Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 53–76
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76
EDN: YPMUOA

МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ О КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ АСИМПТОТИКАХ

С. Ю. Доброхотов[1,2], **В. Е. Назайкинский**[1,2]

[1] *Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия*
[2] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Аннотация. Разрабатывается метод осреднения для операторов с быстроосциллирующими коэффициентами, предназначенный для использования в задачах о квазиклассических асимптотиках и не предполагающий периодической структуры осцилляций коэффициентов. Исследуются алгебры локально усреднимых функций, доказывается теорема об осреднении для дифференциальных операторов общего вида, некоторые особенности применения метода иллюстрируются на примере волнового уравнения.

Ключевые слова: методы осреднения, быстроосциллирующие коэффициенты, квазиклассические асимптотики, алгебры локально усреднимых функций.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

Для цитирования: *С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский.* Метод осреднения для задач о квазиклассических асимптотиках// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 53–76. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76`

1. Введение

Методам осреднения для разнообразных классов уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами посвящена обширная литература. Ни в коей мере не претендуя на полноту, отметим прежде всего монографии [1, 14, 31, 41, 46] и обзорные статьи [15, 16, 18, 28], где можно найти дальнейшие ссылки. В большинстве работ быстроосциллирующие коэффициенты моделируются функциями $f(x/\mu)$ «быстрой переменной» x/μ, где μ — малый параметр, характеризующий скорость осцилляций, причём сама функция $f(y)$ предполагается либо периодической (см., например, [12,13,17,27,29,43]), либо почти периодической (см., например, [20]), либо случайной со специальными условиями на соответствующую функцию распределения (см., например, [21,34,39]). Исследуются не только дифференциальные уравнения, но и другие классы уравнений (например, уравнения с оператором типа свертки; см. [44,45]). Для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами изучаются краевые задачи, причём области, в которых они рассматриваются, сами могут иметь весьма сложную мелкомасштабную структуру, аналогичную структуре коэффициентов (т. н. «перфорированные области»); см., например, [26,35]. В ряде работ рассматривались также классы коэффициентов и областей, выходящие за рамки указанных выше предположений (см., например, [3, 32, 42]). Отметим, наконец, идейно близкие к методам осреднения многомасштабные варианты метода конечных элементов в вычислительной математике [36].

Данная статья является продолжением работ [9, 19, 37] и развивает предложенный там метод усреднения, мотивировкой для разработки которого послужили исследования в области квазиклассических асимптотик для линеаризованных уравнений мелкой воды (см. обзор [8]). Как известно, в отсутствие вихревых движений эти уравнения сводятся к волновому уравнению

$$\eta_{tt} - \nabla\left(c^2(x)\nabla\eta\right) = 0, \quad x = (x_1, x_2)\,, \tag{1.1}$$

для возвышения свободной поверхности $\eta(x,t)$, причём квадрат скорости задается формулой

$$c^2(x) = gD(x),$$

где $D(x)$ — глубина бассейна в точке x, а g — ускорение силы тяжести. Если иметь в виду, скажем, приложения к описанию распространения волн цунами в океане, то в задаче возникает естественный малый параметр h — отношение горизонтальных размеров источника к размерам бассейна — так что для построения соответствующих решений естественно использовать квазиклассические асимптотики, доставляемые каноническим оператором Маслова [23] и его современными вычислительно эффективными модификациями [10,11]. Непосредственному применению канонического оператора препятствует, однако, то обстоятельство, что глубина $D(x)$ в реальной задаче наряду с «плавной» компонентой имеет быстрые осцилляции, горизонтальный размер которых много меньше характерной длины волны (определяемой размерами источника). Таким образом, перед применением квазиклассических методов уравнение (1.1) следует осреднить. При этом нужно иметь в виду, что в отличие от ситуации, с которой имеет дело «классическое» осреднение, здесь в задаче присутствуют два малых параметра, μ и h. Далее, в отличие от уравнений, относящихся к периодическим средам, в данном случае нет никаких доводов в пользу предположения, что быстрые осцилляции функции $D(x)$ можно описывать периодической функцией от быстрых переменных x/μ, т. е. представить её в виде

$$D(x) = f\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

Как минимум следует допустить, что имеет место ещё «медленная» зависимость от переменных x:

$$D(x) = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right),$$

где $f(x,y)$ — уже «плавно меняющаяся» функция своих аргументов. При допущениях такого рода вывод пригодного для дальнейшего построения квазиклассических асимптотик осреднённого уравнения был дан в [4] на основе идеи, что уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами можно изучать с помощью адиабатического приближения, причём их регуляризация [2,5,7] с помощью анзаца, подобного анзацу Кузмака—Уизема в нелинейной теории [22, 47], приводит к уравнениям с операторнозначным символом [23], которые удобно решать с помощью операторного разделения переменных [2,30]. Соответствующие вычисления, проведённые в [4,33], приводят при определенном соотношении между параметрами к осреднённому уравнению с дисперсионными членами типа линеаризованного уравнения Буссинеска (ср. [48]). Следует, однако, отметить, что эти построения носят теоретический характер, поскольку они основаны на решении уравнений на ячейке периодичности и требуют знания явного вида функции $f(x,y)$, определить которую при всех (x,y) по фактически известной из измерений функции $D(x)$ — т. е. по значениям функции $f(x, x/\mu)$ при одном-единственном фиксированном μ — в задаче о волнах на воде не представляется возможным.

Таким образом, в данной задаче необходим метод осреднения, все формулы которого используют только функцию $D(x)$, а не функцию $f(x,y)$, а в идеале метод не должен опираться даже на существование последней — все условия на функцию $D(x)$ должны формулироваться в терминах само́й этой функции.

При дополнительном предположении, что осциллирующая часть функции $D(x)$ мала по сравнению с неосциллирующей, т. е. имеет место представление

$$D(x) \equiv D(x,\mu,\delta) = f_0(x) + \delta f_1(x,\mu),$$

где $\delta > 0$ — ещё один малый параметр, функция f_0 плавно меняющаяся, а f_1 — быстроосциллирующая, такой метод осреднения был предложен в [9], а в [19] свойства метода изучались для уравнения (1.1) на примерах реальной топографии дна некоторых участков Мирового океана. Несколько более подробное изложение метода было дано в обзоре [37, § 4].

Все основные результаты в [9,19,37] приведены без доказательств. Исключение составляет собственно теорема об осреднении, но она сформулирована и доказана [19, теорема 1] только для уравнения (1.1); таким образом, осреднение проведено только для оператора $-\langle\nabla, c^2(x)\nabla\rangle$ пространственной части волнового уравнения. Данная работа закрывает этот пробел — в разделе 2 мы приводим доказательства основных утверждений об усреднимых функциях из [9, 19, 37], а в разделе 3 формулируем и доказываем теорему об осреднении для дифференциальных операторов общего вида. В разделе 4 мы возвращаемся к волновому уравнению и на его примере описываем способ практического решения ключевого «уравнения на ячейке», возникающего в предлагаемом методе.

Отметим, что мы используем термины «усреднение» и «осреднение» в разном смысле — первый означает вычисление определённого тем или иным образом среднего от заданной функции, а второй — процедуру редукции оператора с быстроосциллирующими коэффициентами к оператору с плавно меняющимися коэффициентами.

Некоторые обозначения. Мы будем использовать операторы с малым параметром при производных. Таких параметров у нас два — квазиклассический параметр h и параметр μ, характеризующий скорость осцилляции коэффициентов, и поэтому мы различаем h- и μ-дифференциальные операторы, для которых используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \check{H} &= H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\check{p}}) = H\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right), \quad \check{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x}, \\ \widehat{H} &= H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}}) = H\left(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) \quad \check{p} = -i\mu\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $H(x,p)$ — многочлен от переменных $p = (p_1,\dots,p_n)$ с коэффициентами, зависящими от переменных $x = (x_1,\dots,x_n)$ — символ рассматриваемого оператора; номера над операторами, подставляемыми в символ вместо числовых переменных, обозначают порядок их действия (фейнмановские номера [24, 25, 38]) — сначала к функции, на которую действует μ- или h-дифференциальный оператор (1.2), применяются дифференцирования, а потом полученные производные умножаются на коэффициенты.

Многие из рассматриваемых далее функций зависят от параметров h, μ, δ. Если характер этой зависимости ясен из контекста, мы опускаем соответствующие аргументы для краткости.

Через $f * g$ обозначаем свертку функций f и g:

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy.$$

2. Усреднимые функции

В этом разделе, в основном следуя [9, 19, 37], мы приведем определения и утверждения, касающиеся быстро меняющихся функций и их усреднения, и дадим отсутствующие в [9, 19, 37] доказательства.

2.1. Быстро меняющиеся функции и усреднение.

Определение 2.1. Пусть $f(x,\mu)$ — бесконечно дифференцируемая функция от переменных $x \in \mathbb{R}^n$, зависящая от параметра $\mu \in (0,1]$ (гладкость и даже непрерывность по которому не предполагается). Будем говорить, что функция $f(x,\mu)$ *равномерно гладкая*, если

$$\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in (0,1], \quad |\alpha| = 0,1,2,\dots, \tag{2.1}$$

и *быстроосциллирущая*, если

$$\left|\mu^{|\alpha|}\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_\alpha, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \mu\in(0,1], \quad |\alpha|=0,1,2,\dots, \tag{2.2}$$

где C_α — постоянные, не зависящие от x и μ. Пространство равномерно гладких функций обозначим через $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, а быстроосциллирующих — через $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$.

Пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ являются пространствами Фреше относительно счётных систем полунорм, задаваемых наилучшими возможными значениями постоянных C_α в (2.1) и (2.2) соответственно, и имеет место непрерывное вложение $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$. Будем писать $f=O(\mu^N; C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n))$, если $\mu^{-N}f\in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, и $f=O(\mu^N; C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n))$, если $\mu^{-N}f\in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$. Далее, $f=\widehat{O}(\mu^\infty)$, если $f=O(\mu^N; C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n))$ для любого $N=0,1,2,\dots$ (или, что эквивалентно, $f=O(\mu^N; C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n))$ для любого $N=0,1,2,\dots$).

Пусть $\varphi(x)$ — функция из пространства Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Для $\varepsilon>0$ через $T_\varepsilon\varphi$ обозначим «масштабированную» функцию

$$T_\varepsilon\varphi(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Определение 2.2. Функция $f\in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ называется *локально усреднимой*, если свертка

$$\left(T_{\mu^\gamma}\varphi * f\right)(x,\mu)=\frac{1}{\mu^{\gamma n}}\int\varphi\left(\frac{x-y}{\mu^\gamma}\right)f(y,\mu)\,dy= \tag{2.3}$$

$$=\int\varphi(y)f\left(x-\mu^\gamma y,\mu\right)\,dy \tag{2.4}$$

принадлежит пространству $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ для любого $\gamma\in(0,1)$ и любой функции φ из пространства Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Пространство локально усреднимых функций обозначим через $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$.

Из формулы (2.4) видно, что всякая равномерно гладкая функция локально усреднима, так что имеют место вложения $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$.

Специальным ядром усреднения будем называть произвольную функцию $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, такую, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx=1, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\varphi(x)\,dx=0, \quad |\alpha|=1,2,\dots \tag{2.5}$$

Определение 2.3. *Локальным средним* функции $f\in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ называется функция $\mathsf{E}[f]\in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, задаваемая формулой

$$\mathsf{E}[f](x,\mu)=(T_{\mu^\gamma}\varphi * f)(x,\mu), \tag{2.6}$$

где $\gamma\in(0,1)$ и специальное ядро усреднения $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ выбираются произвольным образом.

Утверждения из следующей теоремы анонсированы в [9, 19, 37] без доказательства, которое приводится ниже.

Теорема 2.1 (см. [37, Theorem 1]). *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Локальное среднее* $\mathsf{E}[f]$ *корректно определено, т. е. не зависит от выбора* γ *и* φ, *с точностью до* $\widehat{O}(\mu^\infty)$.
2. *Если* $f\in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathsf{E}[f]=f+\widehat{O}(\mu^\infty)$.
3. *Если* $f\in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$, *то*
$$\mathsf{E}[\widehat{H}f]=\widehat{H}\mathsf{E}[f]+\widehat{O}(\mu^\infty)$$
для любого μ-*дифференциального оператора* $\widehat{H}$ *с коэффициентами из* $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение 2. Для этого запишем свертку, задающую локальное среднее (2.6), в форме (2.4), обозначив для краткости $\mu^\gamma=\varepsilon$, и разложим $f(x-\varepsilon y,\mu)$ в подынтегральном выражении по формуле Тейлора с остаточным членом

$$f(z)=f(x)+\sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!}f^{(\alpha)}(x)+\sum_{|\alpha|=N}\frac{N}{\alpha!}(z-x)^\alpha\int\limits_0^1(1-\tau)^{N-1}f^{(\alpha)}(x+\tau(z-x))\,d\tau, \tag{2.7}$$

подставляя в неё $z = x - \varepsilon y$. В результате, с учётом свойств (2.5) специального ядра усреднения, получим (опуская для краткости второй аргумент μ)

$$E[f](x) = f(x) + \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-\varepsilon)^{|\alpha|}}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi(y)\,dy + \varepsilon^N R_N(x) = f(x) + \mu^{\gamma N} R_N(x),$$

$$R_N(x) = (-1)^N \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi(y) f^{(\alpha)}(x + \tau\varepsilon y)\,dy\,d\tau.$$

Так как функция $y^\alpha \varphi(y)$ лежит в пространстве Шварца, то $R_N(x) \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, и в силу произвольности N получаем $\mathsf{E}[f] = f + \widehat{O}(\mu^\infty)$, что и требовалось.

Теперь мы можем доказать утверждение 1. Пусть φ, ψ — два специальных ядра усреднения, и пусть $\varepsilon = \mu^{\gamma_1}$, $\delta = \mu^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$. Далее, пусть $f \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $T_\varepsilon\varphi * f, T_\delta\psi * f \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, и с учетом утверждения 2 и коммутативности и ассоциативности свертки получаем

$$(T_\delta\psi * T_\varepsilon\varphi) * f = T_\delta\psi * (T_\varepsilon\varphi * f) = T_\varepsilon\varphi * f + \widehat{O}(\mu^\infty);$$

$$(T_\delta\psi * T_\varepsilon\varphi) * f = (T_\varepsilon\varphi * T_\delta\psi) * f = T_\varepsilon\varphi * (T_\delta\psi * f) = T_\delta\psi * f + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Таким образом, $T_\varepsilon\varphi * f = T_\delta\psi * f + \widehat{O}(\mu^\infty)$, и утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 3. Достаточно проверить, что

$$\mathsf{E}[\widehat{p}f] = \widehat{p}\mathsf{E}[f], \qquad \mathsf{E}[Qf] = Q\mathsf{E}[f] + \widehat{O}(\mu^\infty), \qquad f \in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n), \quad Q \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Первое равенство очевидно, так как свертка коммутирует с дифференцированиями. Чтобы проверить второе утверждение, в формулу

$$E[Qf] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) Q(x - \varepsilon y) f(x - \varepsilon y)\,dy,$$

где φ — специальное ядро усреднения, а $\varepsilon = \mu^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, подставим разложение (2.7) функции $Q(x - \varepsilon y)$:

$$Q(x - \varepsilon y) = Q(x) + \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-\varepsilon)^{|\alpha|} Q^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} y^\alpha + \varepsilon^N \sum_{|\alpha|=N} y^\alpha Q_{N\alpha}(x,y),$$

где функции $Q_{N\alpha}(x,y)$ равномерно по (x,y,μ) ограничены вместе со всеми своими производными. Поэтому

$$E[Qf] = QE[f] + \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-\varepsilon)^{|\alpha|} Q^{(\alpha|}(x)}{\alpha!} T_\varepsilon\left[y^\alpha \varphi(y)\right] * f + O(\varepsilon^N; C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)). \tag{2.8}$$

Обозначим для краткости $\varphi_\alpha(y) = y^\alpha \varphi(y)$. Покажем, что

$$T_\varepsilon \varphi_\alpha * f = \widehat{O}(\mu^\infty) \qquad \text{при } |\alpha| > 0. \tag{2.9}$$

Пусть ψ — специальное ядро усреднения, а $\delta = \mu^\varkappa$, $0 < \gamma < \varkappa < 1$. Тогда

$$T_{\delta/\varepsilon}\psi * \varphi_\alpha = \varphi_\alpha + O(\mu^\infty, \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

(доказательство этого факта с небольшими изменениями воспроизводит доказательство утверждения 2 выше) и соответственно

$$T_\varepsilon\varphi_\alpha * T_\delta\psi = T_\varepsilon\left(\varphi_\alpha * T_{\delta/\varepsilon}\psi\right) = T_\varepsilon\varphi_\alpha + O(\mu^\infty, \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)),$$

так что

$$T_\varepsilon\varphi_\alpha * f = T_\varepsilon\varphi_\alpha * T_\delta\psi * f + \widehat{O}(\mu^\infty) = T_\varepsilon\varphi_\alpha * E[f] + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Поскольку функция $E[f]$ равномерно гладкая, мы опять можем использовать рассуждение из доказательства утверждения 2 и получить (2.9). Теперь равенство $\mathsf{E}[Qf] = Q\mathsf{E}[f] + \widehat{O}(\mu^\infty)$ вытекает из (2.8) в силу произвольности N. Теорема доказана. $\square$

Определение 2.4. Диффеоморфизм (замену переменных) $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем *правильным*, если все производные (начиная с первых) задающих его функций ограничены равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ и то же самое справедливо для обратного диффеоморфизма.

Следующее утверждение также приводится в [9, 19, 37] без доказательства.

Теорема 2.2. *Пространства* $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ *и* $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ *инвариантны относительно правильных замен переменных.*

Доказательство. Для пространств $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ утверждение непосредственно следует из определения 2.1 и ограниченности производных функций, задающих диффеоморфизм. Остается доказать, что если $f \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, а g — правильный диффеоморфизм, то $f \circ g^{-1} \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon = \mu^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$. Покажем, что

$$T_\varepsilon\varphi * \left(f \circ g^{-1}\right) \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку g — правильная замена переменных, это условие эквивалентно условию

$$\left[T_\varepsilon\varphi * \left(f \circ g^{-1}\right)\right] \circ g \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n),$$

которое мы и будем проверять. Таким образом, необходимо доказать, что функция

$$F(x,\mu) = \left[\left[T_\varepsilon\varphi * \left(f \circ g^{-1}\right)\right] \circ g\right](x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right) f(y,\mu) \det\frac{\partial g}{\partial x}(y)\,dy \tag{2.10}$$

и её производные любого порядка по переменным y ограничены равномерно по $(y,\mu) \in \mathbb{R}^n \times (0,1]$. Применяя формулу Тейлора (2.7) к функции $g(x)$, получаем

$$g(x)-g(y) = A(x)(x-y) + \sum_{|\alpha|=2}^{N-1}(x-y)^\alpha B_\alpha(x) + \sum_{|\alpha|=N}(x-y)^\alpha D_\alpha(x,y), \quad A(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x), \tag{2.11}$$

где матричные функции $A(x)$ и $A^{-1}(x)$, равно как и вектор-функции $B_\alpha(x)$ и $D_\alpha(x,y)$ (конкретные выражения для которых для доказательства несущественны) равномерно ограничены вместе со всеми своими производными. Частный случай этого разложения при $N=0$ имеет вид

$$g(x)-g(y) = D(x,y)(x-y), \qquad D(x,x) = A(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x).$$

Обозначим через $A(x,y,\tau)$ матрицу

$$A(x,y,\tau) = (1-\tau)A(x) + \tau D(x,y), \qquad \tau \in [0,1];$$

тогда

$$A(x,y,0) = A(x) \quad \text{и} \quad (1-\tau)A(x)(x-y) + \tau(g(x)-g(y)) = A(x,y,\tau)(x-y).$$

Из равномерной ограниченности матричных функций $A(x)$, $A^{-1}(x)$ и $D(x,y)$ вытекает, что существуют постоянные $R>0, C_0>0$, такие, что

$$\bigl|A(x,y,\tau)(x-y)\bigr| \geqslant C_0|x-y| \qquad \text{при} \quad \tau \in [0,1]$$

для любых $x,y \in \mathbb{R}^n$, таких, что $|x-y| \leqslant 5R$. Выберем и зафиксируем такое R. Пусть $\chi_1(r)$ — гладкая срезающая функция, равная нулю при $r \geqslant 4R$ и единице при $r \leqslant 2R$, $\chi_2(r) = 1-\chi_1(r)$. Выберем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$ и разобьем функцию (2.10) на два слагаемых:

$$\begin{aligned} &F(x,\mu) = F_1(x,\mu) + F_2(x,\mu) \\ &F_j(x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right)\chi_j(|y-x_0|) f(y,\mu)\det\frac{\partial g}{\partial x}(y)\,dy. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Достаточно показать, что функции $F_j(x,\mu)$, $j=1,2$, равномерно по μ ограничены вместе со всеми производными в шаре $B_R(x_0) = \{|x-x_0| \leqslant R\}$, причём соответствующие оценки равномерны по x_0. Рассмотрим сначала функцию $F_2(x,\mu)$. В этом случае на носителе подынтегрального выражения выполнено неравенство $|y-x_0| \geqslant 2R$, так что если $x \in B_R(x_0)$, то $|x-y| \geqslant R$. Для правильной замены переменных g существуют такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, что

$$|x-y| \leqslant C_1|g(x)-g(y)| \leqslant C_2|x-y|,$$

так что на носителе подынтегрального выражения получаем

$$|g(x)-g(y)| \geqslant \frac{1}{C_1}|x-y| \geqslant \frac{1}{2C_1}(R+|x-y|).$$

Поскольку $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, получаем, что при $x \in B_R(x_0)$ на носителе подынтегрального справедливы оценки

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left[\varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right)\chi_2(|y-x_0|)f(y,\mu)\det\frac{\partial g}{\partial x}(y)\right]\right| \leqslant C_{\alpha N}\frac{\varepsilon^{N-n-|\alpha|}}{(R+|x-y|)^N},$$

$|\alpha|, N = 0,1,2,\ldots$, с постоянными $C_{\alpha N}$, не зависящими от x_0, откуда немедленно следует, что $F_2(x,\mu)$ и её производные не только ограничены, но и равны $O(\mu^\infty)$ в шаре $|x-x_0| \leqslant R$, причём соответствующие оценки равномерны по параметру x_0.

Оценим теперь функцию $F_1(x,\mu)$. Подставляя разложение (2.11) в аргумент функции φ из подынтегрального выражения в (2.12) и применяя к ней разложение Тейлора (2.7) с центром в точке $A(x)(x-y)/\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}
\varphi\biggl(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\biggr) &= \varphi\biggl(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\biggr) + \\
&+\sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\frac{1}{\alpha!\varepsilon^{|\alpha|}}\biggl(\sum_{|\beta|=2}^{N-1}(x-y)^\beta B_\beta(x)+\sum_{|\beta|=N}(x-y)^\beta D_\beta(x,y)\biggr)^\alpha\varphi^{(\alpha)}\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)+\\
&\qquad+\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\varepsilon^N}\biggl(\sum_{|\beta|=2}^{N-1}(x-y)^\beta B_\beta(x)+\sum_{|\beta|=N}(x-y)^\beta D_\beta(x,y)\biggr)^\alpha\times\\
&\qquad\qquad\times\frac{N}{\alpha!}\int_0^1(1-\tau)^{N-1}\varphi^{(\alpha)}\left(A(x,y,\tau)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, перепишем это выражение в виде (суммы здесь и далее в доказательстве конечны)

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right) &= \varphi\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)+\sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\sum_{|\beta|\geqslant 2|\alpha|}\varepsilon^{-|\alpha|}(x-y)^\beta K_{\alpha\beta}(x)\varphi^{(\alpha)}\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)+\\
&+\sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\sum_{|\beta|\geqslant(N+2)|\alpha|-2}\varepsilon^{-|\alpha|}(x-y)^\beta K_{\alpha\beta}(x,y)\varphi^{(\alpha)}\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)+\\
&+\sum_{\substack{|\alpha|=N\\|\beta|\geqslant 2N}}\varepsilon^{-|\alpha|}(x-y)^\beta K_{\alpha\beta}(x,y)\int_0^1(1-\tau)^{N-1}\varphi^{(\alpha)}\left(A(x,y,\tau)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)d\tau,
\end{aligned}$$

где $K_{\alpha\beta}(x)$ и $K_{\alpha\beta}(x,y)$ — гладкие функции, равномерно ограниченные вместе со всеми своими производными. Положим

$$k(x,\mu)=\chi_1\left(|k-x_0|\right)f(x,\mu)\det\frac{\partial g}{\partial x}(y), \quad \varphi_{\alpha\beta}(A,x)=x^\beta\varphi^{(\alpha)}(Ax);$$

тогда функцию $F_1(x,\mu)$ можно записать в виде

$$F_1(x,\mu)=\sum_{|\alpha|=0}^{N-1}\sum_{|\beta|\geqslant 2\alpha}\varepsilon^{|\beta|-|\alpha|}K_{\alpha\beta}(x)\left[T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,x)*k(x,\mu)\right]\big|_{A=A(x)}+R_1(x,\mu)+R_2(x,\mu),$$

где $K_{00}(x) = 1$, $K_{0\beta}(x) = 0$ при $\beta \neq 0$,

$$R_1(x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{B_R(x_0)} \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \sum_{\beta \geqslant N|\alpha|+2|\alpha|-2} \varepsilon^{|\beta|-|\alpha|} K_{\alpha\beta}(x,y) \varphi_{\alpha\beta}\left(A(x), \frac{x-y}{\varepsilon}\right) k(y,\mu)\, dy,$$

$$R_2(x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_0^1 \int\limits_{B_R(x_0)} \sum_{\substack{|\alpha|=N\\ |\beta|\geqslant 2N}} \varepsilon^{|\beta|-|\alpha|} K_{\alpha\beta}(x,y)(1-\tau)^{N-1} \varphi_{\alpha\beta}\left(A(x,y,\tau), \frac{x-y}{\varepsilon}\right) k(y,\mu)\, dy\, d\tau.$$

Оценим прежде всего слагаемые в основной сумме. Функция $k(x,\mu)$ получается из $f(x,\mu)$ умножением на гладкую не зависящую от μ функцию и потому вместе с ней принадлежит пространству $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, задаёт всюду определённый линейный оператор

$$Q\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n), \qquad \varphi \longmapsto T_\varepsilon\varphi * k,$$

действующий между пространствами Фреше. Мы утверждаем, что этот оператор замкнут. Действительно, если $\varphi_j \to \varphi_\infty$ и $T_\varepsilon\varphi_j * k \to \psi$, то последняя сходимость имеет место и при каждом фиксированном $\mu \in (0,1]$ в пространстве $\mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ гладких функций, ограниченных вместе со всеми производными. Но при фиксированном μ рассматриваемый оператор непрерывен в пространствах $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, так что с необходимостью $T_\varepsilon\varphi_\infty * k = \psi$. По теореме о замкнутом графике оператор Q непрерывен. Далее, отображение $A \mapsto \varphi_{\alpha\beta}(A,\cdot)$ — гладкое отображение группы $GL(n,\mathbb{R})$ неособых вещественных матриц размера $n\times n$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, так что $T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,\cdot)*k$ — гладкое семейство элементов пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, параметризованное матрицами $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Функция $A(x)$ гладкая, все её производные ограничены, и все матрицы $A(x)$ содержатся в компактном подмножестве в $GL(n,\mathbb{R})$. Поэтому $\psi(y,\cdot,\mu) = T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A(y),\cdot) * k$ — гладкое и ограниченное вместе со всеми производными семейство элементов пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\psi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(y,x,\mu)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}, \qquad x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in [0,1], \quad |\alpha|,|\beta| = 0,1,2,\ldots$$

Из этих оценок немедленно вытекает, что функция

$$[T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,x) * k(x,\mu)]\,\big|_{A=A(x)} = \psi(x,x,\mu)$$

является элементом пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$. Умножение на функцию $K_{\alpha\beta}(x)$ также не выводит из пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, а показатель степени $|\alpha| - |\beta|$ у ε положителен. Итак,

$$\varepsilon^{|\beta|-|\alpha|} K_{\alpha\beta}(x)\,[T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,x) * k(x,\mu)]\,\big|_{A=A(x)} \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Осталось оценить влияние остаточных членов. Минимальная степень параметра ε в выражениях для R_1 и R_2 есть ε^{N-1}; функции $\varphi_{\alpha\beta}$ ограничены; при каждом дифференцировании по x возникает множитель ε^{-1}. В силу произвольности N ясно, что остаточные члены R_1 и R_2 не портят необходимых оценок. Равномерность всех полученных оценок по x_0 является следствием того факта, что все оценки для исходных функций инвариантны относительно сдвигов по x. Теорема доказана. □

2.2. Алгебры усреднимых функций. Пространство $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ не замкнуто относительно умножения функций; мы будем рассматривать в нем подпространства, которые являются алгебрами и удовлетворяют некоторым специальным условиям. В данной статье будем использовать модифицированный вариант определения из [8].

Определение 2.5. *Правильной алгеброй локально усреднимых функций* (или просто *правильной алгеброй*) назовем алгебру функций $\mathscr{A}$, $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{A} \subset C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, инвариантную относительно μ-дифференцирований: если $f \in \mathscr{A}$, то и

$$\widehat{p}_j f \equiv -i\mu \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{A}, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Следующий важный класс правильных алгебр описан в [37]. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — счетная аддитивная подгруппа, снабжённая нормой — функцией $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$, такой, что

$$\nu(g) > 0 \quad \text{при } g \neq 0, \quad \nu(g+h) \leqslant \nu(g) + \nu(h), \quad \nu(mg) = |m|\nu(g), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через $N_\Gamma(t)$ считающую функцию группы Γ — функцию, значение которой при любом $t \in \mathbb{R}_+$ есть число

$$N_\Gamma(t) = \#\{g \in \Gamma\colon \nu(g) < t\}$$

элементов группы Γ, норма которых меньше t. Предположим, что функция $N_\Gamma(t)$ конечна при всех t и растет не быстрее некоторой степени:

$$N_\Gamma(t) \leqslant C_0 t^{m_0} \qquad \text{с некоторыми постоянными } C_0, m_0 > 0. \tag{2.13}$$

Далее, предположим, что норма $\nu(\cdot)$ и сужение на подгруппу Γ обычной евклидовой нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ связаны неравенствами

$$C_1\nu(g)^{-m_1} \leqslant \|g\| \leqslant C_2\nu(g) \quad \text{при } g \neq 0 \text{ с некоторыми постоянными } m_0, m_1, C_1, C_2 > 0 \tag{2.14}$$

(левое неравенство здесь называется условием диофантовости). При выполнении условий (2.13) и (2.14) будем говорить, что Γ — *диофантова группа степенного роста.*

Пример 2.1. В качестве $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ можно взять подгруппу, порожденную векторами $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющими для некоторого $s > 0$ диофантову условию

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} n_j b_j\right\| \geqslant C\|n\|^{-s}, \quad n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\};$$

основной интерес здесь, разумеется, представляет случай $m > n$. Отметим, что по теореме Хинчина—Грошева [6, 40] для любых фиксированных m, n это условие выполнено для почти всех наборов $\{b_1, \dots, b_m\}$ в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{mn}$.

Рассмотрим всевозможные почти периодические функции переменных $y \in \mathbb{R}^n$ с модулем частот Γ и с коэффициентами из $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, т. е. функции $F(x, \mu, y)$ вида

$$F(x, \mu, y) = \sum_{g \in \Gamma} F_g(x, \mu) e^{igy}, \tag{2.15}$$

где коэффициенты $F_g \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям быстрого убывания

$$\left|\frac{\partial^\alpha F_g}{\partial x^\alpha}(x, \mu)\right| \leqslant C_{N\alpha}(1 + \nu(g))^{-N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in (0, 1] \quad |\alpha|, \ N = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.16}$$

с постоянными $C_{N\alpha}$, не зависящими от x и μ (но своими для каждой функции f).

Теорема 2.3. *Пространство* $\mathscr{A}_\Gamma$ *функций*

$$f(x, \mu) = F\left(x, \mu, \frac{x}{\mu}\right), \tag{2.17}$$

где $F(x, \mu, y)$ — *функция вида* (2.15) *с коэффициентами* $F_g(x, \mu)$, *удовлетворяющими условиям* (2.16)*, представляет собой правильную алгебру локально усреднимых функций. Локальное среднее функции* (2.17) *имеет вид*

$$\mathsf{E}[f](x, \mu) = F_0(x, \mu) + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Замечание 2.1. Осреднение дифференциальных операторов с быстроосциллирующими коэффициентами вида (2.15) с *постоянными* F_g рассматривалось в [20].

Замечание 2.2. Разумеется, $\mathscr{A}_\Gamma$ можно интерпретировать как скрещенное произведение групповой алгебры быстро убывающих функций на Γ (относительно свертки) на алгебру $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ с тривиальным действием группы Γ на последней.

Доказательство теоремы 2.3. Подставляя в (2.17) выражение (2.15) для функции F, получаем

$$f(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma} F_g(x,\mu) e^{\frac{i}{\mu}gx}. \tag{2.18}$$

Покажем, что этот ряд равномерно сходится. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. *Пусть $\{a_g\}_{g\in\Gamma}$ — семейство чисел, удовлетворяющих неравенству*

$$|a_g| \leqslant C(1+\nu(g))^{-s}$$

с некоторыми постоянными $C, s > 0$. Если $s > m_0$, то ряд $\sum\limits_{g\in\Gamma} a_g$ абсолютно сходится, и

$$\sum_{g\in\Gamma} |a_g| \leqslant \frac{sCC_0}{s-m_0}.$$

Доказательство. Для частичной суммы ряда из абсолютных значений запишем неравенство

$$\sum_{g:\nu(g)<R} |a_g| \leqslant C \sum_{g:\nu(g)<R} (1+\nu(g))^{-s} = C\int\limits_0^R (1+t)^{-s}\, dN_\Gamma(t)$$

(интеграл Стилтьеса). Интегрируя по частям и пользуясь оценкой для считающей функции группы Γ, получаем

$$\sum_{g:v(g)<R} |a_g| \leqslant C(1+R)^{-s} N_\Gamma(R) + sC\int\limits_0^R N_\Gamma(t)(1+t)^{-s-1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant CC_0(1+R)^{m_0-s} + sCC_0 \int\limits_0^R (1+t)^{m_0-s-1}\, dt.$$

При $s > m_0$ правая часть неравенства равномерно ограничена, и при $R\to\infty$ получаем

$$\sum_{g\in\Gamma} |a_g| \leqslant sCC_0 \int\limits_0^\infty (1+t)^{m_0-s-1}\, dt = \frac{sCC_0}{s-m_0}.$$

Лемма доказана. □

В силу этой леммы и оценок (2.16) при $\alpha = 0$ и $N > m_0$ ряд (2.18) сходится равномерно по (x,μ). Таким образом, произвольный элемент $f \in \mathscr{A}_\Gamma$ представляет собой функцию, равномерно по (x,μ) ограниченную и при каждом $\mu \in (0,1]$ непрерывную по x. Далее, почленное дифференцирование ряда (2.18) приводит к формуле

$$\mu\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma} F_{gj}(x,\mu) e^{\frac{i}{\mu}gx}, \qquad \text{где} \quad F_{gj}(x,\mu) = ig_jF_g(x,\mu) + \mu\frac{\partial F_g}{\partial x_j}(x,\mu). \tag{2.19}$$

В силу (2.16) и правого неравенства в (2.14) для коэффициентов продифференцированного ряда при всех α и N справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\alpha F_{gj}}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant \widetilde{C}_{N\alpha}(1+\nu(g))^{-N}, \qquad \text{где} \quad \widetilde{C}_{N\alpha} = C_2C_{N+1,\alpha} + C_{N,\alpha+1_j}$$

(здесь $1_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, где единица стоит на j-м месте). Это оценки того же вида, что и (2.16), но с другими постоянными, и мы заключаем, что

$$f \in \mathscr{A}_\Gamma \Longrightarrow \mu\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{A}_\Gamma, \qquad j = 1,\dots,n.$$

По индукции получаем $\mu^{|\alpha|}f^{(\alpha)} \in \mathscr{A}_\Gamma$ для производной любого порядка α, так что все μ-производные функции f также равномерно ограничены, а значит, $f \in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$.

Итак, $\mathscr{A}_\Gamma \subset C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$, и $\mathscr{A}_\Gamma$ инвариантно относительно μ-дифференцирований. Покажем теперь, что $\mathscr{A}_\Gamma$ — алгебра. Пусть $f, \widetilde{f} \in \mathscr{A}_\Gamma$ — два элемента вида (2.18). Тогда

$$f\widetilde{f} = \sum_{g,\widetilde{g}\in\Gamma} F_g \widetilde{F}_{\widetilde{g}} e^{\frac{i}{\mu}(g+\widetilde{g})x} = \sum_{g\in\Gamma} H_g e^{\frac{i}{\mu}gx},$$

где

$$H_g = \sum_{h\in\Gamma} F_h \widetilde{F}_{g-h} \tag{2.20}$$

(обычная свертка функций на группе Γ). Пользуясь оценками вида (2.16) для коэффициентов F_h и $\widetilde{F}_{g-h}$ и их производных, получаем

$$|H_g^{(\alpha)}| = \left|\sum_{h\in\Gamma}\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta} F_h \widetilde{F}_{g-h}\right| \leqslant \mathrm{const}\sum_{h\in\Gamma}(1+\nu(h))^{-N-s}(1+\nu(g-h))^{-N},$$

где $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$ — биномиальные коэффициенты, а постоянная зависит от α и N. Так как

$$\frac{1}{1+\nu(h)}\frac{1}{1+\nu(g-h)} = \frac{1}{1+\nu(h)+\nu(g-h)+\nu(h)\nu(g-h)} \leqslant \frac{1}{1+\nu(h)+\nu(g-h)} \leqslant \frac{1}{1+\nu(g)}$$

(в действительности это вариант неравенства Питре), то из предыдущего неравенства следует, что

$$|H_g^{(\alpha)}| \leqslant \mathrm{const}(1+\nu(g))^{-N}\sum_{h\in\Gamma}(1+\nu(h))^{-s}.$$

При $s > m_0$ ряд в правой части сходится по лемме 2.1, и мы видим, что коэффициенты H_g удовлетворяют оценкам вида (2.16). Итак, $f\widetilde{f} \in \mathscr{A}_\Gamma$, что и требовалось.

Покажем, наконец, что $\mathscr{A}_\Gamma \subset C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, и вычислим локальное среднее $\mathsf{E}[f]$ функции (2.18). Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon = \mu^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$. Ряд (2.18) сходится в $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$, а отображение $\psi \mapsto T_\varepsilon\varphi * \psi$ пространства $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ в себя непрерывно, так что свертку можно вычислять почленно:

$$T_\varepsilon\varphi * f = \sum_{g\in\Gamma} T_\varepsilon\varphi * (F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}).$$

Для слагаемого при $g = 0$ получаем

$$T_\varepsilon\varphi * F_0 \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

При $g \neq 0$ воспользуемся тем фактом, что

$$e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy} = \frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\left\langle\frac{g}{\|g\|}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy}$$

и для произвольного целого $k \geqslant 0$ запишем

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon\varphi * \Bigl(F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}\Bigr) &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu)\left(\frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\left\langle\frac{g}{\|g\|}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\right)^k e^{\frac{i}{\mu}g(x-\varepsilon y)}\,dy = \\
&= e^{\frac{i}{\mu}gx}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu)\left(\frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\left\langle\frac{g}{\|g\|}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\right)^k e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy}\,dy = \\
&= e^{\frac{i}{\mu}gx}\left(\frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\right)^k\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy}\left\langle\frac{g}{\|g\|}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle^k\Bigl(\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu)\Bigr)\,dy.
\end{aligned}$$

Из оценок (2.16) для коэффициентов F_g и включения $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ вытекает, что

$$\left|\left\langle\frac{g}{\|g\|}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle^k(\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu))\right| \leqslant \mathrm{const}(1+\nu(g))^{-N}(1+|y|)^{-n-1},$$

где постоянная зависит от k и N, но не зависит от g. Интегрируя по $\mathbb{R}^n$ и учитывая левое неравенство в (2.14), с некоторыми новыми постоянными получаем

$$\left|T_\varepsilon\varphi * F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}\right| \leqslant \operatorname{const}\mu^{k(1-\gamma)}\|g\|^{-k}(1+\nu(g))^{-N} \leqslant \operatorname{const}\mu^{k(1-\gamma)}(1+\nu(g))^{-N+m_1k}.$$

Положим здесь $k = m/(1-\gamma)$, $N = m_0 + m_1 k + 1$. Тогда

$$\left|T_\varepsilon\varphi * F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}\right| \leqslant \operatorname{const}\mu^{m}(1+\nu(g))^{-m_0-1},$$

и по лемме 2.1, суммируя ряд, получаем $T_\varepsilon\varphi * f = T_\varepsilon\varphi * F_0 + O(\mu^m; C_b(\mathbb{R}^n))$. Оценивая производные аналогичным образом, в силу произвольности m имеем $T_\varepsilon\varphi * f = T_\varepsilon\varphi * F_0 + \widehat{O}(\mu^\infty)$. Таким образом, $f \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$. Выбирая в качестве φ специальное ядро усреднения, получаем

$$\mathsf{E}[f] = \mathsf{E}[F_0] + \widehat{O}(\mu^\infty) = F_0 + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Теорема доказана. □

3. Теорема об осреднении

Как уже говорилось выше, в теории осреднения для квазиклассических асимптотик фигурируют два основных малых параметра: квазиклассический параметр h при производных, входящих в уравнение, и параметр μ, характеризующий скорость осцилляции коэффициентов. Всюду далее будем предполагать, что эти параметры связаны соотношением

$$0 < \nu \equiv \frac{\mu}{h} < Ch^{\varkappa}$$

с постоянными $\varkappa, C > 0$, которое означает, что коэффициенты оператора осциллируют значительно быстрее, чем предполагаемые квазиклассические решения.

Пусть $\breve{\mathcal{H}}_0$ и $\breve{\mathcal{H}}_1$ — h-дифференциальные операторы порядка m с равномерно гладкими и μ-быстроосциллирующими коэффициентами, соответственно. Через $P(x,p) = \mathcal{H}_{0m}(x,p)$ обозначим старшую однородную часть степени m по переменным p символа $\mathcal{H}_0(x,p)$ оператора $\breve{\mathcal{H}}_0$. Рассмотрим задачу об осреднении для возмущённого оператора

$$\breve{\mathcal{H}} = \breve{\mathcal{H}}_0 + \delta\breve{\mathcal{H}}_1,$$

где δ — ещё один малый параметр, характеризующий величину возмущения.

Теорема 3.1. *Предположим, что коэффициенты оператора $\breve{\mathcal{H}}_1$ лежат в правильной алгебре $\mathscr{A}$ локально усреднимых функций и выполнено следующее условие*:

(P) *для любой функции $v \in \mathscr{A}$ такой, что $\mathsf{E}[v] = \widehat{O}(\mu^\infty)$, уравнение $\widehat{P}u = v \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$ имеет решение $u \in \mathscr{A}$ такое, что $\mathsf{E}[u] = \widehat{O}(\mu^\infty)$.*

Тогда для любого $N = 1, 2, \ldots$ существует μ-дифференциальный оператор $\widehat{\chi}$ с символом вида

$$\chi = 1 + \delta\chi_1 + \cdots + \delta^N\chi_N,$$

где χ_j — многочлены от переменных (p, μ, ν) с коэффициентами в $\mathscr{A}$, и h-дифференциальный оператор $\breve{\mathcal{L}}$ с символом вида

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 + \cdots + \delta^N\mathcal{L}_N, \qquad \mathcal{L}_0 = \mathcal{H}_0,$$

где $\mathcal{L}_j$ — многочлены от переменных (p, p, ν) с коэффициентами в $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ такие, что

$$\breve{\mathcal{H}}\,\widehat{\chi} = \widehat{\chi}\,\breve{\mathcal{L}} + \breve{\mathcal{R}}, \tag{3.1}$$

где через $\breve{\mathcal{R}}$ обозначен h-дифференциальный оператор, символ которого является многочленом от переменных (p, h, δ, ν), причём в каждом слагаемом этого многочлена сумма показателей степеней при h, ν и δ не ниже $N+1$.

Замечание 3.1. Уравнение $\widehat{P}u = v \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$, упомянутое в условии (P), играет в рассматриваемой теории ту же роль, что «уравнение на ячейке» в классической теории осреднения для уравнений с коэффициентами — периодическими функциями от быстрых переменных.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть

$$\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\biggl(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\biggr) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (a_\alpha(x) + \delta b_\alpha(x)) \left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha. \tag{3.2}$$

Заметим, что если умножить оператор $\check{\mathcal{H}}$ на ν^m, то получится μ-дифференциальный оператор $\widehat{H} = H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$ с символом

$$H(x,p) = H_0(x,p) + \delta H_1(x,p) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \nu^{m-|\alpha|}(a_\alpha(x) + \delta b_\alpha(x))p^\alpha.$$

Поэтому вместо (3.1) получим сначала соотношение вида

$$\widehat{H}\ \widehat{\chi} = \widehat{\chi}\ \widehat{L} + \widehat{R} \tag{3.3}$$

с подходящими свойствами входящих в него операторов, а потом покажем, что при умножении $\widehat{L}$ и $\widehat{R}$ на ν^{-m} получаются h-дифференциальные операторы с указанными в теореме свойствами.

В доказательстве будем использовать μ-дифференциальные операторы $F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$, символы которых полиномиально зависят от параметров μ и ν:

$$F(x,p) \equiv F(x,p,\mu,\nu) = \sum_{\alpha,j,k} F_{\alpha jk}(x) p^\alpha \mu^j \nu^k \qquad \text{(сумма конечна)}; \tag{3.4}$$

для краткости мы опускаем параметры в обозначении символа.

Обозначим через $\mathbf{I}_s$, $s \in \mathbb{Z}_+$, пространство символов (3.4), для которых $F_{\alpha jk} \in \mathscr{A}$ (так что коэффициенты сами могут зависеть от параметра μ), причём $F_{\alpha jk} = 0$ при $|\alpha| + j + k < s$, а через $\mathbf{I}_s^{reg} \subset \mathbf{I}_s$ — подпространство символов с равномерно гладкими коэффициентами $F_{\alpha jk} \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$. В частности, $H_0 \in \mathbf{I}_m^{reg}$, $H_1 \in \mathbf{I}_m$. Очевидно, оба семейства пространств символов убывают при возрастании параметра s.

Напомним, что для произведения дифференциальных операторов справедлива формула

$$\widehat{F}\ \widehat{G} = \widehat{F * G}, \qquad \text{где} \quad [F * G] = F(\overset{2}{x}, p + \overset{1}{\widehat{p}})(G) = \sum_\alpha \frac{(-i\mu)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha F}{\partial p^\alpha} \frac{\partial^\alpha G}{\partial x^\alpha}, \tag{3.5}$$

выражающая символ произведения операторов как «скрученное» произведение символов сомножителей[1]. Следующее утверждение о скрученных произведениях символов из введённых выше пространств непосредственно вытекает из формулы (3.5).

Лемма 3.1. *Имеют место соотношения*

$$\mathbf{I}_k * \mathbf{I}_s \subset \mathbf{I}_s, \qquad \mathbf{I}_k * \mathbf{I}_s^{reg} \subset \mathbf{I}_{k+s}, \qquad \mathbf{I}_k^{reg} * \mathbf{I}_s^{reg} \subset \mathbf{I}_{k+s}^{reg}.$$

Построим символы

$$\begin{aligned}
&\chi = 1 + \delta\chi_1 + \dots + \delta^N \chi_N, && \chi_j \in \mathbf{I}_m, \quad j = 1,\dots,N,\\
&L = L_0 + \delta L_1 + \dots + \delta^N L_N, \quad L_0 = H_0, && L_j \in \mathbf{I}_m^{reg}, \quad j = 1,\dots,N,\\
&R = \delta R_1 + \dots + \delta^N R_N + \delta^{N+1} R_{N+1} + \dots + \delta^{2N} R_{2N}, && R_j \in \mathbf{I}_{m+N+1-j}, \quad j = 1,\dots,N,\\
& && R_j \in \mathbf{I}_m, \quad j = N+1,\dots,2N,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

такие, что выполнено соотношение (3.3). Для этого перепишем (3.3) в развернутом виде

$$\begin{aligned}
\bigl(\widehat{H}_0 + \delta\widehat{H}_1\bigr)\bigl(1 + \delta\widehat{\chi}_1 + \dots + \delta^N \widehat{\chi}_N\bigr) = \bigl(1 + \delta\widehat{\chi}_1 + \dots + \delta^N \widehat{\chi}_N\bigr)\bigl(\widehat{H}_0 + \delta\widehat{L}_1 + \dots + \delta^N \widehat{L}_N\bigr) + {}\\
{} + \delta\widehat{R}_1 + \dots + \delta^N \widehat{R}_N + \delta^{N+1}\widehat{R}_{N+1} + \dots + \delta^{2N}\widehat{R}_{2N},
\end{aligned}$$

[1]Начиная с этого момента, звездочкой обозначается именно скрученное произведение, определенное в (3.5), а не свертка, как в разделе 2.

воспользуемся формулой (3.5), чтобы перейти от произведения операторов к «скрученному» произведению символов и приравняем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях δ:

$$\begin{aligned} &H_0 * \chi_1 - \chi_1 * H_0 = L_1 - H_1 + R_1,\\ &H_0 * \chi_2 - \chi_2 * H_0 = L_2 - H_1 * \chi_1 + \chi_1 * L_1 + R_2,\\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &H_0 * \chi_k - \chi_k * H_0 = L_k - H_1 * \chi_{k-1} + \chi_1 * L_{k-1} + \dots + \chi_{k-1} * L_1 + R_k,\\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &H_0 * \chi_N - \chi_N * H_0 = L_N - H_1 * \chi_{N-1} + \chi_1 * L_{N-1} + \dots + \chi_{N-1} * L_1 + R_N. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для экономии места мы не выписываем здесь явно соотношения для коэффициентов при δ^j при $j > N$, так как эти соотношения служат просто определением соответствующих символов R_j; отметим лишь, что $\mathbf{I}_m * \mathbf{I}_m \subset \mathbf{I}_m$ в силу леммы 3.1, так что если нам удастся решить рекуррентную систему (3.7) относительно χ_j, L_j и R_j, $j = 1, \dots, N$, в классах символов (3.6), то и оставшиеся R_j, $j = N+1, \dots, 2N$, будут лежать в нужных классах.

Лемма 3.2. *Имеет место формула*

$$H_0 * F - F * H_0 = (\widehat{P} + \widehat{K})F,$$

где $\widehat{P}$ — μ-дифференциальный оператор с введённым выше символом $P(x,p)$, а $\widehat{K}$ — оператор с тем свойством, что $\widehat{K}\mathbf{I}_s \subset \mathbf{I}_{s+1}$ для любого $s \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathbf{I}_s$. Так как $H_0 = P + \nu Q$, где $Q \in \mathbf{I}_{m-1}$, то

$$H_0 * F - F * H_0 = P * F + \nu Q * F - F * H_0.$$

По лемме 3.1 $Q * F \in \mathbf{I}_s$ и $F * H_0 \in \mathbf{I}_{s+m}$, так что $\nu Q * F - F * H_0 \in \mathbf{I}_{s+1}$. Осталось показать, что $P * F = \widehat{P}F$ с точностью до элементов из $\mathbf{I}_{s+1}$. Но

$$P * F = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\left(p - i\mu\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha F = \sum_{|\alpha|=m}\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma} a_\alpha(x) p^\gamma \left(-i\mu\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-\gamma} F,$$

где $\binom{\alpha}{\gamma} = \binom{\alpha_1}{\gamma_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\gamma_n}$ — биномиальные коэффициенты. Поскольку μ-дифференцирование коэффициентов не выводит из $\mathbf{I}_s$, а умножение на p_j переводит $\mathbf{I}_s$ в $\mathbf{I}_{s+1}$, все слагаемые в правой части, в которых $\gamma \neq 0$, лежат в $\mathbf{I}_{s+1}$. Слагаемые же с $\gamma = 0$ дают в точности $\widehat{P}f$. Лемма доказана. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. В силу леммы 3.2 k-е уравнение рекурсивной цепочки (3.7) можно записать в виде

$$\widehat{P}\chi_k = -\widehat{K}\chi_k + L_k + F_k + R_k, \tag{3.8}$$

где $\chi_k \in \mathbf{I}_m$ и $L_k \in \mathbf{I}_m^{reg}$ — неизвестные функции, R_k — остаток, относительно которого нужно добиться, чтобы $R_k \in \mathbf{I}_{m+N+1-k}$, а

$$F_k = \begin{cases} -H_1, & k = 1,\\ -H_1 * \chi_{k-1} + \chi_1 * L_{k-1} + \dots + \chi_{k-1} * L_1, & k > 1, \end{cases}$$

— заданная функция (при $k > 1$ выражающаяся через решения предыдущих уравнений цепочки), причём если предположить по индукции, что все предыдущие уравнения решены в нужных пространствах, то $F_k \in I_m$.

Чтобы решить уравнение (3.8) для очередного k, поступим следующим образом. Рассмотрим цепочку уравнений[1]

$$\widehat{P}f_0 = F_k - \mathsf{E}[F_k], \tag{3.9}$$

$$\widehat{P}f_j = \mathsf{E}[\widehat{K}f_{j-1}] - \widehat{K}f_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \dots \tag{3.10}$$

Имеем $F_k - E(F_k) \in \mathbf{I}_m$, $\mathsf{E}[F_k - E(F_k)] = \widehat{O}(\mu^\infty)$. В силу условия (P) уравнение (3.9) имеет решение $f_0 \in \mathbf{I}_m$ (уравнение решаем по отдельности для каждого коэффициента многочлена f_0, получая решения из $\mathscr{A}$; так как набор одночленов, коэффициенты при которых ненулевые, тот же, что и в

[1]Здесь операция осреднения E применяется к символам покоэффициентно.

правой части, полученный многочлен, как и правая часть, лежит в $\mathbf{I}_m$). Теперь последовательно решаем уравнения (3.10). Предположим по индукции, что $f_{j-1} \in \mathbf{I}_{m+j-1}$; тогда правая часть уравнения (3.10) лежит в $\mathbf{I}_{m+j}$, имеет локальное среднее $\widehat{O}(\mu^\infty)$, и в силу условия (P) получаем решение $f_j \in \mathbf{I}_{m+j}$. Для суммы этих решений получаем

$$\widehat{P}\sum_{j=0}^{M} f_j = F_k - \mathsf{E}[F_k] + \sum_{j=0}^{M-1}\bigl(\mathsf{E}[\widehat{K}f_j] - \widehat{K}f_j\bigr) = -\widehat{K}\sum_{j=0}^{M} f_j + \mathsf{E}\Biggl[-F_k + \sum_{j=0}^{M-1}\widehat{K}f_j\Biggr] + F_k + \widehat{K}f_M.$$

При достаточно большом M символ $\widehat{K}f_M$ будет лежать в $\mathbf{I}_{m+N+1-k}$, мы получаем решение уравнения (3.8) в виде

$$\chi_k = \sum_{j=0}^{M} f_j \in \mathbf{I}_m, \qquad L_k = \mathsf{E}\Biggl[-F_k + \sum_{j=0}^{M-1}\widehat{K}f_j\Biggr] \in \mathbf{I}_m^{reg}, \qquad R_k = \widehat{K}f_M \in \mathbf{I}_{m+N+1-k}. \tag{3.11}$$

Итак, цепочка уравнений (3.7) решена. Для доказательства теоремы осталось проверить, что операторы $\check{\mathcal{L}} := \nu^{-m}\widehat{L}$ и $\check{\mathcal{R}} := \nu^{-m}\widehat{R}$, где

$$\widehat{L} = \widehat{H}_0 + \delta\widehat{L}_1 + \dots + \delta^N\widehat{L}_N, \qquad \widehat{R} = \delta\widehat{R}_1 + \dots + \delta^N\widehat{R}_N + \delta^{N+1}\widehat{R}_{N+1} + \dots + \delta^{2N}\widehat{R}_{2N},$$

суть h-дифференциальные операторы с заявленными в формулировке теоремы свойствами. Чтобы показать это, заметим, что коэффициенты в разложениях символов L и R по степеням параметра δ являются символами вида (3.4), лежащими либо в пространстве $\mathbf{I}_m^{reg}$ (в случае символа L), либо в пространствах $\mathbf{I}_s$ для $s = m + N + 1 - k$ или $s = m$ (в случае символа R). Рассмотрим произвольный оператор $F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$ с символом (3.4) из пространства $\mathbf{I}_s^{reg}$ или $\mathbf{I}_s$. Так как $\mu = h\nu$, то

$$\nu^{-m}F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}}) = \sum_{|\alpha|+j+k\geqslant s} F_{\alpha jk}(x)\mu^j\nu^{k-m}\biggl(-i\mu\frac{\partial}{\partial x}\biggr)^\alpha = \sum_{|\alpha|+j+k\geqslant s} F_{\alpha jk}(x)h^j\nu^{k+j+|\alpha|-m}\biggl(-ih\frac{\partial}{\partial x}\biggr)^\alpha.$$

Таким образом, при $s \geqslant m$ показатель степени у ν всегда неотрицателен, так что оператор $\nu^{-m}F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$ записывается в виде h-дифференциального оператора с полиномиальным по (p, h, ν) символом, причём в каждом слагаемом в символе сумма показателей степени у h и ν не меньше $s - m$. Отсюда немедленно вытекают требуемые утверждения. Теорема доказана. $\square$

Пример 3.1. В качестве простого примера приложения теоремы 3.1 рассмотрим асимптотическую задачу на собственные значения для оператора $\check{\mathcal{H}}$:

$$\check{\mathcal{H}}\psi = \lambda\psi + O(h^m).$$

Предположим, что $\delta \leqslant Ch^\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Выберем $N \geqslant m/\min\{\varepsilon, \varkappa\}$. Пусть $\widehat{\chi}$ и $\check{\mathcal{L}}$ — операторы, построенные в теореме. Найдем решение асимптотической задачи на собственные значения

$$\check{\mathcal{L}}\varphi = \lambda\varphi + O(h^m)$$

для оператора $\check{\mathcal{L}}$. Поскольку символ этого оператора уже не быстроосциллирующий, квазиклассическое асимптотическое решение φ этой задачи можно во многих случаях построить с помощью канонического оператора Маслова. Положим $\psi = \widehat{\chi}\varphi$. Тогда

$$(\check{\mathcal{H}} - \lambda)\psi = (\check{\mathcal{H}} - \lambda)\widehat{\chi}\varphi = \widehat{\chi}(\check{\mathcal{H}} - \lambda)\varphi + O(h^m) = O(h^m),$$

т. е. мы получаем асимптотическое решение исходной задачи.

Пример 3.2. Теорема 1 из [19] об осреднении волнового уравнения с быстроосциллирующей скоростью является следствием (или, если угодно, частным случаем) теоремы 3.1.

Условие (P) в теореме 3.1 может оказаться труднопроверяемым, но во многих ситуациях достаточно просто доказать, что оно выполнено. Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть* Γ *— диофантова группа степенного роста, и пусть*

$$P(x, p) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha(x)p^\alpha$$

— однородный многочлен степени m от переменных p с коэффициентами $b_\alpha \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности: существует постоянная $C > 0$ такая, что при всех (x, p) справедливо неравенство

$$|P(x,p)| \geqslant C|p|^m.$$

Тогда для любой функции $f \in \mathscr{A}_\Gamma$ такой, что $\mathsf{E}[f] = 0 \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$, существует решение $u \in \mathscr{A}_\Gamma$ уравнения

$$\widehat{P}u = f \bmod \widehat{O}(\mu^\infty) \tag{3.12}$$

такое, что $\mathsf{E}[u] = 0 \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$.

Доказательство. Пусть функция f записана в виде (2.18). Тогда

$$F_0(x,\mu) = \mathsf{E}[f] + \widehat{O}(\mu^\infty) = \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Так как уравнение (3.12) мы будем решать с точностью до $\widehat{O}(\mu^\infty)$, то без ограничения общности будем считать, что $F_0(x,\mu) = 0$, т. е.

$$F(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma\setminus\{0\}} F_g(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx}. \tag{3.13}$$

Для каждого члена $f_g(x,\mu) = F_g(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx}$ ряда (3.13) построим формальное асимптотическое решение u_g уравнения $\widehat{P}u_g = f_g$ в виде ряда по степеням параметра μ:

$$u_g(x,\mu) = e^{\frac{i}{\mu}\xi x}\sum_{j=0}^\infty (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu), \qquad a_{gj} \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Чтобы найти коэффициенты $a_{gj}(x,\mu)$, подставим этот ряд в уравнение и получим

$$\left(P(x,g) + \sum_{k=1}^\infty (-i\mu)^k R_k(g)\right)\sum_{j=0}^\infty (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu) = F_g(x,\mu), \quad \text{где} \quad R_k(g) = \sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha P}{\partial p^\alpha}(x,g)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

(и, в частности, $R_k(g) = 0$ при $k > m$), откуда, приравнивая коэффициенты при степенях μ, для функций $a_{gj}(x,\xi)$ получаем рекуррентные формулы

$$a_{g0}(x,\mu) = \frac{F_g(x,\mu)}{P(x,g)}, \qquad a_{gj}(x,\mu) = -\frac{1}{P(x,g)}\sum_{k=1}^j R_k(g)a_{g,j-k}(x,\mu), \quad j = 1,2,\dots$$

Так как коэффициенты оператора $R_k(g)$ — однородные функции от g степени $m - k$, а сам этот оператор — дифференциальный порядка k, то из этих формул по индукции следуют оценки

$$\left|\frac{\partial^\alpha a_{gj}}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_{j\alpha}\|g\|^{-m-j}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|+j}\left|\frac{\partial^\beta F_g}{\partial x^\beta}(x,\mu)\right|, \qquad j, |\alpha| = 0,1,2,\dots,$$

с некоторыми постоянными $C_{j\alpha}$, не зависящими от g и F_g. Из условия диофантовости (2.14) следует, что $\|g\|^{-m-j} \leqslant \operatorname{const}\nu(g)^{m_1(m+j)}$. Комбинируя это неравенство с оценками (2.16), получим неравенства

$$\left|\frac{\partial^\alpha a_{gj}}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_{Nj\alpha}(1+\nu(g))^{-N}, \qquad N, j, |\alpha| = 0,1,2,\dots, \tag{3.14}$$

с некоторыми постоянными $C_{Nj\alpha}$. Теперь, чтобы превратить формальное асимптотическое решение в настоящее асимптотическое решение с точностью до $\widehat{O}(\mu^\infty)$, воспользуемся хорошо известным приемом построения функции с заданным рядом Тейлора. Положим

$$K_l = \max\{1, \max_{N,j,|\alpha|\leqslant l} C_{Nj\alpha}\}, \qquad \mu_l = \frac{1}{2K_l}, \tag{3.15}$$

$$a_g(x,\mu) = \sum_{j:\mu\leqslant\mu_j}(-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu), \qquad u(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma} a_g(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx}. \tag{3.16}$$

Теперь все утверждения теоремы вытекают из следующей леммы.

Лемма 3.3. *Ряды* (3.16) *сходятся, причём* $a_g \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathscr{A}_\Gamma$ *является решением уравнения* (3.12), $\mathsf{E}[u] = \widehat{O}(\mu^\infty)$, *и для любого* $M = 0, 1, 2, \ldots$ *имеют место разложения*

$$a_g(x,\mu) = \sum_{j=0}^{M-1} (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu) + O(\mu^M; C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)), \tag{3.17}$$

$$u(x,\mu) = \sum_{j=0}^{M-1} (-i\mu)^j u_j(x,\mu) + O(\mu^M; \mathscr{A}_\Gamma), \tag{3.18}$$

где

$$u_j(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma} a_{gj}(x,\mu) e^{\frac{i}{\mu}gx}.$$

Доказательство. Рассмотрим хвост первого ряда в (3.16):

$$\sum_{\substack{j:j\geqslant M\\ \mu\leqslant\mu_j}} (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu) = (-i\mu)^M \sum_{\substack{j:j\geqslant M\\ \mu\leqslant\mu_j}} (-i\mu)^{j-M} a_{gj}(x,\mu) =: (-i\mu)^M Q_{gM}(x,\mu).$$

Пользуясь оценкой (3.14), получим

$$|Q_{gM}|^{(\alpha)}(x,\mu) \leqslant (1+\nu(g))^{-N} \sum_{j=M}^\infty \mu_j^{j-M} C_{Nj\alpha} = (1+\nu(g))^{-N} \sum_{j=M}^\infty \frac{1}{2^{j-M} K_j^{j-M-1}} \frac{C_{Nj\alpha}}{K_j}.$$

Ряд в правой части сходится, поскольку при $j \geqslant \max\{M+1, N, |\alpha|\}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2^{j-M} K_j^{j-M-1}} \frac{C_{Nj\alpha}}{K_j} \leqslant \frac{1}{2^{j-M}}.$$

При $M = 0$ отсюда следует сходимость первого ряда в (3.16) в пространстве $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ и оценки для функций a_g, гарантирующие, что вторая формула в (3.16) задаёт элемент пространства $\mathscr{A}_\Gamma$. При произвольном M получаем разложения (3.17) и (3.18).

Лемма 3.3, а вместе с ней и теорема 3.2, доказаны. ☐

4. О практическом решении уравнения из условия (P)

Вопрос о практическом решении уравнения из условия (P), необходимого при построении редуцирующего преобразования, рассмотрим на примере волнового уравнения

$$\eta_{tt} - \langle \nabla, c^2(x)\nabla\rangle \eta = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \tag{4.1}$$

где квадрат скорости зависит от малых параметров $\mu, \delta > 0$ (соотношение между которыми мы обсудим ниже) следующим образом:

$$c^2(x) \equiv c^2(x,\mu,\delta) = f_0(x,\mu) + \delta f_1(x,\mu), \tag{4.2}$$

где $f_0 \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, $f_1 \in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$. Будем предполагать, что функция $f_1(x,\mu)$ лежит в некоторой правильной алгебре локально усреднимых, причём $\mathsf{E}[f_1] = 0$.

Для волнового уравнения (4.1) рассмотрим задачу Коши

$$\eta\,\big|_{t=0} = \eta_0(x,h), \qquad -ih\eta_t\,\big|_{t=0} = \eta_1(x,h) \tag{4.3}$$

с быстроосциллирующими начальными данными $\eta_{0,1}(x,h)$, скорость осцилляций которых характеризуется малым параметром $h > 0$:

$$\left|\frac{\partial^\alpha \eta_{0,1}(x,h)}{\partial x^\alpha}\right| \leqslant C_\alpha h^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$$

Теорема 1 из [19] утверждает, что при этих условиях, если $\delta \asymp h \asymp \mu^{1/2}$, то решение задачи Коши (4.1), (4.3) близко к решению задачи Коши с начальными условиями (4.3) для осреднённого волнового уравнения первого приближения

$$\eta_{tt} - \langle \nabla, f_0(x)\nabla\rangle \eta = 0. \tag{4.4}$$

Если указанные соотношения на параметры не выполняются (скажем, $\sqrt{\mu} \ll \delta \ll 1$), то следует учитывать в осреднённом уравнении и члены более высокого порядка, которые приводят к тому, что в осреднённом уравнении появляется дисперсия. Сколько именно дальнейших членов понадобится, зависит от соотношения между параметрами.

Осреднённое уравнение второго приближения по параметру δ было вычислено в [9, 37]. Оно имеет вид

$$\mu^2\eta_{tt} + \langle -i\mu\nabla, f_0(x)(-i\mu\nabla)\rangle\eta + \delta^2 L\biggl(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\biggr)\eta = 0,$$

где

$$L(x,p) = -\frac{1}{f_0}\mathscr{E}\left[f_1\cdot\frac{\langle p,\nabla\rangle^2}{\Delta}f_1 - \frac{1}{\mu^2\Delta}\left(p^2 - \frac{2\langle p,\nabla\rangle^2}{\Delta}\right)f_1\cdot\left(p^2 - \frac{2\langle p,\nabla\rangle^2}{\Delta}\right)f_1\right]. \tag{4.5}$$

Погрешность составляет при этом $O(\mu^2+\delta^3+\delta^2(\mu/h)^6)$, так что если взять, например, $\delta \asymp \mu^{2/3}$ и $h \asymp \mu^{8/9}$, то погрешность будет $O(\mu^2) = O(\delta^3)$.

Формулу для $L(x,p)$ можно переписать в виде

$$L(x,p) = -\frac{1}{f_0}\mathscr{E}\left[f_1\cdot\frac{\langle p,\widehat{p}\rangle^2}{\widehat{p}^2}f_1\right] - \frac{1}{f_0}\mathscr{E}\left[\frac{1}{\widehat{p}^2}\left(p^2 - \frac{2\langle p,\widehat{p}\rangle^2}{\widehat{p}^2}f_1\right)\cdot\left(p^2 - \frac{2\langle p,\widehat{p}\rangle}{\widehat{p}^2}f_1\right)\right], \tag{4.6}$$

где через $\widehat{p}^{-2}v$ обозначается решение уравнения $\widehat{P}u = v \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathsf{E}[v] = 0$, из условия (P) с оператором $\widehat{P} = \widehat{p}^2$. Предложенные в [9, 19] методы для вычисления решения этого уравнения не особенно удобны с вычислительной точки зрения. Напишем явную формулу, удобную для практического применения. Прежде всего заметим, что

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2-\varepsilon^2} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon^2}{p^2+\varepsilon^2}} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2}\left(1+\varepsilon^2\frac{1}{p^2+\varepsilon^2}+\varepsilon^4\frac{1}{(p^2+\varepsilon^2)^2}+\dots\right)$$

(ряд Неймана). Преобразование Фурье с параметром μ от функции, которая локально усреднима с нулевым средним, есть $O(\mu^\infty)$ в шаре некоторого радиуса, стремящегося при $\mu \to 0$ к нулю медленнее произвольной степени μ. Поэтому, если взять $\varepsilon = \mu^\lambda$ для некоторого $\lambda \in (0,1)$, то некоторый конечный отрезок этого ряда Неймана будет хорошим приближением к символу оператора $\widehat{p}^{-2}$ на таких функциях. Таким образом, надо вычислить ядро Шварца оператора $\dfrac{1}{\widehat{p}^2+\varepsilon^2}$. Имеем

$$\left[\frac{1}{\widehat{p}^2+\varepsilon^2}u\right](x) = \frac{1}{(2\pi\mu)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2_y}\int\limits_{\mathbb{R}^2_p} e^{\frac{i}{\mu}p(x-y)}\frac{u(y)}{p^2+\varepsilon^2}\,dy\,dp = \mu^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} K\left(\frac{x-y}{\mu}\right)u(y)\,dy,$$

где

$$K(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_{\mathbb{R}^2_p}\frac{e^{ip\xi}}{p^2+\varepsilon^2}\,dp = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\rho|\xi|\cos\varphi}}{\rho^2+\varepsilon^2}\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Вычисляя интеграл по φ, получаем

$$K(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\rho}{\rho^2+\varepsilon^2}J_0(\rho|\xi|)\,d\rho,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя. Таким образом, функция $K(\xi)$ зависит только от $|\xi|$ и как функция от $|\xi|$ с точностью до множителя $\dfrac{1}{2\pi}$ является преобразованием Ханкеля функции $\dfrac{1}{\rho^2+\varepsilon^2}$. Поэтому

$$K(\xi) = \frac{1}{2\pi}K_0(\varepsilon|\xi|),$$

где $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода. Окончательно, переходя к полярным координатам, получаем

$$\left[\frac{1}{\widehat{p}^2+\varepsilon^2}u\right](x)=\frac{\mu^{-2\lambda}}{2\pi}\int\limits_0^\infty \rho K_0(\rho)\left(\int\limits_0^{2\pi} u(x-\mu^{1-\lambda}\rho\mathbf{n}(\phi))\,d\phi\right)d\rho,$$

где

$$\mathbf{n}(\phi)=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}.$$

Как отмечено в [19], при практической реализации оператора усреднения E достаточно ограничиться ядром, у которого равны нулю только моменты до порядка $|\alpha|=3$ включительно, но которое зато задаётся явной аналитической формулой. Следуя [19], можно взять

$$\varphi(y)=\frac{1}{\pi}e^{-4y^2}(3-8y_1^2)(3-8y_2^2).$$

Более того, вместо интегрирования по всей плоскости можно ограничиться интегрированием по единичному квадрату:

$$\mathsf{E}[F](x,\mu)\approx\int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\varphi(y)F(x-\mu^\gamma y)\,dy.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. *Берлянд Л. В., Доброхотов С. Ю.* Операторное разделение переменных в задачах о коротковолновой асимптотике для дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами// Докл. АН СССР. — 1987. — *296*, № 1. — С. 80–84.
3. *Борисов Д. И.* Об усреднении операторов с возмущениями общего вида в младших членах// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 1. — С. 132–137.
4. *Брюнинг Й., Грушин В. В., Доброхотов С. Ю.* Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы// Мат. заметки. — 2012. — *92*, № 2. — С. 163–180.
5. *Буслаев В. С.* Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами// Усп. мат. наук. — 1987. — *42*, № 6. — С. 77–98.
6. *Грошев А. В.* Теорема о системе линейных форм// Докл. АН СССР. — 1938. — № 19. — С. 151–152.
7. *Доброхотов С. Ю.* Резонансы в асимптотике решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим конечно-зонным потенциалом// Мат. заметки. — 1988. — *44*, № 3. — С. 319–340.
8. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е.* Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линеаризованных уравнений мелкой воды// В сб.: «Актуальные проблемы механики». — М.: Наука, 2015. — С. 98–139.
9. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Тироцци Б.* О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 516–520.
10. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И.* Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — *81*, № 2. — С. 53–96.
11. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И.* Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2021. — *76*, № 5. — С. 3–80.
12. *Дородный М. А., Суслина Т. А.* Усреднение гиперболических уравнений// Функц. анализ и его прилож. — 2016. — *50*, № 4. — С. 91–96.
13. *Дородный М. А., Суслина Т. А.* Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учете корректоров// Функц. анализ и его прилож. — 2023. — *57*, № 4. — С. 123–129.
14. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
15. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Нгоан Ха Тьен.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 5. — С. 65–133.
16. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 27–122.

17. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* О сходимости блоховских собственных функций в задачах усреднения// Функц. анализ и его прилож. — 2016. — *50*, № 3. — С. 47–65.
18. *Жиков В. В., Пятницкий А. Л.* Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер// Изв. РАН. Сер. мат. — 2006. — *70*, № 1. — С. 23–74.
19. *Караева Д. А., Караев А. Д., Назайкинский В. Е.* Метод осреднения в задаче о распространении длинных волн от локализованного источника в бассейне над неровным дном// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 8. — С. 1075–1089.
20. *Козлов С. М.* Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстроосциллирующими коэффициентами// Мат. сб. — 1978. — *107*, № 2. — С. 199–217.
21. *Козлов С. М.* Осреднение случайных операторов// Мат. сб. — 1979. — *109*, № 2. — С. 188–202.
22. *Кузмак Г. Е.* Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами// Прикл. мат. и мех. — 1951. — *23*, № 3. — С. 519–526.
23. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: МГУ, 1965.
24. *Маслов В. П.* Операторные методы. — М.: Мир, 1976.
25. *Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Методы некоммутативного анализа. — М.: Техносфера, 2002.
26. *Назаров С. А., Пятницкий А. Л.* Осреднение спектральной задачи Дирихле для системы дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами при плотности переменного знака// Пробл. мат. анализа. — 2010. — *47*. — С. 75–107.
27. *Пастухова С. Е.* Об операторных оценках усреднения для эллиптических систем высокого порядка// Мат. заметки. — 2023. — *114*, № 3. — С. 370–389.
28. *Суслина Т. А.* Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами// Усп. мат. наук. — 2023. — *78*, № 6. — С. 47–178.
29. *Alicandro R., Ansini N., Braides A., Piatnitski A., Tribuzio A.*. Periodic homogenization// В сб.: «A Variational Theory of Convolution-Type Functionals». — Singapore: Springer, 2023. — С. 59–89
30. *Belov V. V., Dobrokhotov S. Yu., Tudorovskiy T. Ya.* Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics// J. Eng. Math. — 2006. — *55*, № 1–4. — С. 183–237.
31. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis of Periodic Structures. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
32. *Borisov D. I.* Homogenization for operators with arbitrary perturbations of coefficients// J. Differ. Equ. — 2023. — *369*. — С. 41–93.
33. *Brüning J., Dobrokhotov S. Yu., Grushin V. V.* Approximate formulas for the eigenvalues of a Laplace operator on a torus, which arises in linear problems with oscillating coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2012. — *19*, № 3. — С. 1–10.
34. *Calvo-Jurado C., Casado-Díaz J., Luna-Laynez M.* Homogenization of the Poisson equation with Dirichlet conditions in random perforated domains// J. Comput. Appl. Math. — 2015. — *275*. — С. 375–381.
35. *Cancedda A., Chiado Piat V., Nazarov S.A., Taskinen J.* Spectral gaps for the linear water-wave problem in a channel with thin structures// Math. Nachr. — 2022. — *295*. — С. 657–682.
36. *Chung E., Efendiev Ya., Hou Th. Y.* Multiscale Model Reduction. Multiscale Finite Element Methods and Their Generalizations. — Cham: Springer, 2023.
37. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E.* Homogenization of the Cauchy problem for the wave equation with rapidly varying coefficients and initial conditions// В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics». — Cham: Birkhäuser, 2022. — С. 77–102.
38. *Feynman R. P.* An operator calculus having applications in quantum electrodynamics// Phys. Rev. — 1951. — *84*, № 2. — С. 108–128.
39. *Heida M., Neukamm S., Varga M.* Stochastic two-scale convergence and Young measures// Netw. Heterog. Media. — 2022. — *17*, № 2. — С. 227–254.
40. *Khintchine A. J.* Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen// Math. Ann. — 1924. — *92*. — С. 115–125.
41. *Marchenko V. A., Khruslov E. Ya.* Homogenization of Partial Differential Equations. — Boston: Birkhäuser, 2006.
42. *Nguetseng G.* Homogenization in perforated domains beyond the periodic setting// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — *289*. — С. 608–628.
43. *Piatnitski A., Remy E.* Homogenization of elliptic difference operators// SIAM J. Math. Anal. — 2001. — *33*, № 1. — С. 53–83.
44. *Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E.* On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type// J. Differ. Equ. — 2023. — *352*. — С. 153–188.

45. *Piatnitski A., Zhizhina E.* Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel// SIAM J. Math. Anal. — 2017. — *49*, № 1. — С. 64–81.
46. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1980.
47. *Whitham G. B.* Two-timing, variational principles and waves// J. Fluid Mech. — 1970. — *44*. — С. 373–395.
48. *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.

С. Ю. Доброхотов

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: `s.dobrokhotov@gmail.com`

В. Е. Назайкинский

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: `nazaikinskii@yandex.ru`

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76

EDN: YPMUOA

Averaging method for problems on quasiclassical asymptotics

S. Yu. Dobrokhotov[1,2] **and V. E. Nazaikinskii**[1,2]

[1] *Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*
[2] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The averaging method is developed for operators with rapidly oscillating coefficients, intended for use in problems of quasiclassical asymptotics and not assuming a periodic structure of coefficient oscillations. Algebras of locally averaged functions are studied, an averaging theorem for differential operators of general form is proved, and some features of the method are illustrated using the example of the wave equation.

Keywords: averaging methods, rapidly oscillating coefficients, quasiclassical asymptotics, algebras of locally averaged functions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the grant of the Russian Science Foundation (project № 21-71-30011).

For citation: S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, “Averaging method for problems on quasiclassical asymptotics,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 53–76. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76`

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).

2. L. V. Berlyand and S. Yu. Dobrokhotov, "Operatornoe razdelenie peremennykh v zadachakh o korotkovolnovoy asimptotike dlya differentsial'nykh uravneniy s bystroostsilliruyushchimi koeffitsientami" [Operator separation of variables in problems on short-wave asymptotics for differential equations with rapidly oscillating coefficients], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1987, **296**, No. 1, 80–84 (in Russian).
3. D. I. Borisov, "Ob usrednenii operatorov s vozmushcheniyami obshchego vida v mladshikh chlenakh" [On homogenization of operators with general perturbations in lower terms], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 1, 132–137 (in Russian).
4. Y. Bryuning, V. V. Grushin, and S. Yu. Dobrokhotov, "Osrednenie lineynykh operatorov, adiabaticheskoe priblizhenie i psevdodifferentsial'nye operatory" [Averaging of linear operators, adiabatic approximation, and pseudodifferential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **92**, No. 2, 163–180 (in Russian).
5. V. S. Buslaev, "Kvaziklassicheskoe priblizhenie dlya uravneniy s periodicheskimi koeffitsientami" [Quasi-classical approximation for equations with periodic coefficients], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1987, **42**, No. 6, 77–98 (in Russian).
6. A. V. Groshev, "Teorema o sisteme lineynykh form" [Theorem on the system of linear forms], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1938, No. 19, 151–152 (in Russian).
7. S. Yu. Dobrokhotov, "Rezonansy v asimptotike resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya Shredingera s bystroostsilliruyushchim konechno-zonnym potentsialom" [Resonances in the asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the Schrödinger equation with a rapidly oscillating finite-band potential], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1988, **44**, No. 3, 319–340 (in Russian).
8. S. Yu. Dobrokhotov and V. E. Nazaikinskii, "Asimptotiki volnovykh i vikhrevykh lokalizovannykh resheniy linearizovannykh uravneniy melkoy vody" [Asymptotic behavior of wave and vortex localized solutions of linearized shallow water equations], In: *Aktual'nye problemy mekhaniki* [Actual Problems of Mechanics], Nauka, Moscow, 2015, pp. 98–139 (in Russian).
9. S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, and B. Tirotstsi, "O metode osredneniya dlya differentsial'nykh operatorov s ostsilliruyushchimi koeffitsientami" [On the averaging method for differential operators with oscillating coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **461**, No. 5, 516–520 (in Russian).
10. S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, and A. I. Shafarevich, "Novye integral'nye predstavleniya kanonicheskogo operatora Maslova v osobykh kartakh" [New integral representations of the Maslov canonical operator in singular charts], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2017, **81**, No. 2, 53–96 (in Russian).
11. S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, and A. I. Shafarevich, "Effektivnye asimptotiki resheniy zadachi Koshi s lokalizovannymi nachal'nymi dannymi dlya lineynykh sistem differentsial'nykh i psevdodifferentsial'nykh uravneniy" [Effective asymptotics of solutions of the Cauchy problem with localized initial data for linear systems of differential and pseudodifferential equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2021, **76**, No. 5, 3–80 (in Russian).
12. M. A. Dorodnyy and T. A. Suslina, "Usrednenie giperbolicheskikh uravneniy" [Homogenization of hyperbolic equations], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2016, **50**, No. 4, 91–96 (in Russian).
13. M. A. Dorodnyy and T. A. Suslina, "Usrednenie giperbolicheskikh uravneniy: operatornye otsenki pri uchete korrektorov" [Homogenization of hyperbolic equations: operator estimates with correctors taken into account], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2023, **57**, No. 4, 123–129 (in Russian).
14. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
15. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleynik, and Ngoan Kha T'en, "Usrednenie i G-skhodimost' differentsial'nykh operatorov" [Homogenization and G-convergence of differential operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1979, **34**, No. 5, 65–133 (in Russian).
16. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 27–122 (in Russian).
17. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "O skhodimosti blokhovskikh sobstvennykh funktsiy v zadachakh usredneniya" [On the convergence of Bloch eigenfunctions in homogenization problems], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2016, **50**, No. 3, 47–65 (in Russian).
18. V. V. Zhikov and A. L. Piatnitski, "Usrednenie sluchaynykh singulyarnykh struktur i sluchaynykh mer" [Homogenization of random singular structures and random measures], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2006, **70**, No. 1, 23–74 (in Russian).
19. D. A. Karaeva, A. D. Karaev, and V. E. Nazaikinskii, "Metod osredneniya v zadache o rasprostranenii dlinnykh voln ot lokalizovannogo istochnika v basseyne nad nerovnym dnom" [Averaging method in the problem of propagation of long waves from a localized source in a pool over an uneven bottom], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 8, 1075–1089 (in Russian).

20. S. M. Kozlov, “Osrednenie differentsial’nykh operatorov s pochti-periodicheskimi bystroostsilliruyushchimi koeffitsientami” [Averaging differential operators with almost periodic, rapidly oscillating coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1978, **107**, No. 2, 199–217 (in Russian).
21. S. M. Kozlov, “Osrednenie sluchaynykh operatorov” [Averaging of random operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1979, **109**, No. 2, 188–202 (in Russian).
22. G. E. Kuzmak, “Asimptoticheskie resheniya nelineynykh differentsial’nykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [Asymptotic solutions of nonlinear differential equations with variable coefficients], *Prikl. mat. i mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1951, **23**, No. 3, 519–526 (in Russian).
23. V. P. Maslov, *Teoriya vozmushcheniy i asimptoticheskie metody* [Perturbation Theory and Asymptotic Methods], MGU, Moscow, 1965 (in Russian).
24. V. P. Maslov, *Operatornye metody* [Operator Methods], Mir, Moscow, 1976 (in Russian).
25. V. E. Nazaikinskii, B. Yu. Sternin, and V. E. Shatalov, *Metody nekommutativnogo analiza* [Methods of Noncommutative Analysis], Tekhnosfera, Moscow, 2002 (in Russian).
26. S. A. Nazarov and A. L. Piatnitski, “Osrednenie spektral’noy zadachi Dirikhle dlya sistemy differentsial’nykh uravneniy s bystroostsilliruyushchimi koeffitsientami pri plotnosti peremennogo znaka” [Homogenization of the Dirichlet spectral problem for a system of differential equations with rapidly oscillating coefficients with a density of alternating sign], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2010, **47**, 75–107 (in Russian).
27. S. E. Pastukhova, “Ob operatornykh otsenkakh usredneniya dlya ellipticheskikh sistem vysokogo poryadka” [On operator estimates of homogenization for higher-order elliptic systems], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 3, 370–389 (in Russian).
28. T. A. Suslina, “Teoretiko-operatornyy podkhod k usredneniyu uravneniy tipa Shredingera s periodicheskimi koeffitsientami” [Operator-theoretic approach to the homogenization of Schrödinger-type equations with periodic coefficients], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2023, **78**, No. 6, 47–178 (in Russian).
29. R. Alicandro, N. Ansini, A. Braides, A. Piatnitski, and A. Tribuzio, “. Periodic homogenization,” In: *A Variational Theory of Convolution-Type Functionals*, Springer, Singapore, 2023, pp. 59–89
30. V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, and T. Ya. Tudorovskiy, “Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics,” *J. Eng. Math.*, 2006, **55**, No. 1–4, 183–237.
31. A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
32. D. I. Borisov, “Homogenization for operators with arbitrary perturbations of coefficients,” *J. Differ. Equ.*, 2023, **369**, 41–93.
33. J. Brüning, S. Yu. Dobrokhotov, and V. V. Grushin, “Approximate formulas for the eigenvalues of a Laplace operator on a torus, which arises in linear problems with oscillating coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2012, **19**, No. 3, 1–10.
34. C. Calvo-Jurado, J. Casado-Díaz, and M. Luna-Laynez, “Homogenization of the Poisson equation with Dirichlet conditions in random perforated domains,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, **275**, 375–381.
35. A. Cancedda, V. Chiado Piat, S. NazarovA., and J. Taskinen, “Spectral gaps for the linear water-wave problem in a channel with thin structures,” *Math. Nachr.*, 2022, **295**, 657–682.
36. E. Chung, Ya. Efendiev, and Th. Y. Hou, *Multiscale Model Reduction. Multiscale Finite Element Methods and Their Generalizations*, Springer, Cham, 2023.
37. S. Yu. Dobrokhotov and V. E. Nazaikinskii, “Homogenization of the Cauchy problem for the wave equation with rapidly varying coefficients and initial conditions,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, Birkhäuser, Cham, 2022, pp. 77–102.
38. R. P. Feynman, “An operator calculus having applications in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, 1951, **84**, No. 2, 108–128.
39. M. Heida, S. Neukamm, and M. Varga, “Stochastic two-scale convergence and Young measures,” *Netw. Heterog. Media*, 2022, **17**, No. 2, 227–254.
40. A. J. Khintchine, “Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen,” *Math. Ann.*, 1924, **92**, 115–125.
41. V. A. Marchenko and E. Ya. Khruslov, *Homogenization of Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 2006.
42. G. Nguetseng, “Homogenization in perforated domains beyond the periodic setting,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **289**, 608–628.
43. A. Piatnitski and E. Remy, “Homogenization of elliptic difference operators,” *J. SIAM Math. Anal.*, 2001, **33**, No. 1, 53–83.
44. A. Piatnitski, V. Sloushch, T. Suslina, and E. Zhizhina, “On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type,” *J. Differ. Equ.*, 2023, **352**, 153–188.

45. A. Piatnitski and E. Zhizhina, “Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel,” *J. SIAM Math. Anal.*, 2017, **49**, No. 1, 64–81.
46. E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.
47. G. B. Whitham, “Two-timing, variational principles and waves,” *J. Fluid Mech.*, 1970, **44**, 373–395.
48. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.

S. Yu. Dobrokhotov
Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: `s.dobrokhotov@gmail.com`

V. E. Nazaikinskii
Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: `nazaikinskii@yandex.ru`