Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 15–24
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24
EDN: ZDOAHT

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БОЛЬЦМАНА

А. В. Бобылев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Известные нелинейные кинетические уравнения, в частности, волновое кинетическое уравнение и квантовые уравнения Нордхейма—Улинга—Уленбека, рассматриваются как естественное обобщение классического пространственно-однородного уравнения Больцмана. С этой целью введем общее кинетическое уравнение типа Больцмана, зависящее от функции четырех действительных переменных $F(x, y; v, w)$. Предполагается, что функция F удовлетворяет некоторым простым соотношениям. Изучены основные свойства этого кинетического уравнения. Показано, что упомянутым выше частным кинетическим уравнениям соответствуют различные полиномиальные формы функции F. Далее рассматривается задача дискретизации общего кинетического уравнения типа Больцмана на основе идей, аналогичных тем, что используются для построения дискретных скоростных моделей уравнения Больцмана. Основное внимание уделено дискретным моделям волнового кинетического уравнения. Показано, что такие модели имеют монотонный функционал, аналогичный H-функции Больцмана. Сформулирована и исследована теорема существования, единственности и сходимости к равновесию решений задачи Коши с произвольными положительными начальными условиями. Также кратко обсуждаются различия в долговременном поведении решений волнового кинетического уравнения и решений его дискретных моделей.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, волновые кинетические уравнения, H-теорема, функция распределения, функция Ляпунова, дискретные кинетические модели.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, № 075-15-22-1115). Выражаю благодарность С. Б. Куксину за важные обсуждения и комментарии. Также хочу поблагодарить И. Ф. Потапенко за помощь в подготовке рукописи.

Для цитирования: *А. В. Бобылев.* Дискретные модели кинетических уравнений типа Больцмана// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 15–24. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24

Введение

Цель данной статьи — представить краткий обзор некоторых недавних результатов, связанных с так называемыми кинетическими уравнениями типа Больцмана и их дискретными моделями. Общая идея изучения неклассических кинетических уравнений, таких как квантовое уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека [14, 15] или волновое кинетическое уравнение (см., например, [12,13]) и ссылки в них), как частных случаев общего класса уравнений типа Больцмана было предложено в [2]. Наш подход к этому классу уравнений в некоторой степени близок к более раннему подходу Л. Аркерида [4]. К этому классу уравнений применимы некоторые известные методы, использованные для классического уравнения Больцмана. В частности, обсуждаются построение и свойства дискретных моделей уравнений типа Больцмана. Основное внимание уделено волновому кинетическому уравнению (ВКУ) и тому важному факту, что положительные решения любой нормальной дискретной модели ВКУ стремятся к равновесному распределению при стремлении времени к бесконечности [1]. В статье приводятся формулировки основных результатов и обрисовываются основные идеи доказательств. Полные доказательства будут приведены в публикации [5]. Мы также не обсуждаем в этой статье важный вопрос, связанный с обоснованностью различных уравнений типа Больцмана, т. е. их выводом из некоторой более общей математической модели. Следует отметить, что недавние математические результаты по выводу ВКУ из нелинейного уравнения Шредингера (при наличии случайного силового поля) в [12] выглядят в этом смысле весьма многообещающими.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 мы вводим уравнение Больцмана для твердых сфер и кратко напоминаем его основные свойства. В разделе 2 мы вводим общее кинетическое уравнение типа Больцмана, зависящее от функции четырех действительных переменных $F(x,y;v,w)$. Предполагается, что функция F удовлетворяет некоторым простым соотношениям. Основные свойства этого общего кинетического уравнения обсуждаются в разделах 3 и 4. В разделе 4 показано, что известное волновое кинетическое уравнение и уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека соответствуют различным полиномиальным формам функции F. В разделе 5 рассматривается задача дискретизации общего кинетического уравнения типа Больцмана на основе идей, аналогичных тем, которые используются для построения дискретных скоростных моделей уравнения Больцмана. Важный класс нормальных кинетических моделей представлен и исследован в разделе 6. Основные свойства этих моделей собраны в теореме 1 в разделе 6. Разделы 7 и 8 посвящены дискретным моделям волнового кинетического уравнения. Показано, что такие модели имеют монотонный функционал, аналогичный H-функции Больцмана. Фактически это функция Ляпунова для ОДУ модели. Это свойство позволяет доказать сходимость любого положительного решения этой модели к ее равновесному решению при больших значениях времени. Результаты о существовании, единственности и сходимости модели к равновесию выражены в теореме 2 в разделе 7. Ключевые идеи доказательства кратко объяснены в разделе 8. Краткий обзор результатов, возможных приложений и связанных с ними открытых задач дан в разделе 9.

1. Функции распределения и уравнение Больцмана

Начнем с классической модели пространственно-однородного разреженного газа из твердых сфер. Тогда система характеризуется функцией распределения $f(v,t)$, где $v \in \mathbb{R}^3$ и $t \in \mathbb{R}_+$ обозначают скорость и время соответственно.

Физический смысл этой функции — средняя плотность числа частиц. Тогда среднее число частиц в любом измеримом множестве $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ определяется равенством

$$n_\Delta(t) = \int\limits_\Delta dv f(v,t).$$

Обычно мы предполагаем, что дано начальное условие

$$f(v,0) = f_0(v).$$

Как найти функцию распределения $f(v,t)$ при $t > 0$? Это, в некотором смысле, основная задача кинетической теории. Можно показать, что для некоторых специальных физических систем, таких как разреженные газы, временная эволюция функции распределения $f(v,t)$ описывается так называемым «кинетическим уравнением»

$$f_t = A(f),$$

где $A(f)$ — некоторый нелинейный оператор, действующий на f. Обычно мы предполагаем, что начальная задача имеет единственное решение $f(v,t)$ на некотором интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

В нашем случае временная эволюция $f(v,t)$ описывается уравнением Больцмана для частиц, моделируемых твердыми сферами.

$$f_t(v,t)=Q(f,f)=\frac{d^2}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times S^2} dwd\omega|u|\,[f(v')f(w')-f(v)f(w)],$$

$$u=v-w,\quad \omega\in S^2;$$
$$v'=\frac{1}{2}(v+w+|u|\omega),\quad w'=\frac{1}{2}(v+w-|u|\omega),$$

где d — диаметр частиц.

Для краткости обозначим

$$\langle f,\psi\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv\, f(v)\psi(v),$$

где $\psi(v)$ — произвольная функция скорости $v\in\mathbb{R}^3$, для которой существует интеграл. Тогда получаем следующие основные свойства уравнения Больцмана (см., например, [11]):

1. **Законы сохранения:**

   Масса: $\langle f,1\rangle=\mathrm{const}$,
   Момент: $\langle f,v\rangle=\mathrm{const}$,
   Энергия: $\langle f,|v|^2\rangle=\mathrm{const}$.

2. H**-теорема**:

$$H(f)=\langle f,\ln f\rangle,\qquad \frac{d}{dt}H[f(\cdot,t)]\leqslant 0.$$

3. **Сходимость к равновесию:**

$$f(v,t)\xrightarrow[t\to\infty]{} a\exp(-b|v-u|^2),$$

   где скалярные параметры a и b, а также векторный параметр u могут быть получены из законов сохранения.

2. Обобщение уравнения Больцмана

Введем общий класс кинетических уравнений, включающий в качестве частного случая пространственно-однородное уравнение Больцмана. Для этой цели мы выберем функцию $F(x_1,x_2;x_3,x_4)$ четырех действительных (или комплексных) переменных и предположим, что

$$F(x_1,x_2;x_3,x_4)=F(x_2,x_1;x_3,x_4)=-F(x_3,x_4;x_1,x_2).$$

Затем определим обобщенное кинетическое уравнение типа Больцмана для функции $f(v,t)$ при $v\in\mathbb{R}^d$, $t\in\mathbb{R}_+$ уравнением

$$f_t(v,t)=K[f](v),$$

где обобщенный кинетический оператор K действует только на переменную v. Он определяется формулой

$$K[f](v)=\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} dv_2\,dv_3\,dv_4\;\delta[v+v_2-v_3-v_4]\times$$
$$\times\,\delta\left[|v|^2+|v_2|^2-|v_3|^2-|v_4|^2\right]F[f(v),f(v_2);f(v_3),f(v_4)].$$

Здесь и далее предполагается, что $d\geqslant 2$. Мы можем преобразовать это уравнение к виду [2]:

$$f_t=K[f](v)=2^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{d-1}} dw\,d\omega\,|u|^{d-2}\,F[f(v),f(w);f(v'),f(w')],\tag{2.1}$$

$$\omega\in S^{d-1},\qquad u=v-w,\qquad v'=(v+w+u')/2,$$
$$u'=|u|\omega,\qquad w'=(v+w-u')/2.$$

Если $F(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_3x_4 - x_1x_2$, тогда это уравнение Больцмана. В противном случае мы называем его *уравнением типа Больцмана*. Примеры таких уравнений мы рассмотрим в следующем разделе.

3. Уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека и волновое кинетическое уравнение (ВКУ)

Очевидно, что конкретные операторы K могут иметь разные функции $F(x_1, x_2; x_3, x_4)$. Во всех интересных приложениях функцию F можно представить как разность двух функций

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4) = P(x_3, x_4; x_1, x_2) - P(x_1, x_2; x_3, x_4). \tag{3.1}$$

Существует как минимум три вида кинетических уравнений, представляющих интерес для физики, для которых F имеет структуру (3.1) с разными функциями P.

Вот эти случаи:

(А) Классическое кинетическое уравнение Больцмана

$$P_B(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_1x_2. \tag{3.2}$$

(Б) Квантовое уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека для бозонов (при $\theta = 1$) и фермионов (при $\theta = -1$)

$$P_{NUU}(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_1x_2(1 + \theta x_3)(1 + \theta x_4). \tag{3.3}$$

(В) Волновое кинетическое уравнение (ВКУ)

$$P_W(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_1x_2(x_3 + x_4). \tag{3.4}$$

Математические результаты и соответствующие ссылки по этим уравнениям можно найти в [4, 12, 13].

4. Основные свойства уравнений типа Больцмана

Мы можем легко дать строгое доказательство следующих основных свойств уравнений типа Больцмана.

1. **Законы сохранения** (для любой F)

$$\langle f, 1\rangle = \text{const}, \ \langle f, v\rangle = \text{const}, \ \langle f, |v|^2\rangle = \text{const}, \tag{4.1}$$

где аналогичное обозначение $\langle f, \varphi\rangle$ используется для интегралов по $\mathbb{R}^d$ с произвольными $d = 1, 2, \dots$.

2. **Формализация H-теоремы**

Предположим, что существует функция $p(x)$ такая, что

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4)\,[p(x_3) + p(x_4) - p(x_1) - p(x_2)] \geqslant 0 \tag{4.2}$$

для почти всех $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Тогда мы можем формально ввести обобщенный H-функционал на множестве неотрицательных решений $f(v, t)$ уравнения типа Больцмана по формуле

$$\hat{H}[f(\cdot, t)] = \int_{\mathbb{R}^d} dv I[f(v, t)], \quad I(x) = \int_0^x dy p(y),$$

предполагая сходимость интегралов.

Тогда формальное дифференцирование дает

$$\frac{d}{dt}\hat{H}[f(\cdot, t)] = \langle f_t,\, p(f)\rangle = \langle K(f), p(f)\rangle \leqslant 0.$$

Следовательно, уравнения типа Больцмана могут иметь аналог H-теоремы Больцмана при выполнении условия (4.2) на соответствующую функцию F.

5. Дискретные кинетические модели

Модели уравнения Больцмана с дискретной скоростью имеют долгую историю. В частности, отметим первые такие модели, предложенные Больцманом [7], Карлеманом [10], Бродуэллом [8], Кабанном [9]. Подобная схема построения дискретных моделей может быть применена к любому кинетическому уравнению типа Больцмана. Введем фазовое множество $V \subset \mathbb{R}^d$, содержащее $n \geqslant 4$ точек, и заменим функцию $f(v,t)$ вектором $f(t) \in \mathbb{R}^n$, где

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad f(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}.$$

Здесь неявно предполагается, что $f_i(t)$ аппроксимирует при больших n функцию $f(v,t)$ в точке $v = v_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, n$.

Кинетическое уравнение (2.1) в d-мерном случае заменяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l), \quad \Gamma_{ij}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl} = \Gamma_{kl}^{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{5.1}$$

где постоянные (для данного множества V) параметры Γ_{ij}^{kl} зависят только от $|v_i - v_j| = |v_k - v_l|$ для любых целых значений индексов $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$.

Строгое неравенство $\Gamma_{ij}^{kl} > 0$ возможно только в том случае, если

$$v_i + v_j = v_k + v_l, \quad |v_i|^2 + |v_j|^2 = |v_k|^2 + |v_l|^2.$$

Используя эти условия симметрии для Γ_{ij}^{kl} и связанные с ними условия на F, легко вывести следующее тождество:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) h_i = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l)(h_k + h_l - h_i - h_j),$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — некоторые постоянные. Очевидно, это дискретный аналог аналогичного тождества для кинетического уравнения. Тогда это тождество приводит к законам сохранения

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = \text{const}, \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) v_i = \text{const}, \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) |v_i|^2 = \text{const},$$

аналогичным интегралам (4.1) для кинетического уравнения (2.1).

6. Нормальные дискретные модели и их свойства

Для того чтобы построить дискретную модель, обладающую всеми необходимыми свойствами исходного кинетического уравнения, необходимо наложить некоторые ограничения на множество V и коэффициенты уравнений (5.1).

Определение 1. Модель называется *нормальной*, если она удовлетворяет следующим условиям на множестве V:

(а) все n ее элементов попарно различны и не лежат в линейном подпространстве размерности $d' \leqslant d - 1$ или на сфере в $\mathbb{R}^d$;

(б) множество V не имеет изолированных точек, т. е. для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ существуют такие $1 \leqslant j, k, l \leqslant n$, что $\Gamma_{ij}^{kl} > 0$;

(в) если функциональное уравнение

$$h(v_i) + h(v_j) - h(v_k) - h(v_l) = 0$$

верно для *всех* индексов $(i, j; k, l)$, для которых $\Gamma_{ij}^{kl} > 0$, то существуют такие константы $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, что $h(v) = \alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2$.

Основные свойства нормальных дискретных моделей собраны в следующей теореме [5].

Теорема 1. *Пусть модель*

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad f(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\};$$

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l), \quad \Gamma_{ij}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl},\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

нормальна и существует функция $p(x)$ такая, что выполняется неравенство

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4)\,[p(x_3) + p(x_4) - p(x_1) - p(x_2)] \geqslant 0$$

для всех $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Пусть также

(1) *существуют числа $0 < a < b$ такие, что $p(x)$ непрерывна и строго монотонна при всех $x \in [a, b]$;*

(2) *равенство достигается только при*

$$p(x_3) + p(x_4) - p(x_1) - p(x_2) = 0.$$

Тогда

(а) *существует функция $H(x_1, \dots, x_n)$ такая, что*

$$\frac{d}{dt} H[f_1(t), \dots, f_n(t)] \leqslant 0$$

для любого решения $\{f_i(t) > 0,\ i = 1, \dots, n\}$ модели;

(б) *если*

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) h_i = 0$$

для любого решения $\{f_i(t) > 0,\ i = 1, \dots, n\}$ модели, тогда $h_i = \alpha + \beta \cdot v_i + \gamma |v_i|^2$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}^d$ — некоторые постоянные;

(в) *если $f^{st} = \{f_1^{st}, \dots, f_n^{st}\}$ — некоторое стационарное решение модели, тогда*

$$p(f_i^{st}) = \alpha + \beta \cdot v_i + \gamma |v_i|^2, \quad i = 1, \dots, n$$

для некоторых постоянных $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}^d$.

Некоторые приложения теоремы 1 рассматриваются в следующем разделе.

7. Дискретные модели ВКУ: постановка задачи и формулировка результата

Ниже рассматриваются дискретные модели, где

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_3 x_4 (x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_3 + x_4), \tag{7.1}$$

т. е. модели ВКУ. ОДУ модели записываются как

$$\frac{df}{dt} = Q(f) = Q^+(f) - Q^-(f), \tag{7.2}$$

где

$$f(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\},\ Q^{\pm}(f) = \{Q_1^{\pm}(f), \dots, Q_n^{\pm}(f)\},$$

$$Q^+(f) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} f_k f_l (f_i + f_j), \quad Q^-(f) = f_i B_i(f),$$

$$B_i(f) = \sum_{j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} f_j (f_k + f_l),\ i = 1, \dots, n; \tag{7.3}$$

$$\Gamma_{ij}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl} = \Gamma_{kl}^{ij}, \quad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n.$$

Постоянные $\Gamma_{ij}^{kl} \geqslant 0$ зависят от фазового множества

$$V = \{v_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n\}, \quad d \geqslant 2. \tag{7.4}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнений (7.2), (7.3) и начальных условий

$$f|_{t=0} = f^{(0)} = \{f_1^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}\}, \quad f_i^{(0)} > 0, \quad i = 1, \dots, n; \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)} v_i = 0. \tag{7.5}$$

Последнее ограничение не приводит к потере общности.

Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть дискретная модель* (7.1)–(7.4) *нормальна, т. е. множество V в* (7.4) *и коэффициенты Γ_{ij}^{kl}, $1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n$ удовлетворяют определению* 1.

Пусть также

(1) $v_1 = 0$ *в* (7.4);

(2) *если $v_i \in V$, то $(-v_i) \in V$ для всех $i = 1, \dots, n$.*

Тогда задача Коши для уравнений (7.2), (7.3) *и начальных условий* (7.5) *имеет единственное решение $f(t) = \{f_1(t), \dots f_n(t)\}$ при всех $t > 0$.*

Более того, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$

(а)
$$0 < f_i^{(0)} \exp(-c\,\rho_0^2\, t) \leqslant f_i(t) < \rho_0, \qquad \rho_0 = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)},$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $f^{(0)}$;

(б)
$$\lim_{t\to\infty} f_i(t) = f_i^{st} = a(1 + b\,|v_i|^2)^{-1}, \qquad a\sum_{i=1}^{n}(1 + b|v_i|^2)^{-1} = \rho_0,$$

где

$$b > -M^{-1}, \quad M = \max\{|v_i|^2,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$T_0 = \rho_0^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)} |v_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 + b|v_i|^2)^{-1}|v_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1 + b|v_i|^2)^{-1}}.$$

Легко видеть, что функция $T_0(b)$, определенная равенством, монотонно убывает на интервале $-M^{-1} \leqslant b < \infty$ от своего максимального значения $T_0(-M^{-1}) = M$ до нуля при $b \to \infty$. Поэтому корень $b(T_0)$, определенный в пункте (б) теоремы, единствен.

8. Идея доказательства сходимости к равновесию

Доказательство теоремы 2 основано на простых оценках из пункта (а), законах сохранения, теореме 1 и на том, что уравнения (7.2), (7.3) имеют функцию Ляпунова

$$H(f) = -\sum_{i=1}^{n} \ln f_i.$$

Можно проверить, что $H[f(t)]$ монотонно убывает по $t > 0$ на положительных решениях $f(t)$ уравнений (7.2), (7.3). Более того, можно доказать, что

$$H(f) \geqslant H(f^{st}), \qquad f = \{f_1, \dots, f_n\}$$

для любого f такого, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)} = \rho_0, \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) v_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t)|v_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)}|v_i|^2 = \rho_0 T_0$$

в обозначениях теоремы 2. Более или менее стандартной процедурой (см., например, учебник [3]) доказывается часть (б) теоремы 2.

9. Выводы

1. В статье с единой точки зрения рассмотрен большой класс нелинейных кинетических уравнений типа Больцмана. К этому классу относятся, в частности, такие известные уравнения, как

1. *классическое уравнение Больцмана,*
2. *квантовое уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека,*
3. *волновое кинетическое уравнение, применяемое в теории слабой турбулентности.*

2. Было показано, что все эти уравнения естественно рассматривать как различные формы общего уравнения типа Больцмана. Также были изучены общие свойства (законы сохранения и монотонные функционалы) этого уравнения. По аналогии с дискретными скоростными моделями уравнения Больцмана, введен класс дискретных моделей общего кинетического уравнения и исследованы свойства моделей. Основные свойства моделей описаны в теореме 1.

3. Подробно исследовано долговременное поведение решений дискретных моделей ВКУ. Основные результаты этой части статьи сформулированы в теореме 2. Она включает в себя (а) существование и единственность глобального по времени решения соответствующего набора ОДУ для любых неотрицательных начальных условий и (б) сходимость к единственному (при заданных начальных данных) равновесному решению. Доказательство сходимости к равновесному решению основано на существовании функции Ляпунова. Этот результат доказан для так называемых нормальных моделей, не имеющих ложных законов сохранения. Возможно, аналогичные результаты можно доказать и для дискретных моделей уравнения Нордхейма—Улинга—Уленбека для фермионов, но случай ВКУ по ряду причин выглядит более интересным.

4. Обычно временная эволюция решений нормальных дискретных кинетических моделей в некоторой степени предсказывает поведение соответствующих решений кинетических уравнений. Мы можем с любой заданной точностью аппроксимировать уравнение Больцмана последовательностью дискретных моделей с достаточно большим числом дискретных фазовых точек [6], и то же самое можно доказать для ВКУ. Сходимость к равновесию имеет место для уравнения Больцмана. С другой стороны, аттрактор решений дискретных моделей ВКУ имеет вид $f^{st}(v) = a(1+b|v|^2)^{-1}$. Очевидно, эта функция не интегрируема в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$ ни при каких положительных a и b. Она не может быть аттрактором интегрируемых решений ВКУ. Потому прямая оценка подобного долговременного поведения в этом случае невозможна. Этот вопрос все еще открыт. Мы надеемся, однако, что информация о долговременном поведении решений дискретных моделей ВКУ может оказаться полезной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобылев А. В.* Об одном свойстве дискретных моделей волнового кинетического уравнения// Усп. мат. наук. — 2023. — *78*, № 5. — С. 179-180.
2. *Бобылев А. В., Куксин С. Б.* Уравнение Больцмана и волновые кинетические уравнения// Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2023. — 031.
3. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
4. *Arkeryd L.* On low temperature kinetic theory: spin diffusion, Bose–Einstein condensates, anyons// J. Stat. Phys. — 2013. — *150*. — С. 1063–1079.
5. *Bobylev A. V.* Boltzmann-type kinetic equation and discrete models// ArXiv. — 2023. — 2312.16094 [math-ph].
6. *Bobylev A. V., Palczewski A., Schneider J.* On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models// C. R. Acad. Sci. Ser. I. Math. — 1995. — *320*, № 5. — С. 639–644.
7. *Boltzmann L.* Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unte Gasmolekülen// Wien. Akad. Sitzungsber. — 1872. — *66*. — С. 275–370.
8. *Broadwell J. E.* Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method// J. Fluid Mech. — 1964. — *19*, № 3. — С. 401–414.
9. *Cabannes H.* The Discrete Boltzmann Equation: Theory and Applications. — Berkeley: Univ. California, 1980.
10. *Carleman T.* Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz. — Uppsala: Almqvist and Wiksell, 1957.
11. *Cercignani C.* The Boltzmann Equation and Its Applications. — New York: Springer, 1988.

12. *Dymov A., Kuksin S.* Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: Kinetic limit// Commun. Math. Phys. — 2021. — *382.* — C. 951–1014.
13. *Escobedo M., Velazquez J. J.* On the theory of weak turbulence for the nonlinear Schrödinger equation// Mem. Am. Math. Soc. — 2015. — *238.*
14. *Nordheim L. W.* On the kinetic method in the new statistics and application in the electron theory of conductivity// Proc. R. Soc. London Ser. A. — 1928. — *119.* — C. 689–698.
15. *Uehling E. A., Uhlenbeck G. E.* Transport phenomena in Einstein–Bose and Fermi–Dirac gases// Phys. Rev. — 1933. — *43*, № 7. — C. 552–561.

А. В. Бобылев
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com

UDC 517.958
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24
EDN: ZDOAHT

On discrete models of Boltzmann-type kinetic equations

A. V. Bobylev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The known nonlinear kinetic equations, in particular, the wave kinetic equation and the quantum Nordheim–Uehling–Uhlenbeck equations are considered as a natural generalization of the classical spatially homogeneous Boltzmann equation. To this goal we introduce the general Boltzmann-type kinetic equation that depends on a function of four real variables $F(x, y; v, w)$. The function F is assumed to satisfy certain simple relations. The main properties of this kinetic equation are studied. It is shown that the above mentioned specific kinetic equations correspond to different polynomial forms of the function F. Then the problem of discretization of the general Boltzmann-type kinetic equation is considered on the basis of ideas similar to those used for construction of discrete velocity models of the Boltzmann equation. The main attention is paid to discrete models of the wave kinetic equation. It is shown that such models have a monotone functional similarly to the Boltzmann H-function. The theorem of existence, uniqueness and convergence to equilibrium of solutions to the Cauchy problem with any positive initial conditions is formulated and discussed. The differences in long time behaviour between solutions of the wave kinetic equation and solutions of its discrete models are also briefly discussed.

Keywords: Boltzmann equation, wave kinetic equation, H-theorem, distribution function, Lyapunov function, discrete kinetic models.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-22-1115). I thank S. B. Kuksin for important discussions and comments. I am also grateful to I. F. Potapenko for her help in preparation of the manuscript.

For citation: A. V. Bobylev, “On discrete models of Boltzmann-type kinetic equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 15–24. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24

REFERENCES

1. A. V. Bobylev, "Ob odnom svoystve diskretnykh modeley volnovogo kineticheskogo uravneniya" [On one property of discrete models of the wave kinetic equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2023, **78**, No. 5, 179-180 (in Russian).
2. A. V. Bobylev and S. B. Kuksin, "Uravnenie Bol'tsmana i volnovye kineticheskie uravneniya" [Boltzmann equation and wave kinetic equations], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints Keldysh Inst. Appl. Math.], 2023, **031**, (in Russian).
3. A. N. Tikhonov, A. B. Vasil'eva, and A. G. Sveshnikov, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
4. L. Arkeryd, "On low temperature kinetic theory: spin diffusion, Bose–Einstein condensates, anyons," *J. Stat. Phys.*, 2013, **150**, 1063–1079.
5. A. V. Bobylev, "Boltzmann-type kinetic equation and discrete models," *ArXiv*, 2023, 2312.16094 [math-ph].
6. A. V. Bobylev, A. Palczewski, and J. Schneider, "On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models," *C. R. Acad. Sci. Ser. I. Math.*, 1995, **320**, No. 5, 639–644.
7. L. Boltzmann, "Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unte Gasmolekülen," *Wien. Akad. Sitzungsber.*, 1872, **66**, 275–370.
8. J. E. Broadwell, "Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method," *J. Fluid Mech.*, 1964, **19**, No. 3, 401–414.
9. H. Cabannes, *The Discrete Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Univ. California, Berkeley, 1980.
10. T. Carleman, *Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz*, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1957.
11. C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer, New York, 1988.
12. A. Dymov and S. Kuksin, "Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: Kinetic limit," *Commun. Math. Phys.*, 2021, **382**, 951–1014.
13. M. Escobedo and J. J. Velazquez, "On the theory of weak turbulence for the nonlinear Schrödinger equation," *Mem. Am. Math. Soc.*, 2015, **238**.
14. L. W. Nordheim, "On the kinetic method in the new statistics and application in the electron theory of conductivity," *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1928, **119**, 689–698.
15. E. A. Uehling and G. E. Uhlenbeck, "Transport phenomena in Einstein–Bose and Fermi–Dirac gases," *Phys. Rev.*, 1933, **43**, No. 7, 552–561.

A. V. Bobylev
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com