Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 99–120
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120
EDN: YUEIWO

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНО-ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Г. Казарян

Институт математики НАН Армении, Ереван, Армения
Российско-Армянский университет, Ереван, Армения

Аннотация. Получены условия, при которых данный многослойный дифференциальный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) мощнее оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$). Это применяется для получения оценок мономов, что, в свою очередь, с использованием теории мультипликаторов Фурье, применяется при получении коэрцитивных оценок производных функций через дифференциальный оператор $P(D)$, применённый к этим функциям.

Ключевые слова: коэрцитивная оценка, сравнение мощности дифференциальных операторов (многочленов), младший член дифференциального оператора (многочлена), многогранник Ньютона, вырожденный (невырожденный) оператор (многочлен), многослойный оператор (многочлен).

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Г. Г. Казарян.* Коэрцитивные оценки для многослойно-вырождающихся дифференциальных операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 99–120. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120

Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ — n-мерные евклидовы пространства точек (векторов) $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответственно, $\mathbb{R}^{n,+} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n\}$, $\mathbb{R}^{n,0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \ldots \xi_n \neq 0\}$. Через $\mathbb{N}$ мы обозначим множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а через $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0$ — множество всех n-мерных мультииндексов, т. е. множество всех точек с целыми неотрицательными координатами $\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\ (i = 1, \ldots, n)\}$. Далее, для вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ запись $x \geqslant 0$ (соответственно, $x > 0$) означает $x_j \geqslant 0\ (j = 1, \ldots, n)$ (соответственно, $x_j > 0\ (j = 1, \ldots, n)$).

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, и $\nu \in \mathbb{R}^{n,+}$ введём обозначения $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$, $|\xi, \lambda| = \sqrt{\xi_1^{2/\lambda_1} + \ldots + \xi_n^{2/\lambda_n}}$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, $\xi^\nu = \xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_n^{\nu_n}$, $|\xi^\nu| = |\xi_1|^{\nu_1} \ldots |\xi_n|^{\nu_n}$, а для $\alpha \in \mathbb{N}_0^n : D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \dfrac{1}{i}\partial/\partial x_j$ или $D_j = \partial/\partial \xi_j$ $(j = 1, \ldots n)$.

Многие вопросы теории общих линейных дифференциальных уравнений в частных производных (и с постоянными, и с переменными коэффициентами) сводятся к сравнению в том или ином смысле соответствующих дифференциальных операторов. В свою очередь, сравнение дифференциальных операторов чаще всего приводится к сравнению их символов (характеристических многочленов), к изучению алгебраических свойств этих символов, в том числе к нахождению алгебраических условий, при которых символ данного оператора бесконечно возрастает при бесконечном возрастании его аргументов, к выяснению вопроса о возможности добавления «младших членов» к символу данного оператора (следовательно, к данному оператору) без нарушения характера этого оператора и т. д.

Следующий пример непосредственно выражает эту связь. Пусть $P(D)$ и $Q(D)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ — отвечающие им характеристические многочлены. Применение L_2-теории, преобразования Фурье и равенства Парсеваля непосредственно приводит к тому, что вопрос о существовании постоянной $c_1 > 0$ такой, что для всех функций $f \in C_0^\infty(E^n)$ имеет место неравенство

$$||Q(D)f||_{L_2} \leqslant c_1\,[||P(D)f||_{L_2} + ||f||_{L_2}], \tag{0.1}$$

сводится к существованию постоянной $c_2 > 0$ такой, что

$$|Q(\xi)| \leqslant c_2[|P(\xi)| + 1] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

На наш взгляд, одной из ярких иллюстраций сведения задач теории дифференциальных уравнений к задачам изучения свойств алгебраических многочленов, в частности, к их сравнению, является теория Л. Хёрмандера (см. [22]) об эквивалентных условиях гипоэллиптичности. С одной стороны, это оператор $P(D)$, для которого все обобщённые решения уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, с другой стороны, это оператор, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет условию

$$\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)| + 1} \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty$$

для любого мультииндекса $\alpha \neq 0$. Отметим, что из этого условия, в частности, следует, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. При этом оказывается, что многие свойства решений гипоэллиптических уравнений, в том числе их бесконечная гладкость, во многом объясняются именно этим свойством их символов.

Отметим ещё, что по этой теории неравенство типа (0.1) для всех функций $f \in C_0^\infty(\Omega)$, где Ω — ограниченная область из $\mathbb{E}^n$, сводится к неравенству (1.2) уже для функций $\tilde{Q}$ и $\tilde{P}$ Хёрмандера, образованных по символам $Q(\xi)$ и $P(\xi)$.

Другой не менее типичный пример такого сведения — это понятие N-гиперболичности по Петровскому—Гордингу, где $N \in \mathbb{E}^n$ (см. [22, теорема 12.3.1]). С одной стороны, это такой оператор $P(D)$, для которого уравнение $P(D)u = f$ с $\operatorname{supp} f \subset H$ имеет одно и только одно решение $u \in C^\infty(E^n)$ с $\operatorname{supp} u \subset H$, где $H := \{x \in E^n, (x, N) > 0\}$; с другой стороны, это оператор, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет условию: существует число τ_0 такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau < \tau_0$.

Если в одномерном случае модуль любого многочлена, отличного от постоянной, бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля его аргумента, то многочлены многих переменных (каковыми являются, например, символы гиперболических по Петровскому—Гордингу операторов), вообще говоря, не обладают этим свойством.

В связи с этим естественно ввести следующее понятие: через $\mathbb{I}_n$ мы обозначим множество многочленов (вообще говоря, с комплексными коэффициентами) $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, а через $\mathbb{I}_n^+$ обозначим множество многочленов с вещественными коэффициентами таких, что $P(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to \infty$. Так как эти понятия можно ввести для любой функции $F(\xi) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и, в частности, для функции $|P(\xi)|$, то далее мы можем пользоваться также и обозначением типа $|P| \in \mathbb{I}_n^+$. При этом очевидно, что условие $P \in \mathbb{I}_n$ эквивалентно каждому из условий $|P| \in \mathbb{I}_n^+$ и $|P| \in \mathbb{I}_n$.

Имея в виду то, что условие $P \in \mathbb{I}_n$ является необходимым для гипоэллиптичности оператора $P(D)$, а также вследствие того, что оно достаточно часто встречается в других областях математического анализа и при этом является трудно проверяемым, естественно задаться вопросом о нахождении условий, при которых многочлен многих вещественных переменных обладает этим свойством, т. е. принадлежит $\mathbb{I}_n$.

На наш взгляд, наиболее значимый результат в этом направлении принадлежит В. П. Михайлову (см. [21]). Аналогичный результат в других терминах получен в работе [2] (см. также [3]). Некоторые частные случаи получены и применены к дифференциальным уравнениям в работах [3–5, 25–27, 30] и др., в работе [4] изучены асимптотические свойства многочленов и алгебраических функций и т. д. Однако все эти работы относились к так называемым невырожденным (регулярным) многочленам. Вырожденные (нерегулярные) многочлены изучены в работах [7–19].

Отметим, что в многомерном случае в поведении многочлена на бесконечности решающую роль могут играть «младшие члены». При этом, если к эллиптическому оператору можно добавлять любой младший член, не нарушая его эллиптичность (при этом сохраняя и силу, и мощность оператора), то к гиперболическим или гипоэллиптическим операторам можно добавлять лишь такие младшие члены, которые удовлетворяют определенным ограничениям.

Далее, многие вопросы разных областей дифференциальных уравнений естественным образом сводятся к требованиям:

1) описать множество операторов (многочленов) $\{Q\}$ (в частности, мономов $\{\xi^\alpha\}$), которые имеют в определенном смысле меньшую мощность или силу, чем данный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) (точные определения см. ниже);
2) выяснить, как влияет добавление таких (в частности, младших) членов на силу, мощность, гипоэллиптичность по Хёрмандеру, гиперболичность по Петровскому—Гордингу или почти гипоэллиптичность данного оператора (многочлена)?

Для изучения этих и других (возникших при изложении дальнейшего текста) вопросов, введём некоторые обозначения и понятия.

Определение 0.1 (см. [28] или [21])**.** Линейную оболочку в $\mathbb{R}^n$ множества мультииндексов $\mathfrak{A} := \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\}$ назовём *многогранником Ньютона* этого множества и обозначим через $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$. Поверхность многогранника $\mathfrak{R}$ обозначим через $\partial\mathfrak{R}$, а множество вершин через $\mathfrak{R}^0$.

Определение 0.2. Многогранник $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется *полным* [21], если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат. Обозначим k-мерные грани многогранника $\mathfrak{R}$ через $\mathfrak{R}_i^k$ $(i = 1, \dots, M_k, k = 0, 1, \dots, n-1)$. Грани многогранника Ньютона будем по определению считать замкнутыми множествами.

Единичный вектор λ называется *внешней нормалью* (или $\mathfrak{R}$*-нормалью*) грани Γ многогранника $\mathfrak{R}$, если:

1) $(\lambda, \mu) = (\lambda, \nu)$ для всех μ и ν из Γ,
2) $(\lambda, \mu) > (\lambda, \nu)$ для всех точек $\mu \in \Gamma$ и $\nu \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$.

Другими словами, $\mathfrak{R}$-нормаль k-мерной грани Γ многогранника $\mathfrak{R}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ — это единичная внешняя нормаль гиперплоскости, опорной к многограннику $\mathfrak{R}$, содержащей грань Γ и не содержащей какую-либо грань Γ размерности больше k.

Таким образом данный вектор λ может служить внешней нормалью одной и только одной грани многогранника $\mathfrak{R}$.

Обозначим через Λ_i^k множество всех внешних нормалей грани $\mathfrak{R}_i^k = \mathfrak{R}_i^k(P)$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k;$ $0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Отметим, что либо множество Λ_i^k состоит из одного вектора (когда $k = n-1$), либо является открытым множеством (когда $0 \leqslant k < n-1$).

Из определения $\mathfrak{R}$-нормалей следует, что для каждого $\lambda \in \Lambda_i^k$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k, 0 \leqslant n-1)$ существует число $d_{i,k} = d_{i,k}(\lambda) \geqslant 0$ такое, что $(\lambda, \beta) = d$ для всех $\beta \in \mathfrak{R}_i^k$ и $(\lambda, \beta) < d$ для любого $\beta \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_i^k$. Отметим, что $\mathfrak{R}$-нормаль $(n-1)$-мерной (и только $(n-1)$-мерной) грани многогранника $\mathfrak{R}$ определяется однозначно.

Определение 0.3 (см. [21] или [12])**.** Грань $\mathfrak{R}_i^k$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1)$ полного многогранника $\mathfrak{R}$ называется *главной*, если среди её внешних нормалей существует нормаль, хотя бы одна координата которой положительна.

Пусть $\mathfrak{R}$ — полный многогранник в $\mathbb{R}^{n,+}$ с вершинами $\mathbb{N}_0^n$, $\mathfrak{R}_i^k$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k,\ 0 \leqslant n-1)$ — произвольная его грань, а Λ_i^k — множество всех $\mathfrak{R}$-нормалей этой грани. Вместе с каждым n-мерным выпуклым многогранником $\mathfrak{R}$ рассмотрим n-мерную единичную сферу концов $\mathfrak{R}$-нормалей этого многогранника, или, что то же самое, сферическое отображение поверхности многогранника $\mathfrak{R}$

на единичную сферу Λ. При этом отображении грани $\Re_i^k$ (при $k < n-1$) соответствует открытое связное множество Λ_i^k, лежащее на Λ и имеющее размерность $n-k-1$. Граням размерности $(n-1)$ соответствуют точки на Λ.

В дальнейших обозначениях мы не будем различать множество $\Re$-нормалей грани $\Re_i^k$ и множество концов этих нормалей, лежащих на Λ, обозначая их через Λ_i^k. По контексту будет ясно, о каком множестве идет речь.

Пусть при $n \geqslant 2$

$$P(D) = P(D_1, D_2, \dots, D_n) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha\, D^\alpha$$

— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha\, \xi^\alpha$$

— отвечающий ему символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) := \{\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Многогранник Ньютона множества $(P) \cup \{0\}$ назовём *многогранником Ньютона оператора* $P(D)$ (*многочлена* $P(\xi)$) и обозначим через $\Re(P)$.

Если $\Re(P)$ — многогранник Ньютона многочлена $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha\, \xi^\alpha$ и $\Re_i^k$ ($1 \leqslant i \leqslant M_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$) — некоторая его (главная) грань, то многочлен $P^{i,k}(\xi) := \sum\limits_{\alpha\in\Re_i^k} \gamma_\alpha\, \xi^\alpha$ назовём *подмногочленом* многочлена P, отвечающим грани $\Re_i^k$ многогранника $\Re(P)$.

Определение 0.4. Многочлен $R(\xi)$ назовём *обобщённо-однородным* (λ-*однородным*), если для вектора $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и числа $d = d(R, \lambda)$

$$R(t^\lambda\, \xi) = R(t^{\lambda_1}\, \xi_1, \dots, t^{\lambda_n}\, \xi_n) = t^d\, R(\xi) \;\; \forall t > 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Докажем, что любой подмногочлен многочлена является обобщённо-однородным.

Лемма 0.1 (см. [21]). *Подмногочлен* $P^{l,m}(\xi)$ ($1 \leqslant l \leqslant M_m$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$) *многочлена* P *является* λ-*однородным для любого* $\lambda \in \Lambda_l^m$, *т. е. существует* (*однозначно определяемое*) *число* $d_{l,m,\lambda}$ *такое, что*

$$P^{l,m}(\xi) = P^{l,m,\lambda}(\xi) = \sum_{\alpha\in\Re_l^m} \gamma_\alpha \xi^\alpha = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{l,m,\lambda}} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Доказательство. Доказательство приведём для случая $m = n-1$, когда внешняя нормаль грани $\Re_l^{n-1}$ определяется однозначно. Случай $m < n-1$ рассматривается аналогично. Пусть $(\lambda, \alpha) = d_{l,m,\lambda}$ — уравнение $(n-1)$-мерной гиперплоскости, в которой лежит грань $\Re_l^{n-1}$, тогда $(\lambda, \alpha) = d_{l,m,\lambda}$ для всех мультииндексов $\alpha \in \Re_l^{n-1}$, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$ в подмногочлене $P^{l,m}(\xi)$.

Заменим вектор ξ на вектор $t^\lambda \xi$ при произвольном $t > 0$, получим

$$P^{l,n-1}(t^\lambda\, \xi) = \sum_{\alpha\in\Re_l^{n-1}} \gamma_\alpha\, |t^\lambda\, \xi|^\alpha = \sum_{\alpha\in\Re_l^{n-1}} t^{(\lambda,\alpha)}\, \gamma_\alpha\, \xi^\alpha = t^{d_{l,m,\lambda}}\, P^{l,n-1}(\xi),$$

что доказывает лемму. □

Следствие 0.1. *Для любого* (*единичного*) *вектора* λ *многочлен* P *можно представить в виде суммы* λ-*однородных многочленов*

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + \ldots + P_M(\xi) = \sum_{k=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_k} \gamma_\alpha\, \xi^\alpha, \tag{0.3}$$

где $M = M(P) = M(P, \lambda)$; *при этом, если* $\lambda > 0$, *то* $d_0 > d_1 > \ldots > d_M \geqslant 0$.

Определение 0.5. Пусть $\Re = \Re(P)$ — многогранник Ньютона многочлена P, а $\Re_i^k$ ($1 \leqslant i \leqslant M_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$) — некоторая грань этого многогранника. Грань $\Re_i^k$ называется *невырожденной* (см. [21]), если $P^{i,k}(\xi) \neq 0 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^{n,0}$. В противном случае грань $\Re_i^k$ называется *вырожденной.*

Многочлен P называется *невырожденным*, если невырождены все главные грани его многогранника Ньютона.

Определение 0.6. Если $\Re_l^m$ ($1 \leqslant l \leqslant M_m$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$) — некоторая главная вырожденная грань многогранника Ньютона $\Re = \Re(P)$ многочлена P, $\lambda \in \Lambda_l^m$, и многочлен P представлен по вектору λ в виде (0.3), где $P_0(\xi) = P^{l,m}(\xi)$.

1) Обозначим $\Sigma(P_0, \lambda) := \{\xi \in \mathbb{R}^{n,0}, |\xi, \lambda| = 1, P_0(\xi) = 0\}$.
2) Пусть $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$. Многочлен P назовём $r = r(\eta)$*-слойно вырожденным* относительно точки η, если $P_0(\eta) = P_1(\eta) = \ldots = P_{r-1}(\eta) = 0$, а $P_r(\eta) \neq 0$ для некоторого $r = r(\eta)$ ($0 < r < M_m$); назовём k*-слойно вырожденным*, где $k = k(P) := \max\limits_{\eta \in \Sigma(P_0)} r(\eta)$. Условимся ради краткости далее такой многочлен называть просто k*-слойным*.

Отметим, что *двухслойность* многочлена определяется просто: $P_1(\eta) \neq 0$ для всех точек $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$.

Цель настоящей заметки — для данного линейного дифференциального оператора $P(D)$ и данного числа $p > 1$ описать множество мультииндексов $\mathbb{M} = \mathbb{M}(P, p)$ таких, что для каждого $\nu \in \mathbb{M}$ с некоторой постоянной $c = c(\nu, P) > 0$ имеет место (коэрцитивное) неравенство

$$||D^{\nu} u||_{L_p} \leqslant c\,[\,||P(D)u||_{L_p} + ||u||_{L_p}\,] \ \ \forall u \in C_0^{\infty}(E^n). \tag{0.4}$$

Как уже было сказано выше, при $p = 2$ оценка (0.4) эквивалентна оценке

$$|\xi^{\nu}| \leqslant c_1\,[|P(\xi)| + 1] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{0.5}$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$.

Ниже множество мультииндексов, для которых справедливо неравенство (0.5), т. е. множество $\mathbb{M}(P, 2)$, мы обозначим просто через $\mathbb{M}$.

В первом разделе статьи для данного класса двухслойно-вырождающихся многочленов $\{P\}$ мы описываем множество $\mathbb{M}$, во втором разделе сравниваем мощности двухслойно-вырождающихся многочленов, в третьем разделе даём оценки мономов через многослойно-вырождающийся многочлен, в четвертом разделе, пользуясь теорией мультипликаторов Фурье, мы получаем коэрцитивные оценки производных функций через многослойно-вырождающийся дифференциальный оператор, применённый к этим функциям.

Изучение оценок в L_p производных функций через данный дифференциальный оператор (проблема коэрцитивности) началось фундаментальной работойАроншайна [25]. Затем Агмон [24] и независимо от него Хёрмандер [23], продолжая работуАроншайна, решили общую проблему коэрцитивности для определенных классов операторов и для областей Ω с достаточно гладкой границей. Шехтер [35] получил аналогичные оценки для систем дифференциальных операторов. В более поздних работах Смита [36] и Нечаса [32] получены оценки производных через данные однородные дифференциальные операторы и для систем таких операторов В работе [1] О. В. Бесова решается аналогичная задача для обобщённо-однородных дифференциальных многочленов с более слабыми ограничениями на область Ω. В. П. Ильиным [6] получены необходимые и достаточные условия для справедливости оценок производных функций через заданный набор производных функций. Нами [7] аналогичные вопросы рассмотрены в более общей постановке, когда дифференциальные многочлены могут не быть однородными.

Во всех перечисленных (и некоторых не перечисленных) работах изучаемые дифференциальные операторы (многочлены) были в определенном смысле невырожденные. Здесь мы рассматриваем случай, когда дифференциальный оператор (многочлен), через который должны оцениваться другие операторы (многочлены и, в частности, мономы) может быть вырожденным.

В настоящей работе для данного многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ мы выделяем множество мономов $\{\xi^{\nu}\}$, для которых выполняется неравенство (0.5), или, что то же самое, описываем множество $\mathbb{M} = \mathbb{M}(P, 2)$. Для этого сначала мы введём класс многочленов $\mathbb{I}_n$ как множество многочленов n ($n \geqslant 2$) переменных с постоянными вещественными коэффициентами, модуль которых бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля аргумента.

Прежде чем перейти к решению поставленных задач, отметим несколько фактов, которые оправдывают такой выбор и позволят нам упростить их постановку:

1) модуль символа $P(\xi)$ гипоэллиптического оператора $P(D)$ бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля аргумента $|\xi|$;
2) очевидно, что многочлены $P(\xi)$ и $P(\xi)+C$ одновременно принадлежат или одновременно не принадлежат $\mathbb{I}_n$ для любой постоянной C.

Поэтому, не умаляя общности, достаточно считать, что множество $\mathbb{I}_n$ состоит из положительных многочленов $\{P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)\}$ с вещественными коэффициентами таких, что $P(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to \infty$. А тот факт, что мы рассматриваем только положительные многочлены с вещественными коэффициентами, оправдывается следующим предложением.

Лемма 0.2 (см. [21] или [7]). *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ — полный n-мерный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi)$ (вообще говоря, с комплексными коэффициентами), а $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P) := \mathfrak{R}(|P|^2)$ — многогранник Ньютона многочлена $|P|^2 = P\,\bar{P}$.*

1) *Многогранник $\mathfrak{M}(P)$ подобен многограннику $\mathfrak{R}(P)$ с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия 2.*
2) *Пусть при этом соответствующие грани имеют одинаковые индексы i, k. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_i^k$ и $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$, где $\alpha^1 \in \mathfrak{R}$ и $\alpha^2 \in \mathfrak{R}$, то $\alpha^1 \in \mathfrak{R}_i^k$ и $\alpha^2 \in \mathfrak{R}_i^k$. Отсюда, в частности, следует, что $[|P|^2]^{i,k}(\xi) \equiv [|P^{i,k}(\xi)|]^2$ $(i = 1, \dots, M_k;\ k = 0, 1, \dots, n-1)$.*
3) *Вырожденным (невырожденным) граням $\mathfrak{R}(P)$ соответствуют вырожденные (невырожденные) грани $\mathfrak{M}(P)$ и наоборот.*
4) *$P \in \mathbb{I}_n$ тогда и только тогда, когда $|P|^2 \in \mathbb{I}_n$.*
5) *Если для всех точек $\nu \in \mathfrak{R}^\star \subset \mathfrak{R}$ справедлива оценка* (0.5), *то оценка* (0.5) *справедлива для точек $\nu \in 2\,\mathfrak{R}^\star$ с заменой P на $|P|^2$.*
6) *Для произвольных многочленов P и Q (вообще говоря, с комплексными коэффициентами) соотношение $Q < P$ выполняется тогда и только тогда, когда $|Q|^2 < |P|^2$.*

1. Оценки мономов через данный многочлен. Двухслойный случай

В. П. Михайлов в [21] ввёл класс невырожденных многочленов $\{\,P\,\}$ с полными многогранниками Ньютона $\{\,\mathfrak{R}(P)\}$, для которых имеет место оптимальный результат, т. е. $\mathbb{M}(P) = \mathfrak{R}(P)$. Аналогичный результат в других терминах получен С. Г. Гиндикиным и Л. Р. Волевичем в [3]. Классы дифференциальных операторов (многочленов), изученных этими авторами, достаточно отличаются от класса эллиптических операторов, однако они близки им в том смысле, что состоят из невырожденных многочленов. В постановке вопроса настоящей работы случай двухслойно-вырожденных операторов (многочленов) впервые изучен в работе [7], в настоящей работе мы рассматриваем многослойно-вырожденный случай.

Сначала докажем некоторые свойства многочленов класса $\mathbb{I}_n$, которыми будем пользоваться.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ — многогранник Ньютона многочлена $P \in I_n$, а $\mathfrak{R}_i^k$ $(i = 1, 2, \dots, M_k,\ k = 0, 1, \dots, n-1)$ — его главные грани. Тогда*:

a) *многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ является полным*;
b) *$P^{i,k}(\xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \dots, M_k,\ k = 0, 1, \dots, n-1)$;*
c) *пусть пара (i,k) $(1 \leqslant i \leqslant M_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1)$, вектор $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}_i^k)$ и точка $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda) = \Sigma(P^{i,k})$ фиксированы, и по некоторому вектору $\lambda \in \Lambda_i^k(P)$ многочлен P представлен в виде* (0.3), *$P_j(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, \dots, l-1)$, $P_l(\eta) \neq 0$ $(1 \leqslant l \leqslant M)$. Тогда $P_l(\eta) > 0$.*

Доказательство. Пункт a) очевиден, потому что если многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P)$ не является полным, то не имеет вершину, например, на первой координатной оси, тогда на последовательности $\{\xi^s = (s, 0, \dots, 0)\}$ $(s = 1, 2, \dots)$ $P(\xi^s) = const$.

Для доказательства обоих пунктов b) и c), полагая, что $P_0(\eta) := P^{i,k}(\eta) < 0$ (соответственно, $P_l(\eta) < 0$) в некоторой точке $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$, мы получим, что на последовательности $\{\xi^s := s^\lambda\, \eta\}_{s=1}^\infty$ $P(\xi^s) \to -\infty$ при $s \to \infty$, что противоречит неотрицательности многочлена P. $\square$

В добавление этой лемме мы докажем один простой результат, которым будем пользоваться ниже.

Лемма 1.2. *Пусть точка* $\alpha \in \mathbb{R}^{n,+}$ *(не обязательно с целыми компонентами) принадлежит выпуклой оболочке* $\Re$ *точек* $\alpha^1, \ldots, \alpha^N$, *т. е.* $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j \, \alpha^j$ *для некоторых* $\sigma_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, N)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j = 1$, $N \geqslant n$. *Тогда для всех* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *имеем* $|\xi^\alpha| \leqslant h(\xi) := |\xi^{\alpha^1}| + \ldots + |\xi^{\alpha^N}|$. *Более того, если* α *— внутренняя точка* $\Re$, *то* $|\xi^\alpha|/[h(\xi)] \to 0$ *при* $h(\xi) \to \infty$.

Доказательство. По неравенству Юнга имеем

$$|\xi^\alpha| = \left|\xi^{\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j \, \alpha^j}\right| = \left|\xi^{\alpha^1}\right|^{\sigma_1} \ldots \left|\xi^{\alpha^N}\right|^{\sigma_N} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \, |\xi^{\alpha^j}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\xi^{\alpha^j}|.$$

Для доказательства второй части леммы отметим, что если α — внутренняя точка $\Re$, то для некоторого $t > 1$ точка $t\,\alpha$ также является внутренней точкой $\Re$, следовательно, $|\xi^{t\,\alpha}| = |\xi^\alpha|^t \leqslant c\,h(\xi)$, т. е. $|\xi^\alpha| \leqslant c^{1/t}\,h(\xi)^{1/t}$. Поэтому $|\xi^\alpha|/h(\xi) \leqslant c^{1/t}\,h(\xi)^{(1/t)-1} \to 0$ при $h(\xi) \to \infty$.

Чтобы описать множество мономов, которые оцениваются через данный многочлен $P \in I_n$, мы сначала рассмотрим простейший случай, когда только одна главная грань многогранника Ньютона $\Re(P)$ многочлена P является вырожденной, при этом размерности $(n-1)$. Очевидно, что рассмотрение случая существования только одной вырожденной грани не умаляет общности потому, что при наличии более одной вырожденной грани соответствующие условия надо накладывать на каждую такую грань. Рассмотрение только $(n-1)$-мерной вырожденной грани объясняется тем, что

1) в двумерном случае это единственно возможный вариант;
2) в случае существования вырожденной грани размерности $k < n-1$ рассуждения можно вести аналогично рассуждениям работ [12] или [7].

□

Теорема 1.1. *Пусть* $\Re = \Re(P)$ *— многогранник Ньютона многочлена* $P \in I_n$, *все главные грани которого невырождены, кроме, быть может, одной* $(n-1)$*-мерной грани* $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ *с внешней нормалью* $\mu > 0$. *Тогда*:

1) *Если* Γ *невырождена, то для всех мультииндексов* $\nu \in \Re$ *справедливо неравенство*
$$|\xi^\nu| \leqslant c\,[|P(\xi)| + 1] \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$
с некоторой постоянной $c = c(P, \nu) > 0$.
2) *Если* Γ *вырождена, по вектору* μ *многочлен* P *представляется в виде* (0.3) *и является двухслойным, т. е.* $P_1(\eta) \neq 0$ *для всех* $\eta \in \Sigma(P_0)$, *то неравенство* (1.1) *справедливо для всех мультииндексов* $\nu \in \Re^* = \Re^*(P, \mu) := \{\nu \in \Re, (\mu, \nu) \leqslant d_1\}$.
3) *если* $\nu \notin \Re^*$, *то неравенство* (1.1) *не выполняется ни для какой постоянной* c.

Доказательство. Сначала докажем пункт 3). Так как очевидно, что для точек $\nu \notin \Re$ неравенство (1.1) не выполняется, то достаточно рассматривать случай $\nu \in \Re \setminus \Re^*$. Пусть $\nu \in \Re \setminus \Re^*$ и $\eta \in \Sigma(P_0, \mu)$.

Принимая во внимание, что $d_1 < (\mu, \nu) \leqslant d_0$ и обозначая $\tau := |\eta_1^{\nu_1}| \ldots |\eta_n^{\nu_n}| \neq 0$, $\xi(t) := t^\mu \, \eta$, имеем $|\xi(t)^\nu| = t^{(\mu,\nu)}\tau$, $|P(\xi(t))| = t^{d_1}\,|P_1(\eta)|(1 + o(1))$ при $t \to \infty$, т. е. $|\xi(t)^\nu|/[1 + |P(\xi(t))|] \to \infty$. Это означает, что неравенство (1.1) не выполняется и доказывает пункт 3) теоремы.

Первый пункт теоремы доказан В. П. Михайловым в работе [21]. Докажем пункт 2). Пусть наоборот, существуют точка $\nu \in \Re^\star$ и последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такие, что $|\xi^s, \mu| \to \infty$ (что эквивалентно $|\xi^s| \to \infty$) при $s \to \infty$ и
$$\frac{|(\xi^s)^\nu|}{|P(\xi^s)| + 1} \to \infty. \tag{1.2}$$

Обозначая $\tau^s := \xi^s/|\xi^s, \mu|^\mu$ $(s = 1, 2, \ldots)$, имеем $|\tau^s, \mu| = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$. По теореме Больцано—Вейерштрасса существуют подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и точка τ такие, что $|\tau, \mu| = 1$ и $|\tau^s - \tau, \lambda| \to 0$ (следовательно, $\tau^s \to \tau$) при $s \to \infty$. Таким образом, соотношение (1.2) возможно, только если $P_0(\tau) = 0$. С другой стороны, так как $P \in I_n$, то по лемме 1.1 $P_0(\xi) \geqslant 0$ и $P_1(\tau) > 0$, поэтому с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и для достаточно больших s имеем (напомним, что $d_0 > d_1 > \ldots > d_M$)

$$|P_2(\xi^s)| + |P_3(\xi^s)| + \ldots + |P_M(\xi^s)| = o(|P_0(\xi^s) + P_1(\xi^s)|),$$

т. е. соотношение (1.2) эквивалентно следующему соотношению: при $s \to \infty$

$$\frac{|(\tau^s\,|\xi^s,\mu|^{\mu})|^{\nu}}{\left|\sum\limits_{j=0}^{1} |\xi^s,\mu|^{d_j}\,P_{d_j}(\tau^s)\right| + 1} \to \infty.$$

Отсюда имеем для достаточно больших s

$$|P(\xi^s)| = \left|\sum_{j=0}^{M} P_{d_j}(\xi^s)\right| = \left|\sum_{j=0}^{M} |\xi^s,\mu|^{d_j}\,P_{d_j}(\tau^s)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\,|\xi^s,\mu|^{d_0}\,P_{d_0}(\tau^s) + |\xi^s,\mu|^{d_1}\,P_{d_1}(\tau^s)\right| - \sum_{j=2}^{M} |\xi^s,\mu|^{d_j}\,|P_{d_j}(\tau^s)| \geqslant |\xi^s,\mu|^{d_1}\,|P_{d_1}(\tau)|(1+o(1)).$$

Поэтому

$$\frac{|(\tau^s)^{\nu}|\,|\xi^s,\mu|^{(\mu,\nu)}}{|\xi^s,\mu|^{d_1}\,|P_{d_1}(\tau^s)|(1+o(1))} \to \infty.$$

при $s \to \infty$. Так как множество чисел $\{(\tau^s)^{\nu}\}$ ограничено, то это противоречит условию $(\mu,\nu) \leqslant d_1$ и доказывает теорему. $\square$

В дополнение к доказанной теореме мы приведём ещё один результат, которым будем пользоваться ниже и который доказан в работе [19].

Лемма 1.3. *Пусть многочлен $P \in \mathbb{I}_n$, удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, *а $\{\xi^s\}$ — последовательность из $\mathbb{R}^n$ такая, что $\xi^s \to \infty$ и $\xi^s/|\xi^s,\mu|^{\mu} \to \eta$ при $s \to \infty$, где $\eta_1 \ldots \eta_n = 0$. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\nu \in \Re(P)$ справедливо неравенство* (1.1).

Таким образом, задача об описании набора мультииндексов, для которых выполняется оценка (0.5), для *двухслойных многочленов* решена. Перейдём к решению этой задачи для *многослойных многочленов.*

Для этого нам понадобится ввести понятие сравнения мощностей дифференциальных операторов (многочленов) (см., например, [14]) и вывести алгебраические условия, при которых один дифференциальный оператор (многочлен) мощнее другого дифференциального оператора (многочлена), чем мы будем заниматься в следующем разделе.

2. Сравнение мощностей дифференциальных операторов (многочленов). Двухслойный случай

Определение 2.1. Будем говорить, что дифференциальный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) *мощнее* дифференциального оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и обозначать $Q < P$ или $P > Q$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $|Q(\xi)| \leqslant c\,[|P(\xi)| + 1]$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если $Q < P < Q$, то говорим, что P и Q *равномощны*, или имеют *одинаковую мощность.*

Прежде всего сделаем следующее замечание.

Замечание 2.1. Условие $\Re(Q) \subset \Re(P)$ является необходимым для выполнения соотношения $Q < P$ независимо от вырожденности или невырожденности многочлена P.

Доказательство. В самом деле, пусть $\Re(Q) \not\subset \Re(P)$ для сравнимых многочленов P и Q. Тогда, очевидно, существуют вершина $\nu \neq 0$ многогранника $\Re(Q)$, не принадлежащая многограннику $\Re(P)$, вектор $\lambda > 0$, являющийся внешней нормалью вершины ν, и число $d > 0$ такие, что $(\lambda,\alpha) = d$ является уравнением опорной к $\Re(Q)$ гиперплоскости, проходящей через точку ν и не содержащей ни одной точки множества $\Re(Q) \cup \Re(P)$, отличной от ν. Тогда $(\lambda,\nu) > (\lambda,\alpha)$ для всех $\alpha \in \Re(Q) \cup \Re(P)$, $\alpha \neq \nu$.

Пусть $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ и $\xi^s = s^{\lambda}\,\eta$ $(s = 1.2\ldots.)$, тогда при $s \to \infty$ $Q(\xi^s) = s^d\,\eta^{\nu}(1+o(1))$, $P(\xi^s) = o(s^d)$. Так как $\eta^{\nu} \neq 0$, то это означает, что $Q \not< P$. $\square$

Из приведённого замечания следует, что при сравнении мощностей многочленов $\{Q\}$ с заданным многочленом P интерес представляет только случай, когда $\Re(Q) \subset \Re(P)$.

Уточним то множество многочленов $\{P\}$, с которыми будем сравнивать остальные многочлены.

Определение 2.2. Через $\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_n(\lambda)$ обозначим множество многочленов $P \in \mathbb{I}_n$, для которых невырождены все главные грани многогранника Ньютона $\Re(P)$, кроме, быть может одной $(n-1)$-мерной главной грани $\Gamma := \Re_{i_0}^{n-1}$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant M_{n-1})$ с внешней нормалью $\lambda > 0$. При этом, если грань Γ вырождена и по вектору λ многочлен P представлен в виде (см. (0.3))

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(P)} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M(P)} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{M(P)} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{2.1}$$

то $\Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda) = \varnothing$ и с некоторой постоянной $c > 0$

$$1 + |P(\xi)| \geqslant c\,[\,|P_0(\xi)| + |P_1(\xi)| + \ldots + |P_{M(P)}(\xi)|\,] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Прежде всего докажем, что сравнение общих многочленов можно свести к сравнению обобщённо-однородного многочлена с общим многочленом.

Лемма 2.1. *Пусть по вектору λ многочлен $P \in \mathbb{G}_n$ представлен в виде* (2.1). *Тогда существует число $c > 1$ такое, что для всех $t \geqslant 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$c^{-1}\, t^{-d_0}\ [\,|P(t^\lambda \xi)| + 1] \leqslant |P(\xi)| + 1 \leqslant c\ [\,|P(t^\lambda \xi)| + 1]. \tag{2.3}$$

Доказательство. Сначала докажем левую часть неравенства (2.3). Из условий $d_0 > d_1 > \ldots > d_M$ и $P \in \mathbb{G}_n$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $t \geqslant 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$1 + |P(t^\lambda \xi)| \leqslant 1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(t^\lambda \xi)| = 1 + \sum_{j=0}^{M} t^{d_j}\, |P_{d_j}(\xi)| \leqslant t^{d_0} \left[1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(\xi)|\right] \leqslant c_1\, t^{d_0}\, [1 + |P(\xi)|],$$

откуда следует левая часть оценки (2.3).

Для доказательства правой части оценки (2.3) заметим, что в силу условия $P \in \mathbb{G}_n$ имеем с некоторыми положительными постоянными c_2 и c_3 при всех $t \geqslant 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$1 + |P(t^\lambda \xi)| \geqslant c_2\, [1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(t^\lambda \xi)|] = c_2\, [1 + \sum_{j=0}^{M} t^{d_j}\, |P_{d_j}(\xi)|] \geqslant c_2\, [1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(\xi)|] \geqslant c_3\, [|P(\xi)| + 1],$$

что доказывает правую часть оценки (2.3). □

Лемма 2.2. *Пусть по вектору $\lambda = \lambda(P)$ многочлен $P \in \mathbb{G}_n$ представлен в виде* (2.2), *а многочлен Q в виде*

$$Q(\xi) = \sum_{j=0}^{M(Q)} Q_j(\xi) =: \sum_{j=0}^{M(Q)} Q_{\delta_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=\delta_j} \gamma_\alpha(Q)\, \xi^\alpha, \tag{2.4}$$

при этом $\Re(Q) \subset \Re(P)$. Тогда $Q < P$ в том и только в том случае, когда $Q_j < P$ для всех $j = 0, 1, \ldots, M(Q)$.

Доказательство. Так как часть теоремы, относящаяся к достаточности, очевидна, то докажем необходимость.

Из условия $Q < P$ следует, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leqslant c_1[1 + |P(t^\lambda \xi)|] \ \ \forall t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда в силу леммы 2.1 получаем, что для любого $t > 1$ с некоторой постоянной $c_2 = c_2(t) > 0$

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leqslant c_2[1 + |P(\xi)|] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Пусть $t_j \geqslant 1$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$ — попарно различные числа. Рассмотрим следующую систему уравнений относительно $\{Q_j\}$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$:

$$\sum_{j=0}^{M} t_k^{d_j} Q_j(\xi) = Q(t_k^{\delta_j}\, \xi), \quad k = 0, 1, \ldots, M, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как матрица

$$\begin{pmatrix} t_0^{\delta_0} & \dots & t_0^{\delta_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_M^{\delta_0} & \dots & t_M^{\delta_M} \end{pmatrix}$$

невырождена, то для любого $j = 0, 1, \dots, M_Q$ существуют числа κ_l^j $(l = 0, 1, \dots, M)$ такие, что

$$Q_j(\xi) = \sum_{l=0}^{M} \kappa_l^j \, Q(t_l^\lambda \, \xi), \quad j = 0, 1, \dots, M. \tag{2.6}$$

Применяя оценки (2.5) для точек $t_0, t_1, \dots, t_M$, получаем с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$|Q_j(\xi)| \leqslant c_3 \, [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Лемма 2.2 доказана. □

Таким образом, лемма 2.2 сводит задачу сравнения общих многочленов $\{Q\}$ с (двухслойным) многочленом $P \in \mathbb{G}_n$ к задаче сравнения обобщённо-однородных многочленов с общим многочленом P. Прежде чем перейти к этому вопросу, нам понадобится сравнить два обобщённо-однородных многочлена. Следующая теорема посвящена этому.

Теорема 2.1. *Пусть P и Q — λ-однородные многочлены λ-степени d_P и d_Q соответственно,* ($\lambda > 0$). *Пусть все главные грани многогранника Ньютона $\Re(P)$ многочлена P невырождены, кроме, быть может, $(n-1)$-мерной грани Γ, содержащей множество (P). Тогда*:

I) *Если грань Γ невырождена, то $Q < P$ для любого многочлена Q такого, что $\Re(Q) \subset \Re(P)$.*

II) *Если грань Γ вырождена, то $Q < P$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия*:

1) $d_Q \leqslant d_P$;
2) $\Sigma(Q, \lambda) \supset \Sigma(P, \lambda)$;
3) $\Re(Q) \subset \Re(P)$;
4) *для каждой точки $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$ существует некоторая окрестность $U(\eta)$ и постоянная $c = c(\eta) > 0$, такие, что*

$$|Q(\xi)| \leqslant c|P(\xi)|^{\frac{d_Q}{d_P}} \quad \forall \xi \in U(\eta);$$

5) *для каждой точки $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$*

$$\frac{d_Q}{d_P} \leqslant \frac{\Delta(\eta, Q)}{\Delta(\eta, P)}. \tag{2.7}$$

Для упрощения доказательства теоремы сделаем следующие шаги.

Замечание 2.2 (первый шаг)**.** Так как числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются положительными и рациональными и любой λ-однородный многочлен R также $(k\,\lambda)$-однороден, то, выбирая натуральное число k соответствующим образом (что не влияет на отношение d_Q/d_P), мы можем считать, что числа d_Q и d_P являются натуральными, следовательно, функции P^{d_Q} и Q^{d_P} являются многочленами. Поэтому мы можем сравнивать их мощности.

Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3 (второй шаг)**.** *Пусть P и Q — λ-однородные многочлены λ-степеней d_P и d_Q, соответственно, где $d_P \geqslant d_Q$. Тогда*:

a) *$P > Q$ в том и только в том случае, когда $Q^{d_P} < P^{d_Q}$ (или, что то же самое, $Q < P^{d_Q/d_P}$), т. е. существует положительное число c такое, что*

$$|Q(\xi)|^{d_P} \leqslant c\,[1 + |P(\xi)|^{d_Q}] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{2.8}$$

b) *если $P > Q$ и $d_Q < d_P$, то* $\lim\limits_{|P(\xi)| \to \infty} |Q(\xi)|/[1 + |P(\xi)|] \to 0$;

c) *пусть $P > Q$, $d_P \geqslant d_Q$, $\delta < d_Q/d_P$, $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$ и $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$, тогда $|Q(\eta^s)|/|P(\eta^s)|^\delta \to 0$ при $s \to \infty$.*

Доказательство. Докажем пункт a). Так как $d_P \geqslant d_Q$, то из $Q^{d_P} < P^{d_Q}$ следует, что $Q < P$. Следовательно, достаточность оценки (2.8) для выполнения $Q < P$ очевидна.

Докажем, что оценка (2.8) следует из $Q < P$. Пусть, наоборот, $Q < P$, но оценка (2.8) не выполняется, т. е. существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ при $s \to \infty$ и $|Q(\xi^s)|^{d_P}/[1+|P(\xi^s)|^{d_Q}] \to \infty$. Тогда $|Q(\xi^s)| \to \infty$ при $s \to \infty$. Так как $Q < P$, то отсюда следует, что $t_s := |P(\xi^s)| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Обозначим $\tau_i^s := t_s^{-\lambda_i/d_P}\,\xi_i^s$, т. е. $\xi^s = t_s^{\lambda/d_P}\,\tau^s$. Имеем $P(\tau^s) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ s = 1, 2, \ldots)$. Из λ-однородности многочленов Q и P имеем

$$|Q(\xi^s)| = t_s^{d_Q/d_P}\,|Q(\tau^s)|,$$

$$|P(\xi^s)|^{d_Q/d_P} = t_s^{d_Q}\,|P(\tau^s)|^{d_Q/d_P} = t_s^{d_Q}.$$

Так как $Q < P$, из полученных представлений и из $P(\tau^s) = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$ имеем

$$|Q(\xi^s)|/[1+|P(\xi^s)|^{d_Q/d_P}] = t_s^{d_Q/d_P}\,|Q(\tau^s)|/[1+t_s^{d_Q}] \leqslant$$

$$\leqslant c\,t_s^{d_Q/d_P}\,[1+|P(\tau^s)|\,]/[1+t_s^{d_Q}] \leqslant 2\,c\,t_s^{d_Q/d_P-d_Q} = 2\;c\,t_s^{d_Q(1/d_P-1)}.$$

Так как $d_P \geqslant 1$, выражение $t_s^{d_Q(1/d_P-1)}$ ограничено, что противоречит нашему предположению и доказывает пункт a) леммы.

Пункт b). Сначала отметим, что из неравенства (2.8) следует, что для достаточно больших $|\xi|$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{|O(\xi)|}{|P(\xi)|} \leqslant c_1\,|P(\xi)|^{d_O/d_P-1}.$$

Так как $d_Q < d_P$, то $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} |Q(\xi)|/|P(\xi)| \to 0$ при $|P(\xi)| \to \infty$.

Теперь докажем пункт c). Опять полагаем обратное, т. е. что для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$, некоторой последовательности $\{\eta^s\}, \eta^s \to \eta$ и некоторого числа $\delta < d_Q/d_P$

$$|Q(\eta^s)|/|P(\eta^s)|^{\delta} \geqslant \varepsilon > 0 \ \ (s = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим $t_s := |P(\eta^s)|^{-1/d_P}$, $\xi^s := t_s^{\lambda}\,\eta^s$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Тогда из λ-однородности многочленов Q и P имеем для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|Q(\xi^s)| = t_s^{d_Q}\,|Q(\eta^s)| \geqslant \varepsilon\ t_s^{d_Q}\,|P(\eta^s)|^{\delta} = \varepsilon\,t_s^{d_Q-\delta\,d_P}, \tag{2.9}$$

$$|P(\xi^s)| = t_s^{d_P}\,|P(\eta^s)| \equiv 1. \tag{2.10}$$

Так как $t_s \to \infty$ (напомним, что $P(\eta^s) \to 0$) при $s \to \infty$ и $d_Q - \delta\,d_P > 0$, соотношения (2.9)-(2.10) противоречат условию $Q < P$ и доказывают пункт c). $\square$

Основываясь на этой лемме и имея в виду, что многочлены P^{d_Q} и Q^{d_P} имеют одинаковую λ-степень, далее, при сравнении мощностей двух многочленов P и Q, там, где это нам удобно, мы будем считать, что сравниваемые многочлены имеют одинаковую λ-степень: $d_P = d_Q := d$. После такого соглашения теорему 2.1 можно перефразировать следующим образом.

Теорема 2.1’ (третий шаг). *Пусть P и Q — λ-однородные многочлены λ-степени $d := d_P = d_Q$, где $\lambda > 0$. Тогда для выполнения соотношения $Q < P$ каждое из следующих условий* 1)–4) *необходимо, а совместное выполнение условий* 1)–3) *достаточно*:

1) $\Re(Q, \lambda) \subset \Re(P, \lambda)$;
2) $\Sigma(Q) \supset \Sigma(P)$;
3) *для каждой точки $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$ существует окрестность $U(\eta)$ и постоянная $c = c(\eta) > 0$ такие, что $|Q(\xi)| \leqslant c\,|P(\xi)|\ \forall \xi \in U(\eta)$;*
4) $\Delta(\eta, Q) \geqslant \Delta(\eta, P)$ *для каждой $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$.*

Сделаем ещё следующее замечание.

Замечание 2.3. Очевидно, условие 3) теоремы эквивалентно следующему:

3.a) *существует постоянная $c = c(\eta) > 0$ такая, что $|Q(\xi)| \leqslant c$ для всех $\xi \in \mathcal{D}(P) := \{\eta \in \mathbb{R}^n; |P(\eta)| = 1\}$.*

Доказательство теорем 2.1*,* 2.1'. Таким образом, дело сводится к доказательству теоремы 2.1'. Отметим, что доказательство проводится методом, отличным от метода доказательства теоремы 1 работы [16].

Необходимость условия 1) доказана в замечании 2.1.

Необходимость условия 2) очевидна, потому что в противном случае для некоторой точки $\eta \in \Sigma(Q,\lambda) \setminus \Sigma(P,\lambda)$ при $t \to \infty$ мы будем иметь $P(t^\lambda \eta) = t^d\, P(\eta) = 0$, в то время как $Q(t^\lambda \eta) = t^d\, Q(\eta) \to \infty$.

Для доказательства необходимости условия 3), опять предполагая обратное, на основании пункта 2) получим существование точки $\eta \in \Sigma(P,\lambda)$ и последовательности $\{\eta^s\} : \eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ таких, что $P(\eta^s) \neq 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ и

$$R(\eta^s) := |Q(\eta^s)/P(\eta^s)| \to \infty. \tag{2.11}$$

При этом отметим, что если $P(\eta^s) = 0$ для некоторых s, то по уже доказанному свойству 2) $Q(\eta^s) = 0$ для таких s и соотношение $Q < P$ для таких s очевидно. Поэтому, можем считать, что $P(\eta^s) \neq 0$, $s = 1, 2, \ldots$

Обозначим $t_s := |P(\eta^s)|^{-1/d}$, $\xi^s := t_s^\lambda \eta^s$ $(s = 1, 2, \ldots)$. На последовательности $\{\xi^s\}$ мы имеем $P(\xi^s) = P(t_s^\lambda \eta^s) = t_s^d\, P(\eta^s) = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$ и $Q(\xi^s) = t_s^d\, Q(\eta^s)$.

Из определения функции R следует, что $Q(\eta^s) = [R(\eta^s)]\ |P(\eta^s)|$. Так как $t_s\, |P(\eta^s)|^{1/d} = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$, то (см. (2.11))

$$|Q(\xi^s)| = t_s^d\, |Q(\eta^s)| = t_s^d\, [R(\eta^s)]\ \ |P(\eta^s)| = R(\eta^s) \to \infty$$

при $s \to \infty$. Это значит $Q \not< P$, что и доказывает необходимость условия 3) теоремы.

Наконец, докажем необходимость условия 4). Пусть $\Delta(\eta, Q) < \Delta(\eta, P)$ для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P,\lambda)$.

По определению $\Delta(\eta, Q)$ существует точка $\tau \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta,Q)} \frac{Q^{(\alpha)}(\eta)}{\alpha!}\, \tau^\alpha \neq 0.$$

Пусть $t > 0$ и $\xi(t) = \eta + t^{-\lambda}\, \tau$. Тогда $\xi(t) \to \eta$ при $t \to \infty$, и по формуле Тейлора получим для достаточно больших t

$$Q(\xi(t)) = \sum_{(\lambda,\alpha)\geqslant\Delta(\eta,Q)} \frac{Q^{(\alpha)}(\eta)\, (t^\lambda\, \tau)^\alpha}{\alpha!} = t^{-\Delta(\eta,Q)} \Big[\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta,Q)} \frac{Q^{(\alpha)}(\eta)\, \tau^\alpha}{\alpha!} + o(1) \Big] =: t^{-\Delta(\eta,Q)}\, A(Q),$$

$$P(\xi(t)) = t^{-\Delta(\eta,P)}\ \Big[\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta,P)} \frac{P^{(\alpha)}(\eta)\, \tau^\alpha}{\alpha!} + o(1) \Big] =: t^{-\Delta(\eta,Q)}\, B(P)],$$

где $|A(Q)\, B(P)| \neq 0$.

Так как по нашему предположению $\Delta(\eta, Q) < \Delta(\eta, P)$, то отсюда следует, что

$$\frac{|Q(\xi(t))|}{|P(\xi(t))|} = t^{\Delta(\eta,P)-\Delta(\eta,(Q)}\ \left| \frac{A(Q)}{B(P)} \right| \to \infty$$

при $t \to \infty$, что доказывает необходимость условия 4).

Достаточность. Мы докажем, что условия 1)–3) (см. также замечание 2.3) обеспечивают соотношение $Q < P$. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде объединения следующих двух множеств: $\mathcal{A} := \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ P(\xi) = 0\}$ и $\mathcal{B} := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}$. Из λ-однородности многочленов P и Q и из условия 2) следует, что $Q(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathcal{A}$. Поэтому для любого $c > 0$

$$|Q(\xi)| \leqslant c\, [|P(\xi)| + 1]\ \ \forall \xi \in \mathcal{A}. \tag{2.12}$$

Покажем, что соотношение (2.12) справедливо также для множества $\mathcal{B}$ с некоторой постоянной $c > 0$. Для $\xi \in \mathcal{B}$ обозначим $\eta(\xi) := |P(\xi)|^{-\lambda/d}$. Очевидно, что $\eta(\xi) \in \mathcal{D}(P)$ для всех $\xi \in \mathcal{B}$. Поэтому в силу условия 3) нашей теоремы $|Q(\eta(\xi)| \leqslant c$ $\forall \xi \in \mathcal{B}$. Следовательно, в силу λ-однородности многочленов P и Q, имеющих одинаковую степень d, имеем

$$\left| \frac{Q(\xi)}{P(\xi)} \right| = |Q(\, |P(\xi)|^{-\lambda/d}\, \xi)| = |Q(\eta(\xi))| \leqslant c \quad \forall \xi \in \mathcal{B}.$$

Мы получили оценку (2.12) также для множества $\mathcal{B}$ и, следовательно, для всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.1' и, следовательно, теорема 2.1 доказаны. □

Таким образом, чтобы ответить на поставленный вопрос, нам остаётся сравнить обобщённо-однородный многочлен с общим многочленом, что дается следующей теоремой.

Теорема 2.2. *Пусть* $P \in \mathbb{G}_n$, *а* Q — λ*-однородный многочлен* λ*-степени* $\delta = \delta_Q$, $\mu > 0$, $d_1 < \delta < d_0$ *и* $\Re(Q) \subset \Re(P)$. *Тогда, если грань* Γ *невырождена, то* $Q < P$. *Если грань* Γ *вырождена, то*:

I) $Q < P$ *в том и только в том случае, когда*

I.1) $\Sigma(P_0, \lambda) \subset \Sigma(Q, \lambda)$;

I.2) $(d_0 - d_1)/(\delta - d_1) \geqslant \Delta(\eta, P_0)/\Delta(\eta, Q)$, $\forall \eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$;

I.3) *для каждой точки* $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ *существуют постоянная* $c = c(\eta) > 0$ *и окрестность* $U(\eta)$ *такие, что*

$$\psi(\xi) := |Q(\xi)|/|P_0(\xi)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)} \leqslant c \ \ \forall \xi \in U(\eta).$$

II) *Более того,*

II.1) *если для каждой точки* $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ *существует окрестность* $U_1(\eta)$ *такая, что* $Q(\xi) \geqslant 0$ *для всех* $\xi \in U_1(\eta)$, *то* $P < P + Q < P$;

II.2) *если* $\psi(\xi) \to 0$ *при* $\xi \to \eta$ *для любой точки* $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$, *то* $|Q(\xi)|/[P(\xi) + 1] \to 0$ *при* $|\xi| \to \infty$ *и* $Q < P + Q$, $P < P + Q < P$.

Доказательство. В невырожденном случае утверждение теоремы следует из теоремы 1.1. Рассмотрим случай, когда грань Γ вырождена.

Необходимость условия I.1) очевидна.

Докажем необходимость условия I.2). Пусть, наоборот, условие $Q < P$ выполняется, но существует точка $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ такая, что

$$(d_0 - d_1)/(\delta_Q - d_1) < \Delta(\eta, P_0)/\Delta(\eta, Q). \tag{2.13}$$

Для $t > 0$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\kappa > 0$ положим $\xi_i = \xi_i(t) = \xi_i(t, \theta, \kappa) = t^{\mu_i}(\eta_i + \theta_i t^{-\kappa \mu_i})$, $i = 1, \dots, n$. Тогда по формуле Тейлора имеем

$$Q(\xi(t)) = t^{\delta_Q} Q(\eta + \theta t^{-\kappa \mu}) = t^{\delta_Q} \sum_\alpha t^{-\kappa (\mu, \alpha)} [D^\alpha Q(\eta)/(\alpha!)] \theta^\alpha =$$
$$= t^{\delta_Q - \kappa \Delta(\eta, Q)} \sum_{(\mu,\alpha) = \Delta(\eta, Q)} [D^\alpha Q(\eta)/(\alpha!)] \theta^\alpha + o(t^{\delta_Q - \kappa \Delta(\eta, Q)}).$$

Выберем вектор θ таким образом, чтобы

$$c = c(\theta) := \sum_{(\mu,\alpha) = \Delta(\eta, Q)} [D^\alpha Q(\eta)/(\alpha!)] \theta^\alpha \neq 0.$$

Существование такого вектора очевидно следует из определения числа $\Delta(\eta, Q)$. В самом деле, в противном случае получается, что все коэффициенты многочлена $c(\theta)$ — нули, что противоречит определению числа $\Delta(\eta, Q)$. Тогда (для числа θ, фиксированного таким образом), получаем

$$|Q(\xi(t))| \geqslant c\, t^{\delta_Q - \kappa \Delta(\eta, Q)}. \tag{2.14}$$

Для многочленов P_0 и P_1, очевидно, имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$, и для всех достаточно больших t

$$|P_0(\xi(t))| \leqslant c_1 t^{d_0 - \kappa \Delta(\eta, P_0)}, \ \ |P_1(\xi(t))| = t^{d_1} P_1(\eta) (1 + o(1)). \tag{2.15}$$

Очевидные геометрические соображения показывают, что при $t \to +\infty$

$$r(\xi(t)) := P(\xi(t)) - [P_0(\xi(t)) + P_1(\xi(t))] = o(t^{d_1}).$$

Положим $\kappa = (d_0 - d_1)/\Delta(\eta, P_0)$, тогда $d_0 - \kappa \Delta(\eta, P_0) = d_1$, и из (2.15) получаем с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$|P(\xi(t))| \leqslant c_2 t^{d_1}. \tag{2.16}$$

Легко убедиться, что из условия I.2) теоремы следует соотношение $d_1 < \delta_Q - \kappa\,\Delta(\eta, Q)$. Отсюда и из оценок (2.14), (2.16) следует, что $|Q(\xi(t))|/[1 + P(\xi(t))] \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит условию $Q < P$ и доказывает необходимость условия I.2) теоремы.

Необходимость условия I.3). Предположим, что для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ существует последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $P_o(\eta^s) \neq 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$, $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ и

$$\psi(\eta^s) := |Q(\eta^s)|/[|P_0(\eta^s)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)}] \to \infty. \tag{2.17}$$

Обозначим $t_s := |P_0(\eta^s)|^{-1/(d_0 - d_1)}$, $\xi^s = t_s^{\mu}\,\eta^s$, $s = 1, 2, \ldots$ Так как $\eta^s \to \eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$, имеем $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$. Тогда, как следствие μ-однородности многочленов $P_0(\xi)$, $P_1(\xi)$ и $Q(\xi)$, имеем для достаточно больших s

$$|P_1(\xi^s)| = t_s^{d_1}\,|P_1(\eta^s)| = t_s^{d_1}\,|P_1(\eta)|\,(1 + o(1)), \tag{2.18}$$

$$|P_0(\xi^s)| = t_s^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| = t_s^{d_1}, \;\; r(\xi) = o(t_s^{d_1}). \tag{2.19}$$

Представления (2.18), (2.19) показывают, что существует число $c_3 > 0$ такое, что для достаточно больших s

$$|P(\xi^s)| + 1 \leqslant c_3 t^{d_1}. \tag{2.20}$$

Для $Q(\xi)$ аналогично получаем

$$|Q(\xi^s)| = t_s^{\delta_Q}\,|Q(\eta^s)| = t_s^{\delta_Q}\,R(\eta^s)\,|P_0(\eta^s)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)} = R(\eta^s)\,t_s^{d_1}. \tag{2.21}$$

Оценки (2.20) и (2.21) вместе с (2.17) показывают, что при $s \to \infty$

$$|Q(\xi^s)|/[|P(\xi^s)| + 1] \geqslant [1/c_3]\,\psi(\eta^s) \to \infty.$$

Это доказывает необходимость условия I.3) для $Q < P$.

Докажем *достаточность*. Предположим, что $Q \not< P$ при условиях настоящей теоремы, т. е. существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ при $s \to \infty$, но

$$\frac{|Q(\xi^s)|}{|P(\xi^s)| + 1} \to \infty. \tag{2.22}$$

Поступая как выше, обозначим $\eta^s := \xi^s/|\xi^s, \lambda|^{\lambda}$, тогда $|\eta^s, \lambda| = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Так как множество $\{\eta^s : |\eta^s, \lambda| = 1, \; s = 1, 2, \ldots\}$ ограничено (напомним, что $\lambda > 0$), существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и точка η, $|\eta, \lambda| = 1$, такие, что $|\eta^s - \eta, \lambda| \to 0$ при $s \to \infty$.

Покажем, что $P_0(\eta) = 0$. Пусть, наоборот, $P_0(\eta) \neq 0$. Тогда при $s \to \infty$ имеем

$$|P(\xi^s)| = |\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta)|(1 + o(1)) \tag{2.23}$$

и существует число $c_4 > 0$ такое, что

$$|Q(\xi^s)| \leqslant c_4\,|\xi^s, \lambda|^{d_1} \;\; s = 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

Соотношения (2.23) и (2.24) вместе противоречат нашему предположению (2.22) и доказывают, что $P_0(\eta) = 0$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

a) $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$, т. е. $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$;

b) $\eta \notin \mathbb{R}^{n,0}$, т. е. $\eta_1 \ldots \eta_n = 0$.

Так как $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$, то в случае a) по условию I.3) теоремы существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что (не нарушая общности, можно считать, что для всех $s = 1, 2, \ldots$)

$$|Q(\eta^s)| \leqslant c_4\,|P_0(\eta^s)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)}. \tag{2.25}$$

В силу условия $P \in \mathbb{G}(n)$ существуют положительные постоянные c_5 и c_6 такие, что для достаточно больших s (не нарушая общности, можно считать, что для всех $s = 1, 2, \ldots$) имеем

$$1 + |P(\xi^s)| = 1 + \left|\sum_{j=0}^{M} P_j(\xi^s)\right| = 1 + \left|\sum_{j=0}^{M} |\xi^s, \lambda|^{d_j}\,P_j(\eta^s)\right| \geqslant 1 + |\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| +$$
$$+ |\xi^s, \lambda|^{d_1}\,|P_1(\eta^s)| - o(|\xi^s, \lambda|^{d_1}) \geqslant c_2\,[|\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| +$$

$$+ |\xi^s,\lambda|^{d_1}\,|P_1(\eta^s)|] \geqslant c_3\,[|\xi^s,\lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| + |\xi^s,\lambda|^{d_1}\,]. \quad (2.26)$$

Пользуясь неравенством (2.25), мы оценим также $|Q(\xi^s)|$, именно

$$|Q(\xi^s)| = |\xi^s,\lambda|^{\delta_Q}\,|Q(\eta^s)| \leqslant c_4\,|\xi^s,\lambda|^{\delta_Q}\,|P_0(\eta^s)|^{\frac{\delta_Q-d_1}{d_0-d_1}} = c_4\,[|\xi^s,\lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)|]^{\frac{\delta_Q-d_1}{d_0-d_1}}\,|\xi^s,\lambda|^{d_1\,\frac{d_0-\delta_Q}{d_0-d_1}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера для $p = \dfrac{d_0-d_1}{\delta_Q-d_1}$ и $q = \dfrac{p}{p-1} = \dfrac{d_0-d_1}{d_0-\delta_Q}$, мы получим с некоторой постоянной $c_5 > 0$

$$|Q(\xi^s)| \leqslant c_5[|\xi^s,\lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| + |\xi^s,\lambda|^{d_1}],\ \ s = 1,2,\ldots \quad (2.27)$$

Из (2.26)-(2.27) мы получим с некоторой постоянной $c_6 > 0$

$$|Q(\xi^s)| \leqslant c_6\,[|P(\xi^s)| + 1],\ \ s = 1,2,\ldots,$$

что противоречит нашему предположению (2.22).

В случае b) противоречие получается применением леммы 1.3.

Докажем вторую часть теоремы. Сначала покажем, что $P < P + Q$.

Будем повторять соображения, применённые при доказательстве достаточности первой части теоремы, т. е. предположим, что существует последовательность $\{\xi^s\}$, такая, что $|\xi^s| \to \infty$, $|\eta^s - \eta,\lambda| \to 0$ при $s \to \infty$ и

$$\frac{|P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s) + Q(\xi^s)|} \to \infty. \quad (2.28)$$

Так как $d_0 > d_1$, в случае $\eta \notin \Sigma(P_0)$ мы получим следующие представления для многочленов P и Q при $s \to \infty$: $|P(\xi^s)| = |\xi^s,\lambda|^{d_0}\,|\,|P_0(\eta)|\,(1 + o(1))$ и $|Q(\xi^s)| = o(|\xi^s,\lambda|^{d_0})$, которые вместе противоречат (2.28) и доказывают, что $P < P + Q$.

Если $P_0(\eta) = 0$, то по предположению теоремы $P_1(\eta) \neq 0$. В этом случае мы получаем противоречие с (2.28) в силу того, что $Q(\xi) \geqslant 0$ при $\xi \in U(\eta)$ и в силу того, что $P_0(\xi) \geqslant 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ для многочленов $P \in I_n$.

Соотношение $P + Q < P$ является прямым следствием уже доказанной части теоремы. Этим доказан пункт II.1). Пункт II.2) доказывается буквальным повторением предыдущих соображений.

Теорема 2.2 доказана. □

3. Оценки мономов через многослойный многочлен

В этом разделе мы рассмотрим более общий случай, когда многочлен $P \in I_n$ является k-слойным при $2 < k < M$.

Именно, пусть, как и в предыдущем разделе, $\Re = \Re(P)$ — многогранник Ньютона многочлена $P \in I_n$, все главные грани которого невырождены, кроме, быть может, одной $(n-1)$-мерной грани $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ с внешней нормалью $\mu > 0$. При этом многочлен $P \in I_n$ является *k-слойным* при $2 < k < M$. Напомним, что это означает следующее: если по вектору μ многочлен P представить в виде суммы μ-однородных многочленов μ-степеней $d_0 > d_1 > \ldots > d_M$ (см. (0.3))

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + \ldots + P_{k-1}(\xi) + P_k(\xi) + P_{k+1}(\xi) + \ldots + P_M(\xi), \quad (3.1)$$

то $P_k(\eta) \neq 0$ для всех $\eta \in \Sigma(P_0)$, в то время как каждый из многочленов P_j $(j = 1,2,\ldots,k-1)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $\eta \in \Sigma(P_0)$.

Наша цель в этом разделе — описать то (наиболее широкое) множество мультииндексов $\{\nu\}$, для которых справедлива оценка (1.1) для многослойных многочленов.

Сначала введём следующие обозначения для многочлена (3.1): $\mathfrak{M} := \{P_1, P_2, \ldots, P_{l-1}\}$, $\mathcal{P}(\xi) := P_0(\xi)+P_k(\xi)$, $\mathcal{P}_1(\xi) := P_1(\xi)+\ldots+P_{k-1}(\xi)$, $p(\xi) := P_{k+1}(\xi)+\ldots+P_M(\xi)$. Тогда $P(\xi) = \mathcal{P}(\xi)+\mathcal{P}_1(\xi)+p(\xi)$. В этих обозначениях наша задача звучит так: пусть *двухслойный* многочлен $\mathcal{P}(\xi) + p(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, следовательно, по этой теореме, для всех мультииндексов $\nu \in \Re^\star := \{\beta \in \Re : (\mu,\beta) \leqslant d_k\}$ справедлива оценка

$$|\xi^\nu| \leqslant c\,[|\mathcal{P}(\xi) + p(\xi)| + 1]\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.1')$$

с некоторой постоянной $c = c(P + p,\nu) > 0$.

Поставленная цель сводится к ответу на следующий вопрос: каким условиям должны удовлетворять (μ-однородные) многочлены $P_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, \dots k-1)$, чтобы для всех мультииндексов $\nu \in \Re^\star$ выполнялась оценка (1.1) для многочлена $P(\xi) = \mathcal{P}(\xi) + \mathcal{P}_1(\xi) + p(\xi)$?

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Пусть* $\Re = \Re(P)$ — *полный многогранник Ньютона* k-слойного *многочлена* $P \in G_n$ *(см. определения* 0.6 *и* 2.2*), т. е. все главные грани* $\Re$ *невырождены, кроме, быть может,* $(n-1)$*-мерной главной грани* $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ *(с внешней нормалью* $\mu > 0$*). Если* Γ *невырождена, то* $\xi^\nu < P$ *для всех мультииндексов* $\nu \in \Re$.

Если Γ *вырождена, по вектору* μ *многочлен* P *представлен в виде* (3.1) *суммы* μ*-однородных многочленов,* $\mathcal{P}(\xi) := P_0(\xi) + P_k(\xi)$, $\mathcal{P}_1(\xi) := P_1(\xi) + \dots + P_{l-1}(\xi)$, $p(\xi) := P_{k+1}(\xi) + \dots + P_M(\xi)$, $\Re^\star := \{\beta \in \Re : (\mu, \beta) \leqslant d_k\}$, *и* (двухслойный) *многочлен* $P - \mathcal{P}_1 = \mathcal{P} + p$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1.1*, то*

a) *при* $\nu \notin \Re^\star$*, неравенство* $\xi^\nu < P$ *не может иметь места;*
b) *неравенство* $\xi^\nu < P$ *выполняется для любого мультииндекса* $\nu \in \Re^\star$*, если либо*
  b.1) $\mathcal{P}_1 < P$*, т. е. (см. лемму* 2.2*)* $P_j < P$ $(j = 1, \dots, k-1)$*, либо*
  b.2) *каждый многочлен* $P_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, \dots, k-1)$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*
    b.2.1) $P_j < P_0$*, т. е. для пары* (μ*-однородных) многочленов* (P_j, P_0) *удовлетворяются условия теоремы* 2.1;
    b.2.2) $P_j < \mathcal{P}$*, т. е. для пары многочленов* $(P_j, \mathcal{P})$ *выполняются условия* I)-II) *теоремы* 2.2;
    b.2.3) $P_j < \mathcal{P} + P_j$, $\mathcal{P} < \mathcal{P} + P_j < \mathcal{P}$*, т. е. для пары многочленов* $(P_j, \mathcal{P})$ *выполняется одно из условий* II.1) *или* II.2) *теоремы* 2.2.

Прежде чем доказать теорему, сделаем следующее замечание.

Замечание 3.1.

1) Условия b.2.2) и b.2.3) мы должны были ставить не для пары многочленов $(P_j, \mathcal{P})$, а для пары $(P_j, \mathcal{P} + p)$. Но мы поступили так не только по соображениям краткости записи, но и потому, что по пункту II.1) теоремы 2.2 многочлен p не влияет на мощности многочленов P и $\mathcal{P}$.
2) Доказанные выше предложения диктуют нам, что мы должны считать, что многочлены $P_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, \dots, l-1)$ должны обращаться в нуль во всех точках $\eta \in \Sigma(P_0)$.

Доказательство теоремы 3.1. Имея в виду, что двухслойный многочлен $P - \mathcal{P}_1 = \mathcal{P} + p$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, следовательно, $\xi^\nu < P$ для любого мультииндекса $\nu \in \Re^\star$, достаточно доказать, что $\mathcal{P} < P = \mathcal{P} + \mathcal{P}_1$.

Сначала мы добавим к многочлену $\mathcal{P}$ те многочлены из $\mathfrak{M}$, которые (совместно с многочленом P_0) удовлетворяют условию b.1), т. е. условиям леммы 2.2. Пусть это многочлены $\mathfrak{M}_1 = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{k_1}}\}$, $(k_1 \leqslant k-1)$.

Так как $d_{i_j} < d_0$ $j = 1, \dots, k_1$, то по пункту b) леммы 2.3 $|P_{i_1}(\xi)| + |P_{i_2}(\xi)| + \dots + |P_{i_{k_1}}(\xi)| = o(|P_0(\xi))|$ при $|P_0(\xi))| \to \infty$.

Из леммы 1.1 вытекает, что $P_0 < \mathcal{P} = P_0 + P_k$, следовательно, $|P_{i_1}(\xi)| + |P_{i_2}(\xi)| + \dots + |P_{i_{k_1}}(\xi)| = o(|P_0(\xi))|$ при $|P_0(\xi))| \to \infty$. Таким образом, существует постоянная $c > 0$ такая, что для достаточно больших $|\xi|$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{P}(\xi)| \leqslant c\,[1 + |\mathcal{P}(\xi) + P_{i_1}(\xi) + P_{i_2}(\xi) + \dots, P_{i_{k_1}}(\xi)|]. \tag{3.2}$$

Если $\{|P_0(\xi^s)|\}$ ограничено для последовательности $\{\xi^s\}$ при $|\xi^s| \to \infty$, то многочлены $\{P_{i_j}(\xi^s)\}$ также ограничены на этой последовательности (напомним, что $P_{i_j} < P_0$ $(j = 1, \dots, k_1)$). С другой стороны, так как $\mathcal{P} \in \mathbb{I}_n$, то $\mathcal{P}(\xi) \to \infty$, и неравенство (3.2) (быть может, с другой постоянной) очевидно. В итоге мы получим $\mathcal{P} < \mathcal{P} + P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_{k_1}} < \mathcal{P}$. Это значит, что далее при сравнении многочленов $\mathcal{P}$ и P достаточно сравнивать многочлены $\mathcal{P}^1 := \mathcal{P} + P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_{k_1}}$ и P.

Если $k_1 = k-1$, т. е. $\mathcal{P}^1(\xi) := \mathcal{P}(\xi) + \mathcal{P}_1(\xi) = P(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то это доказывает теорему.

Рассмотрим случай, когда $k_1 < k-1$, т. е. $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}$.

Сначала рассмотрим те многочлены $P_j \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$, которые удовлетворяют условию b.2.3), т. е. для пары многочленов $(P_j, \mathcal{P})$ выполняется одно из условий II.1) или II.2) теоремы 2.2. Пусть это многочлены

$$\mathfrak{M}_2 := \{P_{k_1+i_1}, P_{k_1+i_2}, \ldots, P_{k_1+k_2}\} \quad (1 \leqslant i_j \leqslant k_1 - 1,\ j = 1, \ldots, k_2,\ k_1 + k_2 \leqslant k - 1),$$

т. е.

$$\frac{|P_{i_j}(\xi)|}{|P(\xi)| + 1} \to 0$$

при $|\xi| \to \infty$ и $P < P + P_{i_j} < P$ для всех $j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2$.

Рассуждая, как в предыдущем случае, получим, что

$$\mathcal{P} < \mathcal{P}^2 := \mathcal{P}^1 + P_{k_1+i_1} + P_{k_1+i_2} + \ldots + P_{i_{k_1}+k_2} < \mathcal{P}.$$

Это значит, что далее при сравнении многочленов $\mathcal{P}$ и P достаточно сравнить многочлены $\mathcal{P}^2$ и P.

Наконец, к многочлену $\mathcal{P}^2$ мы добавим оставшиеся многочлены из $\mathfrak{M}$, которые удовлетворяют условиям I)-II) теоремы 2.2. Пусть это многочлены

$$\mathfrak{M}_3 := \{P_{k_1+k_2+i_1}, P_{k_1+k_2+i_2}, \ldots, P_{k_1+k_2+k_3}\},\ k_1 + k_2 + k_3 = k - 1.$$

Тогда $\mathcal{P}^2(\xi)+ P_{k_1+k_2+i_1}(\xi) + P_{k_1+k_2+i_2}(\xi) + \ldots + P_{k_1+k_2+k_3}(\xi) = P(\xi)$ для всех $\xi \in \mathcal{R}^n$.

В результате, как добавление к предыдущим двум случаям, мы получаем, что $\mathcal{P} < \mathcal{P}^2 < \mathcal{P}$. Из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{P} < \mathcal{P}+ P_{k_1+k_2+i_1} + P_{k_1+k_2+i_2} + \ldots + P_{k_1+k_2+k_3}$. Следовательно, $\mathcal{P}^2 < \mathcal{P}^2+ P_{k_1+k_2+i_1} + P_{k_1+k_2+i_2} + \ldots + P_{k_1+k_2+k_3} = P$. В итоге мы получили $\mathcal{P} < P < \mathcal{P}$, что доказывает теорему 3.1. $\square$

4. Коэрцитивные оценки в L_p

Совершая преобразование Фурье и применяя равенство Парсеваля, непосредственно получим, что при $p = 2$ для тех мультииндексов $\{\nu\}$, для которых выполняется условия теоремы 3.1, т. е. для которых $\xi^\nu < P$, выполняется оценка

$$||D^\nu u||_{L_2} \leqslant c\,[\,||P(D)u||_{L_2} + ||u||_{L_2}\,]\ \ \forall u \in C_0^\infty(E^n). \tag{4.1'}$$

Применяя теорию мультипликаторов Фурье, мы покажем, что для того же множества мультииндексов $\{\nu\}$ и для любого $p > 1$ также справедлива оценка

$$||D^\nu u||_{L_p} \leqslant c\,[\,||P(D)u||_{L_p} + ||u||_{L_p}\,]\ \ \forall u \in C_0^\infty(E^n). \tag{4.1}$$

Сначала напомним понятие мультипликатора.

Определение 4.1 (см., например, [20]). Измеримая функция Φ называется *мультипликатором* из L_p в L_q, $p \leqslant q$ (обозначим $\Phi \in \mathbb{M}_p^q$, при этом, если $q = p$, то вместо $\mathbb{M}_p^p$ мы обозначим просто $\mathbb{M}_p$), если преобразование $T_M : L_p \to L_q$, определенное формулой

$$T_M f = (2\pi)^{-\pi/2} \int\limits_{E_n} M(\xi)\, F[f]\, e^{i\,(x,\xi)\,d\xi} d\xi = F^{-1}[M\, F(f)]],$$

является ограниченным из L_p в L_q на C_0^∞, где $F[f]$ — преобразование Фурье функции $f \in C_0^\infty$.

Ниже мы будем пользоваться следующей теоремой П. И. Лизоркина.

Теорема (см. [20] или [2]). *Пусть функция $\Phi(\xi)$ непрерывна вместе с производной $\dfrac{\partial^n \Phi(\xi)}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_n}$ и всеми предшествующими ее производными при $\xi \in \mathbb{R}^{n,0}$. Тогда $\Phi \in \mathbb{M}_p$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n,0}$ имеет место неравенство*

$$|\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \frac{\partial^k \Phi(\xi)}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}| \leqslant c,$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\boldsymbol{k} = k_1 + \ldots + k_n$.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат настоящей работы.

Теорема 4.1. *Пусть $\Re = \Re(P)$ — полный многогранник Ньютона многочлена $P \in G_n$, удовлетворяющий условиям теоремы* 3.1 *и* $p > 1$. *Тогда*:

1) *если грань* $\Gamma := \Re_{i_0}^{n-1}$ невырождена, *то для всех* $\nu \in \Re$ *имеет место неравенство* (4.1);
2) *если грань* $\Gamma := \Re_{i_0}^{n-1}$ вырождена, *то неравенство* (4.1) *имеет место для тех мультииндексов* $\nu \in \Re^\star$, *для которых функция* $\Phi_\nu = \xi^\nu / P(\xi)$ *является мультипликатором*;
3) *если* $\nu \notin \Re^\star$, *то неравенство* (4.1) *не может иметь места.*

Доказательство. По свойствам преобразования Фурье для функций $u \in C_0^\infty$ и для любого мультииндекса ν имеем

$$F[D^\nu u] = \xi^\nu F[u]; \quad F[P(D)u] = P(\xi) F[u].$$

Отсюда имеем (напомним, что $P(\xi) > 0$ (см. лемму 1.1))

$$F[D^\nu u] = \frac{\xi^\nu}{P(\xi)} F[P(D)u] =: \Phi(\xi) \; F[P(D)u].$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\Phi_\nu \in \mathbb{M}_p$ для соответствующих $\{\nu\}$. По теореме Лизоркина для этого достаточно доказать ограниченность выражений $\{\xi^k \; D^k \Phi(\xi)\}$ для определенных мультииндексов $\{\mathbf{k}\}$.

Пусть сначала многочлен P невырожден, т. е. невырождена также грань $\Gamma := \Re_{i_0}^{n-1}$ многогранника $\Re(P)$ и $\mathbf{k} = 0$.

Тогда по теореме 3.1 $|P(\xi)| \geqslant c \sum_{\alpha \in \Re^\star} |\xi^\alpha|$, что доказывает ограниченность $|\Phi_\nu(\xi)| = \left| \dfrac{\xi^\nu}{P(\xi)} \right|$ для всех $\nu \in \Re(P)$.

Пусть теперь $\mathbf{k} \neq 0$ и, например, $\mathbf{k} = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда, если $\nu_1 \neq 0$, то

$$\xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = \nu_1 \frac{\xi^\nu}{P(\xi)} + \frac{\xi_1 \, \xi^\nu \, \partial P / \partial \xi_1}{|P(\xi)|^2}. \tag{4.2}$$

Ограниченность первого слагаемого в правой части (4.2) для любого $\nu \in \Re$ в *невырожденном* случае следует из теоремы 3.1. Для доказательства ограниченности второго слагаемого представим его в виде

$$\frac{\xi_1 \, \xi^\nu \, \partial P / \partial \xi_1}{|P(\xi)|^2} = \frac{\xi^\nu}{|P(\xi)|} \; \frac{\xi_1 \, \partial P / \partial \xi_1}{|P(\xi)|}. \tag{4.3}$$

Ограниченность первого множителя в правой части (4.3) уже доказана, а ограниченность второго множителя для невырожденного многочлена P следует из того, что $\partial P / \partial \xi_1 < P$.

Ограниченность других выражений $\left| \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \dfrac{\partial^k \Phi(\xi)}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}} \right|$ в невырожденном случае доказывается аналогично.

Перейдём к случаю, когда грань Γ многочлена P *вырождена.* Повторяя рассуждения, проводимые в невырожденном случае, с заменой $\Re$ на $\Re^\star$ и пользуясь условием 2) настоящей теоремы, мы получим неравенство (4.1) для тех мультииндексов $\nu \in \Re^\star$, для которых функция $\Phi_\nu = \xi^\nu / P(\xi)$ является мультипликатором. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О. В.* О коерцитивности в анизотропном пространстве С. Л. Соболева// Мат. сб. — 1967. — *75*, № 4. — С. 585–599.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Физматлит, 1996.
3. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов// Мат. сб. — 1968. — *75*, № 3. — С. 400–416.
4. *Горин Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 1. — С. 91–118.
5. *Грушин В. В.* Об одном классе гипоэллиптических операторов// Мат. сб. — 1970. — *83*, № 3. — С. 456–473.
6. *Ильин В. П.* О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных// Тр. МИАН. — 1965. — *84*. — С. 144–173.
7. *Казарян Г. Г.* Об оценках L_p-норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 5. — С. 911–921.
8. *Казарян Г. Г.* О гипоэллиптических полиномах// Докл. АН СССР. — 1974. — *214*, № 5. — С. 1018–1019.

9. *Казарян Г. Г.* Об одном семействе гипоэллиптических полиномов// Изв. АН Арм. ССР. Мат. — 1974. — *9*, № 3. — С. 189–211.
10. *Казарян Г. Г.* О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам// Изв. АН Арм. ССР. Мат. — 1974. — *9*, № 6. — С. 473–485.
11. *Казарян Г. Г.* О сравнении дифференциальных операторов и дифференциальных операторах постоянной силы// Тр. МИАН. — 1974. — *131*. — С. 94–118.
12. *Казарян Г. Г.* Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы// Тр. МИАН. — 1976. — *140*. — С. 130–161.
13. *Казарян Г. Г.* Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность// Тр. МИАН. — 1979. — *150*. — С. 143–159.
14. *Казарян Г. Г.* О почти гипоэллиптических многочленах// Докл. РАН. — 2004. — *398*, № 6. — С. 701–703.
15. *Казарян Г. Г.* О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности// Изв. НАН Армении. Мат. — 2011. — *46*, № 6. — С. 11–30.
16. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов// Тр. МИАН. — 1979. — *150*. — С. 128–142.
17. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Об одном классе почти гипоэллиптических операторов// Изв. НАН Армении. Мат. — 2006. — *41*, № 6. — С. 39–56.
18. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Об одном классе вырождающихся гипоэллиптических многочленов// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2022. — *83*, № 1. — С. 181–217.
19. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Сравнение трехслойных многочленов многих переменных// *Сдано в печать.*
20. *Лизоркин П. И.* О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\Theta}$// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 59–81.
21. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 59–81.
22. *Михайлов В. П.* Первая краевая задача для квазиэллиптических и квазипараболических уравнений// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 81–99.
23. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. — М.: Мир, 1986.
24. *Agmon S.* The coercivness problem for integro-differential forms// J. Anal. Math. — 1958. — *6*. — С. 183–223.
25. *Aronszajn N.* On coercive integro-differential quadratic forms// В сб.: «Conference on Partial Differential Equations». — Lawrence: Univ. Kansas, 1954. — С. 94–106.
26. *Cattabriga L.* Su una classi di polinomi ipoellittici// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1966. — *36*. — С. 285–309.
27. *Chaleyat M.* La condition d'hypoelliptisity d'Hormander// Asteribque. — 2020. — *84-85*. — С. 189–202.
28. *Friberg J.* Multiquasielliptic polynomials// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1967. — *21*, № 2. — С. 239–260.
29. *Ghazaryan H. G.* Addition of lower order terms preserving almost hypoelliptisity of polynomials// Eurasian Math. J. — 2013. — *4*, № 3. — С. 32–52.
30. *Ghazaryan H. G., Margaryan V. N.* On the comparison of powers of differential operators (polynomials)// Boll. Unione Mat. Ital. — 2023. — *16*, № 4. — С. 703–740.
31. *Khovanskii A. G.* Newton polyhedra (algebra and geometry)// Am. Math. Soc. Transl. — 1992. — *153*, № 2. — С. 1–15.
32. *Nečas J.* Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives // В сб.: «Séminaire Equations aux Dérivées partielles». — Montréal: Univ. Montréal, 1966. — С. 102–128.
33. *Pini B.* Sulla classe di Gevrey della soluzone di certe equazioni ipoellittiche// Boll. Unione Mat. Ital. — 1963. — *18*, № 3. — С. 260–269.
34. *Pini B.* Osservazioni sulla ipoellittisita// Boll. Unione Mat. Ital. — 1963. — *18*, № 4. — С. 420–433.
35. *Schechter M.* Integral inequalities for PDO and functions satisfying general boundary conditions// Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — *12*. — С. 37–66.
36. *Smith K. T.* Inequalities for formali positive integro-differential forms// Bull. Am. Math. Soc. — 1961. — *67*. — С. 368–370.

Г. Г. Казарян
Институт математики НАН Армении, Ереван, Армения
Российско-Армянский университет, Ереван, Армения
E-mail: `haikghazaryan@mail.ru`

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120
EDN: YUEIWO

Coercive estimates for multilayer degenerate differential operators

G. G. Kazaryan

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia
Russian-Armenian University, Yerevan, Armenia

Abstract. We obtain the conditions under which a given multilayer differential operator $P(D)$ (polynomial $P(\xi)$) is more powerful than operator $Q(D)$ (polynomial $Q(\xi)$). This is used to obtain estimates of monomials, which, in turn, using the theory of Fourier multipliers, is used to obtain coercive estimates of derivatives of functions through the differential operator $P(D)$ applied to these functions.

Keywords: coercive estimate, comparison of power of differential operators (polynomials), lower-order term of differential operator (polynomial), Newton polyhedron, degenerate (nondegenerate) operator (polynomial), multilayer operator (polynomial).

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: G. G. Kazaryan, "Coercive estimates for multilayer degenerate differential operators," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 99–120. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120

REFERENCES

1. O. V. Besov, "O koertsitivnosti v anizotropnom prostranstve S. L. Soboleva" [On coercivity in an anisotropic Sobolev space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1967, **75**, No. 4, 585–599 (in Russian).
2. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Fizmatlit, Moscow, 1996 (in Russian).
3. L. R. Volevich and S. G. Gindikin, "Ob odnom klasse gipoellipticheskikh polinomov" [On one class of hypoelliptic polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1968, **75**, No. 3, 400–416 (in Russian).
4. E. A. Gorin, "Ob asimptoticheskikh svoystvakh mnogochlenov i algebraicheskikh funktsiy" [On the asymptotic properties of polynomials and algebraic functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 1, 91–118 (in Russian).
5. V. V. Grushin, "Ob odnom klasse gipoellipticheskikh operatorov" [On one class of hypoelliptic operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **83**, No. 3, 456–473 (in Russian).
6. V. P. Il'in, "O neravenstvakh mezhdu normami chastnykh proizvodnykh funktsiy mnogikh peremennykh" [On inequalities between the norms of partial derivatives of functions of several variables], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1965, **84**, 144–173 (in Russian).
7. G. G. Kazaryan, "Ob otsenkakh L_p-norm proizvodnykh cherez neregulyarnyy nabor differentsial'nykh operatorov" [On estimates of L_p-norms of derivatives through an irregular set of differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 5, 911–921 (in Russian).
8. G. G. Kazaryan, "O gipoellipticheskikh polinomakh" [On hypoelliptic polynomials], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1974, **214**, No. 5, 1018–1019 (in Russian).
9. G. G. Kazaryan, "Ob odnom semeystve gipoellipticheskikh polinomov" [On one family of hypoelliptic polynomials], *Izv. AN Arm. SSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Armenian SSR. Ser. Math.], 1974, **9**, No. 3, 189–211 (in Russian).

10. G. G. Kazaryan, "O dobavlenii mladshikh chlenov k differentsial'nym polinomam" [On adding lower terms to differential polynomials], *Izv. AN Arm. SSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Armenian SSR. Ser. Math.], 1974, **9**, No. 6, 473–485 (in Russian).
11. G. G. Kazaryan, "O sravnenii differentsial'nykh operatorov i differentsial'nykh operatorakh postoyannoy sily" [The comparison of differential operators and differential operators of constant strength], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1974, **131**, 94–118 (in Russian).
12. G. G. Kazaryan, "Otsenki differentsial'nykh operatorov i gipoellipticheskie operatory" [Estimates of differential operators and hypoelliptic operators], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1976, **140**, 130–161 (in Russian).
13. G. G. Kazaryan, "Sravnenie moshchnosti mnogochlenov i ikh gipoellipticnost"' [Comparison of the power of polynomials and their hypoellipticity], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1979, **150**, 143–159 (in Russian).
14. G. G. Kazaryan, "O pochti gipoellipticheskikh mnogochlenakh" [On almost hypoelliptic polynomials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2004, **398**, No. 6, 701–703 (in Russian).
15. G. G. Kazaryan, "O pochti gipoellipticheskikh mnogochlenakh, vozrastayushchikh na beskonechnosti" [On almost hypoelliptic polynomials increasing at infinity], *Izv. NAN Armenii. Mat.* [Bull. Natl. Acad. Sci. Armenia. Ser. Math.], 2011, **46**, No. 6, 11–30 (in Russian).
16. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Kriterii gipoelliptichnosti v terminakh moshchnosti i sily operatorov" [Hypoellipticity criteria in terms of power and strength of operators], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1979, **150**, 128–142 (in Russian).
17. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Ob odnom klasse pochti gipoellipticheskikh operatorov" [On a class of almost hypoelliptic operators], *Izv. NAN Armenii. Mat.* [Bull. Natl. Acad. Sci. Armenia. Ser. Math.], 2006, **41**, No. 6, 39–56 (in Russian).
18. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Ob odnom klasse vyrozhdayushchikhsya gipoellipticheskikh mnogochlenov" [On one class of degenerate hypoelliptic polynomials], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2022, **83**, No. 1, 181–217 (in Russian).
19. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Sravnenie trekhsloynykh mnogochlenov mnogikh peremennykh" [Comparison of three-layer polynomials of many variables] *to be published.*
20. P. I. Lizorkin, "O mul'tiplikatorakh integralov Fur'e v prostranstvakh $L_{p,\Theta}$" [On multipliers of Fourier integrals in the spaces $L_{p,\Theta}$], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 59–81 (in Russian).
21. V. P. Mikhaylov, "O povedenii na beskonechnosti odnogo klassa mnogochlenov" [On the behavior at infinity of one class of polynomials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 59–81 (in Russian).
22. V. P. Mikhaylov, "Pervaya kraevaya zadacha dlya kvaziellipticheskikh i kvaziparabolicheskikh uravneniy" [The first boundary-value problem for quasi-elliptic and quasi-parabolic equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 81–99 (in Russian).
23. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 2* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. II], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
24. S. Agmon, "The coercivness problem for integro-differential forms," *J. Anal. Math.*, 1958, **6**, 183–223.
25. N. Aronszajn, "On coercive integro-differential quadratic forms," In: *Conference on Partial Differential Equations*, Univ. Kansas, Lawrence, 1954, pp. 94–106.
26. L. Cattabriga, "Su una classi di polinomi ipoellittici," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1966, **36**, 285–309.
27. M. Chaleyat, "La condition d'hypoelliptisity d'Hormander," *Asteribque*, 2020, **84-85**, 189–202.
28. J. Friberg, "Multiquasielliptic polynomials," *Ann. Sc. Norm. Super. Cl. Pisa Sci.*, 1967, **21**, No. 2, 239–260.
29. H. G. Ghazaryan, "Addition of lower order terms preserving almost hypoelliptisity of polynomials," *Eurasian Math. J.*, 2013, **4**, No. 3, 32–52.
30. H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan, "On the comparison of powers of differential operators (polynomials)," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2023, **16**, No. 4, 703–740.
31. A. G. Khovanskii, "Newton polyhedra (algebra and geometry)," *Am. Math. Soc. Transl.*, 1992, **153**, No. 2, 1–15.
32. J. Nečas, "Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives ," In: *Séminaire Equations aux Dérivées partielles*, Univ. Montréal, Montréal, 1966, pp. 102–128.
33. B. Pini, "Sulla classe di Gevrey della soluzone di certe equazioni ipoellittiche," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1963, **18**, No. 3, 260–269.
34. B. Pini, "Osservazioni sulla ipoellittisita," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1963, **18**, No. 4, 420–433.
35. M. Schechter, "Integral inequalities for PDO and functions satisfying general boundary conditions," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1959, **12**, 37–66.
36. K. T. Smith, "Inequalities for formali positive integro-differential forms," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1961, **67**, 368–370.

G. G. Kazaryan
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia
Russian-Armenian University, Yerevan, Armenia
E-mail: haikghazaryan@mail.ru