значение

$$E(\tau, \overline{\varepsilon}) = \inf_{m:(L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} e(\tau, \overline{\varepsilon}, m)$$

называется *ошибкой оптимального восстановления.* Метод $\widehat{m}$, для которого

$$E(\tau, \overline{\varepsilon}) = e(\tau, \overline{\varepsilon}, \widehat{m}),$$

называется *оптимальным методом восстановления.*

4. Решение задачи

Пусть $P_t : L_2^\gamma(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ — оператор, определенный формулой (3.4):

$$P_t u_0(\cdot)(x,t) = \frac{1}{2^N \pi^{(N-n)/2} t^{(N+n)/2} x^\nu} \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} u_0(\eta) \exp\left(-\frac{|x-\eta|^2 - 2x'' \cdot \eta''}{4t}\right) \prod_{\kappa=1}^{n} \left(\eta_\kappa^{\nu_\kappa+1} I_{\nu_\kappa}\left(\frac{\eta_\kappa x_\kappa}{2t}\right)\right) d\eta,$$

$t > 0$ — фиксированное значение, P_0 — тождественный оператор.

Пусть $\tau \geqslant 0$. Рассмотрим следующую задачу.

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \longrightarrow \max, \tag{4.1}$$

$$\|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, p,\ u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N). \tag{4.2}$$

Функция, удовлетворяющая условию (4.2), называется *допустимой функцией* задачи (4.1)-(4.2).

Пусть S означает верхнюю границу $\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)}$ с условиями (4.2).

Лемма 4.1.

$$E(\tau, \overline{\varepsilon}) \geqslant S.$$

Доказательство. Пусть $\overline{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (4.1)-(4.2). Тогда $-\overline{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (4.1)-(4.2). Для всякого метода $m : (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$, имеем:

$$2\|P_\tau \overline{u}_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} = \|P_\tau \overline{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - P_\tau(-\overline{u}_0(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant$$

$$\leqslant \|P_\tau \overline{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} + \|m(0)(\cdot) - P_\tau(-\overline{u}_0(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N) \\ \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon_j,\ j=1,\dots,p}} \|P_\tau u_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant 2 \sup_U \|P_\tau u_0(\cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)}.$$

В левой части полученного неравенства мы переходим к верхней границе допустимых функций, а в правой — к нижней границе всех методов. Этот шаг завершает доказательство леммы. □

С помощью формулы 6.633 (4) из книги [18] легко убедиться в справедливости равенства

$$F_\gamma[P_t u_0(\cdot)](\xi) = \exp(-|\xi|^2 t) F_\gamma u_0(\xi).$$

Следовательно, по теореме Парсеваля—順 Саншереля для преобразования Фурье—Бесселя квадрат значения задачи (4.1)-(4.2) равен значению следующей задачи

$$: \frac{1}{\mathbf{\Pi}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} \xi^\gamma e^{-2|\xi|^2 \tau} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \, d\xi \longrightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\mathbf{\Pi}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} \xi^\gamma e^{-2|\xi|^2 t_j} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \varepsilon_j^2,\ j = 1, \dots, p. \tag{4.4}$$

Перейдем от задачи (4.3)-(4.4) к расширенной задаче (согласно терминологии [12]). Для этого заменим $\mathbf{\Pi}^{-1}\,|F_\gamma u_0(\xi)|^2\xi^{2\nu+1}\,d\xi$ на положительную меру $d\mu(\xi)$. В результате получим следующую задачу:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi) \longrightarrow \max, \tag{4.5}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}\,d\mu(\xi) \leqslant \varepsilon_j^2,\ j=1,\ldots,p. \tag{4.6}$$

Всякую меру, удовлетворяющую ограничениям (4.6), будем называть *допустимой* в задаче (4.5)-(4.6). Допустимую меру $d\widehat{\mu}(\xi)$, для которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\widehat{\mu}(\xi) = \max\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi), \tag{4.7}$$

где максимум берется по всем допустимым мерам, будем называть *решением* задачи (4.5)-(4.6).

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\lambda) = \lambda_0\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}\,d\mu(\xi) - \varepsilon_j^2\right),$$

где $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ — набор множителей Лагранжа. Расширенная проблема (4.5)-(4.6) была решена в [12]. Для полноты повествования нам нужно будет переписать это решение, слегка изменив конкретные значения в соответствии с нашими потребностями. На двумерной плоскости (t,y) построим множество

$$M = \mathrm{co}\left\{\left(t_j,\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_j}\right)\right) j=1,\ldots,p\right\} + \{(t,0): t\geqslant 0\},$$

где $\mathrm{co}\,A$ означает выпуклую оболочку множества A. Введем функцию $\theta(t)$ на луче $[0,+\infty)$ с помощью формулы

$$\theta(t)=\max\{y:(t,y)\in M\},$$

предполагая, что $\theta(t)=-\infty$, если $(t,y)\notin M$ при всех y. На луче $[t_1,+\infty)$ график функции $\theta(t)$ — направленная вверх выпуклая (вогнутая) ломаная линия. Пусть $t_1=t_{s_1}<t_{s_2}<\cdots<t_{s_\varrho}$ суть точки ее изломов. Очевидно, $\{t_{s_1}<t_{s_2}<\cdots<t_{s_\varrho}\}\subseteq\{t_1<t_2<\cdots<t_p\}$.

Нам нужно рассмотреть три случая.

(a) Пусть $\tau\geqslant t_1$, в то время как справа от τ имеется точка излома функции $\theta(t)$. Предположим, что $\tau\in[t_{s_j},t_{s_{j+1}})$. Пусть $d\widehat{\mu}(\xi)=x^\gamma T_\xi^{\xi_0}\delta_\gamma$, где параметры A и ξ_0 определяются из условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\widehat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2 t_k} = \varepsilon_k^2,\quad k=s_j,s_{j+1}. \tag{4.8}$$

Из условия (4.8) мы получим:

$$A=\varepsilon_{s_j}^{2t_{s_{j+1}}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}\varepsilon_{s_{j+1}}^{-2t_{s_j}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})},$$

$$|\xi_0|^2=\frac{\ln\varepsilon_{s_j}/\varepsilon_{s_{j+1}}}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}}=\frac{\ln(1/\varepsilon_{s_{j+1}})-\ln(1/\varepsilon_{s_j})}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}}.$$

Пусть $\widehat{\lambda}_0=-1$, $\widehat{\lambda}_k=0$, $k\neq s_j,\ s_{j+1}$. Чтобы найти числа λ_{s_j}, $\lambda_{s_{j+1}}$, сделаем некоторые приготовления. Пусть

$$f(v)=\lambda_0+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j e^{-2v(t_j-\tau)}.$$

Потребуем, чтобы $f(|\xi_0|^2) = f'(|\xi_0|^2) = 0$. Отсюда мы получаем систему линейных уравнений относительно λ_{s_j}, $\lambda_{s_{j+1}}$

$$\lambda_{s_j} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} = 1,$$
$$\lambda_{s_j}(t_{s_j}-\tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}}(t_{s_{j+1}}-\tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} = 0.$$

Решив эту систему, мы получаем

$$\lambda_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}}-\tau}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}} \left(\frac{\varepsilon_{s_{j+1}}}{\varepsilon_{s_j}}\right)^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})},$$
$$\lambda_{s_{j+1}} = \frac{\tau-t_{s_j}}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}} \left(\frac{\varepsilon_{s_j}}{\varepsilon_{s_{j+1}}}\right)^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}.$$

Для меры $d\widehat{\mu}(\xi)$ мы имеем:

$$\min_{d\mu(\cdot)\geqslant 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}), \tag{4.9}$$

$$\widehat{\lambda}_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \varepsilon_j^2\right) = 0,\ j=1,\dots,p. \tag{4.10}$$

Отсюда для всякой допустимой меры $d\mu(\xi)$

$$\widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu \geqslant \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu + \widehat{\lambda}_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu(\xi) - \varepsilon_j^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu} + \widehat{\lambda}_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \varepsilon_j^2\right) = \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}.$$

Разделив на $\widehat{\lambda}_0 < 0$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu \leqslant \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}. \tag{4.11}$$

Пусть

$$\rho(t) = \frac{\ln(1/\varepsilon_{s_{j+1}}) - \ln(1/\varepsilon_{s_j})}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}}(t-t_{s_j}) + \ln(1/\varepsilon_{s_j}).$$

Прямая $y=\rho(t)$ проходит через точки $(t_{s_j}, \ln(1/\varepsilon_{s_j}))$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln(1/\varepsilon_{s_{j+1}}))$ и лежит, по крайней мере, ниже графика функции $y=\theta(t)$. Для найденных значений A и $|\xi_0|^2$, мы имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2 t_i}\, d\widehat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2 t_i} = \varepsilon_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-t_i)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \varepsilon_{s_{j+1}}^{2(t_i-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} =$$
$$= e^{-2\rho(t_i)} \leqslant e^{-2\ln(1/\varepsilon_i)} = \varepsilon_i^2, \quad i=1,\dots,p.$$

Это означает, что $d\widehat{\mu}(\xi)$ является допустимой мерой в расширенной задаче (4.5)-(4.6) и является ее решением. Если мы подставим $d\widehat{\mu}(\xi)$ в функционал, определенный в (4.5), мы получим значение задачи (4.5)-(4.6), которое также является решением задачи (4.3)-(4.4):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2\tau} = \varepsilon_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \varepsilon_{s_{j+1}}^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} = e^{-2\rho(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}.$$

Это означает, что значение задачи (4.1)-(4.2) равно $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(b) Пусть $\tau \geqslant t_{s_\varrho}$. Если график функции $y = \theta(t)$ представляет собой прямую линию, то $t_{s_\varrho} = t_1$. На этот раз положим $\widehat{\lambda}_0 = -1$, $\widehat{\lambda}_{s_\varrho} = 1$, $\widehat{\lambda}_{s_j} = 0$, где $j \neq \varrho$, $d\widehat{\mu}(\xi) = x^\gamma \varepsilon_{s_\varrho}\delta_\gamma(\xi)$. Выполнение условия (4.10) совершенно очевидно. Кроме того, для всех $\xi \in \mathbb{R}^N_+$ выполняется неравенство

$$f(|\xi|^2) = -1 + e^{-2|\xi|^2(t_{s_\varrho}-\tau)} \geqslant 0$$

и имеет место равенство $f(0) = 0$. Следовательно, условие (4.9) также выполняется. На луче $[t_{s_\varrho}, +\infty)$ равенство $\theta(t) \equiv \ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})$ выполняется тождественно. Следовательно, $\ln(1/\varepsilon_j) \leqslant \ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})$, $j = 1, \ldots, p$. Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \varepsilon^2_{s_\varrho} = e^{-2\ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})}.$$

Таким образом, мера $d\widehat{\mu}(\xi)$ допустима в задаче (4.5)-(4.6) и является ее решением. Значение этой задачи вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2 \tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \varepsilon^2_{s_\varrho} = e^{-2\ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})} = e^{-2\theta(t)}.$$

Это снова означает, что решение проблемы (4.1)-(4.2) равно $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(c) Пусть $\tau < t_1$. Для произвольного $y_0 > 0$ существует прямая линия, заданная уравнением $y = at + b$, $a > 0$, разделяющая точку $(\tau, -y_0)$ и множество M. В то же время

$$-a\tau - y_0 \geqslant b \geqslant -at_j + \ln(1/\varepsilon_{s_j}),\ j = 1, \ldots, p.$$

Пусть $A = e^{-2b}$. Выберем $\xi_0 \in \mathbb{R}^N_+$, чтобы обеспечить $|\xi_0|^2 = a$. Тогда

$$Ae^{-2|\xi_0|^2 t_j} \leqslant \varepsilon_j^2,\ j = 1, \ldots, p.$$

Это значит, что мера $d\widehat{\mu}(\xi) = x^\gamma T_\xi^{\xi_0}\delta_\gamma(\xi)$ допустима в задаче (4.5)-(4.6) и $Ae^{-2|\xi_0|^2\tau} \geqslant e^{2y_0}$. В силу произвольности $y_0 > 0$ значение задачи (4.5)-(4.6), а вместе с ним и решение задачи (4.1)-(4.2) равно $+\infty$.

Во всех трех случаях, для всех $\tau \geqslant 0$, ошибка оптимального восстановления оценивается снизу $E(\tau, \overline{\varepsilon}) \geqslant e^{-\theta(\tau)}$.

Пусть $\tau \geqslant t_1$ и $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_p$ — множители Лагранжа из случаев (a), (b) для таких значений τ.

Лемма 4.2. *Пусть для множества функций $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ задача*

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j}u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \longrightarrow \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+), \tag{4.12}$$

имеет решение $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$. Тогда для любого $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ значение задачи

$$\|P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \widehat{u}_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \longrightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+), \tag{4.13}$$

$$\|P_{t_j}u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \sigma_j\ j = 1, \ldots, p, \tag{4.14}$$

не превосходит значения задачи

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \longrightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+), \tag{4.15}$$

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j}u_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j^2. \tag{4.16}$$

Доказательство. Равенство нулю дифференциала Фреше выпуклого гладкого целевого функционала из (4.12) в точке $\widehat{u}_0(\cdot)$, т. е. равенство

$$2\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} x^\gamma (P_{t_j}\widehat{u}_0(x) - y_j(x))P_{t_j}u_0(x)dx = 0, \tag{4.17}$$

является необходимым и достаточным условием для достижения минимума этого функционала на функции $\widehat{u}_0(\cdot)$. Принимая во внимание это равенство, легко получить, что

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}=\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}+\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Пусть функция $u_0(\cdot)$ действительна для задачи (4.13)-(4.14). Тогда

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}=\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\sigma_j.$$

Это означает, что функция $u_0(\cdot)-\widehat{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (4.15)-(4.16). Значение функционала (4.13) на функции $u_0(\cdot)$ равно значению функционала (4.15). □

Лемма 4.3. *Значения задач* (4.1)-(4.2) *и* (4.15)-(4.16) *при* $\sigma_j=\varepsilon_j$, $j=1,\dots,p$, *совпадают.*

Доказательство. С помощью равенства Парсеваля—Планшереля перейдем от задачи (4.15)-(4.16) к задаче

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi)\longrightarrow\max, \tag{4.18}$$

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2t_j}d\mu(\xi)\leqslant\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\varepsilon_j^2, \tag{4.19}$$

где

$$d\mu(\xi)=\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\,|F_\gamma u_0(\xi)|^2\xi^{2\nu+1}\,d\xi\geqslant 0.$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot),\nu)=\nu_0\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi)+\nu_1\left(\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2t_j}d\mu(\xi)-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\varepsilon_j^2\right),$$

где множество ν множителей Лагранжа теперь имеет вид $\nu=(\nu_0,\nu_1)$. Из того, что мера $d\widehat{\mu}(\xi)$, которая является решением проблемы (4.15)-(4.16), допустима в этой задаче, следует, что она также допустима в задаче (4.18)-(4.19). Пусть $\nu_0=\widehat{\nu}_0=-1$, $\nu_1=\widehat{\nu}_1=1$. Тогда

$$\min_{d\mu(\cdot)\geqslant 0}\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot),\widehat{\nu})=\mathcal{L}_1(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\nu})=\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda})=\min_{d\mu(\cdot)\geqslant 0}\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}), \tag{4.20}$$

где $\widehat{\nu}=(\widehat{\nu}_0,\widehat{\nu}_1)$; с учетом (4.10) мы имеем

$$\widehat{\nu}_1\left(\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2t_j}d\widehat{\mu}(\xi)-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\varepsilon_j^2\right)=0. \tag{4.21}$$

Это значит, что $d\widehat{\mu}(\xi)$ является решением задачи (4.18)-(4.19). Следовательно, значение этой задачи равно значению задачи (4.18)-(4.19). Отсюда следует, что возведенное в квадрат значение задачи (4.5)-(4.6) равно решению задачи (4.15)-(4.16). Следовательно, значения задач (4.5)-(4.6) и (4.15)-(4.16) совпадают. □

Сформулируем теперь и докажем основной результат.

Теорема 4.1. *Для любого* $\tau>0$ *равенство*

$$E(\tau,\overline{\varepsilon})=e^{-\theta(\tau)}$$

имеет место.

1. *Если* $0 \leqslant \tau < t_1$, *то* $\theta(\tau) = -\infty$.
2. *Если* $\tau = t_{s_j}$, $j = 1, \dots, \varrho$ *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой* $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, *является оптимальным.*
3. *Если* $\varrho \geqslant 2$, $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой*
$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (\Psi_{s_j} * y_{s_j})_\gamma(\cdot) + (\Phi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot), \tag{4.22}$$
где $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — *функции, образы Фурье—Бесселя которых имеют вид*
$$F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}} + (\tau - t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j} e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}, \tag{4.23}$$
$$F_\gamma \Phi_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j} e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}} + (\tau - t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j} e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}, \tag{4.24}$$
является оптимальным.
4. *Если* $\tau > t_{s_\varrho}$, *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой* $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_\varrho}} y_{s_\varrho}(\cdot)$, *является оптимальным.*

Доказательство. Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Выше было показано, что можно было бы выбрать набор множителей Лагранжа, в котором только множители $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ не равны нулю. Следовательно, проблема (4.12) принимает вид
$$\widehat{\lambda}_{s_j} \|P_{t_{s_j}} u_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \|P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \longrightarrow \min,$$
$$u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+).$$
Пусть $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, y(\cdot))$ — решение этой задачи. Тогда условие (4.17) выполнено. В образах Фурье—Бесселя это условие может быть записано в виде
$$\sum_{\kappa=j}^{j+1} \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \xi^\gamma (e^{-|\xi|^2 t_{s_\kappa}} F_\gamma \widehat{u}_0(\xi) - F_\gamma y_{s_\kappa}(\xi)) e^{-|\xi|^2 t_{s_\kappa}} F_\gamma u_0(\xi)\, d\xi = 0. \tag{4.25}$$

Пусть
$$F_\gamma \widehat{u}_0(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-|\xi|^2 t_{s_j}} F_\gamma y_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2 t_{s_{j+1}}} F_\gamma y_{s_{j+1}}}{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-2|\xi|^2 t_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2 t_{s_{j+1}}}}. \tag{4.26}$$
Тогда равенство (4.25) выполняется для всех $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$. Пусть для множества $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ функции $F_\gamma y_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, p$, финитны. Тогда функция (4.26) принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$. Тогда функция $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, y(\cdot))$, определенная формулой (4.26), также принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$ и является решением задачи (4.12). Финитные функции плотны в $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$. Следовательно, функции с финитными образами Фурье—Бесселя являются плотными в $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$.

Пусть функции $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ удовлетворяют неравенствам
$$\|P_{t_{s_j}} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \varepsilon_j,\ j = 1, \dots, p.$$
Выберем последовательность $\overline{y}^{(k)}(\cdot) = (y_1^{(k)}(\cdot), \dots, y_p^{(k)}(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$, $k \in \mathbb{N}$, для которой функции $F_\gamma y_j^{(k)}(\cdot)$, $j = 1, \dots, p$, финитны и $\|y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant 1/k$, $j = 1, \dots, p$, $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Существует решение $\widehat{u}_0(\cdot, y^{(k)}(\cdot))$ задачи (4.12). В силу неравенств
$$\|P_{t_j} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|P_{t_j} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} + \|y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \varepsilon_j + 1/k,\ j = 1, \dots, p,$$
функция $\widetilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (4.13)-(4.14) с $\sigma_j = \sigma_j(k) = \varepsilon_j + 1/k$. Пусть
$$a(k) = \sqrt{\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j^2(k) \Big/ \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \varepsilon_j^2}.$$

В силу леммы 4.2 значение задачи (4.13)-(4.14) не превышает значения задачи (4.15)-(4.16).

Произведем замену функции $u_0(\cdot)=a(k)v_0(\cdot)$ для задачи (4.15)-(4.16). Эта задача примет вид

$$a(k)\|P_\tau v_0(\cdot)-P_\tau\widehat{u}_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\longrightarrow\max,\quad u_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+),\tag{4.27}$$

$$\sum_{j=1}^p\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}v_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\sum_{j=1}^p\widehat{\lambda}_j\sigma_j^2.\tag{4.28}$$

Значение задачи (4.27)-(4.28) совпадает со значением задачи (4.1)-(4.2), умноженным на $a(k)$, и оно равно $a(k)e^{-\theta(\tau)}$. Поскольку функция $\widetilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (4.13)-(4.14), мы имеем:

$$\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-P_\tau\widehat{u}_0(\cdot,y^{(k)}(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant a(k)e^{-\theta(\tau)}.\tag{4.29}$$

Пусть $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — функции, образы Фурье—Бесселя которых имеют вид в соответствии с (4.23)–(4.24):

$$F_\gamma\Psi_{s_j}(\xi)=\frac{(t_{s_{j+1}}-\tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}}e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},$$

$$F_\gamma\Phi_{s_{j+1}}(\xi)=\frac{(\tau-t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j}e^{-|\xi|^2(\tau+t_{s_{j+1}}-2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}}.$$

Пусть $\tau\in(t_{s_j},t_{s_{j+1}})$. Образы Фурье—Бесселя (4.23) и (4.24) функций $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат пространству четных бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Следовательно, функции $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат этому пространству. В рассматриваемом случае мы определяем метод восстановления с использованием обобщенной свертки в соответствии с (4.22):

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=(\Psi_{s_j}*y_{s_j})_\gamma(\cdot)+(\Phi_{s_{j+1}}*y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot).$$

Тогда

$$F_\gamma\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi)=F_\gamma\Psi_{s_j}(\xi)F_\gamma y^{(k)}_{s_j}(\xi)+F_\gamma\Phi_{s_{j+1}}(\xi)F_\gamma y^{(k)}_{s_{j+1}}(\xi)=e^{-|\xi|^2\tau}F_\gamma\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi).\tag{4.30}$$

Это значит, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)=P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot).\tag{4.31}$$

Если $\tau=t_{s_j}$, включая случай $\tau=t_{s_\varrho}$, то

$$F_\gamma\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi)=F_\gamma y^{(k)}_{s_j}(\xi)=e^{-|\xi|^2\tau}F_\gamma\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi)=F_\gamma(P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot)))(\xi),$$

так что в случае (4.31) тоже верно.

Пусть снова функции $\widetilde{u}_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$, $\overline{y}(\cdot)=(y_1(\cdot),\ldots,y_p(\cdot))\in(L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ удовлетворяют неравенствам

$$\|P_{t_{s_j}}\widetilde{u}_0(\cdot)-y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\varepsilon_j,\ j=1,\ldots,p.$$

Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\\ &\leqslant\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}+\|\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\\ &\leqslant\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}+\|\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\\ &\leqslant a(k)e^{-\theta(\tau)}+\|\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot)-\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}.\end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу в $k\to\infty$, мы получаем

$$\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant e^{-\theta(\tau)}.$$

В этом неравенстве перейдем к верхней грани по всем $\widetilde{u}_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$ и $\overline{y}(\cdot)=(y_1(\cdot),\ldots,y_p(\cdot))\in(L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$, для которых $\|P_{t_{s_j}}\widetilde{u}_0(\cdot)-y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\varepsilon_j,\ j=1,\ldots,p$. Тогда мы получим $e(\tau,\overline{\varepsilon},\widehat{m})\leqslant e^{-\theta(\tau)}$. Учитывая нижнюю оценку, доказанную ранее, мы получаем

$$e^{-\theta(\tau)}\leqslant E(\tau,\overline{\varepsilon})\leqslant e(\tau,\overline{\varepsilon},\widehat{m})\leqslant e^{-\theta(\tau)},$$

из чего следует, что $E(\tau,\overline{\varepsilon})=e^{-\theta(\tau)}$, и что $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Пусть $\tau > t_{s_\varrho}$. Тогда $\widehat{\lambda}_{s_\varrho} = 1$, остальные множители Лагранжа равны нулю. Задача (4.12) примет вид

$$\|P_{t_{s_\varrho}}\widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_\varrho}(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \Longrightarrow \min .$$

Пусть для заданного множества $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ функции $F_\gamma y_j$, $j = 1, \ldots, p$, финитны. Тогда решение $\widetilde{u}_0(\cdot) = \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$ этой задачи существует и $F_\gamma \widetilde{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2 t_{s_\varrho}} F_\gamma y_{s_\varrho}$. Неравенство (4.29) в этом случае доказывается по-прежнему. Теперь мы определяем метод $\widehat{m}$ посредством равенства

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_\varrho}}. \tag{4.32}$$

Тогда

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_\varrho})} F_\gamma y_{s_\varrho}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau} F_\gamma \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Это означает, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) = P_\tau \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в предыдущем случае. □

5. Заключение

В настоящей работе мы перенесли на случай сингулярного уравнения теплопроводности результаты работы [12], применив методы, разработанные в статьях [1, 12–15]. В работах [1, 13] был модифицирован метод установления нижней оценки ошибки оптимального восстановления. Есть основания полагать, что этот метод также может быть перенесен на рассматриваемый случай сингулярного уравнения теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по ее неточным измерениям// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2020. — *60*, № 10. — С. 1711–1720.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958.
4. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя// Мат. сб. — 1955. — *36*, № 2. — С. 299–310.
5. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
6. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. МИАН. — 1967. — *89*. — С. 130–213.
7. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
8. *Киприянов И. А., Засорин Ю. В.* О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями// Дифф. уравн. — 1992. — *28*, № 3. — С. 452–462.
9. *Киприянов И. А., Куликов А. А.* Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя// Докл. АН СССР. — 1988. — *298*, № 1. — С. 13–17.
10. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.
11. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
12. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 5. — С. 37–54.
13. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Сивкова Е. О.* Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям// Тр. МИАН. — 2021. — *312*. — С. 216–223.
14. *Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 4. — С. 119–130.
15. *Сивкова Е. О.* Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье// Владикавказ. мат. ж. — 2012. — *14*, № 4. — С. 63–72.
16. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — Москва: Физматлит, 2019.
17. *Alzamili K., Shishkina E.* On a singular heat equation and parabolic Bessel potential// J. Math. Sci. — 2024. — DOI: 10.1007/s10958-024-06911-w.

18. *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Table of Integrals, Series, and Products. — Amsterdam, etc.: Academic Press, 2007.
19. *Matiychuk M. I.* Parabolic Singular Boundary-Value Problems [in Ukrainian]. — Kiev: Inst. Mat. NAN Ukr., 1999.
20. *Muravnik A. B.* Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2001. — *8*, № 3-4. — C. 353–363.
21. *Muravnik A. B.* Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2016. — *216*. — C. 345–496.
22. *Polovinkina M. V.* Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — C. 839–852.
23. *Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data// Bol. Soc. Mat. Mexicana. — 2023. — *29*, № 41. — DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
24. *Sitnik S. M., Fedorov V. E., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* On recovery of the singular differential Laplace–Bessel operator from the Fourier–Bessel transform// Mathematics. — 2023. — *11*. — DOI: 10.3390/math11051103.

Ситник Сергей Михайлович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия
E-mail: `sitnik@bsu.edu.ru`

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: `polovinkina-marina@yandex.ru`

Половинкин Игорь Петрович
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия
E-mail: `polovinkin@yandex.ru`

UDC 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187
EDN: XLJEFP

On recovery of the solution to the Cauchy problem for the singular heat equation

S. M. Sitnik[1], M. V. Polovinkina[2], and I. P. Polovinkin[3,1]

[1] *Belgorod State National Research University ("BelGU"), Belgorod, Russia*
[2] *Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia*
[3] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

Abstract. We present the results related to the solution of the problem of the best recovery of the solution to the Cauchy problem for the heat equation with the B-elliptic Laplace–Bessel operator in spatial variables from an exactly or approximately known finite set of temperature profiles.

Keywords: Laplace–Bessel operator, optimal recovery, Fourier–Bessel transform, heat equation, singular equation.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: S. M. Sitnik, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, "On recovery of the solution to the Cauchy problem for the singular heat equation," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 173–187. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187

REFERENCES

1. E. V. Abramova, G. G. Magaril-Il'yaev, and E. O. Sivkova, "Nailuchshee vosstanovlenie resheniya zadachi Dirikhle dlya poluprostranstva po ee netochnym izmereniyam" [Best recovery of the solution of the Dirichlet problem in a half-space from inaccurate data], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2020, **60**, No. 10, 1711–1720 (in Russian).
2. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized Functions and Operations on Them], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
3. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsiy* [Spaces of Fundamental and Generalized Functions], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
4. Ya. I. Zhitomirskii, "Zadacha Koshi dlya sistem lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s differentsial'nymi operatorami tipa Besselya" [The Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with Bessel-type differential operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1955, **36**, No. 2, 299–310 (in Russian).
5. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, "Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy" [The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 2, 211–426 (in Russian).
6. I. A. Kipriyanov, "Preobrazovanie Fur'e—Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov" [Fourier–Bessel transforms and embedding theorems for weight classes], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **89**, 130–213 (in Russian).
7. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
8. I. A. Kipriyanov and Yu. V. Zasorin, "O fundamental'nom reshenii volnovogo uravneniya s mnogimi osobennostyami" [On the fundamental solution of the wave equation with many singularities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 3, 452–462 (in Russian).
9. I. A. Kipriyanov and A. A. Kulikov, "Teorema Peli—Vinera—Shvartsa dlya preobrazovaniya Fur'e—Besselya" [Paley–Wiener–Schwartz theorem for the Fourier–Bessel transform], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **298**, No. 1, 13–17 (in Russian).
10. B. M. Levitan, "Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funktsiyam Besselya" [Expansion into Fourier series and integrals by Bessel functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
11. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nym uravneniyam s V-potentsial'nymi yadrami* [B-Hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of Kipriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-Potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
12. G. G. Magaril-Il'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal'noe vosstanovlenie resheniya uravneniya teploprovodnosti po netochnym izmereniyam" [Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2009, **200**, No. 5, 37–54 (in Russian).
13. G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, and E. O. Sivkova, "Optimal'noe vosstanovlenie temperatury truby po netochnym izmereniyam" [Optimal recovery of pipe temperature from inaccurate measurements], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2021, **312**, 216–223 (in Russian).
14. G. G. Magaril-Il'yaev and E. O. Sivkova, "Nailuchshee vosstanovlenie operatora Laplasa funktsii po ee netochno zadannomu spektru" [Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 4, 119–130 (in Russian).
15. E. O. Sivkova, "Ob optimal'nom vosstanovlenii laplasiana funktsii po ee netochno zadannomu preobrazovaniyu Fur'e" [On optimal recovery of the Laplacian of a function from its inaccurately given Fourier transform], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2012, **14**, No. 4, 63–72 (in Russian).
16. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya* [The Transmutation Operators Method for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moskva, 2019 (in Russian).

17. K. Alzamili and E. Shishkina, “On a singular heat equation and parabolic Bessel potential,” *J. Math. Sci.*, 2024, DOI: 10.1007/s10958-024-06911-w.
18. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Amsterdam, etc., 2007.
19. M. I. Matiychuk, *Parabolic Singular Boundary-Value Problems [in Ukrainian]*, Inst. Mat. NAN Ukr., Kiev, 1999.
20. A. B. Muravnik, “Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2001, **8**, No. 3-4, 353–363.
21. A. B. Muravnik, “Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2016, **216**, 345–496.
22. M. V. Polovinkina, “Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image,” *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 839–852.
23. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data,” *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 2023, **29**, No. 41, DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
24. S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, M. V. Polovinkina, and I. P. Polovinkin, “On recovery of the singular differential Laplace–Bessel operator from the Fourier–Bessel transform,” *Mathematics*, 2023, **11**, DOI: 10.3390/math11051103.

Sergey Mikhailovich Sitnik
Belgorod State National Research University (“BelGU”), Belgorod, Russia
E-mail: sitnik@bsu.edu.ru

Marina Vasilyevna Polovinkina
Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Igor Petrovich Polovinkin
Voronezh State University, Voronezh, Russia
Belgorod State National Research University (BelGU), Belgorod, Russia
E-mail: polovinkin@yandex.ru