Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 150–162
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.547.2
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162
EDN: YBRYQO

ОЦЕНКА СНИЗУ В СРЕДНЕМ МИНИМУМА МОДУЛЯ НА ОКРУЖНОСТЯХ ДЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НУЛЕВОГО РОДА

А. Ю. Попов[1,2], **В. Б. Шерстюков**[1,2]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

Аннотация. Статья написана по материалам совместного доклада авторов, сделанного ими на Шестой Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», посвященной столетию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. Для целой функции, представленной каноническим произведением нулевого рода с положительными корнями, доказан следующий результат. При любом $\delta \in (0, 1/3]$ минимум модуля такой функции превосходит в среднем максимум ее модуля, возведенный в степень $-1-\delta$, на любом отрезке, отношение концов которого равно $\exp(2/\delta)$. Основная теорема проиллюстрирована двумя примерами. Первый из них показывает, что вместо показателя $-1-\delta$ нельзя взять -1. Второй пример демонстрирует невозможность замены в теореме при малых δ величины $\exp(2/\delta)$ величиной $28/(15\delta)$.

Ключевые слова: целая функция, минимум модуля, максимум модуля.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Для цитирования: *А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков.* Оценка снизу в среднем минимума модуля на окружностях для целой функции нулевого рода// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 150–162. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162

1. Введение

Напомним теорему об оценке снизу минимума модуля целой функции порядка $\rho \in [0, 1]$ через степень максимума ее модуля. Обозначим

$$m(f; r) = \min_{|z|=r} |f(z)|, \qquad M(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|, \qquad r > 0.$$

Всюду в работе f — непостоянная целая функция.

Теорема 1.1. *Пусть $\rho \in [0, 1]$ и f — целая функция порядка ρ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $r_n \uparrow +\infty$, что справедливы соотношения*

$$m(f; r_n) > \Big(M(f; r_n)\Big)^{\cos(\pi\rho)-\varepsilon}, \qquad \ln r_{n+1} = O(\ln r_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Известно также более сильное утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть целая функция f имеет порядок $\rho \in [0,1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E = E_{f,\varepsilon} \subset (1,+\infty)$ положительной нижней логарифмической плотности, т. е.*

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{\ln R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dx}{x} > 0,$$

такое, что

$$m(f;r) > \Big(M(f;r)\Big)^{\cos(\pi\rho)-\varepsilon} \qquad \forall r \in E.$$

Свой окончательный облик теоремы 1.1 и 1.2 приобрели благодаря усилиям многих известных аналитиков (см. основополагающие работы [11, 12, 15, 16]). Эти теоремы в том или ином виде вошли в авторитетные руководства по теории аналитических функций [3, 4, 10, 13]. О развитии тематики можно узнать из обзоров [2, 14]. Много дополнительной информации содержится в недавних публикациях [6–9], где изложены свежие подходы к постановке задачи о связи минимума и максимума модуля целой функции и серия новых результатов.

Показатель $\cos(\pi\rho)$ является точным: на классе всех целых функций порядка ρ его нельзя заменить бо́льшим (каково бы ни было число $\rho \in [0,1]$), даже если в теореме 1.1 отказаться от ограничения $\ln r_{n+1} = O(\ln r_n)$, а в теореме 1.2 требовать лишь неограниченность множества E. Были построены примеры [12], показывающие, что последовательность r_n в теореме 1.1, вообще говоря, нельзя выбрать без больших лакун, т. е. добиться, например, асимптотик $\ln r_{n+1} \sim \ln r_n$ при $n \to \infty$.

Аналогичная ситуация в теореме 1.2: существуют такие функции f, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ дополнение $\mathbb{R}_+ \setminus E_{f,\varepsilon}$ содержит бесконечно много длинных отрезков вида $[R_n^{1-c}, R_n]$, $c > 0$. От подобных лакун нельзя избавиться, если даже, ограничившись функциями порядка $\rho \in (0,1)$, заменить показатель $\cos(\pi\rho) - \varepsilon$ меньшим числом -1. В подтверждение нами в заключительном разделе 4 (см. там пример 4.1) построен следующий пример.

Пусть $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная быстро растущая последовательность, удовлетворяющая условию

$$R_1 > 0, \qquad R_{n+1} \geqslant \exp(R_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Тогда для любого $\rho \in (0,1)$ существует целая функция g нормального типа при порядке ρ, все корни которой лежат на $\mathbb{R}_+$ и для которой справедливо такое предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \max\Big\{m(g;r)\,M(g;r) \;\Big|\; R_n^{1-\rho/2}\ln R_n \leqslant r \leqslant R_n\Big\} = 0. \tag{1.2}$$

Основным результатом статьи является следующее. Если мы хотим выполнения более слабой оценки минимума модуля через степень максимума модуля, меньшую -1, а именно

$$m(f;r_n) > M^{-1-\delta}(f;r_n), \qquad \delta > 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

то для любой целой функции f, являющейся бесконечным произведением нулевого рода с корнями на одном луче, требуемую последовательность радиусов окружностей $r_n \uparrow +\infty$ можно подобрать, например, так, чтобы действовало ограничение

$$r_{n+1} < r_n \exp\left(\frac{2}{\delta}\right) + 1, \qquad 0 < \delta \leqslant 1/3, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Точнее говоря, имеет место более сильный факт.

Теорема 1.3. *Пусть целая функция f является бесконечным произведением нулевого рода*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{\lambda_n}\Big), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.5}$$

где $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная числовая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty. \tag{1.6}$$

Тогда для любого $\delta \in (0, 1/3]$ *при выборе* $a = \exp(2/\delta)$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_R^{aR} \frac{\ln\bigl(m(f;t)\, M^{1+\delta}(f;t)\bigr)}{t^2}\, dt > 0 \qquad \forall R > 0. \tag{1.7}$$

Функции (1.5) с условием (1.6) обладают тем легко проверяемым, но важным свойством, что

$$m(f;r) \equiv \min_{|z|=r} |f(z)| = |f(r)|, \qquad M(f;r) \equiv \max_{|z|=r} |f(z)| = f(-r), \qquad r > 0. \tag{1.8}$$

Как видно из (1.7), для целых функций изучаемого класса при указанном в теореме 1.3 сочетании параметров δ, a на каждом интервале вида (R, aR), где $R > 0$, найдется точка r, в которой верна оценка снизу

$$m(f;r) > M^{-1-\delta}(f;r).$$

Это обеспечивает выполнение оценки (1.3) на некоторой последовательности окружностей радиусов $r_n \uparrow +\infty$ с ограничением (1.4). Действительно, точку r_1, в которой выполняется неравенство (1.3), возьмем на интервале $\bigl(1, \exp(2/\delta)\bigr)$, а если имеется точка r_n, в которой верно неравенство (1.3), то r_{n+1} берется на интервале $\bigl(r_n + \exp(-2/\delta),\, r_n \exp(2/\delta) + 1\bigr)$, отношение концов которого равно $\exp(2/\delta)$. Отделенность от нуля разности $r_{n+1} - r_n$ обеспечивает условие $r_n \uparrow +\infty$.

Мы докажем теорему 1.3 в разделе 3. Затем, в самом конце работы, будет построен пример, показывающий, что выбрать в теореме 1.3 величину $a = a(\delta)$, растущую слишком медленно — как $(28/15)\, \delta^{-1}$, при малых δ уже нельзя (см. пример 4.2 в разделе 4).

Начнем со вспомогательных утверждений.

2. Леммы о специальных интегралах

В дальнейшем потребуются интегралы

$$F(y) = \int\limits_0^y \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\, dt, \qquad F_1(y) = \int\limits_0^y \frac{t - \ln(t+1)}{t^2}\, dt,$$

рассматриваемые при $y \geqslant 0$. Они выражаются через элементарные функции по формулам

$$F(y) = \ln\frac{|y-1|}{y+1} - \frac{\ln|y^2-1|}{y}, \quad y \in (0,1) \cup (1, +\infty), \qquad F(0) = 0, \quad F(1) = F(3) = -\ln 4,$$

$$F_1(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right) \ln(y+1) - 1, \quad y \in (0, +\infty), \qquad F_1(0) = 0.$$

Возрастание второго интеграла $F_1(y)$ при $y \geqslant 0$ от 0 до $+\infty$ очевидно. Отметим еще, что

$$F_1(y) = \ln(y+1) + \frac{\ln(y+1)}{y} - 1 < \ln\left(\frac{3}{2}\, y\right) + \frac{1}{2}\ln 3 - 1 = \ln y + \ln\frac{3\sqrt{3}}{2e} < \ln y$$

при всех $y > 2$. Нужные свойства первого интеграла $F(y)$ соберем в отдельное утверждение.

Лемма 2.1.

1. *Функция* F *непрерывна на луче* $[0, +\infty)$, *отрицательна на луче* $(0, +\infty)$, *убывает на отрезке* $[0, \sqrt{2}]$, *возрастает на луче* $[\sqrt{2}, +\infty)$, $\lim\limits_{y \to +\infty} F(y) = 0$,

$$\min_{y \geqslant 0} F(y) = F(\sqrt{2}) = -\ln(3 + \sqrt{8}) = -1{,}76274\ \ldots$$

2. *При* $y \geqslant 3$ *верна оценка снизу* $F(y) > -4y^{-1}\ln y$.
3. *Если числа* x_0, y_0 *таковы, что*

$$0 < x_0 < \sqrt{2} < y_0, \qquad \int\limits_{x_0}^{y_0} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\, dt = 0,$$

то при $a \geqslant y_0/x_0$ *имеем*

$$\int\limits_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt > 0, \qquad x \in (x_0, +\infty).$$

В частности, если $a \geqslant 148$, *то*

$$\int\limits_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt > 0, \qquad x \in (1/4, +\infty).$$

4. *Верна оценка* $F(e) > -1{,}5$.

Доказательство.

1. Первое свойство проверяется элементарно с использованием явного выражения для производной

$$F'(y) = \frac{\ln|y^2-1|}{y^2}, \quad y \in (0,1)\cup(1,+\infty).$$

2. Пусть $y \geqslant 3$. Требуется доказать положительность функции

$$F(y) + \frac{4\ln y}{y} = \ln\frac{y-1}{y+1} - \frac{\ln(y^2-1)}{y} + \frac{4\ln y}{y} = \left(1-\frac{1}{y}\right)\ln(y-1) - \left(1+\frac{1}{y}\right)\ln(y+1) + \frac{2}{y}\ln y^2.$$

Поскольку

$$\ln y^2 > \ln(y^2-1) = \ln(y-1) + \ln(y+1),$$

то достаточно доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)\ln(y-1) \geqslant \left(1-\frac{1}{y}\right)\ln(y+1), \qquad y \in [3,+\infty).$$

Другими словами, нужно при всех $y \geqslant 3$ проверить соотношение $h(y-1) \geqslant h(y+1)$ для элементарной функции $h(s) = (1/s)\ln s$. Но оно становится очевидным, если учесть, что эта функция возрастает на отрезке $[2,e]$, убывает на луче $[e,+\infty)$, и $h(2) = h(4)$.

3. Доказываемое свойство допускает эквивалентную переформулировку: если $F(x_0) = F(y_0)$ при $0 < x_0 < \sqrt{2} < y_0$, то $F(ax) > F(x)$ для всех $x > x_0$ и $a \geqslant y_0/x_0$. В таком виде оно сразу следует из общих фактов о поведении функции F, отмеченных в пункте 1.

Если теперь для значения $x_0 = 1/4$ выбрать $y_0 > \sqrt{2}$, исходя из условия

$$\int\limits_{1/4}^{y_0} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt = 0,$$

то окажется, что $36 < y_0 < 37$, поскольку

$$\int\limits_{1/4}^{36} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt = -0{,}0019\ldots < 0, \qquad \int\limits_{1/4}^{37} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt = 0{,}0034\ldots > 0.$$

Следовательно, $y_0/x_0 < 148$, и при любых $a \geqslant 148$ и $x > 1/4$ интеграл

$$\int\limits_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt$$

будет, как показано выше, положительным.

4. Учитывая, что $F(3) = -\ln 4$, запишем

$$F(e) = F(3) - \int\limits_e^3 \frac{\ln(t^2-1)}{t^2}\,dt > -\ln 4 - \ln 8\int\limits_e^3 \frac{dt}{t^2} = -\left(\frac{3}{e}+1\right)\ln 2 = -1{,}4581\ldots > -1{,}5.$$

Все пункты леммы 2.1 обоснованы. □

Лемма 2.2. *При любых $x, y \in (0,+\infty)$, $x<y$, верно неравенство*

$$\int\limits_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > \ln\frac{y}{x} - F_1(y).$$

В частности, имеем

$$\int\limits_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > \ln\frac{1}{x} \qquad \forall y>2, \qquad \int\limits_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > \ln\frac{y}{x} - 0{,}65, \qquad 0<x<y\leqslant 2. \tag{2.1}$$

Доказательство. Ввиду положительности функции F_1 на луче $(0,+\infty)$ имеем

$$\int\limits_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \ln\frac{y}{x} - \int\limits_x^y \frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \ln\frac{y}{x} - F_1(y) + F_1(x) > \ln\frac{y}{x} - F_1(y),$$

если $0<x<y<+\infty$. Основное неравенство леммы доказано. Два других (см. (2.1)) следуют из него и оценок

$$F_1(y) < \ln y, \quad y\in(2,+\infty), \qquad F_1(y)\leqslant F_1(2) = 1{,}5\ln 3 - 1 < 0{,}65, \quad y\in(0,2].$$

Лемма 2.2 полностью доказана. □

3. Доказательство основного результата

Важную роль в дальнейшем играет следующее вспомогательное утверждение, установленное в нашей работе [8, лемма 3.1].

Лемма 3.1. *Если числа $a>1$, $b>1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ таковы, что функция*

$$\Phi(x;\,a,\,b,\,\alpha) \equiv \int\limits_x^{ax} t^\alpha\Big(\ln|1-t| + b\ln(1+t)\Big)\,dt$$

положительна всюду на луче $x\in(0,+\infty)$, то при любом $R>0$ для произвольного канонического произведения (1.5) *с условием на корни* (1.6) *справедливо неравенство*

$$\int\limits_R^{aR} t^\alpha \ln\Big(m(f;\,t)\,M^b(f;\,t)\Big)\,dt > 0.$$

Пусть $\delta\in(0,1/3]$, $a=\exp(2/\delta)$. Заметим, что $a\geqslant e^6$. Согласно лемме 3.1 оценка (1.7), составляющая содержание теоремы 1.3, будет гарантирована, если мы докажем неравенство

$$\int\limits_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1| + \delta\ln(1+t)}{t^2}\,dt > 0, \qquad x\in(0,+\infty). \tag{3.1}$$

При $x>1/4$ оно сразу же следует из второго утверждения пункта 3 леммы 2.1.

Далее $0<x\leqslant 1/4$. Перепишем неравенство (3.1) в равносильной форме

$$\delta\int\limits_x^{ax} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > F(x) - F(ax).$$

С учетом отрицательности $F(x)$, оценок (2.1) леммы 2.2 и равенства $\delta = 2/\ln a$ достаточно доказать, что

$$\frac{2(\ln a - 0{,}65)}{\ln a} > -F(ax), \qquad 0<x\leqslant\frac{2}{a}, \tag{3.2}$$

$$\frac{2\ln(1/x)}{\ln a} > -F(ax), \qquad \frac{2}{a}<x\leqslant\frac{1}{4}. \tag{3.3}$$

Неравенство (3.2) следует из ограниченности снизу функции F числом $-1{,}77$ (см. пункт 1 леммы 2.1). Действительно, достаточно проверить справедливость неравенства

$$2-\frac{1{,}3}{\ln a}>1{,}77 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1{,}3}{\ln a}<0{,}23 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{130}{23}<\ln a.$$

Последнее неравенство верно в силу ограничения $\ln a\geqslant 6$.

Докажем неравенство (3.3). Если $2/a<x<e/a$, то $2<ax$ и ввиду возрастания функции F на луче $[\sqrt{2},+\infty)$ (снова см. пункт 1 леммы 2.1) имеем $-F(ax)<-F(2)=1{,}5\ln 3<1{,}65$. В то же время $\ln(1/x)>\ln(a/e)=\ln a-1$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{2(\ln a-1)}{\ln a}>1{,}65 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{\ln a}<0{,}35,$$

а это верно, так как $\ln a\geqslant 6$. Если $e/a\leqslant x<4/a$, то $-F(ax)\leqslant -F(e)<1{,}5$ (см. пункт 4 леммы 2.1) и одновременно $\ln(1/x)>\ln a-\ln 4>\ln a-1{,}4$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{2(\ln a-1{,}4)}{\ln a}>1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2{,}8}{\ln a}<0{,}5.$$

Последнее верно при $\ln a>5{,}6$.

Осталось доказать неравенство (3.3) для значений $x\in[4/a,1/4]$. Положим $x=a^{-s}$. Тогда

$$s=\frac{\ln(1/x)}{\ln a}\in I_a\equiv\left[\frac{\ln 4}{\ln a},\ 1-\frac{\ln 4}{\ln a}\right]. \tag{3.4}$$

Из (3.4) и пункта 2 леммы 2.1 видно, что достаточно установить справедливость неравенства

$$2s>\frac{4\ln(ax)}{ax} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{sa^{1-s}}{1-s}>2\ln a, \qquad s\in I_a. \tag{3.5}$$

Ниже (чтобы не разбивать изложение) мы покажем убывание функции $s\mapsto sa^{1-s}/(1-s)$ на отрезке I_a, точнее — ее логарифма $\varphi(s)=\ln s-\ln(1-s)+(1-s)\ln a$. Таким образом, остается проверить справедливость (3.5) только при $s=1-\ln 4/\ln a$, а именно — доказать неравенство

$$\left(1-\frac{\ln 4}{\ln a}\right)\frac{\ln a}{\ln 4}\,a^{\ln 4/\ln a}>2\ln a \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\ln a}{\ln 4}-1>\frac{1}{2}\ln a \quad\Leftrightarrow\quad \ln a>\frac{\ln 4}{1-\ln 2}$$

(здесь мы учли тождество $a^{\ln 4/\ln a}=4$). Но последнее неравенство очевидно выполнено, так как $\ln 4/(1-\ln 2)<1{,}4/0{,}3=14/3<5<\ln a$.

Для того, чтобы соотношение (3.3) было полностью обосновано, проверим отрицательность производной

$$\varphi'(s)=\frac{1}{s(1-s)}-\ln a, \qquad s\in I_a.$$

Поскольку минимум выражения $s(1-s)$ на отрезке I_a достигается на концах этого отрезка, то

$$\max\left\{\varphi'(s)\ \mid\ s\in I_a\right\}=\left(\frac{\ln 4}{\ln a}\left(1-\frac{\ln 4}{\ln a}\right)\right)^{-1}-\ln a=\frac{\ln^2 a}{\ln 4\,(\ln a-\ln 4)}-\ln a. \tag{3.6}$$

Отрицательность величины (3.6) следует из неравенства $\ln a<\ln 4\,(\ln a-\ln 4)$, которое равносильно неравенству $\ln a>\ln^2 4/(\ln 4-1)$, заведомо верному при $\ln a\geqslant 6$, так как $\ln^2 4/(\ln 4-1)<5{,}2$.

Справедливость неравенства (3.1) установлена. Теорема 1.3 доказана.

4. Примеры

Этот раздел посвящен примерам, которые выявляют дополнительные обстоятельства, связанные как с классическими $\cos(\pi\rho)$-теоремами 1.1, 1.2, так и с новой теоремой 1.3 (см. короткое обсуждение во введении к работе).

Пример 4.1. Пусть $\rho\in(0,1)$. Зафиксируем какую-нибудь последовательность (1.1) и построим целую функцию g с положительными корнями, имеющую нормальный тип при порядке ρ и подчиненную предельному соотношению (1.2).

Проверим, что всем перечисленным требованиям удовлетворяет бесконечное произведение

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{R_n}\right)^{\nu_n}, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad \text{где} \qquad \nu_n = [R_n^\rho] \tag{4.1}$$

(квадратные скобки обозначают целую часть). Равномерная сходимость произведения (4.1) на компактах плоскости $\mathbb{C}$ обеспечивается условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{R_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{\rho-1} < +\infty.$$

Тем самым g — целая функция. Множество корней функции g есть последовательность, состоящая из чисел R_n, $n \in \mathbb{N}$, и каждая точка R_n в этой последовательности записана ν_n раз. Обозначив $n(r)$ считающую функцию такой последовательности, т. е. количество корней функции (4.1) в круге $|z| \leqslant r$, имеем равенства

$$n(r) = \sum_{k=1}^{n} \nu_k = \sum_{k=1}^{n} \left[R_k^\rho\right], \qquad R_n \leqslant r < R_{n+1}. \tag{4.2}$$

Очевидно, что $n(R_n) > R_n^\rho - 1$. Поэтому

$$D \equiv \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{n(r)}{r^\rho} \geqslant 1.$$

С другой стороны, ввиду сильной лакунарности последовательности $\{R_n\}$ (см. (1.1)) из (4.2) находим

$$n(R_n) \leqslant R_n^\rho + O\left(R_{n-1}^\rho\right) = R_n^\rho + O\left(\ln^\rho R_n\right), \qquad n \to \infty. \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) показывает, что

$$\frac{n(r)}{r^\rho} \leqslant 1 + O\left(\frac{\ln^\rho r}{r^\rho}\right), \qquad r \in [R_n,\, R_{n+1}).$$

Это влечет за собой равенство $D = 1$. Отсюда и из двусторонней оценки Валирона [15]

$$\frac{D}{e\rho} \leqslant \sigma \leqslant \frac{\pi D}{\sin(\pi\rho)}, \qquad \rho \in (0, 1),$$

для типа

$$\sigma \equiv \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln M(f; r)}{r^\rho}$$

произвольной целой функции f конечного порядка $\rho > 0$ через верхнюю ρ-плотность D множества ее корней получаем, что тип функции (4.1) при порядке ρ конечен и положителен. (Мы не ставим сейчас вопрос о точном вычислении ρ-типа функции (4.1). Подобные вопросы в увязке с точными оценками типа целой функции через плотностные характеристики распределения ее корней рассмотрены в обзорах [1, 5].)

Перейдем к доказательству соотношения (1.2). В силу (4.1) и отмеченных выше равенств (1.8) имеем

$$M(g; r)\, m(g; r) = |g(r)|\, g(-r) = \prod_{k=1}^{\infty} \left|1 - \frac{r^2}{R_k^2}\right|^{\nu_k}, \qquad r > 0. \tag{4.4}$$

Очевидно, что при $r \in (0,\, R_n]$ все сомножители произведения (4.4) с номерами $k \geqslant n$ меньше 1. Поэтому при любом $r \in (0,\, R_n]$ верно неравенство

$$M(g; r)\, m(g; r) < \left(1 - \frac{r^2}{R_n^2}\right)^{\nu_n} \Pi_n(r), \qquad \text{где} \qquad \Pi_n(r) = \prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \frac{r^2}{R_k^2}\right|^{\nu_k}. \tag{4.5}$$

Поскольку нас интересуют значения $r \in [\sqrt{R_n},\, R_n]$, а величина $\sqrt{R_n}$ согласно (1.1) с ростом n значительно превосходит R_{n-1}, то грубая оценка сверху

$$\left|1 - \frac{r^2}{R_k^2}\right|^{\nu_k} < r^{2\nu_k}$$

сомножителей произведения Π_n вполне достаточна. Применив ее, получим неравенство

$$\Pi_n(r) < r^{\,2\sum\limits_{k=1}^{n-1} R_k^\rho} = r^{\,2R_{n-1}^\rho + o(R_{n-1}^\rho)}, \qquad n \to \infty, \tag{4.6}$$

действующее при достаточно больших $r \in [\sqrt{R_n},\, R_n]$. Имеем также $1 - u < e^{-u}$ для $u \neq 0$. Следовательно,

$$\left(1 - \frac{r^2}{R_n^2}\right)^{\nu_n} < \exp\left(-\frac{\nu_n\, r^2}{R_n^2}\right) = \exp\left(-\frac{[R_n^\rho]\, r^2}{R_n^2}\right) < \exp\left(-\frac{(R_n^\rho - 1)\, r^2}{R_n^2}\right) \leqslant e^{\,1 - r^2 R_n^{\rho-2}} \tag{4.7}$$

при всех $r \in (0,\, R_n]$. Из (4.5)–(4.7) находим

$$M(g;r)\, m(g;r) < \exp\left\{-r^2 R_n^{\rho-2} + O(R_{n-1}^\rho \ln R_n)\right\}, \qquad r \in [\sqrt{R_n},\, R_n]. \tag{4.8}$$

При $n \to \infty$ правая часть неравенства (4.8) стремится к нулю равномерно по r на отрезках $R_n^{1-\rho/2} \ln R_n \leqslant r \leqslant R_n$. Действительно, на таких отрезках $r^2 R_n^{\rho-2}$ минорируется величиной $\ln^2 R_n$, которая благодаря условию $R_{n-1} \leqslant \ln R_n$ по порядку больше, чем $R_{n-1}^\rho \ln R_n \leqslant \ln^{1+\rho} R_n$. Соотношение (1.2) доказано. Обсуждение примера 4.1 завершено.

Пример 4.2. Пусть P — многочлен степени $p \in \mathbb{N}$, все корни которого $x_1, \ldots, x_p$ действительны и положительны, но не обязательно различны. Предположим, что $P(0) = 1$, и запишем многочлен P в виде произведения

$$P(z) = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right).$$

В работе [8, лемма 2.1] нами получен следующий результат.

Лемма 4.1. *Пусть $a > 1$, $d > 0$ и выполняется неравенство*

$$\mu \equiv \max_{1 \leqslant x \leqslant a} \Big(|P(x)|\; P^{\,d}(-x)\Big) < 1, \tag{4.9}$$

а $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная возрастающая и столь быстро стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{R_{n+1}} = 0.$$

Тогда для любого $\rho \in (0,\, 1)$ существует целая функция G нормального типа при порядке ρ, являющаяся каноническим произведением нулевого рода с корнями, лежащими на луче $(0, +\infty)$ действительной оси, такая, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \max \Big\{m(G;\, r)\, M^d(G;\, r) \,|\, R_n \leqslant r \leqslant aR_n\Big\} = 0. \tag{4.10}$$

Неравенство (4.9) с максимумом по отрезку $[1, a]$ после соответствующей замены переменной может быть переписано как условие, в котором максимум берется по произвольному наперед заданному отрезку положительной полуоси с отношением концов, равным a. Этим обстоятельством мы воспользуемся ниже.

Рассмотрим специальный многочлен пятой степени

$$P(z) = \left(1 - \frac{8z}{7}\right)^3 \left(1 - \frac{4z}{7}\right)^2 \tag{4.11}$$

с положительными корнями $x_1 = x_2 = x_3 = 7/8$ и $x_4 = x_5 = 7/4$. Покажем, что при заданном $\delta \in (0,\, 1/33]$ условие (4.9) будет выполнено для многочлена $P(\delta z)$, если выбрать $a = (28/15)\, \delta^{-1}$ и $d = 1 + \delta$. Иными словами, требуется убедиться в справедливости неравенства

$$\mu(\delta) \equiv \max_{\delta \leqslant x \leqslant 28/15} \Big(|P(x)|\; P^{\,1+\delta}(-x)\Big) < 1, \qquad \delta \in (0,\, 1/33], \tag{4.12}$$

с многочленом $P(z)$ из формулы (4.11). Для этого потребуются следующие две леммы.

Лемма 4.2. *Пусть параметры α, δ связаны условием*

$$0 < \delta < \alpha \leqslant 2 + \delta. \tag{4.13}$$

Тогда функция

$$H_{\alpha,\delta}(x) \equiv \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{1+\delta} \tag{4.14}$$

убывает на отрезке $x \in [\delta, \alpha]$, а в точке $x = \delta$ мажорируется величиной

$$\exp\left\{\delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{\delta^4}{4\alpha^4}\right\}.$$

Доказательство. Производная функции (4.14) имеет вид

$$\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\delta}\left(\delta - \frac{2+\delta}{\alpha}\,x\right)$$

и отрицательна при всех $x \in (\delta, \alpha]$ в силу (4.13).

Осталось обосновать неравенство

$$\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)^{1+\delta} < \exp\left\{\delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{\delta^4}{4\alpha^4}\right\},$$

равносильное неравенству

$$\ln\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) + (1+\delta)\ln\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) - \delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{\delta^4}{4\alpha^4} < 0. \tag{4.15}$$

Воспользуемся тем, что

$$\ln\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) < -\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} - \frac{\delta^3}{3\alpha^3} - \frac{\delta^4}{4\alpha^4},$$

$$\ln\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) < \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} + \frac{\delta^3}{3\alpha^3},$$

и оценим сверху левую часть (4.15) величиной

$$-\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} - \frac{\delta^3}{3\alpha^3} - \frac{\delta^4}{4\alpha^4} + (1+\delta)\left(\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} + \frac{\delta^3}{3\alpha^3}\right) - \delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{\delta^4}{4\alpha^4} = -\frac{\delta^3}{2\alpha^2} + \frac{\delta^4}{3\alpha^3}.$$

Поскольку $0 < \delta < \alpha$, то

$$-\frac{\delta^3}{2\alpha^2} + \frac{\delta^4}{3\alpha^3} < -\frac{\delta^3}{2\alpha^2} + \frac{\delta^3}{3\alpha^2} = -\frac{\delta^3}{6\alpha^2} < 0,$$

и неравенство (4.15) выполнено. Лемма 4.2 доказана. □

Лемма 4.3. *Пусть параметры α, β связаны условием $0 < \alpha < \beta$. Тогда многочлен*

$$Q_{\alpha,\beta}(x) \equiv \left(\frac{x^2}{\alpha^2} - 1\right)^3\left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right)^2 \tag{4.16}$$

на отрезке $x \in [\alpha, \beta]$ достигает максимума в точке

$$x_* = \sqrt{\frac{3\beta^2 + 2\alpha^2}{5}} \in (\alpha, \beta),$$

и значение этого максимума есть

$$\frac{108}{3125}\,\frac{(\beta^2 - \alpha^2)^5}{\alpha^6\beta^4}.$$

В частном случае $\beta = 2\alpha$ величина указанного максимума выражается числом $6561/12500$.

Доказательство леммы 4.3 не приводим ввиду его полной элементарности.

Вернемся к обоснованию неравенства (4.12). Зафиксируем произвольное $\delta \in (0,\, 1/33]$.

Пусть сначала $x \in [\delta, 7/8]$. Используя обозначения (4.11), (4.14), запишем для таких x представление

$$|P(x)|\, P^{\,1+\delta}(-x) = \left(\left(1-\frac{8x}{7}\right)\left(1+\frac{8x}{7}\right)^{1+\delta}\right)^3 \left(\left(1-\frac{4x}{7}\right)\left(1+\frac{4x}{7}\right)^{1+\delta}\right)^2 = H^3_{7/8,\,\delta}(x)\; H^2_{7/4,\,\delta}(x).$$

Для каждой из фигурирующих здесь функций семейства (4.14) условие (4.13) выполнено с очевидным запасом. По лемме 4.2 справедливы оценки

$$H_{\,7/8,\,\delta}(x) \;\leqslant\; \exp\left\{\left(\frac{8}{7}-\frac{8^2}{7^2}\right)\delta^2 - \frac{8^4}{4\cdot 7^4}\,\delta^4\right\}, \qquad H_{\,7/4,\,\delta}(x) \;\leqslant\; \exp\left\{\left(\frac{4}{7}-\frac{4^2}{7^2}\right)\delta^2 - \frac{4^4}{4\cdot 7^4}\,\delta^4\right\}.$$

Учтем равенство

$$3\left(\frac{8}{7}-\frac{8^2}{7^2}\right) + 2\left(\frac{4}{7}-\frac{4^2}{7^2}\right) = 0$$

и получим, что

$$\max_{\delta\leqslant x\leqslant 7/8}\,\Big(|P(x)|\;P^{\,1+\delta}(-x)\Big) \;\leqslant\; \exp\left\{-\left(\frac{3\cdot 8^4}{4\cdot 7^4}+\frac{2\cdot 4^4}{4\cdot 7^4}\right)\delta^4\right\} = \exp\left\{-\frac{3200}{2401}\,\delta^4\right\} < 1. \tag{4.17}$$

Пусть теперь $x \in [7/8, 7/4]$. Тогда

$$|P(x)|\, P^{\,1+\delta}(-x) = Q_{7/8,\,7/4}(x)\,\left(\left(\frac{8x}{7}+1\right)^3\left(\frac{4x}{7}+1\right)^2\right)^{\delta}, \tag{4.18}$$

если принять обозначение (4.16). По лемме 4.2 для рассматриваемых x имеем

$$Q_{7/8,\,7/4}(x) \;\equiv\; \left(\frac{x^2}{(7/8)^2}-1\right)^3\left(1-\frac{x^2}{(7/4)^2}\right)^2 \;\leqslant\; \frac{6561}{12500}.$$

Кроме того,

$$\left(\left(\frac{8x}{7}+1\right)^3\left(\frac{4x}{7}+1\right)^2\right)^{\delta} \;\leqslant\; 108^{\,\delta} \;\leqslant\; 108^{\,1/33}.$$

Следовательно,

$$\max_{7/8\leqslant x\leqslant 7/4}\,\Big(|P(x)|\;P^{\,1+\delta}(-x)\Big) \;\leqslant\; \frac{6561}{12500}\,108^{\,1/33} = 0{,}60489\,\ldots < 1. \tag{4.19}$$

Пусть, наконец, $x \in [7/4,\, 28/15]$. На таком отрезке функция $|P(x)|\, P^{\,1+\delta}(-x)$ по-прежнему имеет вид (4.18), но теперь возрастает, достигая своего максимума в точке $x = 28/15$. Прямой подсчет дает для этого максимума выражение

$$\frac{17^3}{15^5}\,\left(\frac{47^3\cdot 31^2}{15^5}\right)^{1+\delta}.$$

Тем самым при условии $\delta \leqslant 1/33$ имеем

$$\max_{7/4\leqslant x\leqslant 28/15}\,\Big(|P(x)|\;P^{\,1+\delta}(-x)\Big) \;\leqslant\; \frac{17^3}{15^5}\,\left(\frac{47^3\cdot 31^2}{15^5}\right)^{34/33} = 0{,}98548\,\ldots < 1. \tag{4.20}$$

Окончательно из (4.17), (4.19), (4.20) получим соотношение (4.12). В свете леммы 4.1 это позволяет утверждать следующее. Если мы выберем какую-нибудь возрастающую к $+\infty$ последовательность положительных чисел R_n со свойством $R_n = o(R_{n+1})$ при $n \to \infty$, то для любых $\rho \in (0,1)$ и $\delta \in (0,\, 1/33]$ найдется целая функция G нормального типа при порядке ρ с положительными корнями, такая, что предельное соотношение (4.10) выполнено с $d = 1+\delta$

и $a = (28/15)\,\delta^{-1}$. При таком выборе параметров, как показывает обсуждаемый пример, утверждение (1.7) теоремы 1.3 теряет силу. Подчеркнем, что функция G предъявляется как каноническое произведение нулевого рода, общая конструкция которого предложена в [8, доказательство леммы 2.1]. Применительно к нашей ситуации имеем

$$G(z) = G\left(z;\, \rho, \delta, \{R_n\}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{8\delta z}{7R_n}\right)^3 \left(1 - \frac{4\delta z}{7R_n}\right)^2 \right)^{[R_n^\rho]}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Построение примера 4.2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах// Фундам. и прикл. мат. — 2018. — *22*, № 1. — С. 51–97.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Новые исследования о росте и распределении значений целых и мероморфных функций рода нуль// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 4. — С. 51–62.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
5. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона—Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 132–164.
6. *Попов А. Ю.* Новая оценка снизу минимума модуля аналитической функции// Челяб. физ.-мат. ж. — 2019. — *4*, № 2. — С. 155–164.
7. *Попов А. Ю.* Оценка снизу минимума модуля аналитической функции на окружности через отрицательную степень ее нормы на большей окружности// Тр. МИАН. — 2022. — *319*. — С. 223–250.
8. *Попов А. Ю., Шерстюков В. Б.* Оценка снизу минимума модуля целой функции рода нуль с положительными корнями через степень максимума модуля в частой последовательности точек// Уфимский мат. ж. — 2022. — *14*, № 4. — С. 80–99.
9. *Попов А. Ю., Шерстюков В. Б.* Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля четных канонических произведений// Чебышевский сб. — 2023. — *24*, № 1. — С. 127–138.
10. *Boas R. P. Jr.* Entire Functions. — New York: Academic Press, 1954.
11. *Cartwright M. L.* On the minimum modulus of integral functions// Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1934. — *30*. — С. 412–420.
12. *Hayman W. K.* The minimum modulus of large integral functions// Proc. London Math. Soc. — 1952. — *2*, № 3. — С. 469–512.
13. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. Vol. 2. — London–New York: Academic Press, 1989.
14. *Hayman W. K., Lingham E. F.* Research problems in function theory. — Cham: Springer, 2019.
15. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulièr// Ann. Fac. Sci. Toulouse. — 1913. — *5*. — С. 117–257.
16. *Wiman A.* Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null// Math. Ann. — 1915. — *76*. — С. 197–211.

А. Ю. Попов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: aypopov.msu@yandex.ru

В. Б. Шерстюков
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com

UDC 517.547.2
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162
EDN: YBRYQO

Lower average estimate for the minimum modulus on circles for an entire function of genus zero

A. Yu. Popov[1,2] **and V. B. Sherstyukov**[1,2]

[1]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2]*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Abstract. The article was written based on the materials of the joint report of the authors, made by them at the Sixth International Conference "Functional spaces. Differential operators. Problems of mathematical education," dedicated to the centenary of the birth of Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Academician of the European Academy of Sciences L. D. Kudryavtsev. For an entire function represented by a canonical product of genus zero with positive roots, the following result is proved. For any $\delta \in (0, 1/3]$, the minimum modulus of such a function exceeds on average the maximum of its modulus raised to the power $-1-\delta$, on any segment whose end ratio is equal to $\exp(2/\delta)$. The main theorem is illustrated by two examples. The first of them shows that instead of the exponent $-1-\delta$ it is impossible to take -1. The second example demonstrates the impossibility of replacing the value $\exp(2/\delta)$ by the value $28/(15\delta)$ in the theorem for small δ.

Keywords: entire function, minimum modulus, maximum modulus.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the grant of the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00129) at Lomonosov Moscow State University.

For citation: A. Yu. Popov, V. B. Sherstyukov, "Lower average estimate for the minimum modulus on circles for an entire function of genus zero," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 150–162. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162`

REFERENCES

1. G. G. Braichev and V. B. Sherstyukov, "Tochnye otsenki asimptoticheskikh kharakteristik rosta tselykh funktsiy s nulyami na zadannykh mnozhestvakh" [Accurate estimates of the asymptotic growth characteristics of entire functions with zeros on given sets], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2018, **22**, No. 1, 51–97 (in Russian).
2. A. A. Gol'dberg and I. V. Ostrovskii, "Novye issledovaniya o roste i raspredelenii znacheniy tselykh i meromorfnykh funktsiy roda nul"' [New studies on the growth and distribution of values of entire and meromorphic functions of the genus zero], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 4, 51–62 (in Russian).
3. A. A. Gol'dberg and I. V. Ostrovskii, *Raspredelenie znacheniy meromorfnykh funktsiy* [Distribution of Values of Meromorphic Functions], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
4. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
5. A. Yu. Popov, "Razvitie teoremy Valirona—Levina o naimen'shem vozmozhnom tipe tseloy funktsii s zadannoy verkhney ρ-plotnost'yu korney" [Development of the Valiron–Levin theorem on the smallest possible type of an entire function with a given upper ρ-density of roots], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 132–164 (in Russian).

6. A. Yu. Popov, “Novaya otsenka snizu minimuma modulya analiticheskoy funktsii” [A new estimate from below of the minimum of the modulus of an analytic function], *Chelyab. fiz.-mat. zh.* [Chelyabinsk Phys. Math. J.], 2019, **4**, No. 2, 155–164 (in Russian).
7. A. Yu. Popov, “Otsenka snizu minimuma modulya analiticheskoy funktsii na okruzhnosti cherez otritsatel’-nuyu stepen’ ee normy na bol’shey okruzhnosti” [Estimate from below the minimum of the modulus of an analytic function on a circle through the negative degree of its norm on a larger circle], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2022, **319**, 223–250 (in Russian).
8. A. Yu. Popov and V. B. Sherstyukov, “Otsenka snizu minimuma modulya tseloy funktsii roda nul’ s polozhitel’nymi kornyami cherez stepen’ maksimuma modulya v chastoy posledovatel’nosti tochek” [The estimate from below of the minimum of the modulus of an entire function of genus zero with positive roots through the power of the maximum of the modulus in a frequent sequence of points], *Ufimskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 4, 80–99 (in Russian).
9. A. Yu. Popov and V. B. Sherstyukov, “Usilenie lemmy Gaysina o minimume modulya chetnykh kanonicheskikh proizvedeniy” [Strengthening of Gaisin’s lemma on the minimum modulus of even canonical products], *Chebyshevskiy sb.* [Chebyshev Digest], 2023, **24**, No. 1, 127–138 (in Russian).
10. R. P. Boas Jr., *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
11. M. L. Cartwright, “On the minimum modulus of integral functions,” *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1934, **30**, 412–420.
12. W. K. Hayman, “The minimum modulus of large integral functions,” *Proc. London Math. Soc.*, 1952, **2**, No. 3, 469–512.
13. W. K. Hayman, *Subharmonic functions. Vol. 2*, Academic Press, London–New York, 1989.
14. W. K. Hayman and E. F. Lingham, *Research problems in function theory*, Springer, Cham, 2019.
15. G. Valiron, “Sur les fonctions entières d’ordre nul et d’ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulièr,” *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 1913, **5**, 117–257.
16. A. Wiman, “Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null,” *Math. Ann.*, 1915, **76**, 197–211.

A. Yu. Popov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: aypopov.msu@yandex.ru

V. B. Sherstyukov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: shervb73@gmail.com