

УДК 517.956

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52

EDN: YYQSXD

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ОСНОВНЫХ МОДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА

Л. В. ГАРГЯНЦ¹, О. С. РОЗАНОВА², М. К. ТУРЦЫНСКИЙ^{3,4}

¹Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

³Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия

⁴Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Аннотация. В статье построено решение задачи Римана для неоднородной нестрогой гиперболической системы двух уравнений, являющейся следствием уравнений Эйлера—Пуассона без давления [9]. Эти уравнения могут быть рассмотрены для случаев притягивающей и отталкивающей силы, и для случаев нулевого и ненулевого основного фона плотности. Решение задачи Римана для каждого случая является нестандартным и содержит дельтаобразную сингулярность в компоненте плотности. В [16] построено решение для комбинации, соответствующей модели холодной плазмы (отталкивающая сила и ненулевой фон плотности). В настоящей работе рассмотрены три оставшихся случая.

Ключевые слова: уравнения Эйлера—Пуассона, задача Римана, характеристики, ударная волна, волна разрежения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Поддержано грантом РНФ № 23-11-00056 через Российский университет дружбы народов.

Для цитирования: Л. В. Гаргянц, О. С. Розанова, М. К. Турцынский. Задача Римана для основных модельных случаев уравнений Эйлера—Пуассона // Современ. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 1. С. 38–52. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52>

1. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА

Уравнения Эйлера—Пуассона являются основополагающими для описания движения сплошной среды, состоящей из частиц, между которыми действует некоторая сила. Это может быть сила притяжения (гравитационная сила), если речь идет о моделях астрофизики, или сила отталкивания, если речь идет о моделях плазмы или полупроводников, где составляющими среды выступают электроны. В самом простом случае, когда пренебрегается давлением, вязкостью, потерями энергии, связанными с трением, исключением из рассмотрения частиц с противоположным зарядом (в случае плазмы), уравнения Эйлера—Пуассона выглядят следующим образом [9]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = k \nabla \Phi, \quad (1.2)$$

$$\Delta \Phi = n - n_0, \quad (1.3)$$



где $n \geq 0$ — плотность, $n_0 = \text{const} \geq 0$ — фоновое значение плотности, \mathbf{V} — скорость, Φ — потенциал действующей силы, $k = \text{const}$, случай $k > 0$ отвечает отталкивающей силе, $k < 0$ — притягивающей силе. Все компоненты решения зависят от времени t и точки пространства $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

Отметим, что несмотря на то, что система (1.1)–(1.3) может считаться самой простой среди прочих моделей, учитывающих дополнительные факторы, математически она очень сложна, особенно в многомерном пространстве¹. Например, в случае отталкивающей силы и ненулевого фона плотности система Эйлера—Пуассона описывает суперпозицию нелинейных волн, распространяющихся в разных направлениях. Но даже в случае одной пространственной переменной многие стандартные задачи, будучи поставленными для системы (1.1)–(1.3), не могут быть решены в рамках стандартного подхода. К таким задачам относится задача Римана, т. е. задача Коши с кусочно-постоянными данными, имеющими разрыв в начале координат, типичная для квазилинейных законов сохранения.

Мы будем рассматривать четыре основных модельных случая, которые могут быть получены после ренормировки:

- I. $k = -1, n_0 = 0$;
- II. $k = 1, n_0 = 0$;
- III. $k = -1, n_0 = 1$;
- IV. $k = 1, n_0 = 1$.

Задача Римана для случая IV, отвечающего модели холодной (электронной) плазмы, была решена в [16]. В настоящей статье мы построим решение для случаев I–III. Отметим, что для каждого из этих случаев решение имеет свою специфику. Это проявляется, в частности, в том, что в зависимости от ситуации, волна разрежения и/или ударная волна могут быть построены неединственным образом.

Отметим, что мы будем подходить к решению задачи Римана чисто математически, без оглядки на физический смысл. Например, для уравнений холодной плазмы ставить задачу Коши с разрывными начальными условиями не имеет смысла, так как считается, что эта система адекватно описывает модель только на гладких решениях [4]. В случае, когда начальные данные гладкие, можно ставить вопрос о том, останется ли решение гладким для всех $t > 0$ или в течение конечного времени у него образуется особенность. Для $d = 1$ (а в настоящей статье мы рассматриваем только этот случай) ответ на такой вопрос существует [9], для радиально-симметричных решений задача решалась в [7, 15, 19, 20], есть результаты и для так называемых аффинных решений [17]. Для многомерного случая и начальных данных общего вида критерий возникновения особенностей неизвестен.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Преобразуем систему (1.1)–(1.3) к более удобному для нас виду. Для этого введем вектор-функцию $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Из (1.3) получим

$$n = n_0 - \text{div } \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

что позволяет исключить n , подставив (2.1) в (1.1) и получить $\text{div } \mathbf{X} = 0$, где

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{V} \text{div } \mathbf{E} - n_0 \mathbf{V}.$$

Согласно теореме Гельмгольца $\mathbf{X} = \nabla F + \text{rot } \mathbf{A}$, где F и \mathbf{A} — скалярный и векторный потенциалы, соответственно. Так как $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, то в случае, когда $\text{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ (в одномерном по пространству случае это заведомо так) мы имеем $\text{rot } \mathbf{X} = 0$. Предположив, что компоненты вектора \mathbf{X} достаточно быстро убывают при $|x| \rightarrow \infty$, по теореме о восстановлении гладкого векторного поля по его дивергенции и ротору [2] получим, что \mathbf{X} восстанавливается единственным образом и поэтому равно нулю.

¹Хотя физический смысл имеют только размерности $d = 2, d = 3$, математически можно рассматривать любое d . Более того, оказывается, что размерность $d = 4$ имеет исключительный характер [15].

Тогда мы получим систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -k\mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{E} &= n_0 \mathbf{V}.\end{aligned}$$

Мы будем изучать задачу Римана именно для этой системы, из которой будет следовать (1.1)–(1.3), и уже не будем требовать убывания решения на бесконечности. Нас будет интересовать одномерный случай, т. е.

$$V_t + VV_x = -kE, \quad E_t + VE_x = n_0V, \quad (2.2)$$

а выражение для n будет находиться как $n = n_0 - E_x$.

Далее мы будем рассматривать систему (2.2) вместе с начальными данными Римана

$$(V, E)|_{t=0} = (V_-^0 + [V]^0 \Theta(x), E_-^0 + [E]^0 \Theta(x)),$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, константы (V_-, E_-) — значения слева от разрыва, $([V], [E])$ — величины скачков, $(V_+ = V_- + [V], E_+ = E_- + [E])$ — значения справа от скачков, (V_\pm^0, E_\pm^0) , $([V]^0, [E]^0)$ — соответствующие значения всех величин в нулевой момент времени. Плотность в нулевой момент времени находится как

$$n|_{t=0} = n_0 - [E]^0 \delta(x).$$

Отметим, что из неотрицательности плотности следует $[E]^0 \leq 0$.

Специфика системы (2.2) состоит в том, что она является нестрогой гиперболической, поэтому и волна разрежения, и ударная волна имеют свойства, отличающиеся от стандартного решения задачи Римана (например, [3, 8]).

Нам также понадобится дивергентная форма этой системы:

$$n_t + (Vn)_x = 0, \quad \left(\frac{nV^2}{2} + k \frac{E^2}{2} \right)_t + \left(\frac{nV^3}{2} \right)_x = 0, \quad (2.3)$$

в которой уже должна присутствовать величина n или (что менее удобно) ее выражение через E_x как $n = n_0 - E_x$.

3. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК

Характеристическая система, соответствующая (2.2), имеет вид

$$\dot{x} = V, \quad \dot{V} = -kE, \quad \dot{E} = n_0V, \quad (3.1)$$

точка обозначает производную по времени. Решение этой системы с начальными данными

$$x_\pm(0) = 0, \quad V_\pm(0) = V_\pm^0, \quad E_\pm(0) = E_\pm^0,$$

задает пару характеристик $x_-(t)$ и $x_+(t)$, расположение которых определяет: с волны разрежения или с волны сжатия начинается построение решения задачи Римана. Первая ситуация соответствует случаю $V_-^0 < V_+^0$, а вторая — случаю $V_-^0 > V_+^0$. В случае $[V]^0 = 0$ решение может начинаться как с волны разрежения, так и с волны сжатия в зависимости от k . Заметим, что $x_-(t)$ и $x_+(t)$ могут пересекаться, причем не один раз; при каждом пересечении волна разрежения сменяется волной сжатия (или наоборот). Как показано в [16], в случае IV, т. е. $k = 1, n_0 = 1$, точек пересечения — бесконечное множество, что порождает периодическую по времени структуру сменяющих друг друга волн разрежения и сингулярных волн сжатия.

Как мы покажем, в случаях I–III такой периодической структуры не будет, однако смена одного типа волны на другой по-прежнему может происходить.

Заметим, что во всех случаях при $[V]^0 = 0, [E]^0 = 0$ решение остается гладким, поэтому такую комбинацию мы рассматривать не будем.

3.1. Случай I, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} = -1$. Характеристики (т. е. решение (3.1) с учетом начальных данных) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{\pm}(t) &= E_{\pm}^0, \\ V_{\pm}(t) &= E_{\pm}^0 t + V_{\pm}^0, \\ x_{\pm}(t) &= E_{\pm}^0 \frac{t^2}{2} + V_{\pm}^0 t + x_0, \quad x_0 = 0. \end{aligned}$$

Покажем, что:

1. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 < 0$, то решение задачи Римана начинается с волны разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $0 < t < T^* = -2 \frac{[V]^0}{[E]^0} > 0$, которая сменяется ударной волной в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > T^*$;
2. если $[V]^0 \leq 0$, $[E]^0 < 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > 0$, образуется ударная волна;
3. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > 0$, образуется волна разрежения;
4. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > 0$, образуется ударная волна.

Найдем условия, при которых характеристики x_+ и x_- пересекаются в некоторой точке $T^* > 0$. Если $[E]^0 < 0$, то из условия $x_+(T^*) = x_-(T^*)$, $T^* > 0$, получим

$$\frac{[E]^0}{2} T^* + [V]^0 = 0,$$

откуда $T^* = -2 \frac{[V]^0}{[E]^0} > 0$ при $[V]^0 > 0$, т. е. решение задачи Римана начинается с волны разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $0 < t < T^*$, которая сменяется ударной волной в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > T^*$. Если же $[V]^0 \leq 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > 0$, образуется ударная волна. При $[E]^0 = 0$ имеем $x_+(t) - x_-(t) = [V]^0 t$. Если $[V]^0 > 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > 0$, образуется волна разрежения. Если же $[V]^0 < 0$, то в этой области образуется ударная волна.

3.2. Случай II, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} = 1$. Согласно (3.1) имеем

$$\begin{aligned} E_{\pm}(t) &= E_{\pm}^0, \\ V_{\pm}(t) &= -E_{\pm}^0 t + V_{\pm}^0, \\ x_{\pm}(t) &= -E_{\pm}^0 \frac{t^2}{2} + V_{\pm}^0 t + x_0, \quad x_0 = 0. \end{aligned}$$

В этом случае:

1. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 < 0$, то решение задачи Римана начинается с ударной волны в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $0 < t < T^* = 2 \frac{[V]^0}{[E]^0} > 0$, которая сменяется волной разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > T^*$;
2. если $[V]^0 \geq 0$, $[E]^0 < 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > 0$, образуется волна разрежения;
3. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > 0$, образуется волна разрежения;
4. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > 0$, образуется ударная волна.

Рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Координаты точки T^* пересечения характеристик x_+ и x_- имеют вид $T^* = 2 \frac{[V]^0}{[E]^0}$. Если $[V]^0 < 0$, то $T^* > 0$, и решение задачи Римана начинается с ударной волны в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $0 < t < T^*$, которая меняется на волну разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > T^*$.

Если же $[V]^0 \geq 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > 0$, образуется волна разрежения.

3.3. Случай III, $\mathbf{k} = -1$, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{1}$. Решение уравнения характеристик имеет вид

$$\begin{aligned} E_{\pm}(t) &= E_{\pm}^0 \operatorname{ch} t + V_{\pm}^0 \operatorname{sh} t, \\ V_{\pm}(t) &= E_{\pm}^0 \operatorname{sh} t + V_{\pm}^0 \operatorname{ch} t, \\ x_{\pm}(t) &= E_{\pm}^0 (\operatorname{ch} t - 1) + V_{\pm}^0 \operatorname{sh} t + x_0, \quad x_0 = 0. \end{aligned}$$

Покажем, что:

1. если $[E]^0 < 0 < [V]^0 < -[E]^0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $0 < t < T^* = \ln \frac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$ образуется волна разрежения, которая сменяется ударной волной в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > T^*$;
2. если $[V]^0 + [E]^0 \geq 0$, $[E]^0 < 0$ то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > 0$, образуется волна разрежения;
3. если $[E]^0 < 0$, $[V]^0 < 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > 0$, образуется ударная волна;
4. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t)$, $t > 0$, образуется волна разрежения;
5. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > 0$, образуется ударная волна.

Найдем точку $T^* > 0$ пересечения характеристик $x_+(t)$ и $x_-(t)$ и условия, при которых эта точка существует. Точка пересечения находится из уравнения

$$[E]^0(\operatorname{ch} T^* - 1) + [V]^0 \operatorname{sh} T^* = 0. \quad (3.2)$$

Поскольку $[E]^0 \leq 0$, данное уравнение имеет решение $T^* > 0$ лишь в случае $[E]^0 < 0 < [V]^0$. После замены $u = e^{T^*}$ из (3.2) получим квадратное уравнение $P(u) = 0$, где

$$P(u) = ([V]^0 + [E]^0)u^2 - 2[E]^0u + [E]^0 - [V]^0.$$

Если $[V]^0 + [E]^0 \neq 0$, то это уравнение имеет два решения: $u = 1$ и $u = \frac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$. Разложив квадратный трехчлен $P(u)$ на множители, получим

$$P(u) = ([V]^0 + [E]^0) (u - 1) \left(u - \frac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0} \right).$$

Первому решению соответствует $T^* = 0$, что нам не подходит. У второго решения числитель всегда отрицателен, поэтому $u > 0$ тогда и только тогда, когда $[E]^0 + [V]^0 < 0$, т. е. $[V]^0 < -[E]^0$. Заметим, что в этом случае $u > 1$.

Если $[V]^0 + [E]^0 \geq 0$, то уравнение $P(u) = 0$ не имеет решений при $u > 1$.

4. Волна разрежения

В этом разделе мы построим волну разрежения для каждого из случаев. Заметим, что решение между характеристиками, т. е. при $x \in (x_-(t), x_+(t))$, можно искать в виде линейной по x функции, т. е.

$$(V, E) = \begin{cases} (V_-(t), E_-(t)), & x < x_-(t); \\ (V_r, E_r) = (a(t)x + b(t), c(t)x + d(t)), & x \in [x_-(t), x_+(t)]; \\ (V_+(t), E_+(t)), & x > x_+(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Чтобы это решение было непрерывно при всех $x \in \mathbb{R}$, нужно, чтобы при $x = x_{\pm}(t)$ оно совпадало с независимым от x решением в областях $x < x_-(t)$ и $x > x_+(t)$, соответственно.

4.1. Случай I, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} = -\mathbf{1}$. Легко проверить, что решение вида (4.1) таково:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{2([V]^0 + [E]^0 t)}{(2[V]^0 + [E]^0 t)t}, & b(t) &= \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)t}{[E]^0 t + 2[V]^0}, \\ c(t) &= \frac{2[E]^0}{(2[V]^0 + [E]^0 t)t}, & d(t) &= \frac{2(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)}{2[V]^0 + [E]^0 t}. \end{aligned}$$

Компонента плотности оказывается разрывной (кусочно-постоянной) и имеет вид

$$n = -c(t)\chi_{(x_-(t), x_+(t))},$$

где χ_{Ω} — характеристическая функция множества Ω .

Согласно результатам п. 3.1 такое решение существует при $[V]^0 > 0$. Если $[E]^0 < 0$, оно сменяется ударной волной при $T^* = -2\frac{[V]^0}{[E]^0}$, а при $[E]^0 = 0$ существует при всех $t > 0$. При этом

$c(t) = 0$, $d(t) = E_- - E_+$, т. е. компонента E остается непрерывной, $a(t) \rightarrow 0$, $b(t) \sim \frac{1}{2}E_{\pm}t$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. волна разрежения присутствует только в компоненте V , и $x_+(t) - x_-(t) = [V]^0 t$.

4.2. Случай II, $n_0 = 0$, $k = 1$. В этом случае

$$a(t) = \frac{2([V]^0 - [E]^0 t)}{(2[V]^0 - [E]^0 t)t}, \quad b(t) = \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)t}{[E]^0 t - 2[V]^0}, \quad (4.2)$$

$$c(t) = \frac{2[E]^0}{(2[V]^0 - [E]^0 t)t}, \quad d(t) = \frac{2(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)}{2[V]^0 - [E]^0 t}, \quad (4.3)$$

$$n = -c(t)\chi_{(x_-(t), x_+(t))}.$$

Согласно результатам пункта 3.2 такое решение существует при $[V]^0 < 0$, $[E]^0 < 0$, начиная с момента времени $T^* = 2\frac{[V]^0}{[E]^0}$, поэтому в выражениях (4.2), (4.3) нужно сделать замену $t_1 = t - T^*$, а в качестве x_0 нужно взять точку $x_-(T_*) = x_+(T_*)$. При этом $a(t) \rightarrow 0$, $c(t) \rightarrow 0$, $d(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, однако $b(t) \sim \text{const}$ при этом же условии. Это означает, что структура волн разрежения для компонент V и E различна.

При $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$ ситуация аналогична описанной в пункте 4.1, т. е. E остается непрерывной, и волна разрежения присутствует только в компоненте V , и $x_+(t) - x_-(t) = [V]^0 t$.

4.3. Случай III, $n_0 = 1$, $k = -1$. Согласно результатам п. 3.3, решение содержит волну разрежения, если $[E]^0 < 0 < [V]^0 < -[E]^0$ до момента времени $T^* = \ln \frac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$. Если $[E]^0 < 0$, $[V]^0 + [E]^0 \geq 0$, или $[E]^0 = 0$, $[V]^0 > 0$, то решение содержит волну разрежения при всех $t > 0$.

В непрерывном решении (4.1) коэффициенты имеют вид

$$a(t) = \frac{[V]^0 \text{ch } t + [E]^0 \text{sh } t}{[V]^0 \text{sh } t + [E]^0 (\text{ch } t - 1)}, \quad b(t) = \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)(\text{ch } t - 1)}{[V]^0 \text{sh } t + [E]^0 (\text{ch } t - 1)},$$

$$c(t) = \frac{[E]^0 \text{ch } t + [V]^0 \text{sh } t}{[V]^0 \text{sh } t + [E]^0 (\text{ch } t - 1)}, \quad d(t) = \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0) \text{sh } t}{[V]^0 \text{sh } t + [E]^0 (\text{ch } t - 1)},$$

$$n = 1 - c(t)\chi_{(x_-(t), x_+(t))}.$$

Найдем асимптотику волны разрежения при $t \rightarrow \infty$. Мы видим, что $a(t) \rightarrow 1$, $c(t) \rightarrow 1$, $b(t) \rightarrow K$, $d(t) \rightarrow K$, $K = \frac{E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0}{[V]^0 + [E]^0}$.

4.3.1. Простые волны. Заметим, что система (2.2) в случае III обладает подклассом решений, выделяемых условием $E^2 - V^2 = C = \text{const}$. Константа C может иметь любой знак и быть нулем. В этом случае в области гладкости система (2.2) сводится к одному уравнению

$$V_t + VV_x = \sigma\sqrt{C + V^2}, \quad \sigma = \pm 1, \quad (4.4)$$

знак σ соответствует знаку E .

Начальные условия E_-^0 и E_+^0 связаны с V_-^0 и V_+^0 соотношениями $E_-^0 = \pm\sqrt{C + (V_-^0)^2}$, $E_+^0 = \pm\sqrt{C + (V_+^0)^2}$, причем $[E]^0 \leq 0$. Отметим, что величина под корнем неотрицательна.

Характеристическая система для (4.4) имеет вид

$$\dot{x} = V, \quad \dot{V} = \sigma\sqrt{V^2 + C}, \quad (4.5)$$

причем знак σ выбирается из условия $V_-(t) < V(t) < V_+(t)$, он меняется в тех точках, где $V^2 + C = 0$. Из (4.5) найдем

$$x = X(t, V) = \sigma\sqrt{V^2 + C} - F(\sigma \ln |V + \sqrt{V^2 + C}| - t), \quad (4.6)$$

где F — произвольная гладкая функция. Таким образом, для простой волны непрерывное решение $V_{sw} = V(t, x)$ при $x \in (x_-(t), x_+(t))$ не имеет вида (4.1), а задается неявным образом как (4.6).

Чтобы найти функцию F , воспользуемся начальным условием $X(0, V) = 0$ для $V \in (V_-^0, V_+^0)$. Для этого подставим его в (4.6) и обозначим: $\xi = \sigma \ln |V + \sqrt{V^2 + C}|$. Тогда $|V + \sqrt{V^2 + C}| = \exp(\sigma\xi)$ и $V = \pm \frac{1}{2}(\exp(\sigma\xi) - C \exp(-\sigma\xi))$. Значит, $F(\xi) = \frac{\sigma}{2} |\exp(\sigma\xi) + C \exp(-\sigma\xi)|$.

Таким образом, получим:

1. если $\sigma = 1$, то $F(\xi) = \frac{1}{2} |\exp(\xi) + C \exp(-\xi)|$ и имеем

$$X_1(t, V) = \sqrt{V^2 + C} - \frac{1}{2} \left| |V + \sqrt{V^2 + C}| \exp(-t) + \text{sign}(C) |V - \sqrt{V^2 + C}| \exp(t) \right|; \quad (4.7)$$

2. если $\sigma = -1$, то $F(\xi) = -\frac{1}{2} |\exp(-\xi) + C \exp(\xi)|$ и имеем

$$X_2(t, V) = -\sqrt{V^2 + C} + \frac{1}{2} \left| |V + \sqrt{V^2 + C}| \exp(t) + \text{sign}(C) |V - \sqrt{V^2 + C}| \exp(-t) \right|. \quad (4.8)$$

Если знаки E_-^0 и E_+^0 совпадают, то в выражении, неявно задающем $V_{sw}(t, x)$ между характеристиками, надо использовать представление с $\sigma = \text{sign}(E_{\pm}^0)$. Такая ситуация будет, например, при $C = 1$, $V_-^0 = -1$, $V_+^0 = 0$, $E_-^0 = \sqrt{C + (V_-^0)^2} = \sqrt{2}$, $E_+^0 = \sqrt{C + (V_+^0)^2} = 1$, что соответствует случаю III.2, когда $[V]^0 + [E]^0 > 0$ и волна разрежения существует при всех $t > 0$. Отметим, что визуально график функции V_{sw} между характеристиками мало отличается от графика аффинного решения, указанного в пункте 4.3, т. е. линейной по x функции, см. рис. 1.

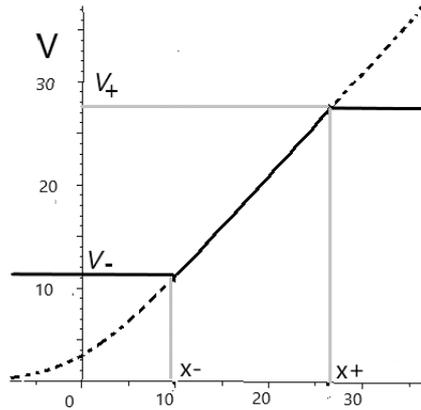


Рис. 1. Простая волна разрежения $V_{sw}(t, x)$ для случая $C = 1$, $V_-^0 = -1$, $V_+^0 = 0$, $E_-^0 = \sqrt{2}$, $E_+^0 = 1$, соответствует повернутому к обычным осям графику функции (4.7), мало отличающемуся от графика линейной функции внутри $(x_-(t), x_+(t))$; $t = 5$, горизонтальная ось соответствует переменной x .

FIG. 1. A simple rarefaction wave $V_{sw}(t, x)$ for the case $C = 1$, $V_-^0 = -1$, $V_+^0 = 0$, $E_-^0 = \sqrt{2}$, $E_+^0 = 1$, corresponds to the graph of the function (4.7) rotated to the usual axes, which differs little from the graph of the linear function inside $(x_-(t), x_+(t))$; $t = 5$, horizontal axis corresponds to the variable x .

Однако если знаки E_-^0 и E_+^0 разные, то с каждой из сторон разрыва можно использовать выражения для V_{sw} с соответствующим знаком σ . Кроме того, интервалы изменения $X_1(t, V)$ и $X_2(t, V)$ не обязаны пересекаться при $V \in (V_-(t), V_+(t))$. Поэтому для тех $x \in (x_-(t), x_+(t))$, для которых не определены решения вида (4.7), (4.8), может быть использовано аффинное решение, аналогичное указанному в пункте 4.3, для того, чтобы обеспечить непрерывность. Более того, аффинное решение может быть использовано вместо решения вида V_{sw} , прилегающего к какому-либо краю разрыва. Такая ситуация, например, будет при $C = 1$, $V_-^0 = 1$, $V_+^0 = 3$, $E_-^0 = \sqrt{C + (V_-^0)^2} = \sqrt{2}$,

$E_+^0 = -\sqrt{C + (V_-^0)^2} = -\sqrt{10}$, что соответствует случаю III.1, когда $0 < [V]^0 < -[E]^0$. В этом случае волна разрежения содержит внутри себя еще два слабых разрыва.

Таким образом, мы видим, что как и в случае IV, разобранным в [16], существуют начальные данные Римана, для которых волна разрежения строится неединственным образом, и для выделения единственного решения приходится привлекать дополнительные условия, например, выбирать решение, энергия которого минимальна. Эти начальные данные подчинены условию $(E_\pm^0)^2 - (V_\pm^0)^2 = C = \text{const}$.

Отметим, что в случаях I и II нетривиального решения вида простой волны не существует.

5. СИНГУЛЯРНАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА

В этом разделе мы построим сингулярную ударную волну в каждом из трех случаев I–III.

Предположим, что между характеристиками существует решение нашей задачи в виде

$$(V_s, E_s) = \begin{cases} (V_-(t), E_-(t)), & x < \Phi(t), \\ (V_+(t), E_+(t)), & x > \Phi(t), \end{cases}$$

т. е. мы нашли положение ударной волны $x = \Phi(t)$ в виде некоторой гладкой кривой. Тогда плотность может быть найдена как

$$n(t, x) = n_0 - [E]|_{x=\Phi(t)}\delta(x - \Phi(t)).$$

Обозначим

$$V(t, x) = V_-(t, x) + [V(t, x)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x - \Phi(t)), \quad (5.1)$$

$$E(t, x) = E_-(t, x) + [E(t, x)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x - \Phi(t)), \quad (5.2)$$

$$n(t, x) = \hat{n}(t, x) + e(t)\delta(x - \Phi(t)), \quad (5.3)$$

где $[f] = f_+ - f_-$, f_\pm — односторонние пределы дифференцируемой функции f , $t > 0$, $\hat{n}(t, x) = n_0 - E_x(t, x)$, E_x — частная производная функции E в тех точках, где она существует в классическом смысле $e(t) := e(t, \phi(t))$, $e(t) = -[E(t, x)]|_{x=\Phi(t)}$.

Определим сингулярную ударную волну аналогично тому, как это было сделано в [16] для случая IV. Заметим, что в [16], в свою очередь, было существенно использовано определение сингулярной ударной волны для систем, обобщающих систему газовой динамики без давления из [5].

Определение 5.1. Тройка распределений (V, E, n) , определенная формулами (5.1)–(5.3), и кривая γ , являющаяся графиком гладкой функции $x = \Phi(t)$, $\Phi(0) = 0$, называется *сильно сингулярным решением* задачи (2.3) с начальными условиями

$$(V, E, n)|_{t=0} = (V_-^0(x) + [V(x)]^0\Theta(x), E_-^0(x) + [E(x)]^0\Theta(x), n^0(x) = \hat{n}^0(x) + e^0\delta(x)),$$

если для любой пробной функции $\phi(t, x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \hat{n}(\phi_t + V\phi_x) dx dt + \int_\gamma e(t) \frac{\delta\phi(t, x)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2}} + \int_{\mathbb{R}} \hat{n}^0(x)\phi(0, x) dx + e(0)\phi(0, 0) = 0, \\ & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{\hat{n}V^2}{2} + \frac{kE^2}{2} \right) \phi_t + \frac{\hat{n}V^2}{2} \phi_x \right) dx dt + \int_\gamma \frac{e(t)(\dot{\Phi}(t))^2}{2} \frac{\delta\phi(t, x)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2}} + \\ & + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\hat{n}^0(x)(V^0(x))^2}{2} + \frac{k(E^0(x))^2}{2} \right) \phi(0, x) dx + \frac{e(0)(\dot{\Phi}(0))^2}{2} \phi(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

где $\int \cdot dl$ — обозначает криволинейный интеграл по дуге γ , δ -производная по времени $\left. \frac{\delta\phi(t, x)}{\delta t} \right|_\gamma$

определяется как производная вдоль касательного направления к дуге кривой γ

$$\left. \frac{\delta\phi}{\delta t} \right|_\gamma = \sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2} \frac{\partial\phi(t, x)}{\partial \mathbf{I}} = \frac{d\phi(t, \Phi(t))}{dt} = \left(\frac{\partial\phi(t, x)}{\partial t} + \dot{\Phi}(t) \frac{\partial\phi(t, x)}{\partial x} \right),$$

$\mathbf{I} = (-\nu_2, \nu_1) = \frac{(1, \dot{\Phi}(t))}{\sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2}}$ — единичный касательный вектор к кривой γ .

В случае сингулярной ударной волны на ней выполняются условия, являющиеся аналогом условий Ранкина—Гюгонио для обычных ударных волн.

Теорема 5.1. Пусть область $\Omega \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ делится гладкой кривой $\gamma_t = \{(t, x) : x = \Phi(t)\}$ на левую и правую части Ω_{\mp} . Пусть тройка распределений (V, E, n) , определенная формулами (5.1)–(5.3), и кривая γ_t есть решение типа δ -ударной волны для системы (2.3). Тогда это решение удовлетворяет на γ_t условию Ранкина—Гюгонио для δ -ударных волн:

$$\frac{d}{dt}e(t) = (-[\hat{n}V] + [\hat{n}]\dot{\Phi}(t))|_{x=\Phi(t)}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{e(t)(\dot{\Phi}(t))^2}{2} = \left(-\left[\frac{\hat{n}V^3}{2} \right] + \left[\frac{\hat{n}V^2 + kE^2}{2} \right] \dot{\Phi}(t) \right) \Big|_{x=\Phi(t)}. \quad (5.5)$$

Эта теорема является переформулировкой на случай произвольного k теоремы, доказанной в [16], поэтому мы не будем приводить здесь дословное повторение ее доказательства.

Легко видеть, что в случае, когда сингулярная компонента $e(t)$ отсутствует, условия (5.4), (5.5) сводятся к обычным условиям Ранкина—Гюгонио.

Условие допустимости для δ -ударной волны имеет вид

$$\min\{V_-, V_+\} \leq \dot{\Phi}(t) \leq \max\{V_-, V_+\}. \quad (5.6)$$

5.1. Случай I, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} = -\mathbf{1}$. Заметим, что как следует из результатов пункта 3.1, ударная волна будет существовать в случае 1, т. е. при $[V]^0 > 0$, $[E]^0 < 0$, после момента времени $T^* = -2\frac{[V]^0}{[E]^0}$, и в случаях 2 ($[V]^0 \leq 0$, $[E]^0 < 0$) и 4 ($[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$) при всех $t > 0$.

Так как $\hat{n} = 0$, то из уравнения (5.4) имеем $\dot{e} = 0$, т. е. $e(t) = \text{const} = -[E]^0$. Таким образом, в случае 4 будет отсутствовать сингулярная компонента.

Уравнение (5.5) принимает вид

$$2[E]^0\dot{\Phi}\ddot{\Phi} = ([E^2]\dot{\Phi})|_{x=\Phi(t)},$$

и в случае $[E]^0 \neq 0$ преобразуется к

$$2\dot{\Phi}\ddot{\Phi} = (E_+^0 + E_-^0)\dot{\Phi}. \quad (5.7)$$

Это уравнение второго порядка требует двух начальных условий. В случае 2 это

$$\Phi(0) = x_0 = 0, \quad \dot{\Phi}(0) = v, \quad V_+^0 < v < V_-^0, \quad (5.8)$$

второе условие может быть выбрано произвольным образом из соображений выполнения условия допустимости (5.6).

В случае 1 это

$$\Phi(T^*) = x_-(T^*) = x_+(T^*), \quad \dot{\Phi}(T^*) = v, \quad V_+(T^*) < v < V_-(T^*).$$

Таким образом, сингулярная ударная волна строится неединственным образом, как и в ситуации газовой динамики без давления [11]. Уравнение кривой $\Phi(t)$ представляет собой квадратичную по времени функцию и может быть найдено явно.

Отметим, что решение $\dot{\Phi}(t) = 0$ уравнения (5.7) является особым, и поэтому в каждой точке $t > 0$ нарушается его единственность.

На рис. 2, слева, показана ситуация случая I.1 при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = -1$, $V_+ = 1$, когда волна разрежения сменяется сингулярной ударной волной. Заштрихованный участок соответствует всем возможным положениям сингулярных ударных волн, отвечающих условию допустимости.

Отметим, что в случае 4, когда $[E]^0 = 0$, т. е. E постоянно, условия (5.4), (5.5) вырождаются и определить положение $\Phi(t)$ с их помощью невозможно. Однако можно заметить, что в этом случае второе уравнение (2.2) выполняется тривиальным образом, а из первого уравнения, которое может быть записано в дивергентном виде, получим $\dot{\Phi}(t) = \frac{1}{2}(V_+^0 + V_-^0)$, $\Phi(0) = x_0 = 0$. Кроме

того, можно предложить альтернативный способ построения разрыва. Если определить последовательность начальных данных Римана E_k^0 , $k \in \mathbb{N}$, $E_k^0 \rightarrow E^0$ таких, что $[E_k]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то для определения положения ударной волны можно воспользоваться уравнением (5.7), которое не содержит величины скачка и в этом вырожденном случае имеет вид $2\dot{\Phi}\ddot{\Phi} = -2E\dot{\Phi}$, для нахождения Φ требуются два начальных условия (5.8).

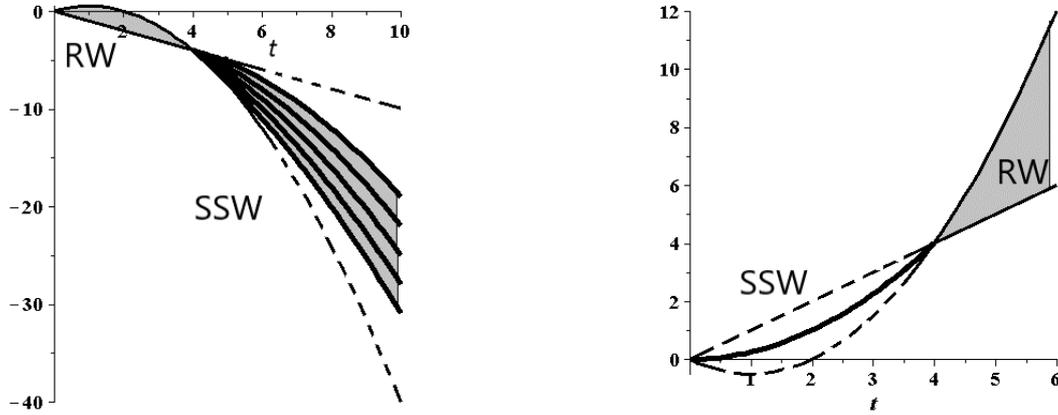


Рис. 2. Слева: случай I.1, при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = -1$, $V_+ = 1$, когда волна разрежения (RW) сменяется сингулярной ударной волной (SSW). Заштрихованный участок соответствует всем возможным положениям сингулярных ударных волн, отвечающих условию допустимости. Справа: случай II.1, при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = 1$, $V_+ = -1$, когда сингулярная ударная волна сменяется волной разрежения.

FIG. 2. Left: the case I.1, with $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = -1$, and $V_+ = 1$, when the rarefaction wave (RW) is replaced by a singular shock wave (SSW). The shaded area corresponds to all possible positions of singular shock waves that meet the admissibility condition. Right: the case II.1, with $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = 1$, and $V_+ = -1$, when the singular shock wave is replaced by a rarefaction wave.

5.2. Случай II, $\mathbf{n}_0 = 0$, $\mathbf{k} = 1$. Согласно результатам пункта 3.2 ударная волна существует в случае 1 ($[V]^0 < 0$, $[E]^0 < 0$) при $0 < t < T^* = 2\frac{[V]^0}{[E]^0}$ и в случае 4 ($[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$) при $t > 0$.

Как и в предыдущем разделе, имеем $e(t) = \text{const} = -[E]^0$, а уравнение (5.5) принимает вид

$$2[E]^0\dot{\Phi}\ddot{\Phi} = (-[E^2]\dot{\Phi})|_{x=\Phi(t)}$$

и при $[E]^0 \neq 0$ (т. е. для случая 1) преобразуется к

$$2\dot{\Phi}\ddot{\Phi} = -(E_+^0 + E_-^0)\dot{\Phi}.$$

Однако здесь ситуация радикально отличается от описанной в предыдущем пункте для случая I, так как для построения кривой $\Phi(t)$ возникает краевая задача, т. е. имеются начальное и конечное условия:

$$\Phi(0) = x_0 = 0, \quad \Phi(T^*) = x_-(T^*) = x_+(T^*).$$

Таким образом, сингулярная ударная волна в данном случае строится единственным образом. Уравнение для кривой $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t) = -\frac{1}{4}(E_-^0 + E_+^0)t^2 + \frac{1}{2}(V_-^0 + V_+^0)t.$$

На рис. 2, справа, показана ситуация случая II.1 при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = 1$, $V_+ = -1$, когда сингулярная ударная волна сменяется волной разрежения.

Однако если оказывается, что $\dot{\Phi}(0) = \frac{1}{2}(V_-^0 + V_+^0) = 0$ (а именно такой случай изображен на рисунке), то сингулярная ударная волна может быть построена неединственным образом: она

состоит из комбинации прямой $\Phi(t) = 0$, $t \in (0, t_1)$, $x_-(t_1) < 0 < x_+(t_1)$, $0 < t_1 < T^*$ и параболы, соединяющей точку $(t_1, 0)$ и $(T^*, x_-(T^*) = x_+(T^*))$. Но такая составная кривая уже не будет гладкой, как это требует определение сингулярной ударной волны, так как значение $\dot{\Phi}(t_1)$ справа уже не будет нулем.

Случай 4, при котором не возникает сильной сингулярности, рассматривается аналогично пункту 5.1.

5.3. Случай III, $n_0 = 1$, $k = -1$. Согласно результатам пункта 3.3 сингулярная ударная волна существует в случае 1 ($[E]^0 < 0 < [V]^0 < -[E]^0$) при $t > T^* = \ln \frac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$, в случаях 3 и 5 ($[E]^0 \leq 0$, $[V]^0 < 0$) при $t > 0$.

Так как $\hat{n} = 1$, то $[\hat{n}] = 0$, и уравнения (5.4), (5.5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -[V]|_{x=\Phi(t)}, \\ \frac{d}{dt}e(t)(\dot{\Phi}(t))^2 &= (-[V^3] + [V^2 - E^2]\dot{\Phi}(t))|_{x=\Phi(t)}. \end{aligned}$$

Величины скачков можно явно посчитать:

$$\begin{aligned} [V^3]|_{x=\Phi(t)} &= V_+^3 - V_-^3 = (V_+^0 \operatorname{ch} t + E_+^0 \operatorname{sh} t)^3 - (V_-^0 \operatorname{ch} t + E_-^0 \operatorname{sh} t)^3, \\ [V^2 - E^2]|_{x=\Phi(t)} &= [V^2 - E^2]|_{x=0} = K = \text{const}. \end{aligned}$$

Тогда $\dot{e}(t) = -[V]^0 \operatorname{ch} t - [E]^0 \operatorname{sh} t$ и $e(t) = -[V]^0 \operatorname{sh} t - [E]^0 \operatorname{ch} t$. Мы можем заметить, что амплитуда дельта-функции экспоненциально растет при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, в случае 1 мы получаем уравнение второго порядка для определения положения сингулярной ударной волны

$$2e\dot{\Phi}(t)\ddot{\Phi}(t) = -[V^3] + K\dot{\Phi}(t) - \dot{e}(\dot{\Phi}(t))^2,$$

для которого можно поставить начальные условия

$$\Phi(T^*) = x_-(T^*) = x_+(T^*), \quad \dot{\Phi}(T^*) = v, \quad V_+(T^*) < v < V_-(T^*).$$

Так как точка $t_* = -\operatorname{arctch} \frac{[V]^0}{[E]^0}$, в которой $V_-(t_*) = V_+(t_*)$, не принадлежит полуоси $t > T^*$, на которой находится ударная волна, то мы не можем получить дополнительное краевое условие из условия допустимости, как это было в случае IV.

Таким образом, сингулярная ударная волна определяется неединственным образом.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе и в [16] построено решение задачи Римана для одномерных по пространству уравнений Эйлера–Пуассона для всех четырех стандартных случаев. Как оказалось, для каждого из случаев решение имеет специфические черты. В случае IV, как было показано в [16], сингулярная ударная волна и волна разрежения периодически сменяют друг друга, тогда как в случаях I–III решение может состоять из одной сингулярной ударной волны, одной волны разрежения, сингулярной ударной волны, сменяющейся волной разрежения, и волны разрежения, сменяющейся сингулярной ударной волной. Отдельным интересным вопросом является единственность полученного решения. В некоторых случаях неединственность доказывается путем предъявления нескольких возможных решений. Однако в случаях I и II, для которых не существует нетривиальных простых волн, с помощью которых была показана неединственность волны разрежения в случаях III и IV, мы не можем утверждать, что не существует непрерывного решения, отличающегося от построенного аффинного. Таким образом, единственность волны разрежения остается открытым вопросом. Таблица ниже подводит итог наших исследований в вопросе единственности. Знак “+” означает то, что волна разрежения или ударная волна определяется единственным образом, знак “–” означает неединственность волны разрежения или ударной волны.

Случай / Case	I	II	III	IV
волна разрежения / rarefaction wave	?	?	—	—
ударная волна / shock wave	—	+	—	+

Отметим, что сингулярная ударная волна может быть построена на других принципах. Можно использовать как другую форму консервативной записи системы вместо (2.3), а также применить метод исчезающей вязкости для неконсервативной записи (2.2). Результат будет отличаться от того, что мы получили выше. Однако если мы отталкиваемся от физической природы задачи, то мы должны использовать естественные сохраняющиеся величины, имеющие смысл полной массы и энергии, поэтому вид (2.3) представляется наиболее естественным.

Несмотря на кажущуюся простоту в одномерном случае, модели, описываемые системой (2.2), весьма содержательны физически. Уже упомянутая модель холодной плазмы соответствует случаю IV. Случай II соответствует модели, введенной Гуревичем и Зыбиным [1] для описания динамики темной материи во Вселенной. После ряда замен к этой же системе сводится модель нелокальной газовой динамики [6] и уравнение Гюнтера—Сакстона [12], которое используется для моделирования распространения волн в нематическом жидком кристалле [18]. Математически система (2.2) для случая II относится к обобщенным уравнениям риманова типа [14], которые интенсивно изучаются в последнее время. Перечень результатов, касающихся представления Лакса, законов сохранения, бигамильтоновых структур, интегрируемости, может быть найден, например, в [10, 13]. Работы [21, 22] касаются свойств решений задачи Коши с гладкими начальными данными, статья [23] посвящена корректности слабых решений задачи Коши таких систем в классах Соболева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич А. В., Зыбин К. П. Недиссипативная гравитационная турбулентность // Ж. эксперимент. и теор. физ. — 1988. — 94, № 1. — С. 3–25.
2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа. — М.: Наука, 1965.
3. Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
4. Чижонков Е. В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. — М.: Физматлит, 2018.
5. Шелкович В. М. Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ и δ' -ударных волн и процессы переноса и концентрации // Усп. мат. наук. — 2008. — 63, № 3. — С. 73–146.
6. Brunelli J. C., Das A. On an integrable hierarchy derived from the isentropic gas dynamics // J. Math. Phys. — 2004. — 45, № 7. — С. 2633–2645.
7. Chae D., Tadmor E. On the finite time blow-up of the Euler–Poisson equations in \mathbb{R}^n // Commun. Math. Sci. — 2008. — 6, № 3. — С. 785–789.
8. Dafermos C. M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2016.
9. Engelberg S., Liu H., Tadmor E. Critical thresholds in Euler–Poisson equations // Indiana Univ. Math. J. — 2001. — 50, № 1. — С. 109–157.
10. Gao B., Tian K., Liu Q. P., Feng L. Conservation laws of the generalized Riemann equations // J. Nonlinear Math. Phys. — 2018. — 25, № 1. — С. 122–135.
11. Huang F., Wang Zh. Well posedness for pressureless flow // Commun. Math. Phys. — 2001. — 222, № 1. — С. 117–146.
12. Hunter J. K., Saxton R. Dynamics of director fields // SIAM J. Appl. Math. — 1991. — 51, № 6. — С. 1498–1521.
13. Pavlov M. V. The Gurevich–Zybin system // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — 38, № 17. — С. 3823–3840.
14. Popowicz Z., Prykarpatski A. K. The non-polynomial conservation laws and integrability analysis of generalized Riemann type hydrodynamical equations // Nonlinearity. — 2010. — 23, № 10. — С. 2517–2537.
15. Rozanova O. S. On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations // Phys. D: Nonlinear Phenom. — 2022. — 443. — 133578.
16. Rozanova O. S. The Riemann problem for equations of a cold plasma // J. Math. Anal. Appl. — 2023. — 527, № 1, Part 1. — 127400.

17. *Rozanova O. S., Turzynsky M. K.* On the properties of affine solutions of cold plasma equations// Commun. Math. Sci. — 2024. — 22, № 1. — С. 215–226.
18. *Schäfer T., Wayne C. E.* Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media// Phys. D.: Nonlinear Phenom. — 2004. — 196, № 1. — С. 90–105.
19. *Tan C.* Eulerian dynamics in multidimensions with radial symmetry// SIAM J. Math. Anal. — 2021. — 53, № 3. — С. 3040–3071.
20. *Wei D., Tadmor E., Bae H.* Critical thresholds in multi-dimensional Euler–Poisson equations with radial symmetry// Commun. Math. Sci. — 2012. — 10, № 1. — С. 75–86.
21. *Wei L.* Wave breaking, global existence and persistent decay for the Gurevich–Zybin system// J. Math. Fluid Mech. — 2020. — 22, № 4. — С. 1–14.
22. *Wei L., Wang Y.* The Cauchy problem for a generalized Riemann-type hydrodynamical equation// J. Math. Phys. — 2021. — 62, № 4. — 041502.
23. *Xia S.* Existence of a weak solution to a generalized Riemann-type hydrodynamical equation// Appl. Anal. — 2023. — 102, № 18. — С. 4997–5007.

Л. В. Гаргянц

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: gargyants@bmstu.ru

О. С. Розанова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

М. К. Турцынский

Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
E-mail: M13041@yandex.ru

UDC 517.956

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52

EDN: YYQSD

The Riemann problem for the main model cases of the Euler–Poisson equations

L. V. Gargyants¹, O. S. Rozanova², and M. K. Turzynsky^{3,4}

¹*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

²*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

³*Russian University of Transport, Moscow, Russia*

⁴*National Research University “Higher School of Economics” (HSE University), Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we construct a solution to the Riemann problem for an inhomogeneous nonstrictly hyperbolic system of two equations, which is a corollary of the Euler–Poisson equations without pressure [9]. These equations can be considered for the cases of attractive and repulsive forces as well as for the cases of zero and nonzero underlying density background. The solution to the Riemann problem for each case is nonstandard and contains a delta-shaped singularity in the density component. In [16], solutions were constructed for the combination corresponding to the cold plasma model (repulsive force and nonzero background density). In this paper, we consider the three remaining cases.

Keywords: Euler–Poisson equations, Riemann problem, characteristics, shock wave, rarefaction wave.



Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. Supported by the Russian Science Foundation grant № 23-11-00056 through the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba.

For citation: L. V. Gargyants, O. S. Rozanova, M. K. Turzynsky, “The Riemann problem for the main model cases of the Euler–Poisson equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 38–52. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52>

REFERENCES

1. A. V. Gurevich and K. P. Zybin, “Nedissipativnaya gravitatsionnaya turbulentnost’” [Nondissipative gravitational turbulence], *Zh. eksperiment. i teor. fiz.* [J. Exp. Theor. Phys.], 1988, **94**, No. 1, 3–25 (in Russian).
2. N. E. Kochin, *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo analiza* [Vector CALCULUS and the Essentials of Tensor Analysis], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
3. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
4. E. V. Chizhonkov, *Matematicheskie aspekty modelirovaniya kolebaniy i kil'vaternykh voln v plazme* [Mathematical Aspects of Modeling Oscillations and Wake Waves in Plasma], Fizmatlit, Moscow, 2018 (in Russian).
5. V. M. Shelkovich, “Singulyarnye resheniya sistem zakonov sokhraneniya tipa δ i δ' -udarnykh voln i protsessy perenosa i kontsentratsii” [Singular solutions of systems of conservation laws of the δ - and δ' -shock waves type and processes of transport and concentration], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2008, **63**, No. 3, 73–146 (in Russian).
6. J. C. Brunelli and A. Das, “On an integrable hierarchy derived from the isentropic gas dynamics,” *J. Math. Phys.*, 2004, **45**, No. 7, 2633–2645.
7. D. Chae and E. Tadmor, “On the finite time blow-up of the Euler–Poisson equations in \mathbb{R}^n ,” *Commun. Math. Sci.*, 2008, **6**, No. 3, 785–789.
8. C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2016.
9. S. Engelberg, H. Liu, and E. Tadmor, “Critical thresholds in Euler–Poisson equations,” *Indiana Univ. Math. J.*, 2001, **50**, No. 1, 109–157.
10. B. Gao, K. Tian, Q. P. Liu, and L. Feng, “Conservation laws of the generalized Riemann equations,” *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2018, **25**, No. 1, 122–135.
11. F. Huang and Zh. Wang, “Well posedness for pressureless flow,” *Commun. Math. Phys.*, 2001, **222**, No. 1, 117–146.
12. J. K. Hunter and R. Saxton, “Dynamics of director fields,” *J. SIAM Appl. Math.*, 1991, **51**, No. 6, 1498–1521.
13. M. V. Pavlov, “The Gurevich–Zybin system,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2005, **38**, No. 17, 3823–3840.
14. Z. Popowicz and A. K. Prykarpatski, “The non-polynomial conservation laws and integrability analysis of generalized Riemann type hydrodynamical equations,” *Nonlinearity*, 2010, **23**, No. 10, 2517–2537.
15. O. S. Rozanova, “On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations,” *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, 2022, **443**, 133578.
16. O. S. Rozanova, “The Riemann problem for equations of a cold plasma,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2023, **527**, No. 1, Part 1, 127400.
17. O. S. Rozanova and M. K. Turzynsky, “On the properties of affine solutions of cold plasma equations,” *Commun. Math. Sci.*, 2024, **22**, No. 1, 215–226.
18. T. Schäfer and C. E. Wayne, “Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media,” *Phys. D.: Nonlinear Phenom.*, 2004, **196**, No. 1, 90–105.
19. C. Tan, “Eulerian dynamics in multidimensions with radial symmetry,” *J. SIAM Math. Anal.*, 2021, **53**, No. 3, 3040–3071.
20. D. Wei, E. Tadmor, and H. Bae, “Critical thresholds in multi-dimensional Euler–Poisson equations with radial symmetry,” *Commun. Math. Sci.*, 2012, **10**, No. 1, 75–86.
21. L. Wei, “Wave breaking, global existence and persistent decay for the Gurevich–Zybin system,” *J. Math. Fluid Mech.*, 2020, **22**, No. 4, 1–14.
22. L. Wei and Y. Wang, “The Cauchy problem for a generalized Riemann-type hydrodynamical equation,” *J. Math. Phys.*, 2021, **62**, No. 4, 041502.
23. S. Xia, “Existence of a weak solution to a generalized Riemann-type hydrodynamical equation,” *Appl. Anal.*, 2023, **102**, No. 18, 4997–5007.

L. V. Gargyants

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: gargyants@bmstu.ru

O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

M. K. Turzynsky

Russian University of Transport, Moscow, Russia

National Research University “Higher School of Economics” (HSE University), Moscow, Russia

E-mail: M13041@yandex.ru