Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 121–149
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.946
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149
EDN: YVHQAW

ОБ УСЛОВИЯХ ПОДЧИНЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д. В. Лиманский[1], **М. М. Маламуд**[2,3]

[1]*Донецкий государственный университет, Донецк, Россия*
[2]*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[3]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. В работе приводится обзор результатов об априорных оценках для систем минимальных дифференциальных операторов в шкале пространств $L^p(\Omega)$, где $p \in [1, \infty]$. Приведены результаты о характеризации эллиптических и l-квазиэллиптических систем при помощи априорных оценок в изотропных и анизотропных пространствах Соболева $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. При заданном наборе $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ доказаны критерии существования l-квазиэллиптических и слабо коэрцитивных систем, а также указаны широкие классы слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, неэллиптических и неквазиэллиптических систем. Кроме того, описаны линейные пространства операторов, подчиненных в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-норме тензорному произведению двух эллиптических дифференциальных полиномов.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, априорная оценка, квазиэллиптичность, коэрцитивность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Мы признательны профессорам Б. С. Митягину и Д. М. Столярову за полезные обсуждения и замечания, способствовавшие улучшению текста работы. Исследование проводилось первым автором по теме государственного задания (рег. № 124012400352-6). Исследования второго автора выполнены за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00153.

Для цитирования: *Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд.* Об условиях подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 121–149. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149

1. Общие сведения об априорных оценках в L^p

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Обозначим через $L^0_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ линейное пространство операторов $Q(x, D)$, подчиненных системе минимальных дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в $L^p(\Omega)$, т. е. пространство операторов $Q(x, D)$, удовлетворяющих *априорной оценке*

$$\|Q(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.1}$$

где константа $C > 0$ не зависит от выбора f.

В случае $N = 1$ говорят, что минимальный оператор $P(x, D)$ *сильнее* оператора $Q(x, D)$.

1.1. Оценки в L^p при $p \in (1, \infty)$. Операторы $P_j(x, D)$ порядка l имеют вид

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_{j\alpha}(x)\, D^\alpha, \qquad j \in \{1, \dots, N\}. \tag{1.2}$$

Здесь $D := (D_1, \dots, D_n)$, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k$ и $a_{j\alpha}(x) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Полный символ* оператора (1.2) имеет вид

$$P_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_{j\alpha}(x)\, \xi^\alpha, \qquad j \in \{1, \dots, N\}, \tag{1.3}$$

т. е. получается заменой D_k на ξ_k, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим также через

$$P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = l} a_{j\alpha}(x)\, \xi^\alpha, \qquad j \in \{1, \dots, N\} \tag{1.4}$$

главный символ (старшую однородную форму порядка l) оператора (1.3).

В случае операторов с постоянными коэффициентами символ $T(\xi)$ связан с оператором $T(D)$ соотношением

$$\widehat{T(D)f}(\xi) = T(\xi)\, \widehat{f}(\xi),$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а $\widehat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье:

$$\widehat{f}(\xi) = [\mathcal{F}f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\, f(x)\, dx.$$

В данной работе рассматриваются только минимальные операторы. Напомним, что дифференциальный оператор P в $L^p(\Omega)$ называется *минимальным*, если его область определения $\operatorname{dom} P$ является замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме графика этого оператора. При этом оценка (1.1) эквивалентна вложению

$$\operatorname{dom} Q \supset \bigcap_{j=1}^N \operatorname{dom} P_j$$

областей определения соответствующих операторов (в случае $N = 1$ см. [27]).

Предложение 1.1 (см. [2, 13, 33]). *Пусть $\{P_j(D)\}_1^N$ — система операторов с постоянными коэффициентами. Тогда для всех $p \in [1, \infty]$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ из оценки*

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.5}$$

вытекает алгебраическое неравенство для символов операторов:

$$|Q(\xi)| \leqslant C \sum_{j=1}^N |P_j(\xi)|, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Для доказательства предложения 1.1 достаточно положить в неравенстве (1.5)

$$f(x) := \varphi(\varepsilon x)\, e^{i(\xi,x)} = \varphi(\varepsilon x) \exp\left(i \sum_{k=1}^n \xi_k x_k\right), \qquad \xi,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \equiv 1$ в окрестности нуля и $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и воспользоваться тем, что для любого дифференциального полинома $T(D)$ выполнено $T(D)\, e^{i(\xi,x)} = T(\xi)\, e^{i(\xi,x)}$.

При $p = 2$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ из равенства Парсеваля вытекает, что оценка (1.5) и неравенство (1.6) эквивалентны. При $p \in (1, \infty)$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ в случае дифференциальных мономов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ В. П. Ильиным [2, 6] доказана эквивалентность оценки (1.5) алгебраической оценке (1.6) (см. далее теорему 2.3). Однако в общем случае при $p \neq 2$ эквивалентность (1.5) $\Longleftrightarrow$(1.6), вообще говоря, не имеет места.

Далее, при $N = 1$, $p = 2$ и ограниченной области Ω Л. Хермандером [27] получен следующий критерий справедливости оценки (1.1).

Теорема 1.1 (см. [27]). *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $P(D)$ включение $Q \in L^0_{2,\Omega}(P)$ эквивалентно алгебраическому неравенству*

$$|Q(\xi)| \leqslant C\,\widetilde{P}(\xi) := \left[\sum_\alpha |D^\alpha P(\xi)|^2\right]^{1/2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7}$$

Функцию $\widetilde{P}(\xi)$ вида (1.7) называют *функцией Хермандера.*

Из теоремы 1.1, в частности, вытекает, что предложение 1.1, вообще говоря, неверно для ограниченных областей Ω.

Пример 1.1. Рассмотрим операторы $Q(D) := D_1$ и $P(D) := D_1^2 - D_2^2$. Если область Ω ограничена и $p = 2$, то оценка (1.5) справедлива в силу теоремы 1.1, хотя неравенство $|\xi_1| \leqslant C[|\xi_1^2 - \xi_2^2|]$ не имеет места для всех $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

Напомним, что оператор $P(D)$ порядка l называют *эллиптическим*, если

$$P^l(\xi) \neq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{1.8}$$

(см. далее более общее определение 2.1). Из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда оператор $P(D)$ порядка l эллиптичен в точности тогда, когда $Q \in L^0_{2,\Omega}(P)$ для всех операторов $Q(D)$ порядка* $\deg Q \leqslant l$, *т. е. оператор $P(D)$ сильнее любого оператора $Q(D)$ порядка $\leqslant l$.*

Предложение 1.2 также распространяется на операторы с переменными коэффициентами, действующие в L^p при $p \in (1, \infty)$ (см. далее теорему 2.2).

Другим важным классом операторов, чью «силу» можно охарактеризовать в терминах символов, являются операторы главного типа, введенные Хермандером.

Определение 1.1 (см. [27]). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Оператор $P(D)$ порядка l называют *оператором главного типа* в $L^2(\Omega)$, если

$$\nabla P^l(\xi) := \left(\frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial P^l}{\partial \xi_n}\right)(\xi) \neq (0, \ldots, 0), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Пример 1.2. Гиперболический оператор

$$P(D) := D_1^2 + \cdots + D_k^2 - D_{k+1}^2 - \cdots - D_n^2, \qquad k \in \{1, \ldots, n-1\} \tag{1.9}$$

является оператором главного типа в $L^2(\Omega)$.

Предложение 1.3. *Эллиптический оператор является оператором главного типа в* $L^2(\Omega)$.

Доказательство. Предполагая противное, найдем точку $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, для которой $\nabla P^l(\xi^0) = 0$. Отсюда в силу тождества Эйлера для полинома $P^l(\xi)$,

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^0 \frac{\partial P^l}{\partial \xi_k}(\xi^0) = l\,P^l(\xi^0) = 0. \tag{1.10}$$

Это противоречит эллиптичности оператора $P(D)$. □

Предложение 1.4. *Оператор $P(D)$ главного типа в $L^2(\Omega)$ порядка l сильнее любого оператора $Q(D)$ порядка $\leqslant l - 1$.*

Доказательство вытекает из теоремы 1.1, а также из общего свойства эллиптической системы $\{D_k P^l(\xi)\}_1^n$ (см. теорему 2.2 в «изотропном» случае $l_1 = \cdots = l_n = l$).

Утверждение, обратное к предложению 1.4, вообще говоря, не имеет места. Например, в силу теоремы 1.1 параболический оператор

$$P(D) := D_1^2 + \cdots + D_{n-1}^2 + iD_n \tag{1.11}$$

сильнее в $L^2(\Omega)$ любого оператора $Q(D) = D_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, но не является оператором главного типа. Этот факт вытекает из теоремы 1.1 Хермандера, но также является следствием более общего свойства l-квазиэллиптического оператора (см. теорему 2.2).

Кроме того, следствие 1.4 не имеет места при $p \neq 2$. Демонстрацией этого факта служит следующий глубокий результат Литтмана [39].

Теорема 1.2 (см. [39]). *Пусть Ω — куб в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и $P(D)$ — волновой оператор вида* (1.9) *с $k = n-1$. Тогда при $p \geqslant \dfrac{2n}{n-1}$ оценка* (1.5) *с операторами $Q(D) = D_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ не имеет места.*

Следующая характеристика операторов главного типа также принадлежит Хермандеру.

Предложение 1.5 (см. [27]). *Пусть $P(D)$ — оператор порядка l в $L^2(\Omega)$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда $P(D)$ является оператором главного типа в $L^2(\Omega)$ в точности тогда, когда $P(D)$ и любой другой оператор $R(D)$ с той же главной частью, $P^l(\xi) \equiv R^l(\xi)$, имеют одинаковую «силу» в том смысле, что пространства $L^0_{p,\Omega}(P)$ и $L^0_{p,\Omega}(R)$ совпадают.*

Результаты, аналогичные теореме 1.1 и предложению 1.5, справедливы при $N > 1$ для системы операторов с постоянными коэффициентами (см. [2, 19]). Из этого, в частности, вытекает, что пространство $L^0_{2,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ для эллиптической системы $\{P_j(D)\}_1^N$ порядка l максимально возможно, т. е. оценка (1.5) справедлива для любого оператора $Q(D)$ порядка $\leqslant l$. То же утверждение верно и для нормы в пространстве $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$, но утрачивает силу в концах шкалы, т. е. при $p = 1$ и $p = \infty$.

1.2. Оценки в L^∞. Изотропный случай. При $p = \infty$ Б. С. Митягиным [20, 21] доказана невозможность оценки (1.1) при $N = 2$ для операторов $Q(D) = D_1 D_2$ и $P_j(D) = D_j^2$, $j \in \{1, 2\}$. Более того, в работе [21] показано, что при $p = \infty$ даже непрерывность вторых несмешанных производных $D_1^2 f$, $D_2^2 f$ и функции f не влечет ограниченности в существенном обобщенной смешанной производной $D_1 D_2 f$ (см. также [2]). Явный пример функции с такими свойствами принадлежит В. И. Юдовичу [29]:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \ln \ln \frac{e}{x_1^2 + x_2^2}, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{D}, \tag{1.12}$$

где $\mathbb{D} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ — единичный круг.

Первый общий результат об оценках в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ получен де Лю и Миркилом [34]. Именно, они получили следующее необходимое условие справедливости оценки (1.5) в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.3 (см. [34]). *Пусть $P_j(D)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, — операторы с постоянными коэффициентами порядка l, а $Q(D)$ — оператор порядка $\leqslant l$. Тогда из справедливости оценки*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.13}$$

вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.14}$$

для главных символов $Q^l(\xi)$ и $P_j^l(\xi)$ операторов $Q(D)$ и $P_j(D)$, соответственно, с некоторыми константами $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

В частности, для однородных полиномов $P_j(\xi) = P_j^l(\xi)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, и $Q(\xi) = Q^l(\xi)$ оценка (1.5) *при $p = \infty$ эквивалентна тождеству* (1.14).

Как указал Г. Е. Шилов [28] (см. также работу Е. А. Горина [5]), теоремы типа теоремы 1.3 имеют непосредственное применение для локальной классификации алгебр типа C.

Обобщение теоремы 1.3 на системы операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ с переменными коэффициентами другим методом получено одним из авторов в [17]. В этом случае из оценки (1.1) при $p = \infty$ и произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вытекает тождество

$$Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(x)\, P_j^l(x, \xi), \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.15}$$

с функциями $\lambda_j(\cdot)$ вместо констант λ_j. Более общий случай операторов с l-квазиоднородными главными частями обсуждается далее в теореме 1.6.

Отметим также, что в недавней работе Казанецкого и Войцеховского [36] доказано, что на пространстве аналитических тригонометрических полиномов

$$f(x_1,x_2)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2\leqslant m} c_\alpha\, e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}, \qquad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_+^2, \tag{1.16}$$

степени m от двух переменных справедлива оценка

$$\max_f \frac{\|D_1D_2f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}}{\|D_1^2f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}+\|D_2^2f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}}\geqslant C\ln^{1/8}m, \qquad m\in\mathbb{N}, \tag{1.17}$$

где $\mathbb{T}^2:=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ — двумерный тор, а константа $C>0$ не зависит от m.

Если отказаться от аналитичности полиномов, то, как сообщил нам Б. С. Митягин, для однородных дифференциальных операторов порядка l с постоянными коэффициентами им доказаны следующие оценки: если $Q^l\notin\operatorname{span}\{P_j^l\}_1^N$, то

$$\max_f \frac{\|Q^l(D)f\|_\infty}{\sum\limits_{j=1}^N\|P_j^l(D)f\|_\infty}\geqslant C\,\ln m, \qquad m\in\mathbb{N}.$$

Здесь $C>0$ — не зависящая от m константа, а $f(\cdot)$ пробегает множество всех (не обязательно аналитических) тригонометрических полиномов степени m от n переменных:

$$f(x)=\sum_{|\alpha_k|\leqslant m} c_\alpha\, e^{i(\alpha,x)}, \qquad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n, \quad k\in\{1,\dots,n\}. \tag{1.18}$$

Напомним определение понятия мультипликатора в L^p, играющее важную роль в дальнейшем.

Определение 1.2 (см. [26]). Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in[1,\infty]$, если оператор свертки $f\mapsto T_\Phi f=:\mathcal{F}^{-1}\Phi\mathcal{F}f$ отображает $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Совокупность всех мультипликаторов из L^p в L^p обозначается $\mathcal{M}_p$.

Простое описание пространств $\mathcal{M}_p$ известно лишь при $p\in\{1,2,\infty\}$. Так, алгебра $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_\infty$ состоит из преобразований Фурье—Стилтьеса конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ (см. [26]):

$$\Phi\in\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi(\xi)=\widehat{\mu}(\xi):=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\,d\mu(x), \qquad \mu(\mathbb{R}^n)<\infty. \tag{1.19}$$

Для остальных значений $p\in(1,\infty)$ известны лишь достаточные условия включения $\Phi\in\mathcal{M}_p$ (см. [2,26]).

Следующий результат де Лю и Миркила дополняет теорему 1.3 и дает критерий справедливости оценки (1.5) при $p=\infty$ и $\Omega=\mathbb{R}^n$ в терминах мультипликаторов.

Теорема 1.4 (см. [34]). *Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Тогда априорная оценка* (1.13) *эквивалентна тождеству*

$$Q(\xi)=\sum_{j=1}^N M_j(\xi)P_j(\xi), \qquad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{1.20}$$

в котором $\{M_j(\cdot)\}_1^N$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Приведем наброски доказательств теорем 1.3 и 1.4. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1.1 (см. [34]). *Из справедливости априорной оценки* (1.5) *в норме пространства $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ вытекает следующее интегральное представление*:

$$[Q(D)f](0)=\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^n} P_j(D)f\,d\mu_j(x), \qquad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1.21}$$

где $\{\mu_j\}_1^N$ — конечные борелевские меры в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Следуя [34], рассмотрим функционал F, для каждого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ сопоставляющий вектору $\{P_j(D)f\}_1^N$ значение $[Q(D)f](0)$. Этот функционал линеен и, ввиду оценки (1.5), ограничен в $\prod_1^N C_0(\mathbb{R}^n)$, где $C_0(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных в $\mathbb{R}^n$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности. По теореме Хана—Банаха функционал F продолжается до ограниченного линейного функционала в $\prod_1^N C_0(\mathbb{R}^n)$. Рассматривая одноточечную компактификацию $\mathbb{R}^n$ — сферу $\mathbb{S}^n$, — расширим F до функционала $\widetilde{F}$ на подпространстве $\prod_1^N C_0(\mathbb{S}^n)$ непрерывных вектор-функций на сфере $\mathbb{S}^n$, равных нулю в одной точке. К функционалу $\widetilde{F}$ на указанном подпространстве применима теорема Рисса, из которой вытекает представление (1.21). □

Набросок доказательства теоремы 1.3. Для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ полагаем $f_r(x) := f(rx)$, $r > 0$. Тогда, подставляя функции $f = f_r$ в интегральное представление (1.21), придем к соотношению

$$r^l[Q^l(D)f]_r(0) + o(r^l) = r^l \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} [P_j^l(D)f]_r \, d\mu_j(x) + o(r^l), \qquad r \to +\infty, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.22}$$

Деля обе части (1.22) на r^l и затем устремляя $r \to +\infty$, придем к тождеству

$$[Q^l(D)f](0) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \, [P_j^l(D)f](0), \qquad \text{где} \quad \lambda_j := \mu_j(0), \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Наконец, заменяя в предыдущих рассуждениях функцию $f(x)$ на $f(x-h)$, где $h \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, получим доказываемое тождество (1.14). □

Набросок доказательства теоремы 1.4.

(i) Пусть справедлива оценка (1.5). Тогда, согласно лемме 1.1, имеет место интегральное представление вида (1.21). Кроме того, функции $M_j(\xi) := \widehat{\mu}_j(\xi)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, будут мультипликаторами в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \, \widehat{\mu}(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(f * \mu)}(\xi) \, d\xi = (f * \mu)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\mu(x) \tag{1.23}$$

для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и конечной меры μ (см. [26]).

Применяя в обеих частях (1.21) преобразование Фурье, с учетом равенства (1.23) придем к соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(\xi)\widehat{f}(\xi) \, d\xi = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} M_j(\xi) P_j(\xi) \widehat{f}(\xi) \, d\xi, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.24}$$

Так как множество образов Фурье $\widehat{f}(\cdot)$ функций $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, из (1.24) получаем тождество (1.20).

(ii) Обратно, пусть выполнено тождество (1.20). Умножая обе его части на $\widehat{f}(\xi)$ и учитывая, что в силу определения мультипликаторов

$$M_j(\xi)\widehat{f}(\xi) =: \widehat{T_j f}(\xi), \qquad j \in \{1, \dots, N\},$$

где $\{T_j\}$ — ограниченные операторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, придем к соотношению

$$\widehat{Q(D)} f(\xi) = \sum_{j=1}^N T_j (\widehat{P_j(D)} f)(\xi), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.25}$$

Применяя теперь к обеим частям (1.25) обратное преобразование Фурье и затем обозначая $C := \max\limits_{j \in \{1, \dots, N\}} \|T_j\|_{L^\infty \to L^\infty}$, получаем оценку (1.5). □

Следствие 1.1. *Пусть дополнительно в условиях теоремы* 1.4 *в систему* $\{P_j(D)\}_1^{N+1}$ *входит тождественный оператор* $P_{N+1}(D) := E$. *Тогда априорная оценка*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.26}$$

эквивалентна тождеству

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^{N} M_j(\xi)P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.27}$$

в котором $\{M_j(\cdot)\}_1^{N+1}$ — *мультипликаторы в* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Приведем еще один важный результат, касающийся оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.5 (см. [13]). *Пусть* $Q(x, D)$ *и* $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — *дифференциальные операторы, а также* $(D', 0) := (D_1, \dots, D_m, 0, \dots, 0)$. *Тогда*:

(i) *из оценки* (1.1) *с* $p = \infty$ *и* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *при любом* $m < n$ *следует «суженная» оценка*

$$\|Q(x, D', 0)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\sum_{j=1}^{N}\|P_j(x, D', 0)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \tag{1.28}$$

(ii) *Если коэффициенты операторов* Q *и* P_j *постоянны, то оценка* (1.1) *остается справедливой после «сужения» операторов на произвольное подпространство* $E \subset \mathbb{R}^n$.

Набросок доказательства.

(i) Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-m})$ — «срезающая» функция, равная единице в окрестности нуля. Рассмотрим функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ вида

$$f(x_1, \dots, x_n) := \widetilde{f}(x_1, \dots, x_m)\,\varphi(x_{m+1}, \dots, x_n), \qquad \text{где} \qquad \widetilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \tag{1.29}$$

Далее, для $r > 0$ и функции $f(\cdot)$ вида (1.29) обозначим

$$f_r(x) := f\Big(x_1, \dots, x_m, \frac{x_{m+1}}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\Big) = \widetilde{f}(x_1, \dots, x_m)\,\varphi\Big(\frac{x_{m+1}}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\Big). \tag{1.30}$$

Подставим теперь функции (1.30) в неравенство (1.1). Так как для любого дифференциального монома $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ имеем

$$D^\alpha f_r = r^{-(\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_n)}(D^\alpha f)_r,$$

то после перехода к пределу при $r \to +\infty$ в полученном неравенстве придем к (1.28).

(ii) Если коэффициенты операторов Q и P_j постоянны, то каждая из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-норм в (1.28) равна соответствующей $L^\infty(\mathbb{R}^m)$-норме, что доказывает справедливость оценки (1.1) после «сужения» всех операторов на подпространство E, порожденное $\xi_1, \dots, \xi_m$. Так как символы $Q(\xi)$ и $P_j(\xi)$ инвариантны при ортогональной замене переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, то можно считать m-мерное подпространство E произвольным. □

Замечание 1.1. Поясним, что в теореме 1.5 коэффициенты суженных операторов $Q(x, D)$, $\{P_j(x, D)\}_1^N$ по-прежнему зависят от всех n переменных, в то время как дифференцирование производится лишь по первым m переменным. Заметим еще, что функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ не являются финитными в $\mathbb{R}^n$.

1.3. Оценки в L^∞. Анизотропный случай. В дальнейшем мы определяем главную часть дифференциального оператора по отношению к произвольному вектору l с натуральными компонентами, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагают $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$.

Определение 1.3. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Полином $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется *l-однородным*, если справедливо тождество

$$P(t^{1/l_1}\xi_1, \dots, t^{1/l_n}\xi_n) = tP(\xi_1, \dots, \xi_n), \qquad t > 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.31}$$

Далее везде будем считать, что операторы $Q(x,D)$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ имеют вид

$$Q(x,D)=\sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} b_\alpha(x)D^\alpha, \qquad P_j(x,D)=\sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}(x)D^\alpha. \tag{1.32}$$

Отметим, что в изотропном случае, т. е. при $l_1=\dots=l_n=l$, неравенство $|\alpha:l|\leqslant 1$ принимает обычный вид $|\alpha|\leqslant l$.

Определение 1.4. Операторы

$$Q^l(x,D):=\sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha(x)\,D^\alpha, \qquad P_j^l(x,D):=\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)D^\alpha, \qquad j\in\{1,\dots,N\} \tag{1.33}$$

называют *l-главными частями*, а их l-однородные символы

$$Q^l(x,\xi):=\sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha(x)\,\xi^\alpha, \qquad P_j^l(x,\xi):=\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\,\xi^\alpha, \qquad j\in\{1,\dots,N\}$$

называют *l-главными символами*, соответственно, операторов $Q(x,D)$ и $P_j(x,D)$ вида (1.32).

При $l_1=\dots=l_n=l$ определение 1.4 совпадает с определением главных символов, данным в пункте 1.1 (см. формулу (1.4)).

Замечание 1.2. Как видно из доказательства теоремы 1.5, пункт (i), в отличие от пункта (ii), справедлив для операторов как с однородными, так и с l-квазиоднородными главными частями.

Отметим, что при заданном операторе существуют различные векторы l, задающие l-главные части этого оператора. Например, параболический оператор $P(D)$ вида (1.11) имеет главные части $P^l(D)=D_1^2+\dots+D_{n-1}^2$ при $l:=(2,\dots,2,2)$ и $P^{l'}(D):=D_1^2+\dots+D_{n-1}^2+iD_n$ при $l':=(2,\dots,2,1)$.

Следующая теорема обобщает теорему 1.3 де Лю и Миркила в трех направлениях:

(i) для операторов с переменными коэффициентами;
(ii) для операторов с l-квазиоднородными главными частями;
(iii) на случай произвольной области Ω вместо $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что метод доказательства теоремы 1.6, предложенный одним из авторов в [17, 19], в отличие от метода работы [34], позволяет охватить случай операторов с переменными коэффициентами.

Теорема 1.6 (см. [17, 19])**.** *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, а $Q(x,D)$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ — дифференциальные операторы вида* (1.32) *с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot),b_\alpha(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha:l|<1$ и $a_{j\alpha}(\cdot),b_\alpha(\cdot)\in C^1(\Omega)$ при $|\alpha:l|=1$.*

Тогда из априорной оценки

$$\|Q(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad f\in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.34}$$

вытекает тождество

$$Q^l(x,\xi)=\sum_{j=1}^N \lambda_j(x)\,P_j^l(x,\xi), \qquad x\in\Omega, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{1.35}$$

в котором функции $\lambda_j(\cdot)\in C^1(\Omega)$. Если коэффициенты операторов $Q(x,D)$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ постоянны, то функции $\lambda_j(x)$ в (1.35) *также постоянны, $\lambda_j(x)\equiv\lambda_j$.*

В частности, для l-однородных операторов $P_j(x,D)=P_j^l(x,D)$, $j\in\{1,\dots,N\}$, и $Q(x,D)=Q^l(x,D)$ оценка (1.34) *при $p=\infty$ эквивалентна тождеству* (1.35).

Набросок доказательства. В доказательстве мы следуем [17, 19]. Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами. Замыкая неравенство (1.34) в норме $C(\Omega)$, распространим его на все финитные непрерывные в Ω функции, для которых правая часть в (1.34) конечна. Здесь дифференциальные операторы $Q(D)$ и $P_j(D)$ понимаются как обобщенные. Кроме того, без ограничения общности считаем, что $0\in\Omega$.

Далее, при $|\alpha : l| = 1$ полагаем $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$, и пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция с носителем в единичном шаре $\{x :\ |x| \leqslant 1\}$, причем $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Тогда система пробных функций

$$f_\alpha(x) := \eta(x)\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}\,\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} = \eta(x)\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}\,\ln\ln\frac{e}{x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n}}, \qquad |\alpha : l| = 1 \quad (1.36)$$

определена корректно. Заметим, что при $n = 2$, $\alpha = (1,1)$ и $l_1 = l_2 = 1$ функция в (1.36) совпадает с функцией (1.12).

Функции (1.36) обладают следующими свойствами:

$$D^\beta f_\alpha(x) \in C(\Omega), \qquad |\beta : l| \leqslant 1, \quad \beta \neq \alpha; \qquad (1.37)$$

$$D^\alpha f_\alpha(x) = \eta(x)\,\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} + \varphi_\alpha(x), \qquad \varphi_\alpha \in C(\Omega). \qquad (1.38)$$

Более того, $D^\alpha f_\alpha \notin L^\infty(\Omega)$, поскольку $\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$.

Предположим противное, т. е. что доказываемое тождество (1.35) нарушается. Переписывая (1.35) в терминах коэффициентов $a_{j\alpha}$ и b_α, заключаем, что нарушается хотя бы одно из равенств

$$b_\alpha = \sum_{j=1}^N \lambda_j\, a_{j\alpha}, \qquad |\alpha : l| = 1.$$

Тогда найдутся числа $\{\mu_\alpha\}$, $|\alpha : l| = 1$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}\mu_\alpha = 0, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \qquad \text{но} \qquad \sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha\mu_\alpha \neq 0. \qquad (1.39)$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) := \sum_{|\alpha:l|=1} \mu_\alpha f_\alpha(x), \qquad (1.40)$$

где $f_\alpha(\cdot)$ — функции вида (1.36). Применяя операторы $\{P_j(D)\}_1^N$ к (1.40) и учитывая соотношения (1.37)–(1.39), получаем:

$$P_j(D)g(x) = \eta(x)\left[\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}\mu_\alpha\right]\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} + \varphi_j(x) = \varphi_j(x) \in C(\Omega), \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Рассуждая аналогично, приходим к соотношению

$$Q(D)g(x) = \eta(x)\left[\sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha\mu_\alpha\right]\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} + \varphi_0(x),$$

в котором $\varphi_0 \in C(\Omega)$. Поэтому в силу последнего соотношения в (1.39) имеем $Q(D)g \notin L^\infty(\Omega)$. Таким образом, $\|Q(D)g\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$, в то время как нормы $\|P_j(D)g\|_{L^\infty(\Omega)}$ конечны, $j \in \{1, \dots, N\}$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие 1.2. *Пусть в условиях теоремы* 1.6 $Q(x,D) = Q^l(x,D)$ *и* $P_j(x,D) = P_j^l(x,D)$, $j \in \{1, \dots, N\}$. *Тогда априорная оценка* (1.34) *эквивалентна тождеству* (1.35), *в котором функции* $\lambda_j(\cdot) \in C^1(\Omega)$, $j \in \{1, \dots, N\}$. *Если коэффициенты операторов* $Q^l(x,D)$ *и* $P_j^l(x,D)$ *постоянны, то функции* $\lambda_j(\cdot)$ *в* (1.35) *также постоянны,* $\lambda_j(x) \equiv \lambda_j$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

В частности, при $N = 1$ *оценка*

$$\|Q(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|P(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega) \qquad (1.41)$$

эквивалентна тождеству

$$Q(x,\xi) = \lambda(x)\,P(x,\xi), \qquad x \in \Omega, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (1.42)$$

Условие (1.35), как и условие (1.14), является лишь необходимым, но не достаточным для справедливости оценки (1.1). Кроме того, «анизотропная» теорема 1.6 демонстрирует полезность неоднозначного выделения l-главной части дифференциального оператора.

Пример 1.3. Пусть $P(D) := D_1^4 + D_2^2 + iD_3$. При $l := (4,4,4)$ равенство (1.42) не исключает наличие оценки (1.41) для

$$Q_1(D) = D_1^4, \quad Q_2(D) = D_2^2, \quad Q_3(D) = D_3, \quad Q_4(D) = D_1^4 + D_2^2, \quad Q_5(D) = D_1^4 + iD_3. \tag{1.43}$$

Но при $l' := (4,2,1)$ оценка (1.41) противоречит следствию 1.2. Действительно, l'-главные символы этих операторов $P^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2 + i\xi_3$ и

$$Q_1^{l'}(\xi) = \xi_1^4, \qquad Q_2^{l'}(\xi) = \xi_2^2, \qquad Q_3^{l'}(\xi) = \xi_3, \qquad Q_4^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2, \qquad Q_5^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + i\xi_3$$

в этом случае не пропорциональны и, значит, как тождество (1.42), так и оценка (1.41) с $Q(D) = Q_j(D)$, $j \in \{1, \ldots, 5\}$, вида (1.43) не имеют места.

Отсутствие оценки (1.41) при $\Omega = \mathbb{R}^3$ для операторов (1.43) показывает также, что функции

$$\Phi_j(\xi) := \frac{Q_j(\xi)}{P(\xi)}, \qquad j \in \{1, \ldots, 5\}, \tag{1.44}$$

не являются мультипликаторами в $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Действительно, в противном случае каждое из вытекающих из (1.44) тождеств $Q_j(\xi) = \Phi_j(\xi)\,P(\xi)$, в которых $\Phi_j \in \mathcal{M}_\infty$, $j \in \{1, \ldots, 5\}$, противоречит теореме 1.4 де Лю и Миркила.

1.4. Оценки в L^1. Остановимся кратко на результатах об оценках в L^1. Орнстейном [41] был получен следующий результат, являющийся L^1-версией теоремы 2.4 де Лю и Миркила.

Теорема 1.7 (см. [41]). *Пусть $P_j(D) = P_j^l(D)$, $j \in \{1, \ldots, N\}$ — однородные операторы порядка l с постоянными коэффициентами и $Q(D) = Q^l(D)$, $\deg Q = l$. Тогда оценка*

$$\|Q(D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.45}$$

эквивалентна тождеству

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.46}$$

с некоторыми константами $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Изотропный аналог следствия 1.2 при $N = 1$ для пространства L^1 получен в работе Кирхгайма и Кристенсена [37].

Теорема 1.8 (см. [37]). *Пусть $Q(x,D) = Q^l(x,D)$ и $P(x,D) = P^l(x,D)$ — однородные операторы порядка l с локально интегрируемыми в $\mathbb{R}^n$ коэффициентами. Тогда оценка*

$$\|Q(x,D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|P(x,D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.47}$$

при $\Omega = \mathbb{R}^n$ эквивалентна тождеству (1.42) *при для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ с некоторой функцией $\lambda(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Наконец, в работе Казанецкого, Столярова и Войцеховского [35] теорема 1.7 Орнстейна обобщена на анизотропный случай l-однородных операторов с постоянными коэффициентами. Тем самым была получена L^1-версия следствия 1.2.

Теорема 1.9 (см. [35]). *Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$,*

$$Q(D) = \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} b_\alpha D^\alpha = Q^l(D) \quad \text{и} \quad P_j(D) = \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} a_{j\alpha} D^\alpha = P_j^l(D), \quad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1.48}$$

— l-однородные операторы с постоянными коэффициентами. Пусть также степени всех мономов, входящих в запись символов $Q^l(\xi)$ и $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$, имеют одинаковую четность. Тогда оценка (1.45) *эквивалентна тождеству* (1.46).

Отметим, что доказательства теорем 1.7–1.9 значительно труднее соответствующих доказательств их L^∞-версий. Отметим еще, что при доказательстве теорем 1.8 и 1.9 в работах [35, 37] существенно используются методы выпуклого анализа.

2. Оценки для квазиэллиптической системы в L^p при $p \in [1, \infty]$

Наиболее употребительными в приложениях являются априорные оценки для эллиптических и l-квазиэллиптических систем операторов.

Определение 2.1 (см. [2,4]). Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1.32) называют *l-квазиэллиптической*, если

$$(P_1^l(x, \xi), \dots, P_N^l(x, \xi)) \neq 0, \qquad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \tag{2.1}$$

В частности, в изотропном случае, т. е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, систему $\{P_j(x, D)\}_1^N$ называют *эллиптической* порядка l.

Определение 2.2 (см. [2]). Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. *Анизотропным пространством Соболева* $W_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, называют множество функций $f \in L^p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ при всех $|\alpha : l| \leqslant 1$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Подпространство в $W_p^l(\Omega)$, совпадающее с замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме (2.2), обозначают через $W_{p,0}^l(\Omega)$.

Определение 2.3 (см. [2]). Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ называют *коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D) f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3}$$

в которой константы $C_1, C_2 > 0$ не зависят от f.

Другими словами, система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ коэрцитивна в $W_{p,0}^l(\Omega)$, если линейное пространство $L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N)$ максимально возможное.

Для доказательства критерия коэрцитивности нам понадобится следующая классическая теорема Михлина—Лизоркина [8,23] о мультипликаторах в L^p при $p \in (1, \infty)$ (см. также [2, гл. III, § 11]).

Теорема 2.1 (см. [8,23]). *Пусть функция $\Phi(\cdot)$ непрерывна и ограничена на множестве*

$$\mathbb{R}_*^n := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \xi_k \neq 0, \ k \in \{1, \dots, n\}\}$$

вместе со всеми производными $D^\alpha \Phi(\cdot)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2^n := \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 := \{0; 1\}$. Если

$$|\xi^\alpha D^\alpha \Phi(\xi)| \leqslant C, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2^n, \quad \xi \in \mathbb{R}_+^n, \tag{2.4}$$

то $\Phi \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty)$.

Следующий классический результат об l-квазиэллиптических системах хорошо известен.

Теорема 2.2 (см. [2,4]). *Система операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида* (1.32) *с непрерывными в области Ω коэффициентами l-квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в анизотропном пространстве $W_{p,0}^l(\Omega)$ при каждом $p \in (1, \infty)$.*

Набросок доказательства. Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами.

(i) *Необходимость.* Пусть система $\{P_j(D)\}_1^N$ l-квазиэллиптична. Тогда с помощью теоремы 2.1 легко проверить, что функции

$$\Phi_{j\alpha}(\xi) := \frac{\xi^\alpha \, \overline{P_j^l(\xi)}}{\sum_{k=1}^n |P_k^l(\xi)|^2}, \qquad |\alpha : l| \leqslant 1, \qquad j \in \{1, \dots, N\} \tag{2.5}$$

являются мультипликаторами в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1,\infty)$. Доказательство теоремы 2.2 теперь вытекает из тождества

$$\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{j\alpha}(\xi) P_j(\xi) \widehat{f}(\xi), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

Именно, после применения обратного преобразования Фурье к обеим частям (2.6) получаем

$$D^\alpha f = \sum_{j=1}^{N} T_j(P_j(D)f), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.7}$$

где T_j — ограниченные в L^p операторы свертки с символами $\Phi_{j\alpha}(\cdot)$, $j \in \{1,\ldots,N\}$. Из равенства (2.7) вытекает оценка (1.5) с $Q(D) = D^\alpha$.

(ii) *Достаточность.* Пусть теперь система $\{P_j(D)\}_1^N$ коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\Omega)$ при некотором $p \in (1,\infty)$. Предположим противное, т. е. что система не l-квазиэллиптична, т. е. $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, при некотором $\xi^0 = (\xi_1^0,\ldots,\xi_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Положим при $t > 0$

$$f_t(x) := \chi(\xi)\, \exp\left[\sum_{k=1}^{n} t^{1/l_k} \xi_k^0 x_k\right], \tag{2.8}$$

где $\chi(\cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$ — ненулевая функция. Подставляя функции (2.8) в (1.5), придем к оценке

$$\sum_{k=1}^{n} \|D_k^{l_k} f_t\|_{L^p(\Omega)} + o(t) = t \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^0|^{l_k}\, \|f_t\|_{L^p(\Omega)} + o(t) \leqslant o(t), \qquad t \to +\infty,$$

противоречивой при больших t.

Теорема полностью доказана. □

Замечание 2.1. Отметим, что при $p = 2$ в изотропном случае для операторов с постоянными коэффициентами теорема 2.2 вытекает из равенства Парсеваля.

Далее, обозначим через $\operatorname{ch}(\mathcal{A})$ выпуклую (замкнутую) оболочку множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Следующая теорема, доказанная Ильиным [6], дает критерий справедливости оценки (1.5) для случая, когда $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные мономы в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$. Ее доказательство также базируется на проверке условий теоремы 2.1 Михлина—Лизоркина.

Теорема 2.3 (см. [6]). *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — конечное подмножество и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда при каждом $p \in (1,\infty)$ оценка*

$$\|D^\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{2.9}$$

с константой $C = C_{\mathcal{A}}$ (не зависящей от f) эквивалентна условию $\beta \in \operatorname{ch}(\mathcal{A})$.

При $p = 1$ и $p = \infty$ l-квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $W^l_{\infty,0}(\Omega)$ и $W^l_{1,0}(\Omega)$ в исключительных случаях (см. теорему 1.6). Тем не менее, она является слабо коэрцитивной в $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, в смысле следующего определения.

Определение 2.4 (см. [13]). Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ называют *слабо коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если верна оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.10}$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от f.

Оценка (2.10) для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ при $p \in (1,\infty)$ вытекает из (2.3), а при $p = \infty$ доказана в [19]. В случае постоянных коэффициентов она доказана в [32] при всех $p \in [1,\infty]$.

Для случая одного оператора с постоянными коэффициентами еще ранее де Лю и Миркил [34] показали, что при $n \geqslant 3$ эллиптический оператор $P(D) = P_1(D)$ может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Именно, справедлив следующий результат.

Теорема 2.4 (см. [34]). *При $n \geqslant 3$ эллиптичность дифференциального полинома $P(D)$ порядка $l \geqslant 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.*

Условие $n \geqslant 3$ в теореме 2.4 существенно. Так, в [34] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ неэллиптического оператора $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$.

В связи с критерием де Лю и Миркила естественно возникает вопрос о возможной характеризации эллиптических и l-квазиэллиптических операторов и систем при помощи априорных оценок типа слабой коэрцитивности в $W^l_{p,0}(\Omega)$ при $p \in [1, \infty]$.

Введем еще подкласс слабо коэрцитивных систем.

Определение 2.5. Систему операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ будем называть *ε-слабо коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C_\varepsilon > 0$, не зависящая от f и такая, что верна оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.11}$$

Для выяснения условий слабой коэрцитивности в L^p при $p \in [1, \infty]$ нам понадобится теорема о мультипликаторах в L^1, полученная Э. С. Белинским, М. З. Двейриным и одним из авторов в [32].

Теорема 2.5 (см. [32]). *Пусть $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$ и при некоторых постоянных $\delta \in (0, 1)$ и $A_\delta > 0$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *справедливо неравенство*

$$\prod_{j=1}^n (1 + |\xi_j|)^\delta |\Phi(\xi)| \leqslant A_\delta, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{2.12}$$

(ii) *для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^n$ таких, что $\alpha + \beta = (1, 1, \ldots, 1)$, существуют производные $D^\alpha\Phi$ и выполнено неравенство*

$$\prod_{j\in\mathbb{N}_\alpha} |\xi_j|^{1-\delta}(1 + |\xi_j|^{2\delta}) \prod_{j\in\mathbb{N}_\beta} (1 + |\xi_j|)^\delta |D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \Phi(\xi)| \leqslant A_\delta, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Здесь $\mathbb{N}_\alpha \subset \{1, \ldots, n\}$ — носитель мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, т. е. множество индексов $j \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\alpha_j > 0$.

Тогда $\Phi \in \mathcal{M}_1$ и, значит, $\Phi \in \mathcal{M}_p$ при $p \in [1, \infty]$.

Замечание 2.2. При $\delta = 0$ условие (i) теоремы 2.5 выполняется автоматически, а условие (ii) принимает вид

$$|\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \Phi(\xi)| \leqslant A_\delta, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.14}$$

где $\alpha_j \in \{0; 1\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. В этом случае условие теоремы 2.5 превращается в условие (2.4) Михлина—Лизоркина из их теоремы 2.1, согласно которой функция $\Phi(\cdot)$ является мультипликатором в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty)$.

С помощью теоремы 2.5 в работе [32] был получен следующий результат.

Теорема 2.6 (см. [32]). *Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — l-квазиэллиптическая система операторов вида* (1.32) *с постоянными коэффициентами. Тогда система $\{P_j(D)\}_1^N$ является ε-слабо коэрцитивной в шкале пространств $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.*

В работе [38] С. В. Кислякова, Д. В. Максимова и Д. М. Столярова теорема 2.5 применяется при доказательстве следующего утверждения.

Предложение 2.1 (см. [38]). *Пусть функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и l-однородна (в смысле тождества* (1.31)*) при $l = (-l_1, \ldots, -l_n)$, $l_k > 0$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть также $\chi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция и такая, что $0 \leqslant \chi(\xi) \leqslant 1$, $\chi(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \leqslant r$, $\chi(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \geqslant 2r$, $r > 0$. Тогда функция $f(x) := \varphi(x)\chi(x)$ является мультипликатором в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$.*

В [38] по системе $T := \{T_j\}_1^N$ дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами вида (1.32) с l-однородными главными частями $\{T_j^l\}_1^N$ вида (1.33), первоначально заданными на множестве тригонометрических полиномов от n переменных, вводится полунорма графика отображения T:

$$\|f\|_T := \max_{j\in\{1,\dots,N\}} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^n)}. \tag{2.15}$$

После факторизации по ядру полунормы и пополнения приходят к банаховому пространству $C^T(\mathbb{T}^n)$, называемому пространством гладких функций, порождаемому системой $T := \{T_j\}_1^N$ на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$. Эти пространства играют важную роль в общей теории B-пространств (см. [38] и цитируемую там литературу).

В частности, они фигурируют в формулировке следующего замечательного результата из [38], в доказательстве которого среди других утверждений используется также и предложение 2.1.

Теорема 2.7 (см. [38, теорема 2.2]). *Пусть $T = \{T_j\}_1^N$ — система операторов с постоянными коэффициентами вида* (1.32)*, и пусть среди их l-однородных главных частей $\{T_j^l\}_1^N$ не менее двух линейно независимых. Тогда второе сопряжённое к $C^T(\mathbb{T}^n)$ пространство $C^T(\mathbb{T}^n)^{**}$ не изоморфно* дополняемому подпространству *пространства $C(K)$ ни для какого компакта K.*

Отметим, что согласно формуле (2.15) отображение $T : f \to \{T_1 f, \dots, T_N f\}$ (после факторизации по ядру) задаёт изоморфизм пространства $C^T(\mathbb{T}^n)$ некоторому подпространству пространства $C(\coprod_{j=1}^{N} \mathbb{T}^n)$. Теорема 2.7, в частности, утверждает, что это *подпространство не дополняемо.*

Отметим, что «изотропная» версия предложения 2.1 (при $l_1 = \dots = l_n$) другим методом ранее доказана Боманом в [33]. Этот факт использовался им для доказательства справедливости оценки

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1\|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \deg Q \leqslant l-1,$$

в случае эллиптического оператора $P(D)$ порядка l, т. е. для доказательства части теоремы 2.4 де Лю и Миркила.

Далее, в работе [32] при помощи теоремы 2.5 было получено другое (более простое и короткое) доказательство критерия Бомана [33] для системы дифференциальных мономов в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот результат является естественным распространением теоремы 2.3 Ильина на случай $p = \infty$.

Для его формулировки обозначим через $\operatorname{int}_k(\mathcal{A})$ множество внутренних точек $\mathcal{A}$ относительно k-мерного аффинного подпространства $E_k \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{A} \subset E_k$.

Теорема 2.8 (см. [33]). *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — конечное подмножество и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$.*

(i) *Если существует k-мерное аффинное подпространство $E_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \{0, \dots, n\}$, параллельное k-мерной координатной плоскости в $\mathbb{R}^n$ и такое, что*

$$\beta \in \operatorname{int}_k(\operatorname{ch}(E_k \cap \mathcal{A})), \tag{2.16}$$

то оценка (2.9) *верна при $p = \infty$.*

(ii) *Обратно, из справедливости оценки* (2.9) *при $p = \infty$ вытекает включение* (2.16).

Доказательство. Следуя [32], приведем доказательство достаточности (пункт (i)).

1. Пусть условие (2.16) выполнено при $k = n$, т. е. $\beta \in \operatorname{int}_n(\operatorname{ch}(\mathcal{A}))$. Положим

$$m_\beta(\xi) := \frac{\xi^{2\beta}}{\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{2.17}$$

и $m_\beta(0) := 0$. Покажем, что $m_\beta \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$.

Сначала проверим непрерывность $m_\beta(\cdot)$ при $\xi = 0$. Так как β — внутренняя точка $\operatorname{ch}(\mathcal{A})$, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\beta' := \beta'(\varepsilon) := \beta \pm \varepsilon \in \operatorname{int}_n(\operatorname{ch}(\mathcal{A}))$, где $\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — вектор с $\varepsilon_j \in [0, \varepsilon_0)$. Следовательно, β допускает различные представления вида

$$\beta = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha \cdot \alpha \pm \varepsilon, \qquad \lambda_\alpha := \lambda_\alpha(\varepsilon) > 0, \quad \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha = 1, \quad \varepsilon_j \in [0, \varepsilon_0). \tag{2.18}$$

Подставляя соотношения (2.18) в (2.17), получаем

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant \frac{|\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{\lambda_\alpha\cdot 2\alpha}|\cdot|\xi^{\pm 2\varepsilon}|}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}}, \qquad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \tag{2.19}$$

где

$$\xi^{\lambda_\alpha\cdot 2\alpha} := \prod_{j=1}^n (\xi_j^{2\alpha})^{\lambda_\alpha} \qquad \text{и} \qquad \xi^{\pm 2\varepsilon} := \prod_{j=1}^n (\xi_j^2)^{\pm\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Применяя неравенство Юнга, из (2.19) видим, что

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant \frac{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha\cdot\xi^{2\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}}\,|\xi^{\pm 2\varepsilon}| \leqslant |\xi^{\pm 2\varepsilon}|, \qquad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \tag{2.21}$$

Из оценки (2.21) со знаком «плюс» вытекает непрерывность $m_\beta(\cdot)$ в нуле.

Далее, выбирая знак «минус» в представлении (2.18) и снова применяя неравенство Юнга, приходим к оценке

$$|\xi^{2\beta}\cdot\xi^{2\varepsilon}| = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} |\xi^{2\alpha}|^{\lambda_\alpha} \leqslant \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha\xi^{2\alpha} \leqslant \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}. \tag{2.22}$$

Полагая $\varepsilon = 0$ в (2.22), видим, что $m_\beta(\cdot)$ ограничена, $|m_\beta(\xi)| \leqslant 1$.

Для доказательства включения $m_\beta \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ проверим условия (i) и (ii) теоремы 2.5. Полагая $\varepsilon := (0,\ldots,\varepsilon_j,\ldots,0)$ с $\varepsilon_j > 0$, из (2.21) (взятого со знаком «минус») выводим, что $|\xi_j^{2\varepsilon_j} m_\beta(\xi)| \leqslant 1$ при $\xi\in\mathbb{R}^n$. Принимая во внимание неравенство $|m_\beta(\xi)| \leqslant 1$, получаем оценку

$$(|\xi_j|^{\varepsilon_j}+1)\,|m_\beta(\xi)| \leqslant 2\,|\xi_j^{2\varepsilon_j} m_\beta(\xi)| \leqslant 2, \qquad |\xi_j| \geqslant 1. \tag{2.23}$$

В случае $|\xi_j| < 1$ неравенство $(|\xi_j|^{\varepsilon_j}+1)\,|m_\beta(\xi)| \leqslant 2$ очевидно. Поэтому

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant 2(|\xi_j|^{\varepsilon_j}+1)^{-1}, \qquad \xi\in\mathbb{R}^n, \qquad j\in\{1,\ldots,n\}. \tag{2.24}$$

Перемножая неравенства (2.24) и применяя неравенство Бернулли, придем к требуемой оценке

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant C_\varepsilon \prod_{j=1}^n (|\xi_j|+1)^{-\varepsilon_j/n}, \qquad \xi\in\mathbb{R}^n \tag{2.25}$$

с положительной постоянной C_ε. Оценки (ii) для производных $D^\alpha m_\beta$ проверяются аналогично. Таким образом, $m_\beta \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ для всех $\beta\in\mathrm{int}_n(\mathrm{ch}(\mathcal{A}))$.

Оценка (2.9) вытекает теперь из тождества

$$\xi^\beta \widehat{f}(\xi) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} m_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\xi)(\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)), \qquad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.26}$$

В самом деле, применяя к обеим частям (2.26) обратное преобразование Фурье, получаем соотношение вида (2.7), которое, в свою очередь, влечет оценку (2.9).

2. Пусть условие (2.16) выполнено для некоторого $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, и $\mathcal{A}_k := E_k\cap\mathcal{A}$. По условию теоремы, аффинное подпространство E_k имеет вид $E_k = E_k^0+\gamma$, где E_k^0 — k-мерная координатная плоскость, $\gamma\in\mathbb{R}^n$ и $\gamma\perp E_k^0$. Не умаляя общности, можно считать, что $E_k^0 = \{x\in\mathbb{R}^n:\ x_{k+1}=\cdots=x_n=0\}$ и $\gamma = (0,\ldots,0,\gamma_{k+1},\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n$. Положим $\alpha = (\alpha',\alpha'')$, $\xi = (\xi',\xi'')$ и $\gamma = (\gamma',\gamma'') = (0,\gamma'')$, где $\alpha'\in\mathbb{Z}_+^k$, $\alpha''\in\mathbb{Z}_+^{n-k}$ и $\xi'\in E_k^0$, $\xi''\in(E_k^0)^\perp$. Если β удовлетворяет (2.16), то $\beta = (\beta',\gamma'')$, где

$$\beta'\in\mathrm{int}_k(\mathrm{ch}(\mathcal{A}_k'))\cap\mathbb{Z}_+^k \qquad \text{и} \qquad \mathcal{A}_k' := \{\alpha'\in\mathbb{Z}_+^k : (\alpha',\gamma'')\in\mathcal{A}_k\}. \tag{2.27}$$

Определим теперь $m_\beta(\cdot)$, заменяя $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}_k$ в (2.17), т. е. полагая

$$m_\beta(\xi) := \frac{\xi^{2\beta}}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \xi^{2\alpha}} = \frac{\xi^{2\beta'+2\gamma''}}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \xi^{2\alpha'+2\gamma''}} = \frac{(\xi')^{2\beta'}}{\sum\limits_{\alpha'\in\mathcal{A}_k'} (\xi')^{2\alpha'}} =: m_{\beta'}(\xi'), \qquad \xi'\in E_k^0\setminus\{0\}.$$

На предыдущем шаге было доказано, что $m_{\beta'}(\xi') \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$. Следовательно, требуемая оценка вытекает из тождества

$$\xi^\beta \widehat{f}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \widetilde{m}_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\xi)(\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.28}$$

аналогичного (2.26), но в котором

$$\widetilde{m}_{(\alpha+\beta)/2} := m_{(\alpha'+\beta')/2} \otimes \widehat{\delta}_{k+1} \otimes \dots \otimes \widehat{\delta}_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n).$$

Здесь δ_j обозначает меру Дирака,

$$\delta_j \varphi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n) = \varphi(\xi_1, \dots, 0, \dots, \xi_n), \qquad j \in \{k+1, \dots, n\}.$$

Теорема полностью доказана. □

Замечание 2.3.

(i) В силу включения $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_p$ при $p \in (1, \infty)$ приведенное доказательство показывает, что оценка (2.9) в теореме 2.8 справедлива также при произвольном $p \in [1, \infty]$. Это доказывает часть теоремы 2.3 Ильина для случая $\beta \in \mathrm{int}_n(\mathrm{ch}(\mathcal{A}))$. Доказательство теоремы 2.3 в общем случае может быть выведено из вида мультипликатора (2.17) и при $\beta \in \mathrm{ch}(\mathcal{A})$.

(ii) Боман [33] доказал теорему 2.8 значительно сложнее, используя теорему 1.4 де Лю и Миркила и некоторые другие результаты гармонического анализа.

В следующей теореме мы показываем, что при каждом $p \in (1, \infty]$ неравенство (2.11) с любым $\varepsilon > 0$ уже характеризует эллиптические системы в классе всех слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$ систем с постоянными коэффициентами в их главных частях.

Теорема 2.9 (см. [13]). *Пусть $p \in (1, \infty]$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — операторы порядка l, главные части которых имеют постоянные коэффициенты, т. е. $P_j^l(x, D) = P_j^l(D)$, и $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha| < l$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Тогда система операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ эллиптична в точности тогда, когда она ε-слабо коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\Omega)$.*

Для операторов $P_j(D)$ с постоянными коэффициентами результат остается верным и при $p = 1$.

В частности, операторы типа Мальгранжа, т. е. операторы вида $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$, являются слабо коэрцитивными, но не ε-слабо коэрцитивными в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.4. В этом обзоре мы не касаемся условий коэрцитивности для системы максимальных операторов. Этим вопросам, в частности, посвящены работы Ароншайна [31], Агмона [30], Шехтера [42], Смита [43], Нечаса [40] и В. П. Михайлова [22]. В работе О. В. Бесова [1] (см. также [2, гл. III, § 11]) решается аналогичная задача коэрцитивности для максимальных операторов с переменными коэффициентами и l-квазиоднородной главной частью. Отметим также работу Г. Г. Казаряна [7], в которой найдены достаточные условия справедливости оценки вида (2.3) в случае $N = 1$ и вырожденного многочлена $P_1(\xi)$.

3. Оценки в L^∞ для систем эллиптических и l-квазиэллиптических операторов

В этом разделе мы распространяем теорему 2.4 де Лю и Миркила на случай одного оператора *с переменными коэффициентами.* Кроме того, мы приводим аналоги этой теоремы для системы с постоянными коэффициентами в изотропном и анизотропном случаях. Всюду в дальнейшем $\Omega = \mathbb{R}^n$.

3.1. Изотропный случай.

Вначале мы приведем общие результаты о слабо коэрцитивных системах в изотропных пространствах $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, представляющие и самостоятельный интерес.

Теорема 3.1 (см. [13]). *Пусть $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — система операторов вида (1.2) порядка $l \geqslant 2$, коэффициенты главных частей которых постоянны. Пусть также система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.*

(i) *Если коэффициенты операторов $P_j(x,D)$ непрерывны, $j\in\{1,\dots,N\}$, то при каждом фиксированном $x_0\in\mathbb{R}^n$ множество нулей*

$$\mathcal{N}(x_0,P):=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ P_1(x_0,\xi)=\dots=P_N(x_0,\xi)=0\}$$

системы полиномов $\{P_j(x_0,\xi)\}_1^N$ компактно.

(ii) *Для любой системы $\{Q_j(x,D)\}_1^N$, где $Q_j(x,D)$ — операторы порядка $\leqslant l-2$, система $\{P_j(x,D)+Q_j(x,D)\}_1^N$ также слабо коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$.*

(iii) *Пусть $\xi^0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ — нуль отображения*

$$P^l:=(P^l_1,\dots,P^l_N):\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{2N},\tag{3.1}$$

т. е. $P^l_j(\xi^0)=0,\ j\in\{1,\dots,N\}$, и

$$T_{2j-1}(\xi):=\operatorname{Re}P^l_j(\xi),\qquad T_{2j}(\xi):=\operatorname{Im}P^l_j(\xi),\qquad j\in\{1,\dots,N\}.\tag{3.2}$$

Если $n\geqslant 2N+1$, то ранг якобиевой матрицы отображения

$$T:=(T_1,\dots,T_{2N}):\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{2N}\tag{3.3}$$

в точке ξ^0 не превосходит $2N-1$.

(iv) *Пусть дополнительно $a_{j\alpha}(\cdot)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha|<l-1$ и $a_{j\alpha}(\cdot)\in C^1(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha|=l-1$. Если $N=1$, $p=\infty$, $n\geqslant 2$, $\xi^0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ — нуль полинома $P^l(\xi)$. Тогда $\nabla P^l(\xi^0)\neq 0$. В частности, при $n=2$ нули полинома $P^l(\xi)$ простые.*

Замечание 3.1.

(i) Компактность множества нулей отображения

$$P=(P_1,\dots,P_N):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{2N}$$

в случае слабо коэрцитивной системы $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами вытекает из алгебраического неравенства (1.6).

(ii) В доказательстве утверждения (iii) используются теория степени отображения (см. [24,25]) и другие топологические соображения.

(iii) В случае постоянных коэффициентов утверждение (iv) содержательно лишь при $n=2$, так как в силу теоремы 2.4 при $n\geqslant 3$ каждый слабо коэрцитивный в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ оператор является эллиптическим.

Теорема 3.2 (см. [13,14])**.** *Пусть $l\geqslant 2$, $n\geqslant 3$ и $P(x,D)$ — дифференциальный оператор порядка l,*

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant l}a_\alpha(x)D^\alpha,\tag{3.4}$$

с постоянными коэффициентами в его главной части, $P^l(x,D)=P^l(D)$. Пусть, кроме того, $a_\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha|<l-1$, а также $a_\alpha(\cdot)\in C^1(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha|=l-1$.

Тогда оператор $P(x,D)$ слабо коэрцитивен в изотропном пространстве Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда он эллиптичен.

Набросок доказательства. Ввиду теоремы 2.5, достаточно доказать, что из слабой коэрцитивности оператора $P(x,D)$ вида (3.4) в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ вытекает его эллиптичность.

Предположим противное, т. е. что $P(x,D)$ слабо коэрцитивен, но не эллиптичен. Тогда $P^l(\xi^0)=0$ при некотором $\xi^0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Выполняя, если нужно, замену переменных $\xi_1,\dots,\xi_n$, можно считать, что $\xi^0=(1,0,\dots,0)$. Тогда из тождества Эйлера (1.10) для однородных полиномов и равенства $P^l(\xi^0)=0$ вытекает, что $(\partial P^l/\partial\xi_1)(\xi^0)=0$. Но так как $n\geqslant 3$, то согласно теореме 3.1 (iii) ранг матрицы Якоби отображения $P^l:=(\operatorname{Re}P^l,\operatorname{Im}P^l)$ в точке ξ^0 не превосходит 1. Выполняя, если нужно, линейную замену координат $\xi_2,\dots,\xi_n$, можно считать второй столбец этой матрицы нулевым, т. е. $(\partial P^l/\partial\xi_2)(\xi^0)=0$. Таким образом, символ $P(x,\xi)$ оператора $P(x,D)$ не содержит мономов ξ_1^l и $\xi_1^{l-1}\xi_2$.

Далее, в силу предложения 1.5, из оценки (2.10) при $N = 1$, $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ вытекает «суженная» оценка

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2<l} \|D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (3.5)$$

Используя следствие 1.2, легко показать, что $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0) \not\equiv 0$. Поэтому найдется k $(\geqslant 2)$, для которого коэффициент при мономе $\xi_1^{l-k}\xi_2^k$ в полиноме $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отличен от нуля. Выберем наименьшее такое k и проведем прямую m через точки $(l-1; 0)$ и $(l-k; k)$. Обозначим через $l' := (l_1', l_2')$ вектор, компоненты которого $l_1' := l-1$ и $l_2' := k(l-1)/(k-1)$ — длины отрезков, отсекаемых прямой m на осях координат.

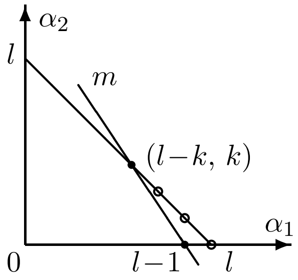

Рис. 1

Поскольку мономы ξ_1^l и $\xi_1^{l-1}\xi_2$ в символе $P(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отсутствуют, то все показатели α мономов ξ^α из $P(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ лежат в той же полуплоскости относительно прямой m, что и точка $(0; 0)$ (см. рис. 1). То есть «суженный» оператор $P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0)$ имеет вид

$$P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = \sum_{\alpha_1/l_1' + \alpha_2/l_2' \leqslant 1} a_{\alpha_1,\alpha_2}(x)\, D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}.$$

Это позволяет определить его главную (квазиоднородную) часть при помощи вектора l':

$$P^{l'}(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = c(x) D_1^{l-1} + b D_1^{l-k} D_2^k,$$

причем $b \neq 0$. Поскольку оценка (3.5) имеет место с оператором D_1^{l-1} в левой части, то в силу (анизотропного!) следствия 1.2 справедливо равенство

$$\xi_1^{l-1} = \lambda(x)\,[c(x)\xi_1^{l-1} + b\xi_1^{l-k}\xi_2^k], \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) вытекает, что $\lambda(x)\, c(x) \equiv 1$ и $\lambda(x)\, b \equiv 0$, что противоречит условию $b \neq 0$. Следовательно, оператор $P(x, D)$ эллиптичен. Теорема доказана. □

Замечание 3.2. Отметим, что метод доказательства теоремы 2.4 де Лю и Миркила, основанный на применении теоремы 1.4 и некоторых свойств конечных борелевских мер, неприменим для операторов с переменными коэффициентами. Для доказательства теоремы 3.2 мы применили другой метод, связанный с принципиальной возможностью неоднозначного выделения главной части дифференциального оператора, что позволяет применять «анизотропный» результат (тождество (1.35)) в «изотропной» ситуации.

Кроме того, приведенное выше доказательство дает другой (более простой) способ доказательства теоремы 2.4. Действительно, в случае постоянных коэффициентов условия

$$P^l(\xi^0) = \frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}(\xi^0) = \frac{\partial P^l}{\partial \xi_2}(\xi^0) = 0, \qquad \xi^0 = (1, 0, \dots, 0)$$

после «сужения» оператора P на двумерное подпространство, порожденное ξ_1 и ξ_2, означают, что $\nabla \widetilde{P}^l(1, 0) = 0$ ($\widetilde{P}$ — соответствующее «сужение» оператора P). Последнее условие сразу же ведет к противоречию с теоремой 3.1, (iv).

Перейдем теперь к случаю системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в изотропном пространстве $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$. Не нарушая общности, можно считать, что главные символы $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ линейно независимы.

Теорема 3.3 (см. [13]). *Пусть $l \geqslant 2$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — линейно независимая система операторов с постоянными коэффициентами порядка l, удовлетворяющая условиям:*

(i) $n \geqslant 2N+1$;

(ii) *главные символы $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ операторов $\{P_j(D)\}_1^N$, суженные на любое двумерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, остаются линейно независимыми.*

Тогда система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда она эллиптична.

Примеры 3.1.

(1) Условие (ii) теоремы 3.3 существенно для ее справедливости. Так, для системы

$$P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \qquad P_2(\xi) := (\xi_4 + i)(\xi_5 + i)$$

выполнено условие (i) ($n = 2N+1 = 5$), но сужения главных символов $P_1^2(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ и $P_2^2(\xi) = \xi_4\xi_5$ полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^2$ на двумерное подпространство, порожденное ξ_1 и ξ_2, линейно зависимы (поскольку последнее из них — нулевое). Тогда условие (ii) нарушено. При этом система $\{P_j(D)\}_1^2$ слабо коэрцитивна в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^5)$, но не эллиптична.

(2) В то же время условие (ii) теоремы 3.3 не является необходимым. Так, система

$$P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2, \qquad P_2(\xi) := \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2$$

слабо коэрцитивна в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^5)$, хотя сужения полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^2$ на подпространство, порожденное ξ_1 и ξ_2, линейно зависимы.

(3) Мы не располагаем примерами слабо коэрцитивных в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптических систем операторов при $N > 1$, для которых нарушено условие (i), но выполнено (ii). Однако системы, для которых нарушены оба условия (i) и (ii) теоремы 3.3, строятся легко. Например, при $n = 2N$ для системы

$$P_j(\xi) := (\xi_{2j-1} + i)(\xi_{2j} + i), \qquad j \in \{1, \ldots, N\}$$

нарушены оба условия (i) и (ii) теоремы 3.3. Она также слабо коэрцитивна в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптична.

3.2. Анизотропный случай. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем *координатным*, если оно имеет вид

$$E = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \xi_{i_1} = \cdots = \xi_{i_k} = 0\}, \qquad \text{где} \quad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Обозначим через $P(\xi) \restriction E$ *сужение* полинома $P(\xi)$ на координатное подпространство E, а через $P(D) \restriction E$ — соответствующий оператор.

Не ограничивая общности, расположим числа $l_1, \ldots, l_n$ в порядке убывания (нестрогого):

$$l_1 = \cdots = l_{n_1} > l_{n_1+1} = \cdots = l_{n_2} > \cdots > l_{n_{m-1}+1} = \cdots = l_n.$$

Также положим $n_0 := 0$, $n_m := n$. Тогда пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^m E_k, \tag{3.7}$$

в которой $\{E_k\}_1^m$ — «однородные» координатные подпространства, т. е. E_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, порождено переменными $\xi_{n_{k-1}+1}, \ldots, \xi_{n_k}$, соответствующими k-й группе равных между собой компонент вектора $l = (l_1, \ldots, l_n)$.

Для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ и всех $j \in \{1, \ldots, N\}$ обозначим через $P_j(\xi) \restriction E_k$ сужение полинома $P_j(\xi)$ на подпространство E_k. При этом система $\{P_j^l(\xi) \restriction E_k\}_1^N$ является однородной степени l_{n_k}.

Отметим также, что для сужений на «однородные» подпространства E_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$ остается справедливым и утверждение (ii) «однородной» теоремы 1.5.

Теорема 3.4 (см. [11]). *Пусть $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n$ и $\{E_k\}_1^m$ — «однородные» подпространства из (3.7).*

(i) *Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ является l-квазиэллиптической, то*

$$\text{«суженная» система } \{P_j(\xi) \restriction E_k\}_1^N \text{ — эллиптическая при каждом } k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.8}$$

(ii) *Обратно, если система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ *и выполнено условие* (3.8), *то она* l*-квазиэллиптична.*

Следствие 3.1 (см. [11]). *Пусть* $l_1 > l_2 > \cdots > l_n$ *и выполнено условие*

$$\big(P_1^l(0,\dots,0,\xi_k,0,\dots,0),\dots,P_N^l(0,\dots,0,\xi_k,0,\dots,0)\big) \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi_k \neq 0, \quad k \in \{1,\dots,n\}.$$

Тогда система $\{P_j(D)\}_1^N$ *слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ *в точности тогда, когда она* l*-квазиэллиптична.*

Следующие леммы иногда упрощают проверку условия (3.8).

Лемма 3.1 (см. [11]). *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$ — *некоторое координатное подпространство. Если система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *слабо коэрцитивна в* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$, *то «суженная» система* $\{P_j(D)\restriction E\}_1^N$ *остается слабо коэрцитивной в* $W^{l'}_{\infty,0}(E)$, *где* l' — *соответствующее «сужение» вектора* l.

Лемма 3.2 (см. [11]). *Пусть* $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2 \geqslant 2$ *и оператор*

$$P(x, D_1, D_2) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{\alpha_1,\alpha_2}(x)\, D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \tag{3.9}$$

слабо коэрцитивен в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*:

(i) $a_{l_1,0} \neq 0$, *т. е.* $P^l(1,0) \neq 0$;

(ii) *если к тому же* l_2 *не является делителем* l_1, *то* $a_{0,l_2} \neq 0$, *т. е.* $P^l(0,1) \neq 0$.

Замечание 3.3. Подчеркнем, что условия леммы 3.2 являются необходимыми. Так, при $l_1 = l_2$ или $l_2 = 1$ заключение леммы неверно. В первом случае контрпример дает оператор $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$, а во втором — оператор $P(D) = D_1^{l_1-1}$.

Леммы 3.1, 3.2 и теорема 3.4 играют существенную роль в доказательстве следующей теоремы, являющейся анизотропным аналогом теоремы 2.4 де Лю и Миркила.

Теорема 3.5 (см. [11, 12]). *Пусть* $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$, $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \dots \geqslant l_n \geqslant 2$ *и* $P(D)$ — *оператор с постоянными коэффициентами вида*

$$P(D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_\alpha\, D^\alpha. \tag{3.10}$$

Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

(i) $l_{n-2} = l_{n-1} = l_n$;

(ii) l_n *не является делителем хотя бы одного из* l_k *при* $k \in \{1,\dots,n-1\}$.

Тогда оператор $P(D)$ *слабо коэрцитивен в анизотропном пространстве* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ *в точности тогда, когда он* l*-квазиэллиптичен.*

Таким образом, теорема 3.5 верна для п. в. наборов $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$. Поэтому слабая коэрцитивность оператора (3.10) в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ не влечет его l-квазиэллиптичность в исключительных случаях. В разделе 5 будет показано, что условие (ii) теоремы является существенным (см. теорему 5.4).

Дополним теорему 3.5, рассмотрев случай $n = 2$.

Следствие 3.2 (см. [11]). *Пусть* $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2 \geqslant 2$ *и* $P(D)$ — *оператор вида* (3.10). *Если* l_2 *не является делителем* l_1, *то слабая коэрцитивность оператора* $P(D)$ *в* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *эквивалентна его* l*-квазиэллиптичности.*

Замечание 3.4. При $N > 1$, в отличие от случая $N = 1$, условие (3.8) не вытекает из слабой коэрцитивности системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ даже в изотропном случае. Так, система

$$P_1(D) = D_1^{k+1}, \qquad P_2(D) = D_2^k, \qquad k \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W^{k+1}_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптична. Отметим, что слабая коэрцитивность системы (3.11) в $W^{k+1}_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ вытекает из ее l-квазиэллиптичности при $l = (k+1, k)$.

Менее тривиальный пример дает система

$$P_1(D) = D_1^5 + iD_2^3, \quad P_2(D) = D_3^2, \quad P_3(D) = D_1^3 D_3, \quad P_4(D) = D_1 D_3^2, \quad P_5(D) = D_1 D_2 D_3,$$

которая не l-квазиэллиптична при $l = (5, 3, 3)$, но слабо коэрцитивна в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^3)$.

4. Условия существования l-квазиэллиптических и слабо коэрцитивных систем при заданном векторе $l = (l_1, \dots, l_n)$

4.1. Существование l-квазиэллиптических систем. Согласно результату Лопатинского [16] (см. также [15, гл. II, § 1]), при $n \geqslant 3$ эллиптический оператор $P(D)$ имеет четный порядок, а также является собственно эллиптическим. В [12, 13] нами получено следующее полное описание тех векторов l, для которых существуют l-квазиэллиптические системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$.

Теорема 4.1 (см. [12, 13]). *Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $n \geqslant 2N + 1$. Для существования l-квазиэллиптических систем $\{P_j(x, D)\}_1^N$ необходимо и достаточно, чтобы среди чисел $l_1, \dots, l_n$ было не более $2N - 1$ нечетных.*

Набросок доказательства. Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами.

(i) Необходимость. Если $n > 2N + 1$, то сузим полиномы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ на $k = 2N + 1$-мерное подпространство. Поэтому можно считать, что $n = 2N + 1$.

Пусть вначале все $\{l_j\}_1^n$ нечетны. Обозначим $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 1\}$ и рассмотрим отображение $T := (T_1, \dots, T_{2N}) : \mathbb{S}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$, в котором

$$T_{2j-1}(\xi) := \operatorname{Re} P_j^l(\xi), \qquad T_{2j}(\xi) := \operatorname{Im} P_j^l(\xi), \qquad j \in \{1, \dots, N\}. \tag{4.1}$$

Оно нечетно, $T(-\xi) = -T(\xi)$, и согласно теореме Борсука—Улама [25] выполнено $T(\xi^0) = 0$ в некоторой точке $\xi^0 \in \mathbb{S}^{2N}$. Но это противоречит l-квазиэллиптичности системы $\{P_j(D)\}_1^N$.

(ii) Пусть среди чисел l_j есть ровно одно четное. Например, $l_1 = 2^m l_1'$, где $m \in \mathbb{N}$ и $l_1', l_2, \dots, l_n$ нечетны. Тогда из соотношения $|\alpha : l| = 1$ вытекает $\alpha_1 = 2^m \alpha_1'$, $\alpha_1' \in \mathbb{Z}_+$. После замены $\xi_1' := \xi_1^{2^{-m}}$ в символах $P_j(\xi)$ приходим к l'-квазиэллиптической системе $\{P_j(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)\}_1^N$, $l' := (l_1', l_2, \dots, l_n)$, в которой все компоненты вектора l' нечетны. Противоречие с (i).

(iii) Достаточность. Пусть $n = 2N + 1$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, где $l_1, \dots, l_{n-2}$ нечетны, а l_{n-1} и l_n четны. Тогда система

$$P_1(\xi) := \xi_1^{l_1} + i\xi_2^{l_2}, \ \dots, \ P_{N-1}(\xi) := \xi_{n-4}^{l_{n-4}} + i\xi_{n-3}^{l_{n-3}}, \quad P_N(\xi) := i\xi_{n-2}^{l_{n-2}} + \xi_{n-1}^{l_{n-1}} + \xi_n^{l_n}$$

является l-квазиэллиптической, причем ровно два числа из $\{l_j\}_1^n$ четны. □

Замечание 4.1. Условие $n \geqslant 2N + 1$ теоремы 4.1 является точным. Например, система

$$P_1(D) := D_1^{l_1} + iD_2^{l_2}, \quad \dots, \quad P_N(D) := D_{2N-1}^{l_{2N-1}} + iD_{2N}^{l_{2N}}. \tag{4.2}$$

является l-квазиэллиптической при $n = 2N$ и любом $l = (l_1, \dots, l_{2N})$.

Следствие 4.1 (см. [13]). *Если $n \geqslant 3$, то l-квазиэллиптические операторы существуют в точности тогда, когда среди чисел $l_1, \dots, l_n$ не более одного нечетного.*

В изотропном случае теорема 4.1 обобщает результат Лопатинского, принимая следующий вид.

Следствие 4.2 (см. [13]). *Пусть $l_1 = \dots = l_n = l$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — эллиптическая система порядка l. Если $n \geqslant 2N + 1$, то l четно.*

4.2. Существование слабо коэрцитивных систем. Перейдем теперь к условиям существования слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ систем. В анизотропном случае справедлив более общий, чем лемма 3.2, результат.

Предложение 4.1 (см. [12]). *Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \dots \geqslant l_{n-k} > l_{n-k+1} = \dots = l_n$ и оператор $P(D)$ вида (3.9) слабо коэрцитивен в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда его l-главный символ $P^l(\xi)$ может обращаться в нуль лишь в точках k-мерного координатного подпространства $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-k} = 0\}$.*

Следующая теорема распространяет «половину» теоремы 4.1 на случай слабо коэрцитивных систем.

Теорема 4.2 (см. [12]). *Пусть система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *вида*

$$P_j(D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}\, D^{\alpha}, \qquad j \in \{1, \ldots, N\} \tag{4.3}$$

слабо коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, $n \geqslant 2N + 1$, *а отображение*

$$T := (T_1, \ldots, T_{2N}) :\ \mathbb{S}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}, \tag{4.4}$$

где $\{T_j(\xi)\}_1^{2N}$ *определяются равенствами* (4.1), *имеет конечное число нулей на единичной сфере* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Тогда среди чисел* $l_1, \ldots, l_n$ *не более* $2N$ *нечетных.*

Следствие 4.3 (см. [12]). *Пусть* $n \geqslant 3$ *и оператор* $P(D)$ *вида* (3.9) *слабо коэрцитивен в* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$, *а его* l*-главный символ* $P^l(\xi)$ *имеет конечное число нулей на сфере* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Тогда среди чисел* $l_1, \ldots, l_n$ *не более двух нечетных.*

Комбинируя предложение 4.1 с теоремой 4.2, получим

Следствие 4.4 (см. [12]). *Пусть* $n \geqslant 3$ *и среди чисел* $l_1, \ldots, l_n$ *не менее трех нечетных. Тогда не существует слабо коэрцитивных операторов в* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

Из теоремы 4.2 вытекает следующий «изотропный» результат.

Предложение 4.2 (см. [12]). *Пусть* $l_1 = \cdots = l_n = l$, $n \geqslant 2N + 1$ *и система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *вида* (4.3) *слабо коэрцитивна в* $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$ *при* $p \in [1, \infty]$. *Если отображение* (4.4) *имеет конечное число нулей на сфере* $\mathbb{S}^{n-1}$, *то* l *четно.*

5. Слабо коэрцитивные неэллиптические и неквазиэллиптические системы

В связи с ограничениями в теоремах 3.3, 3.4 и 3.5 на систему операторов перейдем теперь к вопросу об условиях существования слабо коэрцитивных неэллиптических (неквазиэллиптических) систем в шкале изотропных (анизотропных) пространств Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

5.1. Изотропный случай. При $n = 2$ критерий де Лю и Миркила (см. теорему 2.4) не имеет места. Так, Мальгранж впервые указал, что неэллиптический оператор $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$ является слабо коэрцитивным в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ (см. [34]).

В следующей теореме дается полная характеристика операторов, слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ и алгебраический критерий слабой коэрцитивности.

Теорема 5.1 (см. [12, 13]).

(i) *Произвольный слабо коэрцитивный оператор порядка* $l \geqslant 2$ *в изотропном пространстве* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *имеет вид*

$$R(D) = P(D) \prod_{k=1}^{m} [\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k] + Q(D), \tag{5.1}$$

где $P(D)$ — *эллиптический оператор порядка* $l - m$, $Q(D)$ — *произвольный оператор порядка* $\leqslant l - 2$, $\alpha_k \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, (λ_k, μ_k) — *попарно неколлинеарные векторы в* $\mathbb{R}^2$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $m \leqslant l$.

(ii) *Обратно, всякий оператор* $R(D)$ *вида* (5.1) *слабо коэрцитивен в изотропном пространстве* $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^2)$ *при* $p \in [1, \infty]$.

Следствие 5.1. *Произведение эллиптического оператора порядка* l *от двух переменных на слабо коэрцитивный в* $W^m_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *оператор порядка* m *является слабо коэрцитивным в* $W^{l+m}_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *оператором.*

Теорема 5.2 (см. [12, 13]). *Пусть* $P(D)$, $D = (D_1, D_2)$ — *оператор порядка* l, *а все коэффициенты и корни полинома* $P^l(\xi)$ *вещественны. Тогда оператор* $P(D)$ *слабо коэрцитивен в изотропном пространстве* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *в точности тогда, когда полиномы* $P^l(\xi)$ *и* $\operatorname{Im} P^{l-1}(\xi)$ *не имеют общих нетривиальных вещественных нулей. Здесь* $P^{l-1}(\xi) := \sum\limits_{|\alpha|=l-1} a_{\alpha}\xi^{\alpha}$ *обозначает однородную часть полинома* $P(\xi)$ *степени* $l - 1$.

Замечание 5.1.

(i) При помощи результата $R[f,g]$ полиномов f и g условие теоремы 5.2 записывается в виде $R[P^l, \operatorname{Im} P^{l-1}](\xi) \neq 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n$. В таком виде проверка слабой коэрцитивности не требует знания нулей полинома $P^l(\xi)$.

(ii) Теорема 5.1 вместе с теоремой 3.1 показывают, что любой строго гиперболический оператор порядка l от двух переменных после подходящего возмущения его оператором порядка $l-1$ становится слабо коэрцитивным в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$. Возмущениями порядка $l-2$ добиться этого, вообще говоря, невозможно.

(iii) Операторы (5.1) остаются слабо коэрцитивными в $W^l_{p,0}(\Omega)$ в случае любой (в том числе ограниченной) области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, но не описывают всей совокупности слабо коэрцитивных операторов в $W^l_{p,0}(\Omega)$.

(iv) Теорема 5.1 также позволяет дополнить теорему 3.1, (iii) для случая $N=1$ и $n=2N=2$. Так, используя представление (5.1), легко показать, что для неэллиптического оператора $P(D)$, слабо коэрцитивного в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$, ранг якобиевой матрицы отображения $(\operatorname{Re} P^l, \operatorname{Im} P^l) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в точке $\xi^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, в которой $P^l(\xi^0) = 0$, равен единице. При этом условие $n \geqslant 2N+1$ нарушается.

В следующей теореме приводятся широкие классы слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$, но не эллиптических систем.

Теорема 5.3 (см. [11–13]). *Пусть $\{P_j(D)\}$ — эллиптическая система операторов с постоянными коэффициентами порядка l, $R_{pq}(D)$ — операторы вида*

$$R_{pq}(D) := (D_p + i)(D_q + i), \qquad 1 \leqslant p < q \leqslant n. \tag{5.2}$$

Тогда система операторов

$$S_{jpq}(D) := P_j(D) R_{pq}(D), \quad j \in \{1,\dots,N\}, \quad p,\ q \in \{1,\dots,n\}, \quad p > q \tag{5.3}$$

слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W^{l+2}_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$, но не эллиптична.

В доказательстве теоремы 5.3 используется теорема 2.5 о мультипликаторах в шкале L^p, $p \in [1,\infty]$. В частности, при $N=1$ используются мультипликаторы вида

$$\Phi_\alpha(\xi) := \chi(\xi) \frac{\xi^\alpha}{P(\xi) \sum\limits_{k=2}^{n} (1+\xi_k^2)}, \qquad |\alpha| \leqslant l+1,$$

где $P(\xi)$ — эллиптический полином степени l, $\alpha_1 \leqslant l-1$, а $\chi(\xi)$ — гладкая функция, такая, что $\operatorname{supp}(1-\chi) \subset B_R$, где B_R — шар, содержащий нули полинома $P(\xi)$. Конструкция мультипликаторов для случая системы операторов ($N > 1$) более сложная и здесь опускается (см. детали в [13]).

При $N=1$ из теоремы 5.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.2 (см. [11–13]). *Пусть $P(D)$ — эллиптический оператор порядка l, $R_{pq}(D)$ — операторы вида (5.2). Тогда система $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W^{l+2}_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптична.*

Теорема 5.2 точна при $p=\infty$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.1 (см. [11–13]). *Система $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$, где $P(D)$ — эллиптический оператор порядка l, а $R_{pq}(D)$ — операторы вида (5.2), перестает быть слабо коэрцитивной в изотропном пространстве $W^{l+2}_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ после удаления из нее любого оператора.*

5.2. Анизотропный случай. В следующей теореме предъявляются широкие классы слабо коэрцитивных операторов в шкале анизотропных пространств $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$, не являющихся l-квазиэллиптическими. Это, в частности, показывает точность условий теоремы 3.5 при п. в. $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$.

Теорема 5.4 (см. [12]). *Пусть $n \geqslant 2$, $l := (2km_1,\dots,2km_{n-1},k)$; $k, m_1,\dots,m_{n-1} \in \mathbb{N}$, а $P(D)$ — l-квазиэллиптический оператор с постоянными коэффициентами вида (3.4). Пусть также выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) *все коэффициенты оператора* $P(D)$ *вещественны*;
(ii) *все коэффициенты оператора* $P(D)$, *кроме коэффициента при* D_n^k, *вещественны.*

Тогда оператор

$$R(D) := P(D)\sum_{j=1}^{n-1} D_j^{2m_j} + bD_n^k$$

слабо коэрцитивен в шкале анизотропных пространств Соболева $W^{l_+}_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$, *где* $l_+ := (2(k+1)m_1,\dots,2(k+1)m_{n-1},k+1)$, *при* $b \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *в первом случае и* $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *во втором. При этом оператор* $R(D)$ *не является* l_+*-квазиэллиптическим.*

В доказательстве теоремы 5.4 используется теорема 2.5, с помощью которой доказано, что функции вида

$$\Psi_\alpha(\xi) := \chi(\xi)\,\frac{\xi^\alpha}{P(\xi)\sum\limits_{j=1}^{n-1}\xi_j^{2m_j} + i\xi_n^k}, \qquad |\alpha : l_+| < 1,$$

являются мультипликаторами в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$. Здесь l и l_+ — векторы в условии теоремы 5.4, $P(\xi)$ — l-квазиэллиптический полином с вещественными коэффициентами, $\chi(\xi)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{supp}(1-\chi) \subset B_r$, а B_r — шар, содержащий нули полинома $P(\xi)$.

Замечание 5.2. Из теоремы 5.4 при $l := (2,4,\dots,2n)$ вытекает, что оператор

$$P(D) = (D_1^2 + D_2^4 + \dots + D_{n-1}^{2(n-1)} + D_n^{2n})(D_1^2 + D_2^4 + \dots + D_{n-1}^{2(n-1)}) + iD_n$$

слабо коэрцитивен в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1,\infty]$, но не является l-квазиэллиптическим.

6. Оценки для тензорного произведения эллиптических операторов в L^∞

В этом разделе рассмотрим случай, когда система состоит из одного дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами.

Л. Хермандер [27] полностью описал пространство $L^0_{2,\Omega}(P)$ в случае $p = 2$ и ограниченной области Ω для произвольного оператора $P(D)$ (см. теорему 1.1). Отправляясь от этого результата, в [27, теорема 2.5] показано, что для *тензорного произведения* дифференциальных полиномов

$$P(D) := P_1(D) \otimes P_2(D) := P_1(D_1,\dots,D_{p_1})\,P_2(D_{p_1+1},\dots,D_n), \qquad p_1 \in [1,n), \tag{6.1}$$

т. е. произведения операторов, действующих по различным группам переменных, пространство $L^0_{2,\Omega}(P)$ совпадает с линейной оболочкой произведений Q_1Q_2 операторов $Q_k \in L^0_{2,\Omega}(P_k)$, т. е. оно изоморфно тензорному произведению пространств $L^0_{2,\Omega}(P_1)$ и $L^0_{2,\Omega}(P_2)$.

В связи с упомянутым результатом Хермандера возникает задача об описании пространства $L^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ для тензорного произведения $P = P_1 \otimes P_2$ двух эллиптических дифференциальных полиномов при $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$. Как будет видно далее, результат существенно зависит от наличия младших членов в записи операторов P_j, $j = 1,2$.

Назовем полный символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ *невырожденным*, если $P(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 6.1 (см. [13])**.** *Пусть* $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$, *где* $P_1(D)$ *и* $P_2(D)$ — *эллиптические операторы, символы* $P_1(\xi)$ *и* $P_2(\xi)$ *которых зависят от* n_1 *и* n_2 *переменных соответственно,* $n_1 + n_2 = n$.

(i) *Если полные символы операторов* $P_1(D)$ *и* $P_2(D)$ *невырождены, т. е.* $P_1(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^{n_1}$ *и* $P_2(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^{n_2}$, *то* $L^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P) \simeq L^0_{\infty,\mathbb{R}^{n_1}}(P_1) \otimes L^0_{\infty,\mathbb{R}^{n_2}}(P_2)$. *Другими словами, справедлива эквивалентность*

$$Q \in L^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P) \quad \Longleftrightarrow \quad Q(\xi) = \sum_{k=1}^m Q_{k1}(\xi)\,Q_{k2}(\xi), \qquad Q_{kj} \in L^0_{\infty,\mathbb{R}^{n_j}}(P_j), \quad j \in \{1,2\}.$$

(ii) *Если символы операторов* $P_1(D)$ *и* $P_2(D)$ *однородны (т. е. не содержат младших членов), то* $D^\alpha \notin L^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ *при каждом* $\alpha \neq 0$, *т. е. оценка* (1.26) *невозможна при* $Q(D) = D^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Результат теоремы 6.1 был впоследствии усилен одним из авторов.

Теорема 6.2 (см. [9]). *Пусть $P(D)$ — дифференциальный оператор вида* (6.1)*, где $P_1(D)$ и $P_2(D)$ — однородные эллиптические операторы. Тогда включение $Q \in L^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ эквивалентно равенству $Q(D) = c_1 P(D) + c_2$ с некоторыми постоянными $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.*

Отдельный интерес представляет случай оператора $P(D)$ от двух переменных, являющегося тензорным произведением двух обыкновенных дифференциальных операторов $P_1(D_1)$ и $P_2(D_2)$. В работе [10] было получено описание пространства $L^0_{\infty,\mathbb{R}^2}(P)$ для случая, когда один из сомножителей имеет специальный вид (все его нули — вещественные и простые), а второй произволен.

Теорема 6.3 (см. [10]). *Пусть $P(D) = P_1(D_1) \otimes P_2(D_2)$ — дифференциальный оператор, такой, что $P_1(\xi_1)$ — полином степени l, все нули которого вещественные и простые, а $P_2(\xi_2)$ — произвольный полином степени m. Тогда включение $Q \in L^0_{\infty,\mathbb{R}^2}(P)$ эквивалентно равенству*

$$Q(\xi) = P(\xi) \cdot \frac{q(\xi_2)}{p_{22}(\xi_2)} + r(\xi_1). \tag{6.2}$$

Здесь $p_{22}(\xi_2)$ — максимальный делитель $P_2(\xi_2)$, не имеющий вещественных нулей, $q(\xi_2)$ — произвольный полином степени $\leqslant s := \deg p_{22}$, а $r(\xi_1)$ — произвольный полином степени $\leqslant l-1$, если $s = m$, и произвольная постоянная, если $s < m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О. В.* О коэрцитивности в анизотропном пространстве С. Л. Соболева// Мат. сб. — 1967. — *73*, № 4. — С. 585–599.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996.
3. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем// Мат. сб. — 1962. — *59*. — С. 3–52.
4. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
5. *Горин Е. А.* Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии// Усп. мат. наук. — 1978. — *33*, № 4. — С. 169–188.
6. *Ильин В. П.* Об условиях справедливости неравенств между L_p-нормами частных производных функций многих переменных// Тр. МИАН. — 1968. — *96*. — С. 205–242.
7. *Казарян Г. Г.* Об оценках L_p-норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 5. — С. 911–921.
8. *Лизоркин П. И.* Предельные случаи теорем о $\mathfrak{F}L_p$-мультипликаторах// Тр. МИАН. — 1986. — *173*. — С. 164–180.
9. *Лиманский Д. В.* Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов// Укр. мат. вісн. — 2011. — *8*, № 1. — С. 101–111.
10. *Лиманський Д. В.* Умови підпорядкованості для тензорного добутку двох звичайних диференціальних операторів// Допов. НАН Укр. — 2012. — № 4. — С. 25–29.
11. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞// Докл. РАН. — 2004. — *397*, № 4. — С. 453–458.
12. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в $W^l_p(\mathbb{R}^n)$// Докл. РАН. — 2007. — *415*, № 5. — С. 583–588.
13. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева// Мат. сб. — 2008. — *199*, № 11. — С. 75–112.
14. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Об аналоге теоремы де Лю и Миркила для операторов с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2008. — *83*, № 5. — С. 783–786.
15. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1971.
16. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям// Укр. мат. ж. — 1953. — *5*. — С. 123–151.
17. *Маламуд М. М.* Дифференциальные свойства функций и коэрцитивность в пространствах с равномерной нормой// Укр. мат. ж. — 1982. — *34*, № 5. — С. 553–558.
18. *Маламуд М. М.* Оценка для дифференциальных операторов в равномерной норме и коэрцитивность в пространствах С. Л. Соболева// Докл. АН СССР. — 1988. — *298*, № 1. — С. 32–36.
19. *Маламуд М. М.* Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1995. — *56*. — С. 206–261.

20. *Митягин Б. С.* О второй смешанной производной// Докл. АН СССР. — 1958. — *123*, № 4. — С. 606–609.
21. *Митягин Б. С.* О некоторых свойствах функций двух переменных// Вестн. МГУ. Сер. мат. — 1959. — № 5. — С. 137–152.
22. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 59–80.
23. *Михлин С. Г.* О мультипликаторах интегралов Фурье// Докл. АН СССР. — 1956. — *109*, № 4. — С. 701–703.
24. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
25. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
26. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
27. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. — М.: Мир, 1959.
28. *Шилов Г. Е.* О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*, № 1. — С. 246–249.
29. *Юдович В. И.* О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений// Докл. АН СССР. — 1961. — *138*, № 4. — С. 805–808.
30. *Agmon S.* The coerciveness problem for integro-differential forms// J. Anal. Math. — 1958. — *6*. — С. 183–223.
31. *Aronszajn N.* On coercive integro-differential quadratic forms// В сб.: «Conference on Partial Differential Equations». — Lawrence: Univ. Kansas, 1954. — С. 94–106.
32. *Belinsky E. S., Dvejrin M. Z., Malamud M. M.* Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 1. — С. 6–16.
33. *Boman J.* Supremum norms for partial derivatives of functrions of several real variables// Illinois J. Math. — 1972. — *16*. — С. 203–216.
34. *De Leeuw K., Mirkil H.* A priori estimates for differential operators in L_∞ norm// Illinois J. Math. — 1964. — *8*. — С. 112–124.
35. *Kazaniecki K., Stolyarov D. M., Wojciechowski M.* Anisotropic Ornstein non-inequalities// Anal. PDE. — 2017. — *10*, № 2. — С. 351—366.
36. *Kazaniecki K., Wojciechowski M.* On the analytic version of the Mityagin–de Leeuw–Mirkhil non-equality on bi-disc// ArXiv. — 2023. — 2301.09526 [math.FA].
37. *Kirchheim B., Kristensen J.* On rank one convex functions that are homogeneous of degree one// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2016. — *221*, № 1. — С. 527–558.
38. *Kislyakov S. V., Maksimov D. V., Stolyarov D. M.* Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension// J. Funct. Anal. — 2015. — *269*, № 10. — С. 3220–3263.
39. *Littman W.* The wave operator and L^p norms// J. Math. Mech. — 1963. — *12*, № 1. — С. 55–68.
40. *Nečas J.* Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives// В сб.: «Séminaire Equations aux Dérivées partielles». — Montréal: Univ. Montréal, 1966. — С. 102–128.
41. *Ornstein D.* A non-equality for differential operators in the L_1 norm// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1962. — *11*. — С. 40–49.
42. *Schechter M.* Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions// Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — *12*. — С. 37–66.
43. *Smith K. T.* Inequalities for formally positive integro-differential forms// Bul. Am. Math. Soc. — 1961. — *67*. — С. 368–370.

Д. В. Лиманский
Донецкий государственный университет, Донецк, Россия
E-mail: `d.limanskiy.dongu@mail.ru`

М. М. Маламуд
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `malamud3m@gmail.com`

UDC 517.946
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149
EDN: YVHQAW

On subordination conditions for systems of minimal differential operators

D. V. Limanskii[1] and M. M. Malamud[2,3]

[1] *Donetsk State University, Donetsk, Russia*
[2] *RUDN University, Moscow, Russia*
[3] *Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia*

Abstract. In this paper, we provide a review of results on a priori estimates for systems of minimal differential operators in the scale of spaces $L^p(\Omega)$, where $p \in [1, \infty]$. We present results on the characterization of elliptic and l-quasielliptic systems using a priori estimates in isotropic and anisotropic Sobolev spaces $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. For a given set $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ we prove criteria for the existence of l-quasielliptic and weakly coercive systems and indicate wide classes of weakly coercive in $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, nonelliptic, and nonquasielliptic systems. In addition, we describe linear spaces of operators that are subordinate in the $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-norm to the tensor product of two elliptic differential polynomials.

Keywords: differential operator, a priori estimate, quasi-ellipticity, coercivity.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. We are grateful to professors B. S. Mityagin and D. M. Stolyarov for useful discussions and comments that contributed to improving the text of the work. The study was conducted by the first author on the topic of the government assignment (reg. No. 124012400352-6). The second author's research was supported by the grant No. 23-11-00153 of the Russian Science Foundation.

For citation: D. V. Limanskii, M. M. Malamud, "On subordination conditions for systems of minimal differential operators," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 121–149. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149`

REFERENCES

1. O. V. Besov, "O koertsitivnosti v anizotropnom prostranstve S. L. Soboleva" [On coercivity in an anisotropic Sobolev space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1967, **73**, No. 4, 585–599 (in Russian).
2. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1996 (in Russian).
3. L. R. Volevich, "Lokal'nye svoystva resheniy kvaziellipticheskikh sistem" [Local properties of solutions of quasi-elliptic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **59**, 3–52 (in Russian).
4. L. R. Volevich and S. G. Gindikin, *Metod mnogogrannika N'yutona v teorii differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Newton's Polyhedron Method in the Theory of Partial Differential Equations], Editorial URSS, Moscow, 2002 (in Russian).
5. E. A. Gorin, "Ob issledovaniyakh G. E. Shilova po teorii kommutativnykh banakhovykh algebr i ikh dal'neyshem razvitii" [On the research of G. E. Shilov on the theory of commutative Banach algebras and their further development], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1978, **33**, No. 4, 169–188 (in Russian).
6. V. P. Il'in, "Ob usloviyakh spravedlivosti neravenstv mezhdu L_p-normami chastnykh proizvodnykh funktsiy mnogikh peremennykh" [On conditions for the validity of inequalities between L_p-norms of partial derivatives of functions of several variables], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1968, **96**, 205–242 (in Russian).

7. G. G. Kazaryan, "Ob otsenkakh L_p-norm proizvodnykh cherez neregulyarnyy nabor differentsial'nykh operatorov" [On estimates of L_p-norms of derivatives through an irregular set of differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 5, 911–921 (in Russian).
8. P. I. Lizorkin, "Predel'nye sluchai teorem o $\mathfrak{F}L_p$-mul'tiplikatorakh" [Limit cases of theorems on $\mathfrak{F}L_p$-multipliers], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1986, **173**, 164–180 (in Russian).
9. D. V. Limanskii, "Ob otsenkakh dlya tenzornogo proizvedeniya dvukh odnorodnykh ellipticheskikh operatorov" [On estimates for the tensor product of two homogeneous elliptic operators], *Ukr. mat. visn.* [Ukr. Math. Bull.], 2011, **8**, No. 1, 101–111 (in Russian).
10. D. V. Limans'kii, "Umovi pidporyadkovanosti dlya tenzornogo dobutku dvokh zvichaynikh diferentsial'nikh operatoriv" [Subordination conditions for the tensor product of two ordinary differential operators], *Dopov. NAN Ukr.* [Rep. Natl. Acad. Sci. Ukr.], 2012, No. 4, 25–29 (in Ukrainian).
11. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "O slaboy koertsitivnosti sistem differentsial'nykh operatorov v L^1 i L^∞" [On the weak coercivity of systems of differential operators in L^1 and L^∞], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2004, **397**, No. 4, 453–458 (in Russian).
12. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "Slabo koertsitivnye nekvaziellipticheskie sistemy differentsial'nykh operatorov v $W_p^l(\mathbb{R}^n)$" [Weakly coercive nonquasielliptic systems of differential operators in $W_p^l(\mathbb{R}^n)$], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **415**, No. 5, 583–588 (in Russian).
13. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "Ellipticheskie i slabo koertsitivnye sistemy operatorov v prostranstvakh Soboleva" [Elliptic and weakly coercive systems of operators in Sobolev spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2008, **199**, No. 11, 75–112 (in Russian).
14. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "Ob analoge teoremy de Lyu i Mirkila dlya operatorov s peremennymi koeffitsientami" [On an analog of de Leeuw and Mirkil theorem for operators with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2008, **83**, No. 5, 783–786 (in Russian).
15. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya. T. 1* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. 1], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
16. Ya. B. Lopatinskii, "Ob odnom sposobe privedeniya granichnykh zadach dlya sistemy differentsial'nykh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integral'nym uravneniyam" [On one method of reducing boundary-value problems for a system of elliptic-type differential equations to regular integral equations], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1953, **5**, 123–151 (in Russian).
17. M. M. Malamud, "Differentsial'nye svoystva funktsiy i koertsitivnost' v prostranstvakh s ravnomernoy normoy" [Differential properties of functions and coercivity in spaces with a uniform norm], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1982, **34**, No. 5, 553–558 (in Russian).
18. M. M. Malamud, "Otsenka dlya differentsial'nykh operatorov v ravnomernoy norme i koertsitivnost' v prostranstvakh S. L. Soboleva" [Estimate for differential operators in the uniform norm and coercivity in Sobolev spaces], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **298**, No. 1, 32–36 (in Russian).
19. M. M. Malamud, "Otsenki dlya sistem minimal'nykh i maksimal'nykh differentsial'nykh operatorov v $L_p(\Omega)$" [Estimates for systems of minimal and maximal differential operators in $L_p(\Omega)$], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1995, **56**, 206–261 (in Russian).
20. B. S. Mityagin, "O vtoroy smeshannoy proizvodnoy" [On the second mixed derivative], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **123**, No. 4, 606–609 (in Russian).
21. B. S. Mityagin, "O nekotorykh svoystvakh funktsiy dvukh peremennykh" [On some properties of functions of two variables], *Vestn. MGU. Ser. mat.* [Bull. Moscow State Univ. Ser. Math.], 1959, No. 5, 137–152 (in Russian).
22. V. P. Mikhaylov, "O povedenii na beskonechnosti odnogo klassa mnogochlenov" [On the behavior at infinity of one class of polynomials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 59–80 (in Russian).
23. S. G. Mikhlin, "O mul'tiplikatorakh integralov Fur'e" [On multipliers of Fourier integrals], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1956, **109**, No. 4, 701–703 (in Russian).
24. L. Nirenberg, *Lektsii po nelineynomu funktsional'nomu analizu* [Topics in Nonlinear Functional Analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
25. E. H. Spanier, *Algebraicheskaya topologiya* [Algebraic Topology], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
26. E. Stein, *Singulyarnye integraly i differentsial'nye svoystva funktsiy* [Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions], Mir, Moscow, 1973 (Russian translation).
27. L. Hörmander, *K teorii obshchikh differentsial'nykh operatorov v chastnykh proizvodnykh* [On the Theory of General Partial Differential Operators], Mir, Moscow, 1959 (Russian translation).
28. G. E. Shilov, "O nekotorykh zadachakh obshchey teorii kommutativnykh normirovannykh kolets" [On some problems of the general theory of commutative normalized rings], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, No. 1, 246–249 (in Russian).

29. V. I. Yudovich, “O nekotorykh otsenkakh, svyazannykh s integral’nymi operatorami i resheniyami ellipticheskikh uravneniy” [On some estimates related to integral operators and solutions of elliptic equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1961, **138**, No. 4, 805–808 (in Russian).
30. S. Agmon, “The coerciveness problem for integro-differential forms,” *J. Anal. Math.*, 1958, **6**, 183–223.
31. N. Aronszajn, “On coercive integro-differential quadratic forms,” In: *Conference on Partial Differential Equations*, Univ. Kansas, Lawrence, 1954, pp. 94–106.
32. E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrin, and M. M. Malamud, “Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 1, 6–16.
33. J. Boman, “Supremum norms for partial derivatives of functrions of several real variables,” *J. Illinois Math.*, 1972, **16**, 203–216.
34. K. De Leeuw and H. Mirkil, “A priori estimates for differential operators in L_∞ norm,” *J. Illinois Math.*, 1964, **8**, 112–124.
35. K. Kazaniecki, D. M. Stolyarov, and M. Wojciechowski, “Anisotropic Ornstein non-inequalities,” *Anal. PDE*, 2017, **10**, No. 2, 351—366.
36. K. Kazaniecki and M. Wojciechowski, “On the analytic version of the Mityagin–de Leeuw–Mirkhil non-equality on bi-disc,” *ArXiv*, 2023, 2301.09526 [math.FA].
37. B. Kirchheim and J. Kristensen, “On rank one convex functions that are homogeneous of degree one,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2016, **221**, No. 1, 527–558.
38. S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, and D. M. Stolyarov, “Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension,” *J. Funct. Anal.*, 2015, **269**, No. 10, 3220–3263.
39. W. Littman, “The wave operator and L^p norms,” *J. Math. Mech.*, 1963, **12**, No. 1, 55–68.
40. J. Nečas, “Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives,” In: *Séminaire Equations aux Dérivées partielles*, Univ. Montréal, Montréal, 1966, pp. 102–128.
41. D. Ornstein, “A non-equality for differential operators in the L_1 norm,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, **11**, 40–49.
42. M. Schechter, “Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1959, **12**, 37–66.
43. K. T. Smith, “Inequalities for formally positive integro-differential forms,” *Bul. Am. Math. Soc.*, 1961, **67**, 368–370.

D. V. Limanskii
Donetsk State University, Donetsk, Russia
E-mail: d.limanskiy.dongu@mail.ru

M. M. Malamud
RUDN University, Moscow, Russia
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: malamud3m@gmail.com