Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 1–14
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14
EDN: ZXGOMR

ОБ ОЦЕНКЕ БОЯРСКОГО—МЕЙЕРСА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СНОСОМ

Ю. А. Алхутов[1], **Г. А. Чечкин**[2,3,4]

[1] *Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия*
[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия*
[4] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

Аннотация. Установлена повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле для оператора Лапласа с младшими членами, а также приведено доказательство однозначной разрешимости этой задачи.

Ключевые слова: задача Зарембы, оценки Мейерса, теоремы вложения, повышенная суммируемость.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Результаты первого автора в разделе 3 получены в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004), а результаты второго автора в разделе 2 поддержаны грантом РНФ (проект 20-11-20272). Результаты второго автора в разделе 1 частично поддержаны комитетом науки Министерства науки и высшего образования республики Казахстан (грант AP14869553).

Для цитирования: *Ю. А. Алхутов, Г. А. Чечкин.* Об оценке Боярского—Мейерса решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 1–14. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14`

1. Введение

В настоящей работе рассматривается однородная задача Дирихле для неоднородного уравнения Пуассона со сносом. Основной целью является доказательство повышенной суммируемости градиента решения этой задачи в предположении, что правая часть тоже обладает повышенной суммируемостью.

Повышенная суммируемость градиента решений эллиптических уравнений привлекает внимание учёных-математиков на протяжении нескольких десятилетий. В пионерской работе [1] рассмотрен случай линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами в плоской ограниченной области. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи

Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [17]. После этой работы оценки повышенной суммируемости градиента решений общепринято называть *оценками типа Мейерса*, хотя справедливее было бы их называть *оценками Боярского—Мейерса.* Оценка Боярского—Мейрса решения задачи Дирихле в области с липшицевой границей для уравнения p-Лапласа с переменным показателем p, обладающим логарифмическим модулем непрерывности, впервые получена в [19]. Позже в работах [6, 12] этот результат был усилен и распространен на системы эллиптических уравнений с переменным показателем суммируемости. Отметим, что в статье [19] стимулом изучения оценок Мейерса явилась задача о термисторе, дающей совместное описание потенциала электрического поля и температуры (см. [11, 15, 19]). Такого же рода системы возникают и в гидромеханике квазиньютоновых жидкостей.

Также рассматривался вопрос об оценках повышенной суммируемости градиента решения задачи Зарембы — см. работы [4, 7–9], в которых для линейного эллиптического уравнения в дивергентной форме получена оценка повышенной суммируемости градиента решения задачи Зарембы в областях с липшицевой границей и быстрой сменой краевых условий Дирихле и Неймана с повышенным показателем суммируемости, не зависящим от частоты смены краевых условий. Такого рода оценки важны в теории усреднения задач с быстрой сменой краевых условий, они позволяют улучшить скорость сходимости допредельных решений к решению усредненной задачи (см. аналогичную задачу в области, перфорированной вдоль границы, в [10]). Аналогичные оценки для p-лапласиана получены в [5].

Введем соболевское пространство функций $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в ограниченной области D функций по норме

$$\| v \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} = \left(\int\limits_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса

$$\|u\|_{L_2(D)} \leqslant C(n, D) \|\nabla u\|_{L_2(D)}.$$

Настоящая работа посвящена оценкам решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами вида

$$\mathcal{L}u := \Delta u + b \cdot \nabla u = \operatorname{div} f, \qquad f = (f_1, \dots f_n),\ f_j \in L_2(D),\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D), \tag{1.1}$$

заданного в ограниченной липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Здесь вектор-функция $b = (b_1, \dots, b_n)$ такова, что

$$b_j \in L_p(D), \quad p > n,\ j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

При наличии младших слагаемых оценки повышенной суммируемости градиента решений задачи нам не известны.

Под *решением* задачи (1.1) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int\limits_D (f \cdot \nabla \varphi) \, dx \tag{1.3}$$

для всех пробных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (см., например, [3, гл. 3, § 4]).

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Если выполнено условие* (1.2) *и* $f \in \Big(L_{2+\delta_0}(D)\Big)^n$, *где* $\delta_0 > 0$, *то существуют положительные постоянные* $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ *и* C *такие, что для решения задачи* (1.3) *справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leqslant C \int\limits_D |f|^{2+\delta} \, dx, \tag{1.4}$$

где C *зависит только от* δ_0, *размерности пространства* n, *а также от области* D *и* $\|b\|_{L_p(D)}$.

Замечание 1.1. Теорема остаётся в силе, если вместо оператора Лапласа рассмотреть линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка вида

$$\operatorname{div}(a(x)\nabla u).$$

Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\alpha|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \alpha^{-1}|\xi|^2 \text{ для почти всех } x \in D \text{ и для всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы для полноты изложения приводим простое доказательство однозначной разрешимости задачи (1.3), основанное на рассуждениях из [2]. В разделе 3 мы выводим оценку Боярского—Мейерса.

2. Однозначная разрешимость поставленной задачи

В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле в произвольной ограниченной области доказывается для уравнения вида

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(a\nabla u) + b\cdot\nabla u = \operatorname{div} f, \qquad f = (f_1, \dots f_n),\ f_j \in L_2(D),\ u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D), \tag{2.1}$$

где $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, удовлетворяющая (1.5), а b удовлетворяет (1.2). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (1.2) *и* (1.5)*, то задача* (1.1) *однозначно разрешима в* $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$*, и для её решения справедлива оценка*

$$\| \nabla u \|_{L_2(D)} \leqslant C\|f\|_{L_2(D)} \tag{2.2}$$

с постоянной C*, зависящей только от коэффициентов оператора* $\mathcal{L}$*, области* D *и размерности пространства* n*.*

Доказательство основано на вспомогательных утверждениях, которые устанавливаются ниже. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором $\mathcal{L}$, имеющей вид

$$\mathcal{L}(u,v) = \int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int\limits_D b\cdot\nabla u\, v\,dx \tag{2.3}$$

и определённой на функциях $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$.

Лемма 2.1. *Если коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *из* (2.1) *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (1.5)*, то*

$$\mathcal{L}(u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx - C(\alpha,b,n,p)\int\limits_D u^2\,dx. \tag{2.4}$$

Доказательство. В силу условия (1.5) имеем

$$\mathcal{L}(u,u) \geqslant \alpha\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx - \left|\int\limits_D b\cdot\nabla u\, u\,dx\right|. \tag{2.5}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (2.5). По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_D b\cdot\nabla u\,u\,dx\right| &\leqslant \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |b|^2u^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx\Big)^{1/\tilde p},\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\tilde p = \dfrac{2p}{p-2}$, $p > n$. Ясно, что $\tilde p > 2$.

Сначала предположим, что $n > 2$. Для $\tilde q \in (0,2)$ из представления

$$\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx = \int\limits_D |u|^{\tilde q}|u|^{\tilde p-\tilde q}\,dx$$

по неравенству Гёльдера будем иметь

$$\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx \leqslant \Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\tilde q/2}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-\tilde q)/(2-\tilde q)}\,dx\Big)^{(2-\tilde q)/2}.$$

Выберем константу $\tilde q$ из соотношения

$$\frac{2(\tilde p-\tilde q)}{2-\tilde q}=\frac{2n}{n-2}, \tag{2.7}$$

согласно которому

$$\tilde q=\frac{2n-(n-2)\tilde p}{2}. \tag{2.8}$$

Проверим, что $\tilde q\in(0,2)$. Нетрудно видеть, что $\tilde q<2$, поскольку $n>2$. Осталось проверить, что $\tilde q>0$. Для этого (см. (2.8)) достаточно показать неравенство

$$2n-(n-2)\tilde p>0.$$

Имея в виду, что $\tilde p=\dfrac{2p}{p-2}$, заключаем, что

$$\frac{p}{p-2}<\frac{n}{n-2}$$

и, так как изначально $p>n$, требуемое неравенство также выполнено. Таким образом, $\tilde q\in(0,2)$ и из (2.6), (2.7) имеем

$$\Big|\int\limits_D b\cdot\nabla u\,u\,dx\Big| \leqslant \Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{2-\tilde q}{2\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{\tilde q}{2\tilde p}}. \tag{2.9}$$

Далее, по неравенству Коши

$$\begin{gathered}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{2-\tilde q}{2\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{\tilde q}{2\tilde p}} \leqslant\\ \leqslant \varepsilon\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx+\frac{1}{2\varepsilon}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{2-\tilde q}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{\tilde q}{\tilde p}}.\end{gathered} \tag{2.10}$$

В силу неравенства Юнга с учётом равенства (2.7) и равенства $\dfrac{4\tilde p}{p\tilde q}=\dfrac{4}{p-n}$ выводим

$$\begin{gathered}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{2-\tilde q}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{\tilde q}{\tilde p}} \leqslant\\ \leqslant \varepsilon_1\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}+C(\varepsilon_1)\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{\frac{4}{p-n}}\int\limits_D u^2\,dx,\end{gathered}$$

а поскольку по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant C_0\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx,$$

то имеем

$$\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{2-\tilde q}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{\tilde q}{\tilde p}} \leqslant \varepsilon_1 C_0\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx+C(\varepsilon_1,b,n,p)\int\limits_D u^2\,dx. \tag{2.11}$$

Теперь из (2.9)–(2.11) после соответствующего выбора ε_1 получим

$$\Big|\int\limits_D b\cdot\nabla u\,u\,dx\Big| \leqslant 2\varepsilon\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx+C(\varepsilon,b,n,p)\int\limits_D u^2\,dx. \tag{2.12}$$

Выбирая теперь $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{4}$, получаем из (2.12) и (2.5) требуемую оценку.

Покажем теперь неравенство (2.12) при $n = 2$. В этом случае, исходя из (2.6), будем иметь

$$\Big|\int\limits_D b\cdot\nabla u\, u\,dx\Big| \leqslant \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx\Big)^{1/\tilde p}, \tag{2.13}$$

где, как и ранее, $\tilde p = \dfrac{2p}{p-2}$, $p > 2$ и $\tilde p > 2$. Исходя из тождества

$$\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx = \int\limits_D |u||u|^{\tilde p-1}\,dx,$$

по неравенству Гёльдера найдём

$$\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx \leqslant \Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{1/2}.$$

Таким образом, из (2.13) вытекает, что

$$\Big|\int\limits_D b\cdot\nabla u\, u\,dx\Big| \leqslant \Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}}. \tag{2.14}$$

Далее, по неравенству Коши

$$\begin{gathered}\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde p}} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2\varepsilon}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}},\end{gathered} \tag{2.15}$$

и согласно неравенству Юнга с учётом формулы $\dfrac{4\tilde p}{p} = \dfrac{8}{p-2}$ выводим

$$\begin{gathered}\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_1\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p-1}} + C(\varepsilon_1)\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{\frac{8}{p-2}}\int\limits_D u^2\,dx.\end{gathered}$$

Поскольку по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p-1}} \leqslant C_1\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx,$$

то имеем

$$\Big(\int\limits_D |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}}\Big(\int\limits_D u^2\,dx\Big)^{\frac{1}{\tilde p}} \leqslant \varepsilon_1 C_1\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx + C(\varepsilon_1, b, p)\int\limits_D u^2\,dx. \tag{2.16}$$

Из (2.14)–(2.16) после соответствующего выбора ε_1 придём к неравенству (2.12).

Выбирая теперь $\varepsilon = \alpha/4$ в (2.12), из (2.5) придём к требуемой оценке (2.4). Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из* (2.1) *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (1.5), *то для фиксированного $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ отображение $v \mapsto \mathcal{L}(u,v)$, где форма $\mathcal{L}(u,v)$ определена в* (2.3), *является ограниченным линейным функционалом на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и справедлива оценка*

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leqslant C(\alpha, b, n, p)\,\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)}\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)}. \tag{2.17}$$

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1.5) имеем

$$\left|\int_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| \leqslant \alpha^{-1}\|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\|v\|_{\mathring{W}_2^1(D)}. \tag{2.18}$$

Второе слагаемое формы (2.3) оценим по неравенству Гёльдера:

$$\left|\int_D b\cdot\nabla u\,v\,dx\right| \leqslant \|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\left(\int_D |b|^2v^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\left(\int_D |b|^p\,dx\right)^{2/p}\left(\int_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\right)^{\frac{p-2}{2p}}, \tag{2.19}$$

где $p>n$. Поскольку $\dfrac{2p}{p-2}<\dfrac{2n}{n-2}$, то по теореме вложения Соболева

$$\left(\int_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\right)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C_2\|v\|_{\mathring{W}_2^1(D)},$$

и из (2.19), (2.18) приходим к (2.17). Лемма доказана. □

Докажем теперь *принцип максимума* для решений однородной задачи (2.1). Функция $u\in\mathring{W}_2^1(D)$ называется *субрешением* однородной задачи (2.1) в области D, если

$$\int_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_D b\cdot\nabla u\,\varphi\,dx \leqslant 0 \tag{2.20}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi\in\mathring{W}_2^1(D)$. Аналогично определяется *суперрешение* $u\in\mathring{W}_2^1(D)$ в области D, для которого выполнено неравенство

$$\int_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_D b\cdot\nabla u\,\varphi\,dx \geqslant 0$$

для всех неотрицательных функций $\varphi\in\mathring{W}_2^1(D)$.

Лемма 2.3. *Если выполнены условия* (1.2), (1.5) *и функция* $u\in\mathring{W}_2^1(D)$ *является субрешением в области* D, *то*

$$\operatorname*{ess\,sup}_D u\leqslant 0. \tag{2.21}$$

Если же $u\in\mathring{W}_2^1(D)$ *является суперрешением в области* D, *то*

$$\operatorname*{ess\,inf}_D u\geqslant 0. \tag{2.22}$$

Доказательство. Сначала покажем (2.21). Доказательство проводим от противного. Предположим, что $\operatorname*{ess\,sup}_D u>0$. Тогда существует такое число k, что $0<k<\operatorname*{ess\,sup}_D u$. Рассмотрим функцию $v=\max(u-k,0)=(u-k)^+$, которая принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(D)$ и неотрицательна. В силу (2.20) имеем

$$\int_D a\nabla v\cdot\nabla v\,dx\leqslant\int_D b\cdot\nabla v\,v\,dx.$$

Перепишем эту оценку в виде

$$\int_{D\cap\{u>k\}} a\nabla u\cdot\nabla u\,dx\leqslant\int_{D\cap\{u>k\}} b\cdot\nabla u\,v\,dx. \tag{2.23}$$

Сначала предположим, что $n>2$. Пользуясь в правой части (2.23) условием эллиптичности (1.5) и применяя неравенство Гёльдера в правой части, получим

$$\alpha\int_{D\cap\{u>k\}}|\nabla u|^2\,dx\leqslant\left(\int_{D\cap\{u>k\}}|b|^n\,dx\right)^{1/n}\left(\int_{D\cap\{u>k\}}|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_D|v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{2n}{n-2}}. \tag{2.24}$$

Поскольку $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant C\Big(\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx\Big)^{1/2} = C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

и из (2.24) будем иметь

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^n\,dx\Big)^{1/n} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx. \tag{2.25}$$

Если $M = \operatorname*{ess\,sup}\limits_D u = \infty$, то первый множитель в правой части (2.25) стремится к нулю при $k \to \infty$, что приводит к противоречию.

Если же $M < \infty$, то $\nabla u = 0$ почти всюду на множестве $D\cap\{u = M\}$ и оценка (2.25) приобретает вид

$$\alpha \leqslant C\Big(\int\limits_{M_k} |b|^n\,dx\Big)^{1/n},$$

где

$$M_k = \{x \in D:\ k < u(x) < M\},\ \nabla u(x) \neq 0\}.$$

Ясно, что n-мерная мера Лебега множества M_k стремится к нулю при $k \to M$, в силу чего

$$\Big(\int\limits_{M_k} |b|^n\,dx\Big)^{1/n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \to M,$$

и мы вновь приходим к противоречию, что и доказывает (2.21).

Рассмотрим оставшийся случай, когда $n = 2$. Исходя из (2.23), пользуясь условием эллиптичности и применяя в правой части (2.23) неравенство Гёльдера с другими показателями, придём к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{2p}{p-2}}, \tag{2.26}$$

где $p > 2$. При $n = 2$ по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{2p}{p-2}} \leqslant C\Big(\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx\Big)^{1/2} = C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

и из (2.26) приходим к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p\,dx\Big)^{1/p} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx. \tag{2.27}$$

Дальнейшие рассуждения, основанные на (2.27), ничем не отличаются от приведенных выше в случае $n > 2$, что вновь влечёт (2.21).

Оценка (2.22) доказывается аналогично. Нужно только заметить, что если функция u является суперрешением уравнения, то эта же функция со знаком минус будет субрешением. Лемма доказана. $\square$

Следствие 2.1. *При выполнении условий* (1.2) *и* (1.5) *задача Дирихле* (2.1) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы 2.1. Определим для $\sigma > 0$ оператор $\mathcal{L}_\sigma$ формулой $\mathcal{L}_\sigma u = \mathcal{L}u - \sigma u$. Из оценки (2.4) леммы 2.1 следует, что соответствующая оператору $\mathcal{L}_\sigma$ форма

$$\mathcal{L}_\sigma(u,u) = \int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla u\,dx - \int\limits_D b\cdot\nabla u\,u\,dx + \sigma\int\limits_D u^2\,dx$$

при достаточно большом $\sigma = \sigma_0(\alpha, b, n, p)$ будет коэрцитивной, т. е.

$$\mathcal{L}_\sigma(u,u) \geqslant \alpha/2 \int\limits_D |\nabla u|^2\,dx.$$

Отметим, что таком выборе $\sigma = \sigma_0$ билинейная форма

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u,v) = \int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int\limits_D b \cdot \nabla u\, v\,dx + \sigma_0 \int\limits_D uv\,dx \tag{2.28}$$

является ограниченной. Это следует из оценки (2.17), применённой к первым двум слагаемым в правой части (2.28), и оценки

$$\int\limits_D uv\,dx \leqslant \|u\|_{L_2(D)}\|v\|_{L_2(D)} \leqslant C\|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\|v\|_{\mathring{W}_2^1(D)},$$

вытекающей из неравенства Фридрихса. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ является ограниченным и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $H = \mathring{W}_2^1(D)$.

Пусть H^{-1} — сопряженное пространство к H. Определим оператор $\mathfrak{I}_u : H \to H^{-1}$ равенством

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_u v = \int\limits_D uv\,dx, \quad v \in H. \tag{2.29}$$

Покажем, что отображение $\mathfrak{I}_u$ является компактным. Для этого заметим, что отображение $\mathfrak{I}_u$ можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{I}_u = \mathfrak{I}_1 \circ \mathfrak{I}_2. \tag{2.30}$$

Здесь $\mathfrak{I}_2 : H \to L_2(D)$ — естественное вложение. По теореме о компактности вложения Кондрашова—Соболева [2, теорема 7.22] оператор $\mathfrak{I}_2$ является компактным, а отображение $\mathfrak{I}_1 : L_2(D) \to H^{-1}$ определено формулами (2.29) и (2.30). Из того, что оператор $\mathfrak{I}_1$ непрерывен и оператор $\mathfrak{I}_2$ компактен, следует компактность оператора $\mathfrak{I}$.

Уравнение $\mathcal{L}u = l$ для $u \in H$, где l-функционал в пространстве H^{-1}, сопряженном к $H = \mathring{W}_2^1(D)$, эквивалентно уравнению $\mathcal{L}_{\sigma_0}u + \sigma_0\mathfrak{I}_u u = l$. По лемме Лакса—Мильграма (см. [16]) обратный оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^{-1} на H. Поэтому, применяя этот оператор к предыдущему уравнению, получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l. \tag{2.31}$$

Отображение $T = -\sigma_0\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}_u$ в силу компактности $\mathfrak{I}$ также компактно. Следовательно, по альтернативе Фредгольма (см., например, [2, теорема 5.3, § 5.3]) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (2.31), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$. Теперь однозначная разрешимость задачи Зарембы (1.1) вытекает из следствия 2.1 к лемме 2.3.

Перейдём к доказательству оценки (2.2). Для этого определим формально сопряженный для $\mathcal{L}$ оператор $\mathcal{L}^\star$ формулой

$$\mathcal{L}^\star u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u) - \operatorname{div}(b(x)u).$$

Поскольку для соответствующих билинейных форм $\mathcal{L}^\star(u,v) = \mathcal{L}(v,u)$ при $u, v \in \mathring{W}_2^1(D)$, оператор $\mathcal{L}^\star$ сопряжен оператору $\mathcal{L}$ в гильбертовом пространстве H. Заменяя в предыдущем рассуждении $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^\star$, мы видим, что уравнение $\mathcal{L}_\sigma u = l$ эквивалентно уравнению

$$u + (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\mathfrak{I}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l,$$

и сопряженный оператор $T^\star$ компактного отображения $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}$ (см. (2.29)) даётся формулой

$$T_\sigma^\star = (\sigma_0 - \sigma)(\mathcal{L}_{\sigma_0}^\star)^{-1}\mathfrak{I}.$$

Используя теперь теорему о сжимающих отображениях в банаховом пространстве (см., например, [2, теорема 5.1, § 5.1]), мы приходим к следующему утверждению, аналогичному [2, теорема 8.6, § 8.2].

Лемма 2.4. *Если выполнены условия* (1.2) *и* (1.5), *то существует не более чем счётное дискретное множество* $\Sigma \in (-\infty, 0)$ *такое, что если* $\sigma \notin \Sigma$, *то задачи Дирихле для уравнений* $\mathcal{L}_\sigma u = l$ *и* $\mathcal{L}^\star_\sigma u = l$ *однозначно разрешимы в* $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ *для произвольного линейного функционала* l *в пространстве, сопряженном к* $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$.

Для доказательства оценки (2.2) рассмотрим оператор $G_\sigma : H^\star \to H$, определяемый равенством $G_\sigma = \mathcal{L}_\sigma^{-1}$ при $\sigma \notin \Sigma$. Этот оператор естественно назвать *оператором Грина* задачи Дирихле (2.1). Используя альтернативу Фредгольма (см., например, [2, теорема 5.3, § 5.3]), заключаем, что этот оператор является ограниченным, и, следовательно, справедлива оценка (2.2). Теорема 2.1 доказана. □

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1.1 основано на получении обратного неравенства Гёльдера для градиента решения задачи Дирихле (1.1) с последующим применением обобщённой леммы Геринга.

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим через $Q_R^{x_0}$ открытый куб с центром в точке x_0 и рёбрами длиной $2R$, которые параллельны координатным осям. Ниже полагается

$$\fint_{Q_R^{x_0}} f\,dx = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|}\int_{Q_R^{x_0}} f\,dx,$$

где $|E|$ обозначает n-мерную меру множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Далее продолжим функцию u нулём вне области D.

Сначала рассмотрим случай, когда $Q_{3R/2}^{x_0} \subset D$, и выберем в интегральном тождестве (1.3) пробную функцию $\varphi = (u-\lambda)\eta^2$, где

$$\lambda = \fint_{Q_{3R/2}^{x_0}} u,\ dx,$$

а срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(Q_{3R/2}^{x_0})$ такова, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $Q_R^{x_0}$ и $|\nabla\eta| \leqslant CR^{-1}$. Тогда (1.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx = \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx - 2\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta(u-\lambda)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx +\\ + 2\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} f(u-\lambda)\eta\cdot\nabla\eta\,dx + \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta^2 f\cdot\nabla u\,dx.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части тождества (3.1). По неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}\Big|\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant R\Big(\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |b|^2\eta^2\Big(\frac{u-\lambda}{R}\Big)^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant\\ \leqslant R\Big(\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |b|^p\eta^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \Big|\frac{u-\lambda}{R}\Big|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Далее, по неравенству Пуанкаре—Соболева

$$\Big(\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} \Big|\frac{u-\lambda}{R}\Big|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C(n,p)\Big(\int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{1/q}, \quad q = \frac{2np}{n(p-2)+2p} \in (1,2). \tag{3.3}$$

Из (3.3) и (3.2), учитывая, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, найдём

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant C(n,p)R\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{1/q},$$

и по неравенству Коши с $\varepsilon > 0$

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(n,p)}{4\varepsilon}R^2\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}. \tag{3.4}$$

Оценим теперь оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (3.1). Для второго слагаемого получаем

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta(u-\lambda)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(\varepsilon)}{R^2}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2|\nabla\eta|^2\,dx. \tag{3.5}$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} f(u-\lambda)\eta\cdot\nabla\eta\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + \frac{C}{R^2}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{3.6}$$

Для четвертого слагаемого выводим

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta^2 f\cdot\nabla u\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\,dx + C(\varepsilon)\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx. \tag{3.7}$$

В результате, пользуясь (3.1), учитывая последние оценки после соответствующего выбора ε, придём к неравенству

$$\int\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(n,b,p)\Bigg(\frac{1}{R^2}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx + \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + R^2\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}\Bigg),$$

или, поскольку $\dfrac{2n}{q} + 2 - n \geqslant 0$, выводим

$$\fint\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(n,b,p)\Bigg(\frac{1}{R^2}\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx + \fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}\Bigg). \tag{3.8}$$

Далее из неравенства Пуанкаре—Соболева

$$\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant C(n,p)R\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{1/q},\ q = \frac{2np}{n(p-2)+2p} \in (1,2),$$

и из (3.8) найдём

$$\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant C(n,b,p)\Bigg(\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{1/q} + \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |f|^2\,dx\Big)^{1/2}\Bigg). \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $Q^{x_0}_{3R/2} \cap \partial D \neq \varnothing$. В этом случае функция u равна нулю в $Q^{x_0}_{3R/2} \setminus D$. Выбирая в интегральном тождестве (1.3) пробную функцию $\varphi = u\eta^2$ с той же срезающей функцией η, получим

$$\begin{split}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx = \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx - 2\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (\eta u\nabla u\cdot\nabla\eta)\,dx -\\ -2\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} fu\eta\cdot\nabla\eta\,dx - \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (\eta^2 f\cdot\nabla u)\,dx.\end{split}\tag{3.10}$$

Перейдём к оценке первого интеграла в правой части (3.10). Имеем

$$\begin{split}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^2\eta^2\ u^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant\\ \leqslant \Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\eta^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\ dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}}.\end{split}\tag{3.11}$$

Далее заметим, что поскольку $Q^{x_0}_{3R/2}\cap\partial D\neq\varnothing$, имеем $|(\mathbb{R}^n\setminus D)\cap\overline{Q}^{x_0}_{2R}|\geqslant c(D)R^n$ для достаточно малого R. Поэтому по неравенству Соболева

$$\begin{split}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\ dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C\,R\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\ dx\Big)^{\frac1q},\\ \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |u|^2\ dx\Big)^{\frac12} \leqslant C\,R\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\ dx\Big)^{\frac1q}.\end{split}\tag{3.12}$$

Теперь из (3.11) получим

$$\begin{split}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^2\eta^2\ u^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant\\ \leqslant C(n,p)R^{\frac{n(p-2)+2p}{2p}}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\eta^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\ dx\Big)^{\frac1q}\end{split}\tag{3.13}$$

и по неравенству Коши с $\varepsilon>0$ с учётом свойств η выводим

$$\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(n,p)}{4\varepsilon}R^{\frac{n(p-2)+2p}{p}}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}.$$

Или, поскольку $p\geqslant n$, имеем

$$\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(n,p)}{4\varepsilon}\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}.\tag{3.14}$$

Оценки оставшихся слагаемых проводим аналогично (3.5), (3.6) и (3.7). В результате, пользуясь (3.10), учитывая последние оценки, после соответствующего выбора ε получаем оценку (3.8) с $\lambda=0$ вида

$$\fint\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(n,b,p,D)\Big(\frac{1}{R^2}\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} u^2\,dx + \fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |f|^2\,dx + \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}\Big).\tag{3.15}$$

Далее, пользуясь вторым неравенством из (3.12) и неравенством (3.15), вновь приходим к (3.9). Ясно, что оценка (3.9) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области D. Таким образом, оценка (3.9) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Из оценки (3.9), справедливой для всех рассматриваемых кубов $Q_R^{y_0}$, и обобщённой леммы Геринга (см. [13, 14], а также [18, гл. VII]) вытекает, что в предположении $f \in L_{2+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, имеет место оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{2+\delta}(D)} \leqslant C(n, p, b, \delta_0, D)(\|\nabla u\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_{2+\delta}(D)}). \tag{3.16}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.16) с помощью оценки (2.2) теоремы 2.1. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами// Мат. сб. — 1957. — *43*, № 4. — С. 451–503.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н. С.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
4. *Чечкин Г. А., Чечкина Т. П.* Оценка Боярского—Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера// Пробл. мат. анализа. — 2022. — *119*. — С. 107–116.
5. *Чечкина А. Г.* О задаче Зарембы для p-эллиптического уравнения// Мат. сб. — 2023. — *214*, № 9. — С. 144–160.
6. *Acerbi E., Mingione G.* Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacian system// J. Reine Angew. Math. — 2005. — *584*. — С. 117–148.
7. *Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A.* Increased integrability of the gradient of the solution to the Zaremba problem for the Poisson equation// Dokl. Math. — 2021. — *103*, № 2. — С. 69–71.
8. *Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A.* The Meyer's estimate of solutions to Zaremba problem for second-order elliptic equations in divergent form// C. R. Mécanique. — 2021. — *349*, № 2. — С. 299–304.
9. *Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A., Maz'ya V. G.* On the Bojarski–Meyers estimate of a solution to the Zaremba problem// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2022. — *245*, № 2. — С. 1197–1211.
10. *Chechkin G. A.* The Meyers estimates for domains perforated along the boundary// Mathematics. — 2021. — *9*, № 23. — 3015.
11. *Cimatti G., Prodi G.* Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor// Ann. Mat. Pura Appl. — 1988. — *63*. — С. 227–236.
12. *Diening L., Schwarzsacher S.* Global gradient estimates for the $p(\cdot)$-Laplacian// Nonlinear Anal. — 2014. — *106*. — С. 70–85.
13. *Gehring F. W.* The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 265–277.
14. *Giaquinta M., Modica G.* Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems// J. Reine Angew. Math. — 1979. — *311/312*. — С. 145–169.
15. *Howison S. D., Rodriges J. F., Shillor M.* Stationary solutions to the thermistor problem// J. Math. Anal. Appl. — 1993. — *174*. — С. 573–588.
16. *Lax P. D., Milgram A.* Parabolic equations// В сб.: «Contributions to the Theory of Partial Differential Equations». — Princeton: Princeton Univ. Press, 1954. — С. 167–190.
17. *Meyers N. G.* An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1963. — *17*, № 3. — С. 189–206.
18. *Skrypnik I. V.* Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. — Providence: AMS, 1994.
19. *Zhikov V. V.* On some variational problems// Russ. J. Math. Phys. — 1997. — *5*, № 1. — С. 105–116.

Ю. А. Алхутов
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия
E-mail: `yurij-alkhutov@yandex.ru`

Г. А. Чечкин
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: `chechkin@mech.math.msu.su`

UDC 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14
EDN: ZXGOMR

On the Boyarsky–Meyers estimate for the solution of the Dirichlet problem for a second-order linear elliptic equation with drift

Yu. A. Alkhutov[1] **and G. A. Chechkin**[2,3,4]

[1] *Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia*
[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[3] *Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*
[4] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

Abstract. We establish the increased integrability of the gradient of the solution to the Dirichlet problem for the Laplace operator with lower terms and prove the unique solvability of this problem.

Keywords: Zaremba problem, Meyers estimates, embedding theorems, increased integrability.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The results of the first author in section 3 were obtained within the framework of the state assignment of the Vladimir State University (project FZUN-2023-0004), and the results of the second author in section 2 were supported by the grant of the Russian Science Foundation (project 20-11-20272). The results of the second author in section 1 were partially supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant AP14869553).

For citation: Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, "On the Boyarsky–Meyers estimate for the solution of the Dirichlet problem for a second-order linear elliptic equation with drift," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 1–14. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14`

REFERENCES

1. B. V. Boyarsky, "Obobshchennye resheniya sistemy differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka ellipticheskogo tipa s razryvnymi koeffitsientami" [Generalized solutions of a system of first-order differential equations of elliptic type with discontinuous coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1957, **43**, No. 4, 451–503 (in Russian).
2. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order], Nauka, Moscow, 1989 (Russian translation).
3. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
4. G. A. Chechkin and T. P. Chechkina, "Otsenka Boyarskogo—Meyersa dlya divergentnykh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka. Dva prostranstvennykh primera" [Boyarsky–Meyers estimate for second-order divergent elliptic equations. Two spatial examples], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2022, **119**, 107–116 (in Russian).
5. A. G. Chechkina, "O zadache Zaremby dlya p-ellipticheskogo uravneniya" [On Zaremba's problem for a p-elliptic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2023, **214**, No. 9, 144–160 (in Russian).
6. E. Acerbi and G. Mingione, "Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacian system," *J. Reine Angew. Math.*, 2005, **584**, 117–148.

7. Yu. A. Alkhutov and G. A. Chechkin, "Increased integrability of the gradient of the solution to the Zaremba problem for the Poisson equation," *Dokl. Math.*, 2021, **103**, No. 2, 69–71.
8. Yu. A. Alkhutov and G. A. Chechkin, "The Meyer's estimate of solutions to Zaremba problem for second-order elliptic equations in divergent form," *C. R. Mécanique*, 2021, **349**, No. 2, 299–304.
9. Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, and V. G. Maz'ya, "On the Bojarski–Meyers estimate of a solution to the Zaremba problem," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2022, **245**, No. 2, 1197–1211.
10. G. A. Chechkin, "The Meyers estimates for domains perforated along the boundary," *Mathematics*, 2021, **9**, No. 23, 3015.
11. G. Cimatti and G. Prodi, "Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor," *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1988, **63**, 227–236.
12. L. Diening and S. Schwarzsacher, "Global gradient estimates for the $p(\cdot)$-Laplacian," *Nonlinear Anal.*, 2014, **106**, 70–85.
13. F. W. Gehring, "The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping," *Acta Math.*, 1973, **130**, 265–277.
14. M. Giaquinta and G. Modica, "Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems," *J. Reine Angew. Math.*, 1979, **311**/**312**, 145–169.
15. S. D. Howison, J. F. Rodriges, and M. Shillor, "Stationary solutions to the thermistor problem," *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, **174**, 573–588.
16. P. D. Lax and A. Milgram, "Parabolic equations," In: *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1954, pp. 167–190.
17. N. G. Meyers, "An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations," *Ann. Sc. Norm. Super. Cl. Pisa Sci.*, 1963, **17**, No. 3, 189–206.
18. I. V. Skrypnik, *Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*, AMS, Providence, 1994.
19. V. V. Zhikov, "On some variational problems," *Russ. J. Math. Phys.*, 1997, **5**, No. 1, 105–116.

Yu. A. Alkhutov
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia
E-mail: `yurij-alkhutov@yandex.ru`

G. A. Chechkin
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: `chechkin@mech.math.msu.su`