

УДК 517.925.4

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98

EDN: YQTKXF

## О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Т. М. ИВАНОВА<sup>1</sup>, А. Б. КОСТИН<sup>1</sup>, А. И. РУБИНШТЕЙН, В. Б. ШЕРСТЮКОВ<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

**Аннотация.** Рассматривается задача о существовании предельных циклов у автономных систем дифференциальных уравнений. Излагаются вполне элементарные соображения, которые могут быть полезны при обсуждении качественных вопросов, возникающих в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлено, что любая простая замкнутая кривая, заданная уравнением  $F(x, y) = 1$  с достаточно общей функцией  $F$ , является предельным циклом для соответствующей автономной системы на плоскости (и даже для бесконечного множества систем, зависящих от вещественного параметра). Эти системы выписываются явно. Подробно разобрано несколько конкретных примеров. Приведены графические иллюстрации.

**Ключевые слова:** автономная система на плоскости, периодические решения, положительно определённая функция, устойчивый предельный цикл.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** Т. М. Иванова, А. Б. Костин, А. И. Рубинштейн, В. Б. Шерстюков. О предельных циклах автономных систем // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 1. С. 77–98. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В обзорной работе [3] Ю. С. Ильяшенко выделяет следующие три условных периода развития теории динамических систем.

**Период Ньютона.** Дано дифференциальное уравнение. Решить его.

**Период Пуанкаре.** Дано дифференциальное уравнение. Описать свойства решений, не решая само уравнение, а используя лишь свойства его правой части.

**Период Андронова.** Не дано никакого конкретного дифференциального уравнения. Описать свойства решений уравнений из некоторого класса.

Материал заметки по большей части связан со вторым из отмеченных этапов. Многие вопросы качественной (геометрической) теории подробно изложены в монографиях [1, 5]. Напомним отдельные сведения, относящиеся к этой замечательной теории.



В 70-х годах XIX века А. Пуанкаре начал изучать качественное поведение траекторий систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

(см., например, [6, 7]) и ввёл понятие предельного цикла — замкнутой траектории (1.1), в малой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Обычно при этом предполагается, что в некоторой области плоскости имеют место факты существования и единственности решения задачи Коши для автономной системы (1.1), а также, что всякое решение (1.1) продолжается по переменной  $t$  на максимальный интервал  $(t_*, +\infty)$ , где не исключено, что  $t_* = -\infty$ .

Идея написать заметку возникла после того, как один из её авторов (А. И. Рубинштейн) заинтересовался следующими вопросами.

1. Насколько общей может быть простая замкнутая кривая, являющаяся предельным циклом некоторой системы вида (1.1)?
2. Можно ли по такой кривой достаточно общего вида выписать явно соответствующую систему (1.1), т. е. предъявить функции  $f$  и  $g$ ?

Как известно, периодические решения динамических систем находят важные применения в физике, теории колебаний, радиотехнике. Однако, лишь в редких случаях периодические решения удаётся найти в явном виде. Приведём одну яркую цитату из книги [10, с. 299]: «*Предельные циклы представляют огромный интерес для физики и техники. Поведение многих физических и технических систем описывается уравнениями вида (1.1). Существование устойчивого предельного цикла у этой системы уравнений означает, что соответствующая физическая или техническая система может работать в устойчивом периодическом режиме*».

В 1922 году Балтазар ван дер Поля рассмотрел уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}, \quad \mu > 0 \text{ — малый параметр,}$$

описывающее работу лампового генератора (см., например, [6, гл. 5, § 29]). Мы рекомендуем прекрасный обзор [4], написанный специально к 125-летию юбилею голландского учёного.

Уравнение ван дер Поля, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (1.2)$$

Оказывается, система (1.2) для малых значений  $\mu$  имеет устойчивый предельный цикл. Эта замкнутая траектория содержит внутри себя единственную точку покоя (положение равновесия)  $x = 0, y = 0$ . Установить факт наличия данного предельного цикла весьма непросто. Так, в книгу [2, гл. 14, §§ 6, 7] помещено предложенное Г. В. Каменковым конструктивное доказательство существования предельного цикла системы (1.2), занимающее 37 (!) страниц.

Линеаризованная форма уравнения ван дер Поля есть уравнение колебаний  $\ddot{x} + x = \mu\dot{x}$ , которое в виде системы записывается как

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases}$$

Для этой линейной системы точка покоя  $(0, 0)$  при  $0 < \mu < 2$  — неустойчивый фокус, а при  $\mu > 2$  — неустойчивый узел. В [6, § 30, теоремы 23, 24] показано, что такой же характер положения равновесия сохраняется и для нелинейной системы (1.2), т. е. в каждом из указанных случаев фазовые траектории системы (1.2) и её первого приближения имеют схожую топологическую структуру. При  $\mu = 2$  точка покоя  $(0, 0)$  линейной системы является неустойчивым вырожденным узлом, и фазовые портреты системы (1.2) до и после линеаризации существенно различаются.

Немного «подправив» уравнение ван дер Поля, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu(1 - x^2 - y^2)y. \end{cases} \quad (1.3)$$

Для всякого решения системы (1.3) выполняется тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = \mu (1 - x^2 - y^2) y^2.$$

Элементарной проверкой убеждаемся, что для любого фиксированного значения  $\tau$  пара функций  $x = \sin(t + \tau)$ ,  $y = \cos(t + \tau)$  удовлетворяет этому тождеству, а окружность  $x^2 + y^2 = 1$  есть замкнутая траектория системы (1.3). Можно показать (похожие рассуждения даны ниже при доказательстве теоремы 2.1), что при  $\mu > 0$  указанная окружность является двусторонним устойчивым предельным циклом. Здесь мы имеем дело с той исключительной ситуацией, когда периодическое решение автономной системы удаётся выписать в явном виде.

Пусть  $P$  и  $Q$  — многочлены от двух переменных степени не выше второй. В заметке [8] для класса динамических систем вида  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$ , имеющих своей траекторией окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , движение по которой происходит с постоянной угловой скоростью, исследовался вопрос о наличии предельных циклов и характере точек покоя.

Отметим ещё, что в фундаментальном труде [1, гл. 11, пример 14] приведена система

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + 2)y + x^2 + y^2 - 1, \\ \dot{y} = -x(x + 2), \end{cases}$$

для которой окружность  $x^2 + y^2 = 1$  является предельным циклом. Доказательство этого факта использует качественные методы исследования динамических систем. Ясно, что пары функций вида  $x = \sin(\omega t + \tau)$ ,  $y = \cos(\omega t + \tau)$  или  $x = \cos(\omega t + \tau)$ ,  $y = \sin(\omega t + \tau)$  ни при каких фиксированных  $\omega$  и  $\tau$  не будут решениями такой системы. Записать периодическое решение в явном виде проблематично.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Перейдём непосредственно к интересующей нас задаче. Пусть на фазовой плоскости задана функция  $F(x, y)$ . Для произвольно зафиксированного параметра  $c > 0$  обозначим

$$\Gamma_c \equiv \{ (x, y) \mid F(x, y) = c \}, \quad K_c \equiv \{ (x, y) \mid F(x, y) \leq c \},$$

считая эти множества непустыми и ограниченными.

Предположим, что выполнены следующие четыре условия:

(i)  $F \in C(\mathbb{R}^2)$  и положительно определена, т. е.

$$0 = F(0, 0) < F(x, y) \quad \text{при всех } (x, y) \neq (0, 0);$$

(ii) при каждом  $c > 0$  линия уровня  $\Gamma_c$  есть простая (без точек самопересечения) замкнутая непрерывная кривая, имеющая конечную длину;

(iii)  $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , причём

$$F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0 \quad \text{и} \quad F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) > 0 \quad \text{при } (x, y) \neq (0, 0);$$

(iv) линии уровня функции  $F$  меняются непрерывно с изменением параметра, точнее, при заданном  $c > 0$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что для всех  $d > 0$ , удовлетворяющих неравенству  $|d - c| < \delta$ , выполняется условие  $H(\Gamma_d; \Gamma_c) < \varepsilon$ , где  $H(\Gamma_d; \Gamma_c)$  обозначает хаусдорфово расстояние (см., например, [9]) между множествами  $\Gamma_d$  и  $\Gamma_c$ .

**Замечание 2.1.** Из определения множеств  $\Gamma_c$ ,  $K_c$  ясно, что в условиях (i)–(iii) это компакты в  $\mathbb{R}^2$ , причём  $K_d$  содержится строго внутри  $K_c$  для любых  $c > d > 0$ , и точка  $(0, 0)$  является внутренней точкой каждого из компактов  $K_c$ . По поводу самих условий (i)–(iii) см. [2, с. 485]. Систему ключевых предположений (i)–(iv) удобно выписать явно. В то же время, обсуждение зависимости-независимости такого набора требований увело бы нас в сторону от основной линии.

В «опорном» случае  $c = 1$  пишем  $\Gamma$  вместо  $\Gamma_1$ . Используем запись  $\Omega \equiv \{ (x, y) \mid F(x, y) < 1 \}$  для внутренности компакта  $K \equiv K_1$ . Наша цель — обосновать следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Пусть функция  $F(x, y)$  подчинена условиям (i)–(iv). Тогда кривая

$$\Gamma \equiv \{ (x, y) \mid F(x, y) = 1 \}$$

есть двусторонний устойчивый предельный цикл для любой системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = F_x(x, y) + a F_y(x, y) - F_x(x, y) F(x, y), \\ \dot{y} = -a F_x(x, y) + F_y(x, y) - F_y(x, y) F(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

с произвольным вещественным параметром  $a \neq 0$ .

*Доказательство.* Покажем, что  $(0, 0)$  — единственная точка покоя системы (2.1). Допустив противное, предположим, что для некоторой пары  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  выполняются условия

$$\begin{cases} (1 - F(x_0, y_0)) F_x(x_0, y_0) + a F_y(x_0, y_0) = 0, \\ -a F_x(x_0, y_0) + (1 - F(x_0, y_0)) F_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует равенство  $F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) = 0$ , что противоречит условию (iii).

Для любого решения  $(x(t), y(t)) \neq (0, 0)$  системы (2.1) имеем

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) = (F_x^2(x(t), y(t)) + F_y^2(x(t), y(t))) (1 - F(x(t), y(t))). \quad (2.2)$$

Формула (2.2) показывает, что функция  $F(x(t), y(t))$  переменной  $t$  «возрастает в области  $\Omega$ », заданной неравенством  $F(x, y) < 1$ , и «убывает в области  $\mathbb{R}^2 \setminus K$ », заданной неравенством  $F(x, y) > 1$ . Ниже в тексте доказательства будет разъяснён точный смысл сказанного.

Докажем, что кривая  $\Gamma$  является предельным циклом системы (2.1), т. е. её замкнутой траекторией, в малой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Рассмотрим произвольную точку  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$  на кривой  $\Gamma$ , т. е. точку, в которой  $F(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 1$ . В силу условий, наложенных на функцию  $F$ , существует (и притом единственное) решение  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  системы (2.1), удовлетворяющее начальным условиям  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$ ,  $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ . Это решение продолжаемо на промежуток  $t \in (-\infty, +\infty)$  (см. лемму ниже). Точка  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \neq (0, 0)$  и поэтому не является точкой покоя (2.1).

Докажем, что  $z(t) \equiv F(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = 1$  для любого  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Действительно, в силу (2.2) функция  $z(t)$  удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{\Phi}(t) (1 - z(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ z(0) = 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $\tilde{\Phi}(t) \equiv F_x^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  есть непрерывная на  $\mathbb{R}$  функция. По теореме единственности решения задачи Коши (2.3) получим, что  $z(t) \equiv 1$ . Последнее означает, что траектория  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , целиком лежит на  $\Gamma$ . При этом  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \neq (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ , поскольку  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$  не является точкой покоя.

Покажем, что рассматриваемая траектория замкнута. Для этого достаточно установить существование числа  $T > 0$  со свойством

$$\tilde{x}(T) = \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad \tilde{y}(T) = \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0. \quad (2.4)$$

Траектория  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  является гладкой кривой на плоскости, поскольку (см. (iii))

$$\dot{\tilde{x}}^2(t) + \dot{\tilde{y}}^2(t) = a^2 [F_x^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))] > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

По условию (ii) линия уровня  $\Gamma \equiv \Gamma_1$  — простая замкнутая спрямляемая (имеющая конечную длину  $L > 0$ ) кривая. Пусть  $T > 0$  выбрано из условия

$$\int_0^T \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2(t) + \dot{\tilde{y}}^2(t)} dt = L. \quad (2.5)$$

Тогда за промежуток от  $t = 0$  до  $t = T$  точка плоскости  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  сделает полный оборот по кривой  $\Gamma$  и вернётся в начальное положение так, что будут выполнены равенства (2.4). Докажем, что такое  $T > 0$  существует и единственно. Так как  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in \Gamma$ , то из (2.1) при всех  $t \in \mathbb{R}$  имеем равенства

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = a F_y(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \\ \dot{\tilde{y}}(t) = -a F_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)). \end{cases}$$

Уравнение (2.5) для нахождения  $T > 0$  приобретает вид

$$|a| \int_0^T \sqrt{F_x^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))} dt = L. \quad (2.6)$$

В силу условий на  $F$  и компактности  $\Gamma$  (см. (ii), (iii)) для подынтегральной функции в (2.6) справедлива двусторонняя оценка

$$0 < m \leq \sqrt{F_x^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))} \leq M < +\infty, \quad t \in \mathbb{R},$$

с константами

$$m \equiv \min_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y)}, \quad M \equiv \max_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y)}.$$

Как видим, левая часть (2.6) строго возрастает по переменной  $T$ , а уравнение (2.5) при заданном  $L$  имеет (и притом единственное) решение  $T > 0$ . Следовательно (см. [6, гл. 2, § 15], [11, гл. 4, § 17]), решение  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  удовлетворяет (2.4) и является периодическим. Отметим также, что число  $T$  заключено в границах

$$\frac{L}{|a| M} \leq T \leq \frac{L}{|a| m}$$

и по построению является наименьшим положительным периодом для решения  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ .

Докажем теперь, что в окрестности кривой  $\Gamma$  нет других замкнутых траекторий системы (2.1). Пусть  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  — произвольная точка, лежащая в малой окрестности  $\Gamma$ , но не на самой  $\Gamma$ . Для определённости считаем, что  $F(x_0, y_0) < 1$  (случай  $F(x_0, y_0) > 1$  разбирается аналогично). Рассмотрим решение  $(x(t), y(t))$  системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ . Это решение продолжается на промежуток  $t \in (-\infty, +\infty)$  (см. лемму ниже) и не содержит единственную точку покоя системы (2.1) — точку  $(0, 0)$ . Предположим, что возникающая траектория замкнута (и, следовательно, выбранное решение — периодическое). Тогда существует такое число  $\tau > 0$ , что  $x(\tau) = x_0, y(\tau) = y_0$ . Кроме того, из (2.2) для  $g(t) \equiv F(x(t), y(t))$  следуют равенства

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = \Phi(t) (1 - g(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ g(0) = F(x_0, y_0) \equiv \delta < 1 \end{cases}$$

с непрерывной и положительной на  $\mathbb{R}$  функцией

$$\Phi(t) \equiv F_x^2(x(t), y(t)) + F_y^2(x(t), y(t)).$$

Отсюда

$$g(t) = 1 - (1 - \delta) \exp \left\{ - \int_0^t \Phi(\eta) d\eta \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Функция (2.7) строго возрастает при всех  $t \in \mathbb{R}$ , что противоречит равенству  $g(\tau) = g(0)$  при некотором  $\tau > 0$ . Само равенство порождено связью

$$g(\tau) = F(x(\tau), y(\tau)) = F(x_0, y_0) = g(0).$$

Таким образом, кривая  $\Gamma = \{(x, y) \mid F(x, y) = 1\}$  на фазовой плоскости образует предельный цикл для автономной системы вида (2.1) при любом выборе параметра  $a \neq 0$  (см. также [6, гл. 5, § 28, теорема 20]).

Нам осталось установить устойчивость фазовой траектории  $\Gamma$ . Последнее свойство означает (см. [6, гл. 5, § 28]), что все траектории из её достаточно малой окрестности «наматываются» на  $\Gamma$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Пусть, как и выше,  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  — произвольная точка, лежащая в малой окрестности  $\Gamma$ . Рассмотрим траекторию  $(x(t), y(t))$  системы (2.1), проходящую через точку  $(x_0, y_0)$ . Докажем, что для любой такой траектории существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}((x(t), y(t)); \Gamma) = 0. \quad (2.8)$$

Для определённости считаем, что  $F(x_0, y_0) < 1$  (случай  $F(x_0, y_0) > 1$  рассматривается аналогично). Тогда из интегрального представления (2.7) следует, что для этой траектории функция

$g(t) \equiv F(x(t), y(t))$  при всех  $t \in [0, +\infty)$  удовлетворяет неравенствам  $0 < \delta \leq g(t) < 1$ . Значит, траектория  $(x(t), y(t))$  лежит в ограниченном замкнутом множестве  $K_{\delta, 1} \equiv \{(x, y) \mid \delta \leq F(x, y) \leq 1\}$ , не содержащем точку  $(0, 0)$ . Благодаря этому и условию (iii), подинтегральная функция в (2.7) отделена от нуля:

$$\Phi(t) \geq \min \{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) \mid (x, y) \in K_{\delta, 1}\} \equiv \gamma > 0 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Поэтому  $g(t)$  подчинена двойному неравенству

$$1 - (1 - \delta)e^{-\gamma t} \leq g(t) < 1$$

при любом  $t \geq 0$ . Отсюда заключаем, что функция  $g(t)$ , строго возрастающая, стремится к единице при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому

$$\forall \Delta > 0 \quad \exists t_\Delta > 0 \quad \forall t > t_\Delta \quad \Rightarrow \quad 1 - \Delta < g(t) < 1. \quad (2.9)$$

Из условия (iv) непрерывности линии уровня  $\Gamma_c$  по параметру  $c > 0$  имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in (0, 1) \quad \forall c \in (1 - \Delta, 1) \quad \Rightarrow \quad H(\Gamma_c; \Gamma) < \varepsilon.$$

Но тогда по определению хаусдорфова расстояния получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in (0, 1) \quad \forall c \in (1 - \Delta, 1) \quad \forall A \in \Gamma_c \quad \Rightarrow \quad \text{dist}(A; \Gamma) < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Комбинируя (2.9) и (2.10), выводим (2.8). Следовательно, кривая  $\Gamma$  есть устойчивый предельный цикл для системы (2.1). Теорема 2.1 полностью доказана.  $\square$

При доказательстве теоремы мы существенно пользовались тем, что соответствующее решение системы (2.1) продолжается на максимальный промежуток  $(t_*, +\infty)$ . Покажем, что в наших условиях такое продолжение всегда существует для любого решения системы (2.1).

**Лемма 2.1.** Пусть для функции  $F(x, y)$  выполнены условия теоремы 2.1,  $(x_0, y_0)$  — произвольная точка плоскости, а  $(x(t), y(t))$  — решение системы (2.1), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ . Тогда это решение продолжается на максимальный промежуток  $(t_*, +\infty)$ , причём выполняются соотношения:

- 1) если точка  $(x_0, y_0) \in K = \Omega \cup \Gamma$ , то  $t_* = -\infty$ ;
- 2) если точка  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ , то  $t_* \geq -\infty$  и  $x^2(t) + y^2(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow t_* + 0$ .

*Доказательство.* Так как  $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , то автономная система (2.1) может быть записана в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

где функции  $f$  и  $g$  принадлежат  $C^1(\mathbb{R}^2)$ . Поэтому решение  $(x(t), y(t))$  задачи Коши, о котором идёт речь в лемме, существует и единственно на отрезке  $[-h, h]$  с некоторым  $h > 0$ . Далее рассмотрим каждый из пунктов отдельно.

Начнём со случая, когда  $(x_0, y_0) \in \Gamma$ . Как и при доказательстве теоремы 2.1, получим, что функция  $z(t) = F(x(t), y(t)) \in C^1[-h, h]$  удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{\Phi}(t)(1 - z(t)), & t \in [-h, h], \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Отсюда  $z(t) = 1$  и  $(x(t), y(t)) \in \Gamma$  при всех  $t \in [-h, h]$ . Докажем, что это решение продолжается на промежуток  $[-h, +\infty)$ . Для этого рассмотрим непустое множество

$$E_1 \equiv \{ \alpha > 0 \mid \text{решение } (x(t), y(t)) \text{ продолжаемо на } [-h, \alpha] \}.$$

Предположим, что оно ограничено сверху. Тогда существует  $\sup E_1 = b \in \mathbb{R}$ . Из определения точной верхней грани ясно, что  $x, y \in C^1[-h, b)$ . Эти функции продолжаются по непрерывности на отрезок  $[-h, b]$ . В самом деле, для функции  $x(t)$  и любых  $t', t'' \in [-h, b)$  справедливо равенство

$$x(t'') - x(t') = \int_{t'}^{t''} f(x(t), y(t)) dt.$$

Поскольку  $f \in C(\Gamma)$ , а  $\Gamma$  — компакт, то  $f$  ограничена на  $\Gamma$ . Поэтому верна оценка

$$|x(t') - x(t'')| \leq M_f |t' - t''|, \quad t', t'' \in [-h, b],$$

которая влечёт равномерную непрерывность  $x(t)$  на  $[-h, b]$  и наличие предела  $\lim_{t \rightarrow b-0} x(t) \equiv x(b)$ .

Аналогичным образом для  $y(t)$  выводим  $\lim_{t \rightarrow b-0} y(t) \equiv y(b)$ . При этом  $(x(b), y(b)) \in \Gamma$ . Так определённые функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  непрерывны на  $[-h, b]$ . Покажем, что у каждой из этих функций существует производная в точке  $b$  слева и в этой точке выполнены уравнения системы. Действительно, для  $x(t)$  справедливо равенство

$$\dot{x} = f(x(t), y(t)), \quad t \in [-h, b],$$

правая часть которого непрерывна на отрезке  $[-h, b]$ . Значит, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \dot{x}(t) \equiv \dot{x}_-(b),$$

что влечёт существование у функции  $x(t)$  в точке  $t = b$  левой производной, равной  $\dot{x}_-(b)$ . Точно так же убеждаемся в наличии предела

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \dot{y}(t) \equiv \dot{y}_-(b),$$

совпадающего с левой производной функции  $y(t)$  в точке  $t = b$ . Следовательно, уравнения системы выполнены на всем отрезке  $[-h, b]$ . Выбирая точку  $(x(b), y(b)) \in \Gamma$  в качестве начальной, получаем противоречие с тем, что  $b = \sup E_1$ .

По той же схеме, рассматривая множество

$$E_2 \equiv \{ \alpha < 0 \mid (x(t), y(t)) \text{ продолжаемо на } [\alpha, h] \},$$

доказываем, что  $(x(t), y(t))$  продолжается и на  $(-\infty, h]$ , а поэтому — на  $(-\infty, +\infty)$ .

Если  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , то, в силу единственности решения задачи Коши,  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$  при всех  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Пусть теперь  $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ . В этом случае  $0 < z_0 \equiv F(x_0, y_0) < 1$ . Как и выше, введём непустые множества  $E_1$  и  $E_2$ . Предположив, что  $E_1$  ограничено сверху, обозначим  $b = \sup E_1$ . Повторяя рассуждения, получим, что уравнения системы выполняются на отрезке  $[-h, b]$ , а точка  $(x(b), y(b)) \in K$ . Покажем, что это невозможно. Если  $(x(b), y(b)) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ , то решение продолжается правее точки  $t = b$ , что противоречит равенству  $b = \sup E_1$ . Если же точка  $(x(b), y(b)) \in \Gamma$ , то при выборе начальных условий  $x_0 = x(b)$ ,  $y_0 = y(b)$  приходим к противоречию с теоремой единственности решения задачи Коши, так как по разобранному случаю такое решение лежит на  $\Gamma$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Наконец, если допустить  $(x(b), y(b)) = (0, 0)$ , то рассматриваемая траектория достигнет точки покоя за конечное время, что невозможно (см., например, [11, гл. 4]).

Пусть теперь  $E_2$  ограничено снизу и  $a = \inf E_2$ . Проводя аналогичные рассуждения для отрезка  $[a, h]$ , получим, что уравнения системы выполняются на таком отрезке, а точка  $(x(a), y(a)) \in K$ . Покажем, что это невозможно. Если  $(x(a), y(a)) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ , то решение продолжается левее точки  $t = a$ , что противоречит равенству  $a = \inf E_2$ . Случаи  $(x(a), y(a)) \in \Gamma$  и  $(x(a), y(a)) = (0, 0)$  невозможны по тем же причинам, что и выше для  $E_1$ . Пункт 1 полностью разобран.

Перейдём к доказательству пункта 2. Пусть  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$  и  $z_0 = F(x_0, y_0) > 1$ . Как и выше, рассмотрим множества  $E_1$  и  $E_2$ . Докажем, что  $E_1$  — неограниченное сверху множество. Пусть  $\sup E_1 = b < +\infty$ . Повторяя рассуждения, приведённые выше, получим, что решение  $(x(t), y(t))$  определено на  $[-h, b]$ . На этом отрезке функция  $z(t) = F(x(t), y(t))$  удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Phi(t)(1 - z(t)), & t \in [-h, b], \\ z(0) = z_0 > 1. \end{cases}$$

Учитывая интегральное представление (2.7), видим, что  $z(t)$  убывает и  $z(t) > 1$  при  $t \in [-h, b]$ . Отсюда заключаем, что траектория  $(x(t), y(t))$  заведомо лежит в ограниченном замкнутом множестве  $K_{1, z_0} \equiv \{(x, y) \mid 1 \leq F(x, y) \leq z_0\}$ , не содержащем точку  $(0, 0)$ . Но это невозможно. Действительно, как и при доказательстве пункта 1, решение продолжается вплоть до  $t = b$ . При этом точка  $(x(b), y(b))$  не может лежать внутри  $K_{1, z_0}$ , поскольку, как и выше, получим противоречие с равенством  $\sup E_1 = b$ . Точка  $(x(b), y(b))$  не может лежать и на  $\Gamma$ , так как это противоречит

единственности решения задачи Коши. Равенство  $F(x(b), y(b)) = z_0$  также невозможно в силу строгого убывания  $z(t)$ .

Оказывается (см. пример 3.1 ниже), множество  $E_2$  в ситуации пункта 2 может быть ограниченным снизу. Через  $t_* \geq -\infty$  обозначим  $\inf E_2$  и докажем оставшееся в этом пункте свойство:

$$x^2(t) + y^2(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow t_* + 0.$$

Рассуждения для случаев  $t_* = -\infty$  и  $t_* > -\infty$  различаются и будут проведены отдельно. Впрочем, в каждом из этих случаев функция  $z(t) = F(x(t), y(t))$  удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Phi(t)(1 - z(t)), & t \in (t_*, +\infty), \\ z(0) = z_0 > 1 \end{cases}$$

с непрерывной и положительной на промежутке  $(t_*, +\infty)$  функцией

$$\Phi(t) \equiv F_x^2(x(t), y(t)) + F_y^2(x(t), y(t)).$$

Отсюда

$$z(t) = 1 - (1 - z_0) \exp \left\{ - \int_0^t \Phi(\eta) d\eta \right\}, \quad t \in (t_*, +\infty),$$

а также

$$\dot{z}(t) = \Phi(t)(1 - z_0) \exp \left\{ - \int_0^t \Phi(\eta) d\eta \right\} < 0, \quad t \in (t_*, +\infty).$$

**Шаг 1.** Докажем, что  $\lim_{t \rightarrow t_* + 0} z(t) = +\infty$ . Для этого, поскольку  $\dot{z}(t) < 0$  при  $t \in (t_*, +\infty)$ , достаточно установить, что функция  $z(t)$  неограничена сверху. Предположим противное: функция  $z(t)$  ограничена сверху на множестве  $(t_*, +\infty)$ . Тогда существует конечный  $\lim_{t \rightarrow t_* + 0} z(t) \equiv z_*$ , и  $1 < z_0 < z(t) < z_*$  при всех значениях  $t \in (t_*, +\infty)$ . Следовательно, траектория  $(x(t), y(t))$  заведомо лежит в компакте  $K_{z_0, z_*} \equiv \{(x, y) \mid z_0 \leq F(x, y) \leq z_*\}$  при всех  $t \in (t_*, +\infty)$ .

- Пусть  $t_* = -\infty$ . Для функции  $\Phi$  имеем оценку

$$\Phi(t) \geq \min \{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) \mid (x, y) \in K_{z_0, z_*}\} \equiv \gamma_* > 0 \quad \text{для всех } t \in (t_*, +\infty).$$

Переходя к пределу при  $t \rightarrow -\infty$  в интегральной формуле для  $z(t)$ , получим, что её левая часть стремится к конечному значению  $z_*$ , а правая часть, в силу расходимости интеграла, стремится к  $+\infty$ . Противоречие показывает, что равенство  $t_* = -\infty$  невозможно.

- Пусть  $t_*$  конечно. Повторяя проведённые выше рассуждения, видим, что решение  $(x(t), y(t))$  продолжается влево по непрерывности до точки  $t_*$ , и в этой точке выполняются уравнения системы. Далее, выбрав в качестве начальных значений  $x(t_*)$ ,  $y(t_*)$ , замечаем, что решение продолжается влево от точки  $t_*$ , а это противоречит определению  $t_*$ . Тем самым и конечной величиной  $t_*$  быть не может.

Суммируя доказанное в последних двух пунктах, делаем вывод, что функция  $z(t)$  не может быть ограниченной сверху на промежутке  $(t_*, +\infty)$ . В результате имеем требуемое предельное соотношение  $\lim_{t \rightarrow t_* + 0} z(t) = +\infty$ .

**Шаг 2.** Докажем теперь, что решение стремится к бесконечности при  $t \rightarrow t_* + 0$ . Потребуется одно простое наблюдение, которое для удобства ссылок дадим в виде встроеного утверждения.

**Лемма 2.2.** Пусть функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда

$$\forall \delta > 0 \quad \exists z_\delta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (F(x, y) > z_\delta \Rightarrow x^2 + y^2 > \delta).$$

*Доказательство.* Неотрицательная (обращающаяся в нуль только при  $x = y = 0$ ) непрерывная функция  $F(x, y)$  ограничена в замкнутом круге  $B_\delta \equiv \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \delta\}$  при любом  $\delta > 0$ . Формальная запись такого факта означает, что

$$\forall \delta > 0 \quad \exists z_\delta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x^2 + y^2 \leq \delta \Rightarrow F(x, y) \leq z_\delta),$$

где можно взять

$$z_\delta = \max_{(x,y) \in B_\delta} F(x,y) > 0.$$

Именно это (в эквивалентной форме) и утверждается. Лемма 2.2 доказана.  $\square$

Продолжим обоснование.

- Пусть  $t_* = -\infty$ . Для произвольного  $\delta > 0$  выберем  $z_\delta > 0$  как в лемме 2.2. Для функции  $z(t) = F(x(t), y(t))$  (см. шаг 1) имеем

$$\forall z_\delta > 0 \quad \exists t_\delta < 0 \quad \forall t < t_\delta \quad z(t) > z_\delta.$$

Тогда, ввиду леммы 2.2, для тех же значений  $t < t_\delta$  будет выполнено требуемое неравенство

$$x(t)^2 + y(t)^2 > \delta.$$

- Пусть  $t_*$  конечно. Возьмём произвольное  $\delta > 0$  и снова найдём по нему  $z_\delta > 0$ , исходя из леммы 2.2. Для функции  $z(t)$  (см. шаг 1) имеем

$$\forall z_\delta > 0 \quad \exists t_\delta \in (t_*, 0) \quad \forall t \in (t_*, t_\delta) \quad z(t) > z_\delta.$$

Тогда, в силу выбора  $z_\delta > 0$ , для тех же значений  $t \in (t_*, t_\delta)$  будет выполнено неравенство

$$x(t)^2 + y(t)^2 > \delta.$$

Шаг 2 сделан. Лемма 2.1 доказана.  $\square$

**Замечание 2.2.** В условиях теоремы единственная точка покоя  $x = 0, y = 0$  является неустойчивой. В самом деле, производная  $F$  в силу системы (2.1) имеет вид

$$\left. \frac{d}{dt} F(x, y) \right|_{(2.1)} = (F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y))(1 - F(x, y)) \equiv w(x, y)$$

и положительна при всех  $(x, y)$  из «проколотого» круга  $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ , если  $\delta > 0$  достаточно мало. Применяя теорему Четаева о неустойчивости (см., например, [11, гл. 4, § 19]) в  $\delta$ -окрестности точки  $(0, 0)$  с положительно определёнными функциями  $F(x, y)$  и  $w(x, y)$ , получим, что положение равновесия  $x = 0, y = 0$  системы (2.1) неустойчиво. В условиях доказанной теоремы характер этой точки покоя может быть различным, что частично иллюстрируется данными ниже примерами.

Теорема 2.1 и замечание 2.2 описывают характер поведения фазовых траекторий системы (2.1) в окрестности предельного цикла  $\Gamma$  и точки покоя  $(0, 0)$ . Оказывается, что в условиях теоремы 2.1 для любого решения  $(x(t), y(t))$  системы (2.1) реализуется только одна из четырёх возможностей, перечисленных ниже.

1. Решение является тривиальным, т. е.  $x(t) = 0, y(t) = 0$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ , и отвечающая ему фазовая траектория — точка  $(0, 0)$ .
2. Решение  $(x(t), y(t))$  является периодическим, причём точки  $(x(t), y(t)) \in \Gamma$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Такому решению отвечает кривая  $\Gamma$  — фазовая траектория, образующая предельный цикл.
3. Решение таково, что точки  $(x(t), y(t)) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ , причём
  - $\text{dist}((x(t), y(t)); \Gamma) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  (см. доказательство теоремы 2.1),
  - $x^2(t) + y^2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ ,
 а сама траектория при  $t \rightarrow +\infty$  изнутри наматывается на предельный цикл  $\Gamma$ .
4. Решение таково, что точки  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  для всех  $t \in (t_*, +\infty)$ , причём
  - $\text{dist}((x(t), y(t)); \Gamma) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  (см. доказательство теоремы 2.1),
  - $x^2(t) + y^2(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow t_* + 0$ ,
 а сама траектория при  $t \rightarrow +\infty$  извне наматывается на предельный цикл  $\Gamma$ .

Развёрнутых пояснений требуют только пункты 3 и 4. Пункт 1 очевиден. Тот факт, что решение в условиях пункта 2 продолжается на всю числовую ось, установлен в лемме 2.1. Утверждение пункта 2 о том, что кривая  $\Gamma$  есть предельный цикл, проверено при доказательстве теоремы 2.1. Сохраняя её обозначения, дадим подробное обоснование для ситуации из пункта 3. Возможность 4 разбирается аналогично, краткие пояснения даны ниже.

Рассмотрим произвольную траекторию  $(x(t), y(t))$  системы (2.1), удовлетворяющую при некотором  $t_0 \in \mathbb{R}$  условию  $(x(t_0), y(t_0)) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ , т. е.  $0 < F(x(t_0), y(t_0)) < 1$ . В силу леммы 2.1

такое решение может быть продолжено на всю числовую ось. Считаем, что это сделано, сохранив за ним то же обозначение  $(x(t), y(t))$ . Докажем, что значения функции  $z(t) \equiv F(x(t), y(t))$  попадают в интервал  $(0, 1)$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ . Во-первых, ясно, что для каждого фиксированного  $t^* \in \mathbb{R}$  будет  $F(x(t^*), y(t^*)) \neq 0$ , иначе по свойствам функции  $F$  имели бы  $(x(t^*), y(t^*)) = (0, 0)$  и  $x(t) = 0, y(t) = 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}$  согласно пункту 1. Это противоречит предположению  $0 < F(x(t_0), y(t_0)) < 1$ . Положительность (в строгом смысле) функции  $z(t)$  доказана. Теперь проверим, что она меньше единицы. Ввиду тождества (2.2) верны соотношения

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Phi(t)(1 - z(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ z(t_0) = z_0 \equiv F(x(t_0), y(t_0)) \in (0, 1) \end{cases}$$

с непрерывной положительной на  $\mathbb{R}$  функцией  $\Phi(t) \equiv F_x^2(x(t), y(t)) + F_y^2(x(t), y(t))$ . Решив такую задачу Коши в предположении, что  $\Phi$  задана, запишем для  $z(t)$  явную формулу

$$z(t) = 1 - (1 - z_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \Phi(\eta) d\eta \right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$\dot{z}(t) = \Phi(t)(1 - z_0) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \Phi(\eta) d\eta \right\} > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функция  $z(t)$  строго возрастает, поэтому траектория  $(x(t), y(t))$  при всех  $t \geq t_0$  лежит в компакте  $K_{z_0, 1} \equiv \{(x, y) \mid 0 < z_0 \leq F(x, y) \leq 1\}$ , не содержащем точку  $(0, 0)$ . Отсюда для функции  $\Phi(t)$  справедлива оценка снизу  $\Phi(t) \geq \gamma_0 > 0$  при всех  $t \geq t_0$ , и  $z(t)$ , возрастая, стремится к единице при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно,  $0 < z(t) < 1$  на  $\mathbb{R}$ . Итак, доказано, что при всех  $t \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство  $0 < F(x(t), y(t)) < 1$ , т. е. траектория  $(x(t), y(t)) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Покажем, что  $z(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . В силу монотонности и положительности  $z(t)$  сразу можем утверждать, что  $z(t) \rightarrow z^* \geq 0$ , если  $t \rightarrow -\infty$ . Требуется обосновать равенство  $z^* = 0$ . Считая  $t \leq t_0$ , будем иметь  $z^* < z(t) \leq z_0$ . Предположим, что  $z^* > 0$ . Тогда при всех  $t \leq t_0$  траектория  $(x(t), y(t))$  заведомо лежит в компакте  $K_{z^*, z_0} \equiv \{(x, y) \mid z^* \leq F(x, y) \leq z_0\}$ , не содержащем начало координат. Отсюда для функции  $\Phi$  получим оценку снизу

$$\Phi(t) \geq \min \{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) \mid (x, y) \in K_{z^*, z_0}\} \equiv \gamma > 0 \quad \text{при всех } t \leq t_0.$$

Следовательно, для таких  $t$  справедливо неравенство

$$z(t) \leq 1 - (1 - z_0) \exp \{\gamma(t_0 - t)\},$$

правая часть которого при  $t \rightarrow -\infty$  стремится к  $-\infty$ , а левая — к  $z^* \geq 0$ . Полученное противоречие заставляет признать, что  $z^* = 0$ .

Наконец, проверим утверждение

$$\forall \delta > 0 \quad \exists t_\delta \in \mathbb{R} \quad \forall t < t_\delta \quad x^2(t) + y^2(t) < \delta,$$

которое и означает, что  $x^2(t) + y^2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

Напомним, что функцию  $F(x, y)$ , определённую в замкнутом круге

$$B_r \equiv \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

называют *положительно определённой* в этом круге, если выполнено условие

$$0 = F(0, 0) < F(x, y) \quad \text{при всех } (x, y) \in B_r \setminus \{(0, 0)\}.$$

Воспользуемся одним известным свойством таких функций, которое для полноты изложения снабдим доказательством.

**Лемма 2.3.** Пусть  $F(x, y)$  — непрерывная положительно определённая в круге  $B_r$  функция. Тогда выполнено условие

$$\forall \delta \in (0, r^2) \quad \exists z_\delta > 0 \quad \forall (x, y) \in B_r \quad (F(x, y) < z_\delta \Rightarrow x^2 + y^2 < \delta).$$

*Доказательство.* Предположим противное, т. е.

$$\exists \delta_0 \in (0, r^2) \quad \forall z > 0 \quad \exists (x, y) \in B_r \quad (F(x, y) < z \wedge x^2 + y^2 \geq \delta_0).$$

Выбирая  $z_n = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , найдём последовательность точек  $(x_n, y_n) \in B_r$ , для которой

$$x_n^2 + y_n^2 \geq \delta_0 \quad \wedge \quad F(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Последовательность  $(x_n, y_n)$  лежит в компакте  $B_r$ , и поэтому из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке  $(x_0, y_0) \in B_r$ . Переходя к пределу в предыдущих соотношениях по этой подпоследовательности (с учётом непрерывности  $F$  в  $B_r$ ), получим

$$x_0^2 + y_0^2 \geq \delta_0 \quad \wedge \quad F(x_0, y_0) = 0,$$

что противоречит положительной определённости  $F$  в  $B_r$ . Лемма 2.3 доказана.  $\square$

Вернёмся к обоснованию предельного соотношения

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = 0$$

для любой траектории  $(x(t), y(t))$  системы (2.1) при условии  $0 < F(x(t_0), y(t_0)) < 1$  с некоторым фиксированным  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Пусть число  $\delta > 0$  взято настолько малым, что круг  $B_\delta$  содержится в области  $\Omega$ , но не содержит точку  $(x(t_0), y(t_0))$ . Выберем  $z_\delta > 0$ , исходя из леммы 2.3. В таком случае  $F(x(t_0), y(t_0)) \geq z_\delta$ , откуда  $0 < z_\delta < 1$ . Затем найдём такое  $t_\delta \in \mathbb{R}$ , что  $z(t_\delta) = z_\delta$ . Это возможно благодаря свойствам функции  $z(t)$ . Но тогда будем иметь  $z(t) = F(x(t), y(t)) < z_\delta$  при всех  $t < t_\delta$ . Применив лемму 2.3, получим для таких  $t$  нужный результат:  $x^2(t) + y^2(t) < \delta$ . Отметим, что малость выбираемых значений  $\delta > 0$  очевидно не ограничивает общности рассуждений. Полное разъяснение ситуации из пункта 3 завершено.

Сделаем несколько ремарок по поводу пункта 4. Из интегральной формулы для  $z(t)$  (но теперь с выбором  $z_0 > 1$ ) получаем, что  $\dot{z}(t) < 0$  при всех  $t \in (t_*, +\infty)$  и  $z(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow +\infty$ , т. е. траектория  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  при всех  $t \in (t_*, +\infty)$ . Доказательство равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_*+0} (x^2(t) + y^2(t)) = +\infty$$

дано подробно в лемме 2.1. Описание поведения решений системы (2.1) завершено.

### 3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих теорему 2.1 и картину поведения фазовых траекторий системы (2.1).

**Пример 3.1.** Пусть  $F(x, y) = x^2 + y^2$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Легко проверить, что для такой функции все условия (i)–(iv) выполнены. По доказанной теореме окружность  $x^2 + y^2 = 1$  образует устойчивый предельный цикл автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay - 2x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -2ax - 2y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (3.1)$$

при любом заданном  $a \neq 0$ . Ясно также, что пара функций

$$x = \sin(2at + \tau), \quad y = \cos(2at + \tau)$$

с произвольно зафиксированным  $\tau$  будет периодическим решением системы (3.1). Здесь число  $T = \pi/|a|$  есть наименьший положительный период выписанного в явном виде решения, а длина  $L$  предельного цикла, т. е. единичной окружности  $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$ , равна  $2\pi$ . Кроме того, величина

$$m \equiv \min_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y)} = \min_{x^2+y^2=1} \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2$$

и совпадает с величиной

$$M \equiv \max_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y)}.$$

Тем самым в оценке

$$|a| m T \leq L \leq |a| M T$$

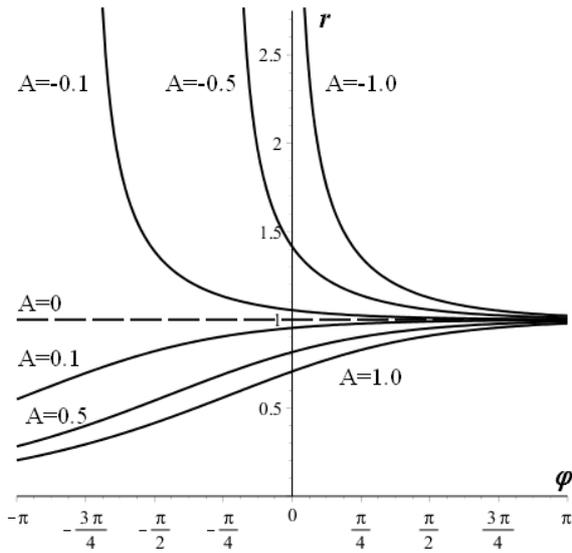


Рис. 1. Зависимость полярного радиуса  $r$  траекторий системы (3.1) от угла  $\varphi$  для различных значений параметра  $A$  при  $a = 2$ .

FIG. 1. Dependence of the polar radius  $r$  of system trajectories (3.1) on the angle  $\varphi$  for various values of the parameter  $A$  at  $a = 2$ .

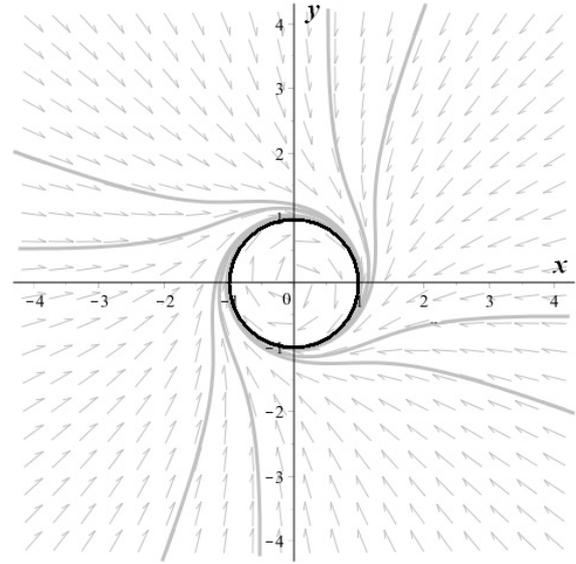


Рис. 2. Поле направлений системы (3.1) с внешними траекториями, отвечающими значениям  $A < 0$ , и предельным циклом, соответствующим значению  $A = 0$ .

FIG. 2. Directional field of the system with external trajectories corresponding to the values  $A < 0$ , and a limit cycle corresponding to the value  $A = 0$ .

(см. доказательство теоремы 2.1) оба неравенства превращаются в равенства.

Более того, оказалось, что для системы (3.1) можно найти не только все фазовые траектории, но и соответствующие решения. Для полноты мы приведём полученные выражения, считая  $a > 0$ . Тогда фазовые траектории системы (3.1) в координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = -r \sin \varphi$  (помимо точки покоя  $r = 0$ ) задаются равенством

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + A \exp(-2\varphi/a)}}, \quad \varphi \in (\varphi_*, +\infty).$$

При  $A = 0$  получаем единичную окружность; при  $A > 0$  траектории лежат строго внутри единичного круга для всех  $\varphi \in \mathbb{R}$  (в этих случаях  $\varphi_* = -\infty$ ). При  $A < 0$  фазовые траектории лежат вне замкнутого единичного круга, неограничены и имеют наклонную асимптоту

$$\varphi = \varphi_* \equiv \frac{a}{2} \ln(-A).$$

На рис. 1 приведены графики зависимости полярного радиуса  $r$  от угла  $\varphi$  при различных значениях параметра  $A$  в случае  $a = 2$ . Асимптотическое поведение внешних траекторий (отвечающих значениям  $A < 0$ ) представлено на рис. 2.

При всех  $a \neq 0$  решения системы (3.1) выписываются явно по формулам

$$x(t) = \frac{\cos(2a(t - t_0))}{\sqrt{1 + A \exp(-4(t - t_0))}}, \quad y(t) = -\frac{\sin(2a(t - t_0))}{\sqrt{1 + A \exp(-4(t - t_0))}}, \quad t \in (t_*, +\infty).$$

Здесь  $t_* = t_0 + (1/4) \ln(-A)$ , если  $A < 0$ , и  $t_* = -\infty$ , если  $A \geq 0$ . Из формул видно, что в соответствии с теоремой 2.1 и описанием поведения решений, траектории наматываются при  $t \rightarrow +\infty$  на единичную окружность: изнутри — для  $A > 0$  и извне — для  $A < 0$ . Для значений  $A > 0$  и  $t \rightarrow -\infty$  решения стремятся к точке покоя  $(0, 0)$ , а для  $A < 0$  при  $t \rightarrow t_* + 0$  — к бесконечности, причём в последнем случае имеется наклонная асимптота.

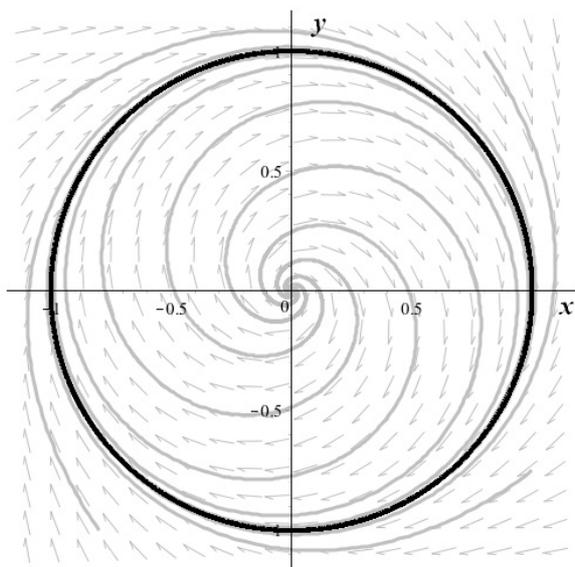


Рис. 3. Фазовый портрет системы (3.1) с наложенным полем направлений для случая  $a = 2$ . Жирной линией выделен предельный цикл.

FIG. 3. Phase portrait of the system (3.1) with overlaid field of directions for the case  $a = 2$ . The limit cycle is highlighted with a bold line.

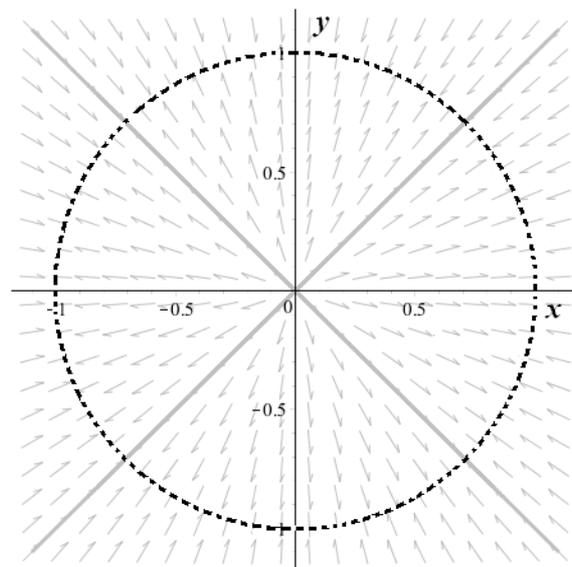


Рис. 4. Фазовый портрет системы (3.2) с наложенным полем направлений и единичной окружностью — линией точек покоя.

FIG. 4. Phase portrait of the system (3.2) with overlaid field of directions and the unit circle, which is the line of rest points.

Линейная система первого приближения (с единственной точкой покоя  $(0, 0)$ ) в данном случае выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2ay, \\ \dot{y} = -2ax + 2y. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет два различных (комплексно сопряжённых) собственных значения

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 2|a|i$$

с положительной ( $= 2$ ) вещественной частью и отличной от нуля ( $= \pm 2|a|$ ) мнимой частью. Следовательно, точка покоя  $(0, 0)$  линеаризованной системы является неустойчивым фокусом. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [6, гл. 5, § 30, теорема 24]) известно, что все траектории исходной нелинейной системы вблизи начала координат при  $t \rightarrow -\infty$  наматываются на точку покоя  $(0, 0)$  как спирали. Фазовый портрет системы (3.1) при выборе  $a = 2$ , построенный с использованием численного моделирования, представлен на рис. 3.

**Замечание 3.1.** Для  $a = 0$  доказанная теорема ничего не утверждает. В этой связи интересно исследовать поведение решений (3.1) при  $a = 0$ , т. е. следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -2y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \quad (3.2)$$

Точками покоя системы (3.2) являются точка  $(0, 0)$  и все точки окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Таким образом, замкнутая кривая (окружность) целиком составлена из одноточечных траекторий системы (3.2), но сама эта окружность траекторией не является. С другой стороны, на любой траектории  $(x(t), y(t))$ , отличной от точки покоя, выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{x}.$$

Поэтому каждая траектория  $(x(t), y(t))$  системы (3.2) лежит на соответствующей прямой, проходящей через начало координат. Умножив первое уравнение на  $x$ , второе уравнение на  $y$  и сложив

результаты, получим для всякого решения системы (3.2) тождество

$$\frac{d}{dt} (x^2(t) + y^2(t)) = -4(x^2(t) + y^2(t)) (x^2(t) + y^2(t) - 1), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Анализ записанных соотношений позволяет сделать следующие выводы. Находясь внутри единичного круга, точка  $(x(t), y(t))$  удаляется от начала координат и с возрастанием  $t$  стремится по соответствующей прямой к точке единичной окружности. Аналогичный характер стремления траектории  $(x(t), y(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$  к точкам граничной окружности наблюдается извне единичного круга. В этом примере точка покоя  $(0, 0)$  является неустойчивой, а все точки на единичной окружности устойчивы по Ляпунову. На рис. 4 представлен фазовый портрет системы (3.2).

**Пример 3.2.** Пусть, чуть более общо,  $F(x, y) = x^2 + by^2$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  с параметром  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ . Как и в примере 3.1, легко проверить, что для такой функции все условия (i)–(iv) выполнены. По доказанной теореме эллипс  $x^2 + by^2 = 1$  образует устойчивый предельный цикл автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2aby - 2x(x^2 + by^2 - 1), \\ \dot{y} = -2ax - 2by(x^2 + by^2 - 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

при любом заданном  $a \neq 0$ . Ясно также, что пара функций

$$x = \sin(2a\sqrt{b}t + \tau), \quad y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cos(2a\sqrt{b}t + \tau)$$

с произвольно зафиксированным  $\tau \in \mathbb{R}$  будет периодическим решением системы (3.3). Здесь число  $T = \pi/(|a|\sqrt{b})$  есть наименьший положительный период выписанного в явном виде решения. Длина  $L$  предельного цикла, т. е. эллипса  $\Gamma : x^2 + by^2 = 1$ , не может быть вычислена явно (по элементарной формуле) через параметр  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , а выражается специальным (эллиптическим) интегралом

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + (1/b) \cos^2 \theta} d\theta = \frac{4}{\sqrt{b}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (b-1) \sin^2 \theta} d\theta.$$

Вопрос о точном или приближённом нахождении длины дуги эллипса имеет богатую историю и способствовал развитию важных разделов математики. Не имея сейчас возможности говорить об этом подробно, приведём только двустороннюю оценку на  $L$ , извлекаемую из доказательства теоремы 2.1 (ср. с примером 3.1). Для этого, считая  $b > 1$ , вычислим значения

$$m \equiv \min_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y)} = \min_{x^2+by^2=1} \sqrt{4x^2 + 4b^2y^2} = 2 \min_{x^2+by^2=1} \sqrt{1 + (b^2 - b)y^2} = 2,$$

$$M \equiv \max_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y)} = \max_{x^2+by^2=1} \sqrt{4x^2 + 4b^2y^2} = 2 \max_{x^2+by^2=1} \sqrt{1 + (b^2 - b)y^2} = 2\sqrt{b}.$$

Следовательно, в разбираемом случае общая оценка  $|a| m T \leq L \leq |a| M T$  примет вид

$$\frac{2\pi}{\sqrt{b}} \leq L \leq 2\pi, \quad b > 1.$$

Аналогичные соображения дают оценку

$$2\pi \leq L \leq \frac{2\pi}{\sqrt{b}}, \quad 0 < b < 1.$$

Объединённый результат допускает при всех  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  компактную запись

$$2\pi \cdot \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{b}} \right\} \leq L \leq 2\pi \cdot \max \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{b}} \right\}$$

и имеет понятный геометрический смысл: длина эллипса не меньше длины вписанной в него окружности и не больше длины описанной около него окружности. После предельного перехода  $b \rightarrow 1$  возникает «идеальная» ситуация из примера 3.1. Линейная система первого приближения (с единственной точкой покоя  $(0, 0)$ ) в данном случае выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2aby, \\ \dot{y} = -2ax + 2by. \end{cases}$$

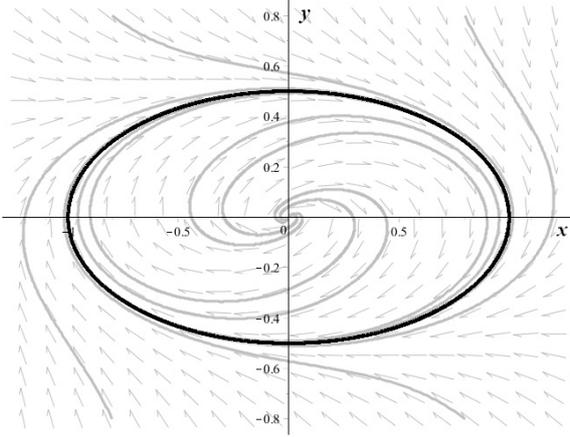


Рис. 5. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров  $a = 2$ ,  $b = 4$ . Точка покоя является неустойчивым фокусом. Жирной линией выделен предельный цикл  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

FIG. 5. Phase portrait of the system (3.3) with overlaid field of directions when choosing parameters  $a = 2$ ,  $b = 4$ . The rest point is an unstable focus. The limit cycle  $x^2 + 4y^2 = 1$  is highlighted with a bold line.

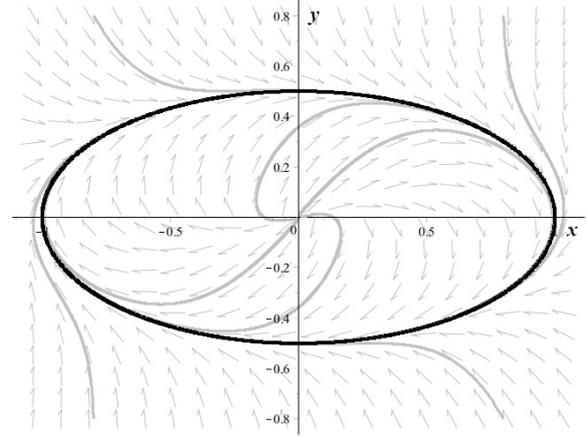


Рис. 6. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров  $a = 3/5$ ,  $b = 4$ . Точка покоя является неустойчивым узлом. Жирной линией выделен предельный цикл  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

FIG. 6. Phase portrait of the system with overlaid field of directions when choosing parameters  $a = 3/5$ ,  $b = 4$ . The rest point is an unstable node. The limit cycle  $x^2 + 4y^2 = 1$  is highlighted with a bold line.

Для собственных значений матрицы этой системы в зависимости от сочетания параметров  $a$  и  $b$ , точнее — от знака числа  $D \equiv (b - 1)^2 - 4ba^2$ , возможны следующие ситуации.

- Если  $D < 0$ , то  $\lambda_{1,2} = b + 1 \pm \sqrt{-D}i$ , и точка покоя  $(0, 0)$  линеаризованной системы является неустойчивым фокусом.
- Если  $D > 0$ , то  $\lambda_{1,2} = b + 1 \pm \sqrt{D}$ , и точка покоя  $(0, 0)$  линеаризованной системы является неустойчивым узлом.
- Если  $D = 0$ , то  $\lambda_{1,2} = b + 1$ , и точка покоя  $(0, 0)$  линеаризованной системы является вырожденным узлом.

Из курса дифференциальных уравнений (см., например, [6, гл 5, § 30, теоремы 23, 24]) известно, что в первых двух (невыврожденных) случаях все траектории исходной нелинейной системы (3.3) вблизи начала координат при  $t \rightarrow -\infty$  качественно ведут себя как траектории соответствующей линейной системы первого приближения для фокуса и узла. Фазовые портреты соответствующих систем (3.3) с подходящим выбором параметров  $a$  и  $b$  представлены ниже на рис. 5 ( $D < 0$ ) и рис. 6 ( $D > 0$ ). В вырожденном случае, когда  $D = 0$ , ситуация более сложная, и соответствующая общая теорема авторам неизвестна. Результат компьютерного анализа поведения фазовых траекторий (3.3) при разных наборах параметров, реализующих вырожденный случай, дан ниже на рис. 7, 8.

Примеры 3.1, 3.2 были довольно просты. Разберём подробно более сложный пример.

**Пример 3.3.** Пусть функция задаётся формулой

$$F(x, y) = (1 + bx^2y^2)(x^2 + y^2)$$

для всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  с фиксированным параметром  $b > 0$ . Проверим, что такая функция удовлетворяет всем требованиям (i)–(iv). Действительно,  $0 = F(0, 0) < F(x, y)$  при  $x^2 + y^2 > 0$ . Ясно, что  $F$ , будучи многочленом, имеет в  $\mathbb{R}^2$  частные производные любого порядка. Далее,

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 2x(b y^2(2x^2 + y^2) + 1), \\ F_y(x, y) = 2y(b x^2(2y^2 + x^2) + 1), \end{cases}$$

так что  $F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$  и  $F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) > 0$  для всех  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

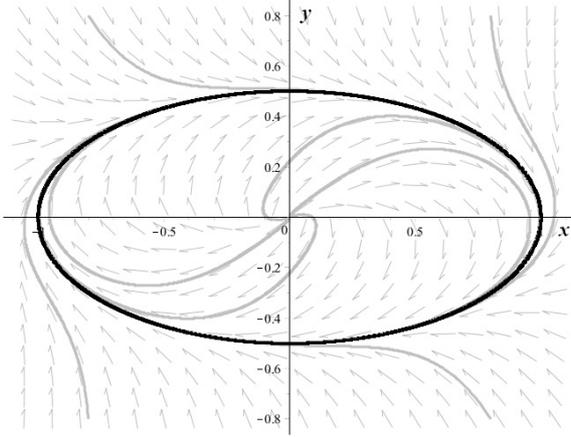


Рис. 7. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров  $a = 3/4$ ,  $b = 4$ . Жирной линией выделен предельный цикл  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

FIG. 7. Phase portrait of the system (3.3) with overlaid direction field when choosing the parameters  $a = 3/4$ ,  $b = 4$ . The limit cycle  $x^2 + 4y^2 = 1$  is highlighted with a bold line.

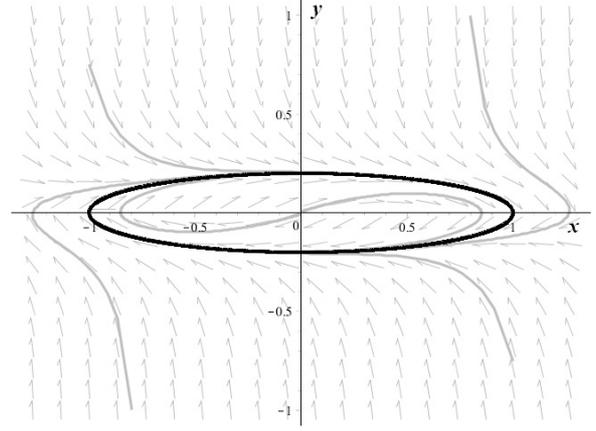


Рис. 8. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров  $a = 12/5$ ,  $b = 25$ . Жирной линией выделен предельный цикл  $x^2 + 25y^2 = 1$ .

FIG. 8. Phase portrait of the system (3.3) with overlaid direction field when choosing parameters  $a = 12/5$ ,  $b = 25$ . The limit cycle  $x^2 + 25y^2 = 1$  is highlighted with a bold line.

При анализе поведения линий уровня функции  $F$  удобно воспользоваться полярными координатами  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , где  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Наряду с коэффициентом  $b > 0$  зафиксируем второй параметр  $c > 0$ . Для линии уровня  $\Gamma_c = \Gamma_c(b)$  переход в уравнении  $F(x, y) = c$  к полярным координатам даёт

$$(1 + (b/4)r^4 \sin^2 2\varphi) r^2 = c. \quad (3.4)$$

Другими словами, полярное уравнение кривой  $\Gamma_c$  записывается в виде

$$\Gamma_c: \quad r = r_c(\varphi) = r_c(\varphi; b), \quad (3.5)$$

где  $r_c(\varphi)$  — положительная функция переменной  $\varphi$ , заданная неявно уравнением (3.4). Перечислим основные свойства этой функции и кривой  $\Gamma_c$ .

- Так как левая часть в (3.4) строго возрастает по  $r \geq 0$ , то при любом фиксированном  $\varphi \in \mathbb{R}$  существует единственный положительный корень  $r_c(\varphi)$  уравнения (3.4). Этот корень  $r_c(\varphi)$  строго возрастает по параметру  $c > 0$ .
- Справедливы очевидные равенства

$$r_c(-\varphi) = r_c(\varphi), \quad r_c(\varphi \pm \pi/2) = r_c(\varphi), \quad r_c(\pm\pi/4 + \varphi) = r_c(\pm\pi/4 - \varphi), \quad r_c(0) = r_c(2\pi),$$

которые показывают, что функция  $r_c(\varphi)$  переменной  $\varphi$  является  $(\pi/2)$ -периодической, а  $\Gamma_c$  есть простая замкнутая кривая, имеющая четыре оси симметрии — прямые с уравнениями  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = \pm x$  в исходной декартовой системе координат.

- Функция  $r_c(\varphi)$  принадлежит классу  $C^1(\mathbb{R})$ , а кривая  $\Gamma_c$  — гладкая и имеет конечную длину.
- При любом  $\varphi \in \mathbb{R}$  верны оценки

$$\sqrt{\alpha} \equiv r_c(\pi/4) \leq r_c(\varphi) \leq r_c(0) = \sqrt{c}, \quad (3.6)$$

где  $\alpha \in (0, c)$  — корень уравнения  $(b/4)\rho^3 + \rho = c$ , зависящий от положительных параметров  $b, c$ . Значит, кривая  $\Gamma_c$  лежит в кольце  $\alpha \leq x^2 + y^2 \leq c$  на плоскости  $(x, y)$ . Квадрат внутреннего радиуса такого кольца  $\alpha = \alpha(b, c)$  (значит — и сам радиус) стремится к нулю, если  $c > 0$  фиксировано, а  $b \rightarrow +\infty$ , или если  $b > 0$  фиксировано, а  $c \rightarrow 0$ .

Таким образом, рассматриваемая функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условиям (i)–(iii). Осталось проверить, что выполнено и условие (iv) — непрерывная зависимость линии уровня  $\Gamma_c$  от параметра  $c$ . Для этого (при фиксированном  $b > 0$ ) рассмотрим два решения уравнения (3.4) с правыми частями, равными  $c$  и  $d$  соответственно, где для определённости  $d > c > 0$ . Соответствующие

функции переменного угла  $\varphi$  обозначим коротко  $r_c = r_c(\varphi)$  и  $r_d = r_d(\varphi)$ . Тогда при всех значениях  $\varphi \in \mathbb{R}$  имеем  $r_d = r_d(\varphi) > r_c(\varphi) = r_c$ . Согласно (3.4) запишем

$$r_d^2 - r_c^2 = \frac{d - c}{1 + (b/4) \sin^2 2\varphi (r_c^4 + r_c^2 r_d^2 + r_d^4)} \leq d - c.$$

Отсюда для разности  $r_d - r_c \equiv r_d(\varphi) - r_c(\varphi)$  при всех  $\varphi \in \mathbb{R}$  выводим оценку

$$0 < r_d - r_c \leq \frac{d - c}{r_d + r_c} < \frac{d - c}{2r_c} \leq \frac{d - c}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.7)$$

с тем же  $\alpha = \alpha(b, c) > 0$ , что и в (3.6).

По-прежнему считаем положительные числа  $b, c$  фиксированными. Если теперь взять произвольное малое  $\varepsilon > 0$  и положить  $\delta = \delta(\varepsilon) = 2\sqrt{\alpha}\varepsilon > 0$ , то при всех таких  $d$ , что  $0 < d - c < \delta$ , будут справедливы вложения  $\Gamma_c \subset U_\varepsilon(\Gamma_d)$  и  $\Gamma_d \subset U_\varepsilon(\Gamma_c)$  (см. (3.5) и (3.7)). Здесь окрестность непустого множества  $X \subset \mathbb{R}^2$  понимаем как

$$U_\varepsilon(X) = \{A \mid \text{dist}(A; X) \leq \varepsilon\},$$

а расстояние от точки  $A = A(x, y)$  до множества  $X$  даётся формулой

$$\text{dist}(A; X) = \inf \{ \rho(A, A') \mid A' \in X \},$$

в которой  $\rho(A, A')$  — стандартное евклидово расстояние между точками  $A$  и  $A'$  на плоскости.

По определению хаусдорфова расстояния между множествами окончательно имеем: при заданных  $b > 0$  и  $c > 0$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что для всех  $d > 0$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < d - c < \delta$ , справедлива оценка

$$H(\Gamma_d; \Gamma_c) \equiv H(\Gamma_d(b); \Gamma_c(b)) < \varepsilon.$$

Итак, требование (iv) также выполнено.

Согласно доказанной теореме кривая, заданная уравнением

$$\Gamma = \Gamma(b) : (1 + bx^2y^2)(x^2 + y^2) = 1, \quad (3.8)$$

является устойчивым предельным циклом системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay (bx^2(2y^2 + x^2) + 1) - 2x (by^2(2x^2 + y^2) + 1) [(1 + bx^2y^2)(x^2 + y^2) - 1], \\ \dot{y} = -2ax (by^2(2x^2 + y^2) + 1) - 2y (bx^2(2y^2 + x^2) + 1) [(1 + bx^2y^2)(x^2 + y^2) - 1]. \end{cases} \quad (3.9)$$

Выписать явно соответствующее периодическое решение не представляется возможным. Однако, вычислив при заданном  $b > 0$  приближённо длину кривой (3.8) и оценив экстремальные величины  $m$  и  $M$ , мы можем, как в примерах 3.1, 3.2, определить границы, в которых заключён наименьший положительный период такого решения.

Кривая (3.8) при  $b = 2$  фигурирует на рис. 9, а при  $b = 30$  — на рис. 10. Кстати, было бы интересно выяснить, при каких  $b$  кривая является выпуклой, а при каких — нет.

Линейная система первого приближения в данном случае точно такая же, как в примере 3.1. Поэтому точка покоя  $(0, 0)$  линейной системы является неустойчивым фокусом. Как и выше, заключаем, что все траектории нелинейной системы (3.9) вблизи начала координат при  $t \rightarrow -\infty$  наматываются на точку покоя  $(0, 0)$ , как спирали. Результат моделирования фазового портрета системы (3.9) при выборе параметров  $a = b = 2$  представлен на рис. 9, а при выборе параметров  $a = 2, b = 30$  — на рис. 10.

В примерах 3.1–3.3 функция  $F(x, y)$  была многочленом, чётным по обоим переменным. Чаше всего именно такие примеры возникают при обсуждении понятия положительно определённой функции. Сейчас предьявим подпадающий под действие нашей теоремы 2.1 пример положительно определённой функции, не являющейся многочленом и такой, что

$$F(-x, y) \neq F(x, y), \quad \text{если } x \neq 0$$

(другими словами, функция  $F(x, y)$  не является чётной по первой переменной).

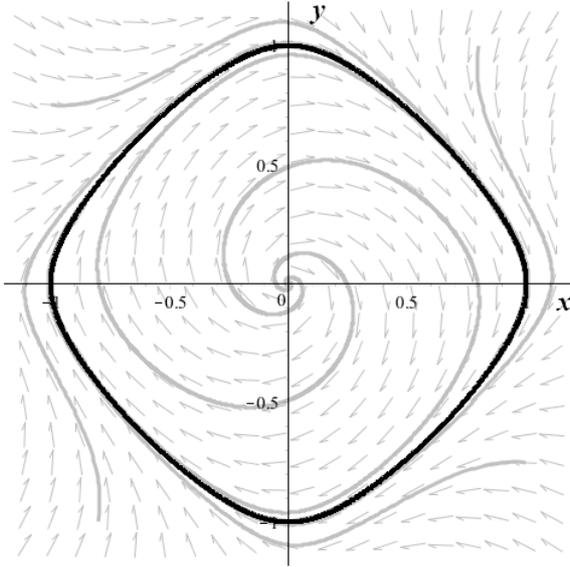


Рис. 9. Фазовый портрет системы (3.9) с наложенным полем направлений при выборе параметров  $a = 2$ ,  $b = 2$ . Жирной линией выделен предельный цикл  $(1 + 2x^2y^2)(x^2 + y^2) = 1$ .

FIG. 9. Phase portrait of the system (3.9) with overlaid direction field and parameters  $a = 2$ ,  $b = 2$ . The limit cycle  $(1 + 2x^2y^2)(x^2 + y^2) = 1$  is highlighted with a bold line.

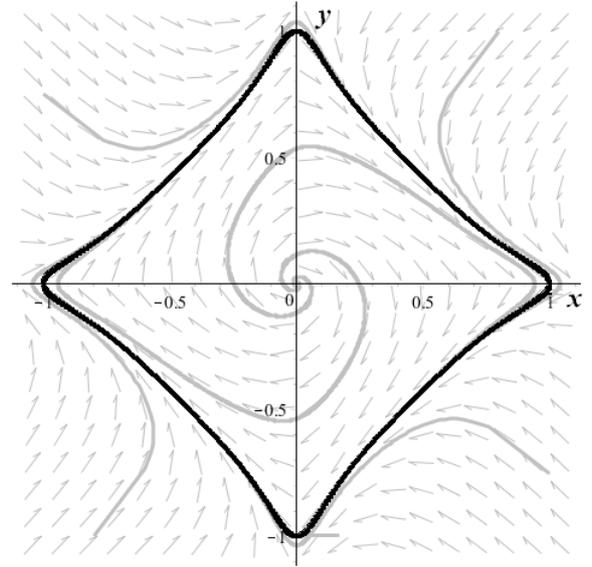


Рис. 10. Фазовый портрет системы (3.9) с наложенным полем направлений при выборе параметров  $a = 2$ ,  $b = 30$ . Жирной линией выделен предельный цикл  $(1 + 30x^2y^2)(x^2 + y^2) = 1$ .

FIG. 10. Phase portrait of the system (3.9) with overlaid field of directions and parameters  $a = 2$ ,  $b = 30$ . The limit cycle  $(1 + 30x^2y^2)(x^2 + y^2) = 1$  is highlighted with a bold line.

#### Пример 3.4. Пусть

$$F(x, y) = 2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Очевидно  $F \in C(\mathbb{R}^2)$  и положительно определена, так как  $F(0, 0) = 0$ , а

$$2|x|^3 + x^3 = x^2(2|x| + x) > 0, \quad \text{если } x \neq 0; \quad e^{y^2} - 1 > 0, \quad \text{если } y \neq 0.$$

Кроме того, для всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  имеем  $F_x(x, y) = 3x^2(2 \operatorname{sgn} x + 1)$  и  $F_y(x, y) = 2ye^{y^2}$ , откуда

$$F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0, \quad F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) > 0, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Отметим, что  $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , но  $F \notin C^3(\mathbb{R}^2)$ , поскольку частные производные

$$F_{xx}(x, y) = 6x(2 \operatorname{sgn} x + 1), \quad F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y) \equiv 0, \quad F_{yy}(x, y) = 2(4y^2 + 1)e^{y^2}$$

непрерывны всюду, а частная производная  $F_{xxx}(x, y)$  в точке  $(0, 0)$  не существует.

Итак, свойства (i), (iii) выполнены. При проверке свойств (ii), (iv) полезно учитывать, что для заданного значения параметра  $c > 0$  линия уровня

$$\Gamma_c: \quad 2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} - 1 = c$$

есть объединение графиков двух функций одной переменной

$$y = -\sqrt{\ln(1 + c - 2|x|^3 - x^3)}, \quad y = \sqrt{\ln(1 + c - 2|x|^3 - x^3)},$$

определённых на общем для них отрезке  $-\sqrt[3]{c} \leq x \leq \sqrt[3]{c/3}$ . Подробности мы опускаем.

По доказанной теореме кривая

$$\Gamma \equiv \Gamma_1: \quad 2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} = 2 \tag{3.10}$$

является двусторонним устойчивым предельным циклом динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay e^{y^2} - 3x^2(2 \operatorname{sgn} x + 1)(2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} - 2), \\ \dot{y} = -3ax^2(2 \operatorname{sgn} x + 1) - 2y e^{y^2}(2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} - 2) \end{cases} \tag{3.11}$$

при любом  $a \neq 0$ . Кривая (3.10) имеет единственную ось симметрии — ось абсцисс. Представление о поведении фазовых траекторий системы (3.11) можно получить из рис. 11.

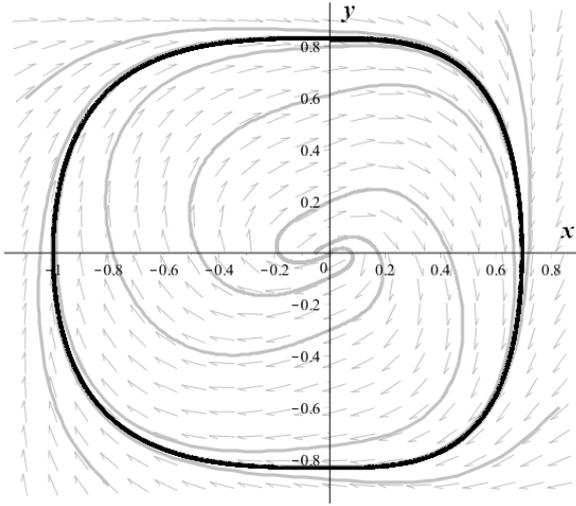


Рис. 11. Фазовый портрет системы (3.11) с наложенным полем направлений при выборе параметра  $a = 2$ . Жирной линией выделен предельный цикл  $2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} = 2$ .

FIG. 11. Phase portrait of the system (3.11) with overlaid direction field and the parameter  $a = 2$ . The limit cycle  $2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} = 2$  is highlighted with a bold line.

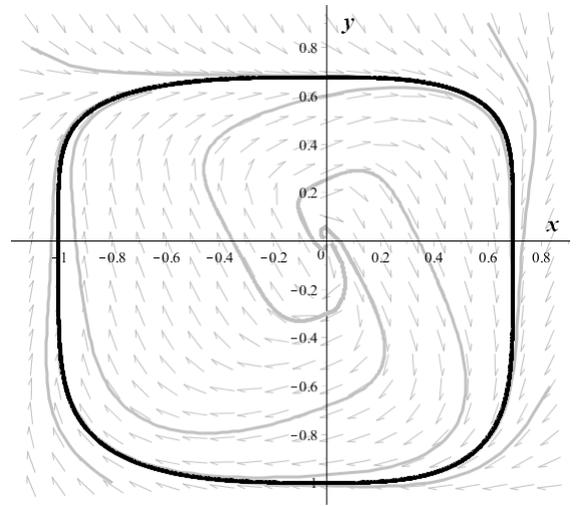


Рис. 12. Фазовый портрет системы (2.1) для случая порождающей функции (3.12) и  $a = 2$  с наложенным полем направлений и предельным циклом  $2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5 = 1$ .

FIG. 12. Phase portrait of the system (2.1) for the case of the generating function (3.12) and the parameter  $a = 2$  with overlaid direction field and limit cycle  $2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5 = 1$ .

Процедура линеаризации для (3.11) даёт систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay, \\ \dot{y} = 2y, \end{cases}$$

точки покоя которой заполняют всю ось абсцисс. Матрица последней системы имеет (не зависящие от  $a \neq 0$ ) собственные значения  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 2$ , а траектории образуют на фазовой плоскости семейство параллельных прямых с заданным угловым коэффициентом  $k = 1/a \neq 0$ .

Разумеется, нетрудно придумать динамическую систему формата (2.1) с предельным циклом в виде несимметричной траектории, выбрав, например, функцию

$$F(x, y) = 2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.12)$$

Линия уровня

$$2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5 = 1$$

вместе с фазовым портретом системы (2.1) при выборе функции (3.12) и параметра  $a = 2$  изображены на рис. 12.

Наконец, в шаблоне (2.1) возможен выбор неэлементарной функции, например,

$$F(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{t^2} dt, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

частные производные которой являются элементарными функциями

$$F_x(x, y) = 2x e^{(x^2+y^2)^2}, \quad F_y(x, y) = 2y e^{(x^2+y^2)^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Проверка того, что  $F(x, y)$  обладает нужными свойствами (i)–(iv), является несложным упражнением. На этом завершим разбор примеров и дадим короткий заключительный комментарий.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы постарались сделать изложение материала замкнутым и максимально доступным, избегая (без особой нужды) опоры на известные, но подчас трудные положения общей теории. Основной результат заметки, заключённый в предложенной теореме 2.1, представляется очень естественным. Поэтому не исключено, что в том или ином виде он уже отмечался кем-то ранее. Как явствует уже из примеров 3.1–3.4, геометрия предельных циклов автономных систем семейства (2.1) весьма разнообразна. На наш взгляд, в контексте высвеченного раздела теории динамических систем внешне простой шаблон (2.1) выступает содержательным «архивом» для большого числа полезных упражнений и может быть эффективно использован на практике.

Отметим, что полученные результаты обобщаются на многомерные автономные системы. Здесь характер предельных циклов и поведение решений зависят от чётности или нечётности размерности. обстоятельный разбор возникающих при этом вопросов выходит за рамки данной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон Н. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
2. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техн., 1979.
3. Ильяшенко Ю. С. Аттракторы динамических систем и философия общего положения // Мат. просвещ. — 2008. — 12. — С. 13–22.
4. Кузнецов А. П., Селиверстова Е. С., Трубецков Д. И., Тюрюкина Л. В. Феномен уравнения ван дер Поля // Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2014. — 22, № 4. — С. 3–42.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1947.
6. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
7. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.—Л: Гостехиздат, 1947.
8. Рубинштейн А. И. О некоторых динамических системах второго порядка (дополнение к стандартному вузовскому курсу математики) // Мат. образование. — 2010. — № 1. — С. 24–30.
9. Скворцов В. А. Примеры метрических пространств. — М.: МЦНМО, 2002.
10. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб: Лань, 2003.
11. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: КомКнига, 2007.

Т. М. Иванова

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

E-mail: ivatatiana@gmail.com

А. Б. Костин

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

E-mail: abkostin@yandex.ru

А. И. Рубинштейн

В. Б. Шерстюков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: shervb73@gmail.com

UDC 517.925.4

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98

EDN: YQTKXF

## On limit cycles of autonomous systems

T. M. Ivanova<sup>1</sup>, A. B. Kostin<sup>1</sup>, A. I. Rubinshtein, and V. B. Sherstyukov<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>National Research Nuclear University “MEPhI,” Moscow, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

**Abstract.** We consider the problem of the existence of limit cycles for autonomous systems of differential equations. We present quite elementary considerations that can be useful in discussing qualitative issues that arise in the course of ordinary differential equations. We establish that any simple closed curve defined by the equation  $F(x, y) = 1$  with a sufficiently general function  $F$  is a limit cycle for the corresponding autonomous system on the plane (and even for an infinite number of systems depending on the real parameter). These systems are written out explicitly. We analyze in detail several specific examples. Graphic illustrations are provided.

**Keywords:** autonomous system on the plane, periodic solutions, positive definite function, stable limit cycle.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The authors declare no financial support.

**For citation:** T. M. Ivanova, A. B. Kostin, A. I. Rubinshtein, V. B. Sherstyukov, “On limit cycles of autonomous systems,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 1, 77–98. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98>

## REFERENCES

1. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, N. I. Gordon, and A. G. Mayer, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poriyadka* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
2. N. P. Erugin, *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy* [Reading Book for the General Course of Differential Equations], Nauka i tekhn., Minsk, 1979 (in Russian).
3. Yu. S. Il'yashenko, “Attraktory dinamicheskikh sistem i filosofiya obshchego polozheniya” [Attractors of dynamical systems and general position philosophy], *Mat. prosveshch.* [Math. Educ.], 2008, **12**, 13–22 (in Russian).
4. A. P. Kuznetsov, E. S. Seliverstova, D. I. Trubetskov, and L. V. Tyuryukina, “Fenomen uravneniya van der Polya” [The phenomenon of the van der Pol equation], *Izv. vuzov. Prikl. nelin. dinam.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Appl. Nonlinear Dynam.], 2014, **22**, No. 4, 3–42 (in Russian).
5. V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Qualitative Theory of Differential Equations], GITTL, Moscow, 1947 (in Russian).
6. L. S. Pontryagin, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
7. A. Poincaré, *O krivyykh, opredelyaemykh differentsial'nymi uravneniyami* [On Curves Defined by Differential Equations], Gostekhizdat, M.—L, 1947 (Russian translation).
8. A. I. Rubinshteyn, “O nekotorykh dinamicheskikh sistemakh vtorogo poriyadka (dopolnenie k standartnomu vtuzovskomu kursu matematiki)” [On some second-order dynamical systems (addition to the standard college mathematics course)], *Mat. obrazovan.* [Math. Educ.], 2010, No. 1, 24–30 (in Russian).



9. V. A. Skvortsov, *Primery metricheskikh prostranstv* [Examples of Metric Spaces], MTsNMO, Moscow, 2002 (in Russian).
10. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Lan', Saint Petersburg, 2003 (in Russian).
11. A. F. Filippov, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Differential Equations], KomKniga, Moscow, 2007 (in Russian).

T. M. Ivanova

National Research Nuclear University “MEPhI,” Moscow, Russia

E-mail: [ivatatiana@gmail.com](mailto:ivatatiana@gmail.com)

A. B. Kostin

National Research Nuclear University “MEPhI,” Moscow, Russia

E-mail: [abkostin@yandex.ru](mailto:abkostin@yandex.ru)

A. I. Rubinshtein

V. B. Sherstyukov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: [shervb73@gmail.com](mailto:shervb73@gmail.com)