Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 25–37
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.521+517.547.22
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37
EDN: YXLBJX

ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Брайчев

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В статье изучается задача о нахождении по выбранной последовательности комплексных чисел, стремящейся к бесконечности, максимально широкого в заданной шкале класса целых функций, для которого данная последовательность является множеством единственности. В рамках этой общей задачи установлены теоремы единственности в различных классах целых функций, выделяемых ограничениями на тип и индикатор при уточненном порядке. В частности, дополняется доказанная ранее теорема единственности, использующая понятие круга Сильвестра индикаторной диаграммы целой функции экспоненциального типа. Обсуждается точность полученных результатов и их связь с известными фактами.

Ключевые слова: круг Сильвестра, индикаторная диаграмма, целые функции, множество единственности.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает искреннюю признательность В. Б. Шерстюкову, чьи замечания и советы во время оформления статьи существенно улучшили ее содержание, а также анонимному рецензенту, внимательно прочитавшему весь текст и указавшему на ряд полезных источников. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Г. Г. Брайчев.* Задача Сильвестра и множества единственности в классах целых функций// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 25–37. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37`

1. Введение

Проблеме единственности в различных классах аналитических функций посвящено большое число исследований (см., например, обзор-монографию Б. Н. Хабибуллина [13]). Эта проблема тесно связана с описанием характеристик нулевого множества функции в зависимости от ее роста. Как недавно выяснилось в совместной работе [4], нулевое множество целой функции F экспоненциального типа и вполне регулярного роста является множеством единственности в классе всех целых функций, тип которых (при порядке 1) меньше, чем величина радиуса круга Сильвестра индикаторной диаграммы функции F. Здесь и далее мы используем стандартную терминологию теории целых функций (см. книгу Б. Я. Левина [8]).

Кругом Сильвестра ограниченного замкнутого множества на плоскости называем наименьший круг, содержащий это множество (краткая история развития соответствующего раздела выпуклой геометрии изложена в [4]). В настоящей работе мы изучаем множества единственности в специальных классах целых функций, отправляясь не от порождающей функции F, а от наперед заданной последовательности комплексных чисел. Такой подход в ряде случаев позволяет для выбранной последовательности, не имеющей конечных предельных точек, указать максимально широкие классы целых функций, где данная последовательность служит множеством единственности. При этом вводятся новые, отличные от стандартных, классы целых функций. Полученные результаты носят критериальный характер и в определенном смысле неулучшаемы. Для целых функций экспоненциального типа дается вариант теоремы единственности в терминах радиуса круга Сильвестра. Прежде чем точно сформулировать результаты, напомним необходимые понятия и определения.

2. Характеристики роста и классы целых функций

Функция $f(z)$ называется *целой*, если она голоморфна во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Множество всех целых функций обозначим $H(\mathbb{C})$. Функции, входящие в рассматриваемые далее классы, отличаются своими характеристиками роста. Приведем нужные определения.

Пусть $f(z)$ — целая функция. Как обычно, обозначим

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

максимум ее модуля на окружности (в круге) радиуса $r > 0$. Если f отлична от тождественной постоянной, то величина $M_f(r)$, строго возрастая, стремится к $+\infty$ при $r \to +\infty$ и является выпуклой относительно $\ln r$.

Порядок целой функции f определяется по формуле

$$\rho = \rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Уточненным порядком в смысле Валирона называется неотрицательная дифференцируемая на положительной полуоси функция $\varrho = \varrho(r)$, обладающая двумя свойствами:

1) $\lim\limits_{r\to+\infty} \varrho(r) = \rho \in [0,+\infty]$,
2) $\lim\limits_{r\to+\infty} r\ln r\,\varrho'(r) = 0$.

Уточненный по Валирону порядок $\varrho(r)$ назовем *нулевым*, если в свойстве 1) предел $\rho = 0$, и *положительным* — если $\rho > 0$. В первом случае мы дополнительно требуем, чтобы уточненный порядок $\varrho(r)$ удовлетворял условию

$$\ln r = o(r^{\varrho(r)}), \quad r \to +\infty. \tag{2.1}$$

Во втором случае, т. е. при $\rho > 0$, условие (2.1) выполняется автоматически.

Тип целой функции f относительно уточненного порядка ϱ, коротко *ϱ-тип*, задается равенством

$$\sigma_\varrho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho(r)}}. \tag{2.2}$$

Как показал Валирон [17], каждая целая функция конечного положительного порядка ρ обладает уточненным порядком $\varrho(r)$, относительно которого она имеет нормальный тип, т. е. $\sigma_\varrho(f) \in (0,+\infty)$. Эта теорема Валирона носит принципиальный характер и прочно вошла во многие руководства по аналитическим функциям. Позднее Эрл и Хейман [15, 16] доказали аналогичные результаты для целых функций нулевого и бесконечного порядков.

Следуя Валирону, говорим, что целая функция f имеет *совершенно регулярный рост* относительно уточненного порядка $\varrho(r)$, если в равенстве (2.2) существует обычный предел.

Более тонкая характеристика роста целой функции, отражающая ее поведение на каждом луче комплексной плоскости $l_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta\}$, задается равенством

$$h_\varrho(\theta, f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\varrho(r)}}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{2.3}$$

и называется *индикатором* f относительно уточненного порядка ϱ, или, коротко, *ϱ-индикатором* f.

Если в определении (2.3) существует предел, когда положительная переменная r стремится к $+\infty$, не принимая значений из некоторого множества нулевой относительной меры (подробности см. в [8]), то функция f называется функцией *вполне регулярного роста* на луче l_θ. Говорят, что функция имеет *вполне регулярный рост* (во всей плоскости), если она вполне регулярного роста на каждом луче l_θ, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Введем в рассмотрение специальную усредненную характеристику роста целой функции f конечного ϱ-типа, имеющей ϱ-индикатор $h_\varrho(\theta, f)$. Именно, положим

$$I_\varrho(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_\varrho(\theta, f)\, d\theta. \tag{2.4}$$

Всегда выполнена двусторонняя оценка $0 \leqslant I_\varrho(f) \leqslant \sigma_\varrho(f)$ (см. [8, гл. I, § 16; гл. IV, § 1]). Подробнее об интегральной характеристике (2.4) поговорим в разделе 4.

Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — произвольный уточненный порядок. Будем рассматривать следующие семь функциональных классов. Начнем со стандартных классов, выделяемых ограничением на тип:

$$[\varrho, \sigma] = \left\{\, f \in H(\mathbb{C}) :\ \sigma_\varrho(f) \leqslant \sigma \,\right\}, \quad \sigma \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$[\varrho, \sigma) = \left\{\, f \in H(\mathbb{C}) :\ \sigma_\varrho(f) < \sigma \,\right\}, \quad \sigma > 0. \tag{2.6}$$

Пусть теперь уточненный порядок $\varrho(r) \to \rho \in (0, +\infty)$ при $r \to +\infty$, и $h(\theta)$ — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая на $\mathbb{R}$ функция (см. [8, гл. I, § 15-16]). Обозначим

$$[\varrho, h(\theta)] = \left\{\, f \in H(\mathbb{C}) :\ h_\varrho(\theta, f) \leqslant h(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi] \,\right\}, \tag{2.7}$$

$$[\varrho, h(\theta)) = \left\{\, f \in H(\mathbb{C}) :\ h_\varrho(\theta, f) < h(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi] \,\right\}, \tag{2.8}$$

а также

$$[\varrho,\, h(\theta)]_\circ = \left\{\, f \in H(\mathbb{C}) :\ h_\varrho(\theta, f) \leqslant h(\theta)\ \ \forall\, \theta \in [0, 2\pi] \ \text{и}\ \exists \theta_0 \in [0, 2\pi] :\ h_\varrho(\theta_0, f) < h(\theta_0) \,\right\}, \tag{2.9}$$

классы функций, выделяемые ограничениями на индикатор.

Пусть, наконец, задано число I. Положим

$$[\varrho,\, I]_* = \left\{\, f \in H(\mathbb{C}) :\ I_\varrho(f) \leqslant I \,\right\}, \quad I \geqslant 0, \tag{2.10}$$

$$[\varrho,\, I)_* = \left\{\, f \in H(\mathbb{C}) :\ I_\varrho(f) < I \,\right\}, \quad I > 0, \tag{2.11}$$

с усредненной характеристикой (2.4).

Классы функций вида (2.5)–(2.8) являются линейными пространствами и широко используются в различных разделах комплексного анализа, а классы вида (2.9)–(2.11) здесь введены, по-видимому, впервые. Очевидно, что при условии $h(\theta) \equiv \sigma$ классы функций (2.5), (2.7), а также (2.6), (2.8), попарно совпадают. В общем случае справедливы, вообще говоря, строгие вложения

$$[\varrho, h(\theta)) \subset [\varrho, h(\theta)]_\circ \subset [\varrho, I_h)_* \subset [\varrho, I_h]_*,$$

$$[\varrho, h(\theta)]_\circ \subset [\varrho, h(\theta)] \subset [\varrho, I_h]_*, \qquad [\varrho, h(\theta)] \subset [\varrho, \sigma] \subset [\varrho, \sigma]_*,$$

где используется близкое к (2.4) обозначение

$$I_h \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta,$$

ограничение $h(\theta) \leqslant \sigma$ при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ и непрерывность функции $h(\theta)$. Условие (2.1) необходимо и достаточно для того, чтобы введенные классы содержали не только полиномы, но и трансцендентные целые функции (см. по этому поводу работу [7]).

3. Характеристики роста последовательностей

Из теоремы единственности для голоморфных в области функций следует, что две целые функции, совпадающие на множестве, имеющем хотя бы одну конечную предельную точку, тождественно равны, т. е. их разность есть нулевая функция. Поэтому в качестве множеств единственности для классов целых функций рассматриваются дискретные множества.

Определение 3.1. Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, не имеющую конечных предельных точек, назовем *множеством единственности* для некоторого класса целых функций, если в этом классе не существует не равной тождественно нулю функции, обращающейся в нуль на каждом элементе Λ с кратностью, не меньшей кратности этого элемента в Λ. При этом *кратностью* элемента в множестве Λ мы называем число вхождений этого элемента в Λ. Если же в рассматриваемом классе целых функций существует функция f, такая что $f(\Lambda) = 0$ (f обращается в нуль на Λ в указанном выше смысле), но f отлична от тождественного нуля, то Λ назовем *множеством неединственности* в данном классе.

Обозначим через Λ_f множество всех нулей функции f, записанных с учетом кратности (нуль кратности m записываем m раз). Определение множества единственности можно переписать следующим образом. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, есть *множество единственности* для некоторого класса целых функций, если для всякой функции f из этого класса, обращающейся в нуль на каждом элементе множества Λ, следует, что $f(z) \equiv 0,\ z \in \mathbb{C}$, т. е. условие $\Lambda_f \supset \Lambda$ влечет $f(z) \equiv 0,\ z \in \mathbb{C}$.

Для произвольной стремящейся к бесконечности последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ и фиксированного класса целых функций (из некоторой шкалы, определяемой ограничением на рост), можно поставить следующие вопросы.

- При каких условиях Λ является множеством единственности для данного класса?
- Пусть ответ на первый вопрос положительный. Является ли Λ множеством единственности для более широкого класса выделенной шкалы, и если является, то каков наиболее широкий класс, в котором Λ остается множеством единственности?
- Если Λ совпадает с множеством Λ_L нулей некоторой целой функции L (в таком случае L называем *порождающей функцией* последовательности Λ), то какие свойства этой функции гарантируют, что Λ является множеством единственности для данного (или более широкого) класса?

Исследование возникающих задач будем проводить в функциональных шкалах (2.5)–(2.11). Введем требующиеся для этого характеристики роста комплексных последовательностей.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек. Считаем, что члены последовательности занумерованы с учетом неубывания их модулей, т. е. $|\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n+1}|$ при всех $n \in \mathbb{N}$. *Считающей функцией* последовательности Λ называется величина

$$n_\Lambda(r) = \max\left\{ n:\ |\lambda_n| \leqslant r,\ \lambda_n \in \Lambda \right\}, \quad r \geqslant 0,$$

совпадающая при каждом r с числом элементов этой последовательности в круге $|z| \leqslant r$. Далее, *усредненная считающая функция* последовательности Λ определяется формулой

$$N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t) - n_\Lambda(0)}{t}\, dt, \quad r \geqslant 0.$$

Величины, задаваемые равенствами

$$\overline{\Delta}_\varrho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \qquad \underline{\Delta}_\varrho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \tag{3.1}$$

называются соответственно *верхней* и *нижней* ϱ*-плотностями* последовательности Λ. Аналогично (с заменой считающей функции на усредненную считающую функцию) определяются и *усредненные верхняя* и *нижняя* ϱ*-плотности* Λ. Именно,

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \qquad \underline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}. \tag{3.2}$$

Последовательность Λ называется ϱ*-измеримой*, если $\overline{\Delta}_\varrho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\varrho(\Lambda)$, что эквивалентно совпадению усредненных (верхней и нижней) ϱ-плотностей $\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)$. Тем самым ϱ-измеримость Λ означает существование любого из пределов

$$\Delta_\varrho(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \qquad \Delta^*_\varrho(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}},$$

которые называют *ϱ-плотностями* (*обычной* и *усредненной*) ϱ-измеримой последовательности Λ.

Все подготовлено для перехода к формулировкам и доказательствам результатов.

4. Основные результаты

Следующее утверждение предъявляет достаточные условия того, что данная последовательность комплексных чисел является множеством единственности для класса $[\varrho, \sigma)$, и получено переформулировкой теоремы 1.3 из недавней работы [4] с учетом определения уточненного порядка. Для сохранения полноты и замкнутости изложения полезно дать нужный факт с доказательством, не ограничиваясь формальной ссылкой.

Теорема 4.1. *Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — произвольный уточненный порядок, удовлетворяющий условию* (2.1)*. Пусть также $\sigma > 0$ и Λ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек, такая, что*

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \sigma. \tag{4.1}$$

Тогда Λ является множеством единственности для класса $[\varrho, \sigma)$.

Доказательство. Согласно формуле Иенсена (см. [8, гл. I, § 5]) для произвольной целой функции f справедливо равенство

$$N_{\Lambda_f}(r) \equiv \int\limits_0^r \frac{n_f(t) - n_f(0)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})|\, d\theta - \ln \frac{|f^{(m)}(0)|}{m!}\, r^m, \qquad r > 0. \tag{4.2}$$

Здесь $n_f(r) = n_{\Lambda_f}(r)$ — считающая функция множества корней Λ_f функции f, а m — число вхождений нуля в Λ_f. Оценивая сверху значения модуля функции на окружности радиуса r максимумом модуля этой функции на той же окружности, выводим неравенство

$$N_{\Lambda_f}(r) \leqslant \ln M_f(r) + O(\ln r), \quad r \to +\infty.$$

Поделив на $r^{\varrho(r)}$ обе части этого неравенства и воспользовавшись свойством (2.1), получим оценку

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f) \leqslant \sigma_\varrho(f). \tag{4.3}$$

Понятно, что в левой части (4.3) нужно написать нуль, если множество Λ_f не более чем конечно.

Предположим теперь, что целая функция f принадлежит классу $[\varrho, \sigma)$, обращается в нуль на данной последовательности Λ, но не равна тождественно нулю. Тогда для ее нулевого множества верно включение $\Lambda_f \supset \Lambda$ и, следовательно, $n_{\Lambda_f}(r) \geqslant n_\Lambda(r)$ при всех $r \geqslant 0$. Отсюда, привлекая (2.1) и (3.2), легко приходим к неравенству $\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f) \geqslant \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)$. В результате (см. (4.1), (4.3)) имеем

$$\sigma > \sigma_f \geqslant \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f) \geqslant \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \sigma.$$

Полученное противоречие означает, что Λ — множество единственности для класса $[\varrho, \sigma)$, и завершает доказательство теоремы. □

Ответ на вопрос, будет ли для заданной последовательности Λ со свойством (4.1) указанный в теореме 4.1 класс максимальным (в шкале классов (2.5) или (2.6) с ограничением на тип), требует дополнительной информации. Такую информацию можно получить, если известно, что последовательность Λ имеет порождающую (целую) функцию F_Λ, нулевое множество которой совпадает (по определению) с Λ.

Согласно теореме Вейерштрасса [8, гл. I, § 3] любая последовательность комплексных чисел без конечных предельных точек имеет порождающую функцию. В условиях теоремы 4.1 неравенство (4.3) для каждой порождающей функции F_Λ запишется в виде

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \sigma \leqslant \sigma_\varrho(F_\Lambda). \tag{4.4}$$

Возникает необходимость из всех функций, порождающих последовательность Λ, выбрать функцию с наименьшим ϱ-типом, точнее — найти экстремальную величину

$$T(\Lambda, \sigma) \equiv \inf \left\{ \sigma_\varrho(F) :\ F \in [\varrho, \infty),\ \Lambda_F = \Lambda,\ \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \sigma \right\}, \tag{4.5}$$

где $[\varrho,\infty) = \bigcup\limits_{0<\sigma<\infty} [\varrho,\sigma)$ — класс всех целых функций конечного ϱ-типа. Близкая к (4.5) экстремальная величина

$$\sigma_{\inf}(\Lambda;\rho) \equiv \inf\left\{\sigma>0:\ \exists F\in[\varrho,\sigma]\setminus\{0\}\,,\ F(\Lambda)=0\right\}$$

введена в [11], где доказана точная двусторонняя оценка

$$\overline{\Delta}^{*}_{\varrho}(\Lambda) \leqslant \sigma_{\inf}(\Lambda;\rho) \leqslant P(\rho)\,\overline{\Delta}^{*}_{\varrho}(\Lambda)$$

с константой Пэли

$$P(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}, & 0<\rho<1/2,\\[2mm] \pi\rho, & \rho\geqslant 1/2\end{cases}$$

(см. также [13, гл. 3, теорема 3.3.3]). Существенные дополнения к этому результату сделаны сначала в [12], а затем — в [14, гл. 2], [2, гл. 3] и [6]. Вопрос о взаимосвязи величин $T(\Lambda,\sigma)$ и $\sigma_{\inf}(\Lambda;\rho)$, несмотря на их внешнее сходство, нетривиален и требует отдельного исследования.

Из определения (4.5) и неравенства (4.4) следует, что $T(\Lambda,\sigma)\geqslant\sigma$ и что для любого $\sigma'>T(\Lambda,\sigma)$ последовательность Λ является множеством неединственности для класса $[\varrho,\sigma')$. Как мы увидим ниже, обе логически возможные ситуации $T(\Lambda,\sigma)=\sigma$ и $T(\Lambda,\sigma)>\sigma$ реализуются на практике.

Определение 4.1. Если точная нижняя грань в (4.5) достигается на некоторой целой функции конечного ϱ-типа, то такую функцию назовем *экстремальной порождающей функцией* последовательности Λ и обозначим $\hat F_\Lambda$.

При наличии экстремальной порождающей функции $\hat F_\Lambda$ сама последовательность Λ является множеством неединственности для класса $[\varrho,\,T(\Lambda,\sigma)]$, поскольку $\hat F_\Lambda$ ему принадлежит.

Предположим теперь, что для Λ найдется такая экстремальная порождающая функция $\hat F_\Lambda$, что выполнено соотношение

$$T(\Lambda,\sigma)=\sigma_\varrho(\hat F_\Lambda)=\sigma. \tag{4.6}$$

Условие (4.6) можно сформулировать как требование существования у последовательности Λ (с верхней усредненной ϱ-плотностью $\sigma>0$) порождающей функции ϱ-типа σ (автоматически — экстремальной порождающей функции). В таком случае можно дать следующее дополнение к теореме 4.1 (ср. с [4, теорема 1.3]), обоснование которого фактически уже проведено.

Теорема 4.2. *Пусть, как в теореме* 4.1, $\varrho=\varrho(r)$ — *произвольный уточненный порядок с условием* (2.1), $\sigma>0$ *и* Λ — *последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек и удовлетворяющая* (4.1). *Тогда* Λ *является множеством единственности для класса* $[\varrho,\sigma)$.

Если дополнительно известно, что Λ *имеет порождающую функцию* ϱ-*типа* σ, *т. е. выполнено условие* (4.6), *то эта последовательность не является множеством единственности для чуть более широкого класса* $[\varrho,\sigma]$.

Если такой порождающей функции нет, то можно лишь утверждать, что Λ *является множеством неединственности для класса* $[\varrho,\sigma')$ *при любом* $\sigma'>T(\Lambda,\sigma)$ *с величиной* $T(\Lambda,\sigma)$, *заданной по правилу* (4.5).

В связи с теоремой 4.2 важно знать, какие последовательности комплексных чисел обладают экстремальной порождающей функцией, и насколько велико множество функций, экстремально порождающих последовательность своих нулей. Сюда относятся все целые функции нулевого порядка (см. [1, ч. III, гл. 1, § 8] и [2, гл. 2, § 2.2]), функции положительного порядка вполне регулярного роста с постоянным индикатором (мы в этом убедимся чуть позже), и не только такие. Например, в работах [9, теорема 2.1] и [5, § 2] в базовом случае $\varrho(r)\equiv\rho>0$ для любых наперед заданных чисел $0\leqslant\alpha\leqslant\sigma<+\infty$ построен пример целой функции F с нулевым множеством Λ_F, обладающей свойствами:

$$\underline{\Delta}^{*}_{\rho}(\Lambda_F)=\alpha,\quad \overline{\Delta}^{*}_{\rho}(\Lambda_F)=\sigma,$$
$$\sigma_\rho(F)=\overline{\Delta}^{*}_{\rho}(\Lambda_F)=\sigma.$$

По теореме 4.2 последовательность нулей каждой из таких функций F является множеством единственности для $[\rho,\sigma)$, причем в шкале вида (2.6) этот класс будет в указанном смысле наибольшим. Отметим также, что F не обладает полной регулярностью роста при выборе $\alpha<\sigma$.

Естественно возникает вопрос: можно ли в случае нарушения (4.6) указать максимальный класс (из какой-либо введенной в разделе 2 шкалы), для которого Λ является множеством единственности? Попытки ответа на этот вопрос требуют привлечения следующей расширенной версии неравенства Иенсена (4.3) (см. [5, § 2], где обсуждается ситуация $\varrho(r) \equiv \rho > 0$).

Пусть целая функция f с последовательностью нулей Λ_f имеет конечный ϱ-тип при уточненном порядке $\varrho(r) \to \rho > 0$, $r \to +\infty$. Тогда верна цепочка неравенств

$$\frac{\underline{\Delta}_\varrho(\Lambda_f)}{\rho} \leqslant \underline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f) \leqslant \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f) \leqslant I_\varrho(f) \leqslant \sigma_\varrho(f). \tag{4.7}$$

Напомним, что фигурирующие в (4.7) ϱ-плотности комплексной последовательности введены в (3.1), (3.2), а $I_\varrho(f)$ — интегральная характеристика, заданная формулой (2.4). Последнее неравенство в цепочке (4.7) уже упоминалось после определения (2.4) и следует из очевидной оценки

$$h_\varrho(f,\theta) \leqslant \sigma_\varrho(f), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

(ср. (2.2) с (2.3)), предпоследнее неравенство вытекает из формулы Иенсена (4.2) с учетом определения ϱ-индикатора и того факта, что стремление к верхнему пределу в (2.3) равномерное по θ. Остальные неравенства несложно выводятся из определений соответствующих плотностных характеристик.

Спросим попутно, могут ли достигаться равенства в отдельных частях или даже всюду в (4.7)? Как доказано в [8, гл. IV, § 1, теорема 3], равенство

$$\frac{\underline{\Delta}_\varrho(\Lambda_f)}{\rho} = I_\varrho(f)$$

имеет место для функций вполне регулярного роста и только для них. Другое равенство

$$I_\varrho(f) = \sigma_\varrho(f)$$

ввиду непрерывности ϱ-индикатора возможно лишь при условии

$$h_\varrho(f,\theta) \equiv \sigma_\varrho(f), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Тем самым любая функция вполне регулярного роста с постоянным индикатором (при положительном уточненном порядке ϱ) «тотально» доставляет равенства в (4.7) и является экстремально порождающей для последовательности своих нулей в специальном смысле (4.6).

Вернемся к вопросу об изучении ситуации в случае нарушения (4.6).

Теорема 4.3. *Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — произвольный положительный уточненный порядок, $I > 0$ и Λ — последовательность комплексных чисел без конечных предельных точек, имеющая усредненную верхнюю ϱ-плотность $\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = I$.*

Если Λ обладает такой порождающей функцией F_Λ, что $I_\varrho(F_\Lambda) = I$, то Λ является множеством единственности для класса $[\varrho, I)_*$ и не является таковым для чуть более широкого класса $[\varrho, I]_*$.

Если же Λ имеет порождающую функцию F_Λ со свойством $I_\varrho(F_\Lambda) = I' > I$, то можно лишь утверждать, что Λ есть множество неединственности для класса $[\varrho, I']_*$.

Доказательство. Опираемся на те же соображения, с помощью которых были доказаны теоремы 4.1 и 4.2. Пусть сначала в условиях теоремы для последовательности Λ найдется порождающая функция F_Λ со свойством $I_\varrho(F_\Lambda) = I$. Тогда F_Λ попадает в класс $[\varrho, I]_*$, и Λ не является множеством единственности в таком классе. Возьмем затем целую функцию f конечного ϱ-типа, которая обращается в нуль на последовательности Λ, но отлична от тождественного нуля. Тогда, во-первых, $\Lambda_f \supset \Lambda$ и $\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f) \geqslant \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)$. Во-вторых (см. (4.7)),

$$I_\varrho(f) \geqslant \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f) \geqslant \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = I,$$

и функция f не может принадлежать классу $[\varrho, I)_*$. Отсюда следует первая часть теоремы. Вторая ее часть очевидна, поскольку порождающая функция F_Λ со свойством $I_\varrho(F_\Lambda) = I'$ принадлежит классу $[\varrho, I']_*$. □

Отметим, что теорема 4.2 вытекает из теоремы 4.3 в ситуации, когда функция F_Λ, порождающая последовательность Λ, имеет постоянный индикатор (равный ϱ-типу). По поводу целых функций с постоянным индикатором см. также библиографию в [5] и работы [3, 10]. В случае непостоянного индикатора порождающей функции полезным будет следующее утверждение, которое является прямым следствием теоремы 4.3 и имеет дело с множествами единственности (неединственности) в классах (2.7)–(2.9).

Теорема 4.4. *Пусть $\rho > 0$, $h(\theta)$ — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция, Λ — нулевое множество целой функции F_Λ с ϱ-индикатором $h_\varrho(\theta, F_\Lambda) = h(\theta)$. Если выполнено соотношение*

$$\overline{\Delta}_\varrho^*(\Lambda) = I_\varrho(F_\Lambda) > 0, \tag{4.8}$$

то Λ является множеством единственности в классах $[\varrho, h(\theta))$, $[\varrho, h(\theta)]_\circ$ и не является таковым в классе $[\varrho, h(\theta)]$.

Замечание 4.1. Функция, удовлетворяющая условию (4.8), дает решение следующей экстремальной задачи: для заданных числа $I > 0$ и последовательности комплексных чисел Λ с усредненной верхней ϱ-плотностью $\overline{\Delta}_\varrho^*(\Lambda) = I$ найти точную нижнюю грань

$$\inf\left\{I_\varrho(F):\ F \in [\varrho, \infty),\ \Lambda_F = \Lambda,\ \overline{\Delta}_\varrho^*(\Lambda) = I\right\}.$$

Впрочем, задача о существовании такой порождающей функции нетривиальна и зависит от индивидуальных свойств выбранной последовательности Λ.

Как уже фактически отмечалось при обсуждении точности соотношения (4.7), требованию (4.8) заведомо удовлетворяет пара: целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке ϱ и последовательность ее нулей Λ. Нужно лишь исключить вырожденную ситуацию $\Delta_\varrho(\Lambda) = 0$ (тогда и $\Delta_\varrho^*(\Lambda) = 0$). Поэтому теорема 4.4 приводит к такому утверждению.

Следствие 4.1. *Последовательность нулей (положительной верхней ϱ-плотности) целой функции вполне регулярного роста с ϱ-индикатором $h(\theta)$ образует множество единственности в классе $[\varrho, h(\theta))$ и не является таковым в чуть более широком классе $[\varrho, h(\theta)]$.*

В связи со следствием 4.1 укажем, что по любой 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой функции $h(\theta)$ можно, как известно, построить последовательность комплексных чисел, для которой порождающая ее функция имеет ϱ-индикатор, равный $h(\theta)$, и вполне регулярный рост. Вопрос об ослаблении условий на регулярность роста функции из формулировки следствия 4.1 еще ждет своего решения.

Наиболее прозрачный вид теоремы единственности приобретают в классах целых функций экспоненциального типа, т. е. целых функций, тип которых при уточненном порядке $\varrho(r) \equiv 1$ конечен. В таком случае в обозначениях используемых асимптотических характеристик опускаем индекс ϱ. Например, пишем $h(\theta, f)$ вместо $h_\varrho(\theta, f)$ и $\sigma(f)$ вместо $\sigma_\varrho(f)$. Таким образом, целые функции экспоненциального типа — в точности те, для которых $\sigma(f) < +\infty$. Напомним, что тогда величина

$$2\pi I(f) = \int\limits_0^{2\pi} h(\theta, f)\, d\theta$$

совпадает с длиной границы выпуклого компакта на комплексной плоскости, определяемого равенством

$$D(f) = \bigcap_{\theta \in [0,\, 2\pi]} \left\{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) \leqslant h(\theta, f)\right\}$$

и называемого *индикаторной диаграммой* целой функции f экспоненциального типа. В обозначениях классов целых функций экспоненциального типа уточненный порядок $\varrho(r) \equiv 1$ фигурирует в виде $\mathbf{1}$.

Дадим, наконец, одну теорему единственности в геометрических терминах, использующих понятие круга Сильвестра (см. раздел 1). Предварительно установим простую формулу для вычисления радиуса круга Сильвестра индикаторной диаграммы целой функции экспоненциального типа.

Лемма 4.1. *Радиус $r(f)$ круга Сильвестра, построенного для индикаторной диаграммы $D(f)$ целой функции f экспоненциального типа, вычисляется по формуле*

$$r(f) = \min\bigl\{\sigma(f_a):\ |a| \leqslant \sigma(f)\bigr\}. \tag{4.9}$$

Здесь для $a \in \mathbb{C}$ обозначено

$$f_a(z) = f(z)\, e^{az}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Сразу отметим, что приводимые ниже рассуждения проходят для случая одноточечной индикаторной диаграммы с допущением вырождения круга в точку.

Хорошо известно, что

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} h(\theta, f) = \sigma(f).$$

Следовательно, индикаторная диаграмма $D(f)$ содержится в круге $\{\, |z| \leqslant \sigma(f)\,\}$ и не содержится ни в каком круге $\{\, |z| \leqslant r\,\}$ при $r < \sigma(f)$. Другими словами, $\sigma(f)$ — это радиус наименьшего круга с центром в нуле, содержащего $D(f)$. Поместим теперь индикаторную диаграмму $D(f)$ в ее круг Сильвестра, т. е. в круг

$$\{\, |z-b| \leqslant r(f)\,\}$$

минимально возможного радиуса $r(f)$ с центром в некоторой точке $b \in \mathbb{C}$. Поскольку центр круга Сильвестра выпуклого компакта находится в этом компакте, то $|b| \leqslant \sigma(f)$. Положим $a = -\overline{b}$ (черта означает комплексное сопряжение, так что $|a| = |b|$) и перейдем от f к f_a по правилу (4.10). При указанном переходе индикаторная диаграмма $D(f)$ сдвинется таким образом, что

$$\{\, |z| \leqslant r(f)\,\}$$

станет кругом Сильвестра индикаторной диаграммы $D(f_a)$. Поэтому

$$r(f) = r(f_a) = \sigma(f_a),$$

и на функции f_a достигается минимум в (4.9). Лемма доказана. □

Из теорем 4.2–4.4 с учетом леммы 4.1 вытекает следующий результат.

Теорема 4.5. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел с конечной и положительной усредненной верхней плотностью $\overline{\Delta}^*(\Lambda)$. Пусть, далее, F_Λ — соответствующее каноническое произведение Адамара*

$$F_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

и $r(F_\Lambda)$ — радиус круга Сильвестра индикаторной диаграммы $D(F_\Lambda)$. Тогда при выполнении равенства

$$\overline{\Delta}^*(\Lambda) = r(F_\Lambda)$$

последовательность Λ будет множеством единственности для класса $\bigl[\mathbf{1},\, r(F_\Lambda)\bigr)$ и не будет таковым для чуть более широкого класса $\bigl[\mathbf{1},\, r(F_\Lambda)\bigr]$. Если же $\overline{\Delta}^*(\Lambda) < r(F_\Lambda)$, но выполнено равенство

$$\overline{\Delta}^*(\Lambda) = I(F_\Lambda) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta,\, F_\Lambda)\, d\theta,$$

то Λ является множеством единственности для классов

$$\bigl[\mathbf{1},\, I(F_\Lambda)\bigr)_* \supset \bigl[\mathbf{1},\, h(\theta, F_\Lambda)\bigr]_\circ \supset \bigl[\mathbf{1},\, h(\theta, F_\Lambda)\bigr)$$

и не является таковым для классов

$$\bigl[\mathbf{1},\, I(F_\Lambda)\bigr]_* \supset \bigl[\mathbf{1},\, h(\theta, F_\Lambda)\bigr].$$

Доказательство. Приведем схему рассуждений. Условие конечности усредненной плотности последовательности Λ гарантирует принадлежность канонического произведения Адамара F_Λ, построенного по Λ, классу целых функций экспоненциального типа. В соответствии с общим определением это произведение является порождающей функцией последовательности Λ. Все другие порождающие (для этой последовательности) функции экспоненциального типа отличаются от F_Λ множителями вида $c z^m e^{az}$, где c, $a \in \mathbb{C}$, и поэтому имеют индикаторные диаграммы на плоскости, отличающиеся друг от друга только сдвигами. Теперь вкупе с леммой 4.1 применим теоремы 4.2–4.4, учитывая, что длина границы индикаторной диаграммы не меняется при сдвиге. Теорема доказана. □

5. Некоторые приложения, примеры, комментарии

Множества единственности для классов целых функций экспоненциального типа играют решающую роль в проблеме полноты системы экспоненциальных мономов в пространстве $H(G)$ аналитических в области G функций с топологией равномерной сходимости на компактах в G. Справедлив такой широко известный критерий (см., например, [13, теорема 3.3.1]).

Теорема 5.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел, n_k — кратность элемента $\lambda_k \in \Lambda$. Пусть далее G — выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с опорной функцией*

$$h(\theta) = \max_{z\in G} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}).$$

Система экспоненциальных мономов

$$\operatorname{Exp}\Lambda = \left\{ z^j e^{\lambda_k z} : \ j = 1, 2, \ldots, n_k - 1, \ k \in \mathbb{N} \right\} \tag{5.1}$$

полна в пространстве $H(G)$ тогда и только тогда, когда Λ является множеством единственности для класса $[\mathbf{1}, h(-\theta))$.

Из теорем 4.4, 5.1 сразу вытекает такое утверждение (см. также комментарий к следствию 4.1).

Теорема 5.2. *Для любой выпуклой ограниченной области G в $\mathbb{C}$ существует такая последовательность комплексных чисел Λ, что система $\operatorname{Exp}\Lambda$ экспоненциальных мономов* (5.1) *будет полна в G, но не будет таковой ни в какой более широкой области.*

В заключение применим теорему 4.5 в одной простой, но наглядной ситуации, когда Λ совпадает с множеством целых чисел $\mathbb{Z}$, элементы которого занумеруем в порядке неубывания модулей. Здесь $\overline{\Delta}^*(\Lambda) = \Delta^*(\Lambda) = 2$. Каноническое произведение из теоремы 4.5, построенное по Λ, есть целая функция экспоненциального типа $F_\Lambda(z) = \sin \pi z$ со свойствами

$$h(\theta, F_\Lambda) = \pi|\sin\theta|, \quad \sigma(F_\Lambda) = r(F_\Lambda) = \pi, \quad I(F_\Lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\, d\theta = 2.$$

Согласно второй части теоремы 4.5 для классов

$$\big[\mathbf{1},\, 2\big)_* \supset \big[\mathbf{1},\, \pi|\sin\theta|\big]_\circ \supset \big[\mathbf{1},\, \pi|\sin\theta|\big)$$

последовательность $\Lambda = \mathbb{Z}$ является множеством единственности, а для классов

$$\big[\mathbf{1},\, 2\big]_* \supset \big[\mathbf{1},\, \pi|\sin\theta|\big]$$

— уже нет. Полученный результат интересно сравнить с классической теоремой Карлсона, утверждающей, что $\Lambda = \mathbb{Z}$ образует множество единственности для класса $[\mathbf{1},\, \pi)$. Поскольку классы $\big[\mathbf{1},\, 2\big)_*$ и $[\mathbf{1},\, \pi)$ пересекаются, но ни один из них не вложен в другой, то наш результат не содержится в теореме Карлсона и наоборот. Теорема единственности, включающая в себя теорему Карлсона, предложена в [4, теорема 1]. Применение наших утверждений в более тонких ситуациях будет дано отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.
2. *Брайчев Г. Г.* Экстремальные задачи в теории выпуклых и целых функций// Дисс. докт. физ.-мат. наук. — М.: РУДН, 2018.
3. *Брайчев Г. Г.* О связи между ростом нулей и убыванием тейлоровских коэффициентов целой функции// Мат. заметки — 2023. — *113*, № 1. — С. 32–45.
4. *Брайчев Г. Г., Хабибуллин Б. Н., Шерстюков В. Б.* Задача Сильвестра, покрытия сдвигами и теоремы единственности для целых функций// Уфимский мат. ж. — 2023. — *15*, № 4. — С. 30–41.
5. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах// Фундам. и прикл. мат. — 2018. — *22*, № 1. — С. 51–97.
6. *Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В.* О наименьшем типе целой функции с заданной подпоследовательностью нулей// Уфимский мат. ж. — 2022. — *14*, № 3. — С. 17–22.
7. *Гришин А. Ф., Ван Куинь Н.* Целые функции с наперед заданным нулевым уточненным порядком// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2014. — *424*. — С. 141–153.
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
9. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона—Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 132–164.
10. *Филевич П. В.* Индикатор целых функций с сильно колеблющимися коэффициентами// Мат. студ. — 2011. — *35*, № 2. — С. 142–148.
11. *Хабибуллин Б. Н.* О типе целых и мероморфных функций// Мат. сб. — 1992. — *183*, № 11. — С. 35–44.
12. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 2. — С. 129–158.
13. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
14. *Шерстюков В. Б.* Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле// Дисс. докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2016.
15. *Earl E. P.* Note in the constraction of proximate orders// J. London Math. Soc. — 1968. — *43*. — С. 695–698.
16. *Earl E. P., Hayman W. K.* Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid grouth// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1991. — *109*, № 3. — С. 565–569.
17. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière// Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3). — 1913. — № 5. — С. 117–257.

Г. Г. Брайчев
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: braichev@mail.ru

UDC 517.521+517.547.22
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37
EDN: YXLBJX

The Sylvester problem and uniqueness sets in classes of entire functions

G. G. Braichev

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we study the problem of finding, by a chosen sequence of complex numbers tending to infinity, the widest possible class of entire functions in a given scale for which this sequence is a uniqueness set. Within the framework of this general problem, we establish uniqueness theorems in various classes of entire functions, distinguished by restrictions on the type and indicator under a refined order. In particular, we complement the previously proven uniqueness theorem, using the concept of the Sylvester circle of the indicator diagram of an entire function of exponential type. We discuss the accuracy of the results obtained and their connection with known facts.

Keywords: Sylvester circle, indicator diagram, entire functions, uniqueness set.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author expresses sincere gratitude to V. B. Sherstyukov, whose comments and advice during the preparation of the article significantly improved its content, as well as to the anonymous reviewer, who carefully read the entire text and pointed out a number of useful sources. The author declares no financial support.

For citation: G. G. Braichev, "The Sylvester problem and uniqueness sets in classes of entire functions," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 25–37. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37`

REFERENCES

1. G. G. Braichev, *Vvedenie v teoriyu rosta vypuklykh i tselykh funktsiy* [Introduction to the Theory of Growth of Convex and Entire Functions], Prometey, Moscow, 2005 (in Russian).
2. G. G. Braichev, "Ekstremal'nye zadachi v teorii vypuklykh i tselykh funktsiy" [Extremal problems in the theory of convex and entire functions], *Diss. dokt. fiz.-mat. nauk*, RUDN University, Moscow, 2018.
3. G. G. Braichev, "O svyazi mezhdu rostom nuley i ubyvaniem teylorovskikh koeffitsientov tseloy funktsii" [On the connection between the growth of zeros and the decrease of Taylor coefficients of an entire function], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 1, 32–45 (in Russian).
4. G. G. Braichev, B. N. Khabibullin, and V. B. Sherstyukov, "Zadacha Sil'vestra, pokrytiya sdvigami i teoremy edinstvennosti dlya tselykh funktsiy" [Sylvester's problem, coverings by shifts and uniqueness theorems for entire functions], *Ufimskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2023, **15**, No. 4, 30–41 (in Russian).
5. G. G. Braichev and V. B. Sherstyukov, "Tochnye otsenki asimptoticheskikh kharakteristik rosta tselykh funktsiy s nulyami na zadannykh mnozhestvakh" [Exact estimates of asymptotic growth characteristics of entire functions with zeros on given sets], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2018, **22**, No. 1, 51–97 (in Russian).
6. G. G. Braichev and O. V. Sherstyukova, "O naimen'shem tipe tseloy funktsii s zadannoy podposledovatel'nost'yu nuley" [On the smallest type of an entire function with a given subsequence of zeros], *Ufimskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 3, 17–22 (in Russian).
7. A. F. Grishin and N. Van Quynh, "Tselye funktsii s napered zadannym nulevym utochnennym poryadkom" [Entire functions with a predetermined zero refined order], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2014, **424**, 141–153 (in Russian).

8. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
9. A. Yu. Popov, "Razvitie teoremy Valirona—Levina o naimen'shem vozmozhnom tipe tseloy funktsii s zadannoy verkhney ρ-plotnost'yu korney" [Development of the Valiron–Levin theorem on the smallest possible type of an entire function with a given upper ρ-density of roots], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 132–164 (in Russian).
10. P. V. Filevich, "Indikator tselykh funktsiy s sil'no koleblyushchimisya koeffitsientami" [Indicator of entire functions with highly oscillating coefficients], *Mat. stud.* [Math. Stud.], 2011, **35**, No. 2, 142–148 (in Russian).
11. B. N. Khabibullin, "O tipe tselykh i meromorfnykh funktsiy" [On the type of entire and meromorphic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1992, **183**, No. 11, 35–44 (in Russian).
12. B. N. Khabibullin, "Posledovatel'nost' nuley golomorfnykh funktsiy, predstavlenie meromorfnykh funktsiy. II. Tselye funktsii" [Sequence of zeros of holomorphic functions and representation of meromorphic functions. II. Entire functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2009, **200**, No. 2, 129–158 (in Russian).
13. B. N. Khabibullin, *Polnota sistem eksponent i mnozhestva edinstvennosti* [Completeness of Exponential Systems and Uniqueness Sets], RITs BashGU, Ufa, 2012 (in Russian).
14. V. B. Sherstyukov, "Asimptoticheskie svoystva tselykh funktsiy, korni kotorykh lezhat v nekotorom ugle" [Asimptoticheskie svoystva tselykh funktsiy, korni kotorykh lezhat v nekotorom ugle], *Doctoral Dissertation*, MSU, Moscow, 2016.
15. E. P. Earl, "Note in the constraction of proximate orders," *J. London Math. Soc.*, 1968, **43**, 695–698.
16. E. P. Earl and W. K. Hayman, "Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid grouth," *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1991, **109**, No. 3, 565–569.
17. G. Valiron, "Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière," *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3)*, 1913, No. 5, 117–257.

G. G. Braichev
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: braichev@mail.ru