Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 712–725
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725
EDN: ZSASZP

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО

О. В. Солонуха

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Аннотация. Исследуется нелинейное параболическое дифференциальное уравнение в ограниченной многомерной области с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского. Доказаны теоремы существования периодического по времени обобщенного решения. Достаточные условия существования обобщенных решений содержат либо алгебраическое условие эллиптичности, либо алгебраическое условие сильной эллиптичности для вспомогательного дифференциально-разностного оператора.

Ключевые слова: параболическое дифференциальное уравнение, нелокальные краевые условия типа Бицадзе—Самарского, оператор сдвигов по пространственным переменным, псевдомонотонный оператор.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор благодарит рецензента за замечания, способствовавшие улучшению работы. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *О. В. Солонуха.* О существовании периодических по времени решений нелинейных параболических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 712–725. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725

Введение

Краевые задачи с нелокальными условиями на границе области рассматриваются с 30-х годов XX века, см. работы Т. Карлемана [19] и др. В данной работе рассмотрено параболическое дифференциальное уравнение с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского: нелокальные краевые условия заданы с помощью сдвигов по пространственным переменным в ограниченной области многомерного пространства. Впервые дифференциальные уравнения с подобными нелокальными условиями были рассмотрены в [2]. С использованием метода компактности для модельной задачи было доказано существование единственного решения. В дальнейшем задачей Бицадзе—Самарского занимались многие математики, в частности, с помощью метода компактности были получены регулярные решения задач Бицадзе—Самарского для ряда линейных параболических уравнений (со многими пространственными переменными) и систем (с одной пространственной переменной) в цилиндрических областях с негладкими боковыми границами, даны интегральные представления решений, см., например, [1,6,18] и библиографию. Однако в ряде случаев требовался иной метод исследования. В 80-е годы проблема Бицадзе—Самарского [10] для линейных эллиптических уравнений была изучена А. Л. Скубачевским с помощью перехода к эквивалентному дифференциально-разностному уравнению, см. [11, 20]. Используя дополнительно к методу А. Л. Скубачевского метод монотонности, можно исследовать нелинейные эллиптические уравнения с нелокальными краевыми условиями, см. [12, 15], а также линейные и нелинейные параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского, см. [13–15,21,23]. В данной работе более подробно рассмотрим вопрос существования периодического по времени решения параболического нелинейного уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского.

1. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geqslant 3$); $Q = (0,d)$ для $n = 1$. Определим цилиндр $\Omega_T := Q \times (0,T)$. Все функции действительнозначные. В цилиндре Ω_T рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_t w(x,t) - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \partial_i A_i(x,t,w,\nabla w) + A_0(x,t,w,\nabla w) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \Omega_T), \tag{1.1}$$

где A_i, $i = 0,1,\ldots,n$, — вещественнозначные нелинейные[1] функции, с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} w|_{\Gamma^T_{rl}} &= \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} w|_{\Gamma^T_{rj}} && (r \in B,\ l = J_0+1,\ldots,J), \\ w|_{\Gamma^T_{rl}} &= 0 && (r \notin B,\ l = 1,\ldots,J), \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где множество $\Gamma^T = \{\Gamma^T_{rl}\}$ определено следующим образом.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов $\{h\}$ с целочисленными (или соизмеримыми) координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \Big(\bigcup\limits_{h\in M} (\partial Q + h)\Big)$. Множество Q_r называется *подобластью*. Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r $(r = 1,2,\ldots)$ называется *разбиением* области Q.

Условие 1. *Пусть* $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{h_1,h_2\in M} \Big\{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\Big\}$ *удовлетворяет условию* $\operatorname{mes}_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$.

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$. Если $(\Gamma_\rho + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ для некоторого $h \in M$, то или $\Gamma_\rho + h \subset Q$, или существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$, см. [20, § 7]. То есть множества $\big\{\Gamma_\rho + h : \Gamma_\rho + h \subset \overline{Q},\ \rho = 1,2,\ldots,\ h \in M\big\}$ могут быть разбиты на классы. Множества $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h \in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;
2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ однонаправлены.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r — номер класса, j — номер элемента в классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Обозначим теперь $\Gamma^T_{rl} := \Gamma_{rl} \times (0,T)$.

Обозначим через B множество индексов тех классов множеств, которые имеют элементы внутри области, т. е. если $r \in B$, то существует $\Gamma_{rj} \subset Q$, $\Gamma^T_{rj} \subset \Omega_T$. Соответственно, если $r \notin B$, то $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$, $\Gamma^T_{rj} \subset \partial Q \times (0,T)$. Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1},\ldots,\Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r,J_0+1},\ldots,\Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r))$. Как известно, см. [20, § 7], для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$. Более того, если $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, то $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$ для любых пар $(s_1,l_1) \neq (s,l)$; и для каждого $r = 1,2,\ldots$ существует единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1,\ldots,N(s))$ (с точностью до перенумеровки).

[1]Если A_i линейны, то в случае их M-периодичности теоремы существования и единственности решения см. в [14, 21]. Напомним, A_i *M-периодичны*, если $A_i(x+h,t,\xi) = A_i(x,t,\xi)$ для всех $h \in M$, $x \in Q$, $x+h \in Q$. Если условие M-периодичности не выполнено, то можно применять [14, теорема 2] или результаты этой работы.

Условие 2. *Для каждой подобласти* Q_{sl} $(s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s))$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $G_{sl} \subset Q_{sl}$ *с границей* $\partial G_{sl} \in C^1$ *такое, что* $\mathrm{mes}_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$, $\mathrm{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

Пусть $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$. $L_p(0, T; W_p^1(Q))$ — соболевское пространство функций, интегрируемых в степени p вместе с 1-ми производными. Обозначим

$$L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) := \left\{ u \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : u|_{x \in \partial Q} = 0 \text{ для п. в. } t \in (0, T) \right\},$$

$$\mathcal{V} := L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T), \qquad \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} |\partial_i u(x, t)|^p \, dxdt \right)^{1/p}.$$

Тогда $\mathcal{V}$ — рефлексивное банахово пространство, причем при $p \in [2, \infty)$ $\mathcal{V} = L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q))$, а сопряженным к нему является пространство $\mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$. При $p \in (1, 2)$

$$\|u\|_{\mathcal{V}} = \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + \|u\|_{L_2(\Omega_T)},$$

а сопряженным к $\mathcal{V}$ является пространство $\mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T)$. Подробнее эти пространства описаны в [5, п. 5, § 1, гл. IV] и др. Также будем рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$W = \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*\} \tag{1.3}$$

с нормой $\|u\|_W = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$, где $\partial_t u$ — производная элемента $u \in \mathcal{V}$ в смысле распределений со значениями в $\mathcal{V}^*$. Аналогично введем пространство

$$W_\gamma = \{w \in \mathcal{V}_\gamma : \partial_t w \in \mathcal{V}^*\}, \quad \text{где} \quad \mathcal{V}_\gamma := L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T), \tag{1.4}$$

$$L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) := \left\{ w \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : w \text{ удовлетворяет } (1.2) \right\}.$$

Как известно, $W \subset C(0, T; L_2(Q))$, см. [5, теорема 1.17, гл. IV], аналогично, $W_\gamma \subset C(0, T; L_2(Q))$, поэтому $w|_t$ имеет смысл, $w|_t \in L_2(Q)$. Будем также полагать, что $f \in \mathcal{V}^*$.

Периодические по t решения (1.1), (1.2) должны удовлетворять условию

$$w|_{t=0} = w|_{t=T}. \tag{1.5}$$

Рассматривая производную по t как распределение, введем неограниченный оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \to \mathcal{V}^*$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\partial_t) = W_\gamma(T) := \{w \in \mathcal{V}_\gamma : \partial_t w \in \mathcal{V}^*, \, w|_{t=0} = w|_{t=T}\}. \tag{1.6}$$

Определим оператор $A : \mathcal{V}_\gamma \to \mathcal{V}^*$ по формуле

$$\langle Aw, v \rangle = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x, t, w, \nabla w) \, \partial_i v(t, x) \, dx \, dt \quad \forall v \in \mathcal{V}, \tag{1.7}$$

здесь и ниже $\partial_0 v := v$.

Определение 1.1. Функция w называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2), (1.5), если она удовлетворяет операторному уравнению

$$\partial_t w + Aw = f, \qquad w \in W_\gamma(T). \tag{1.8}$$

2. Разностный оператор и изоморфизм пространств

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\{a_h : h \in \mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор $R : L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$:

$$Ru(t, x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h, t), \tag{2.1}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$, здесь $I_Q : L_2(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ — оператор продолжения функций из $L_2(\Omega_T)$ нулем в $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0, T)$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \to L_p(\Omega_T)$ —

оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ на Ω_T. Для исследования свойств оператора R_Q введем матрицы $R_s = \{r^s_{ml}\}_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)}$:

$$r^s_{ml} = \begin{cases} a_h & (h = h_{sl} - h_{sm} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sl} - h_{sm} \notin \mathcal{M}), \end{cases} \tag{2.2}$$

где h_{sm} определяется условием[1] $Q_{sm} = Q_{s1} + h_{sm}$. Из ограниченности области Q и формулы (2.2) следует, что множество различных матриц R_s конечно, $\dim R_s = N(s) < \infty$.

Пусть $\Omega_{s1} = Q_{s1} \times (0,T)$. Изоморфизм $U_s : L_p(\Omega_T) \to L_p^N(\Omega_{s1})$ задан по формуле $(U_s u)_l(x,t) = u(x+h_{sl},t)$. Оператор $R_{Qs} : L_p^N(\Omega_{s1}) \to L_p^N(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_s, при этом $R_Q = \sum\limits_s U_s^{-1} R_s U_s P_s$, где P_s — проектор на $\bigcup\limits_l Q_{sl} \times (0,T)$, см. [20, лемма 8.6] (или [11, лемма 2.6]). Более подробно построение и свойства операторов R_Q и R_{Qs} см. в [11,13,20,23].

Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из R_s $(s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть e^r_j $(j = 1,\dots,J(r))$ — j-ая строка матрицы размерности $J \times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J - J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 2.1. Мы говорим, что матрицы R_s *соответствуют краевым условиям* (1.2), если выполнено условие 3.

Условие 3. *Существует набор* $\{a_h \in \mathbb{R} : h \in \mathcal{M}\}$ *такой, что для любого* $s = 1,2,\dots$ *матрицы* R_s *невырождены, а также для всех* $r \in B$ *и* $s = s(r)$ *имеют решения системы линейных уравнений*

$$e^r_l = \sum_{1\leqslant j\leqslant J_0} \gamma^r_{lj} e^r_j \qquad (l = J_0+1,\dots,J). \tag{2.3}$$

Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов.

Теорема 2.1 (см. [23, теорема 1])**.** *Предположим, что выполнены условия* 1–3, *а соответствующие матрицы* R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены. Тогда существует множество* $\gamma = \{\gamma^r_{ml}\}$ *такое, что оператор* $R_Q : L_p(0,T; \mathring{W}^1_p(Q)) \to L_2(0,T; W^1_{p,\gamma}(Q))$ — *изоморфизм.*

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнены условия* 1–3, *а соответствующие матрицы* R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены. В этом случае* $w \in W_\gamma(T)$ *является обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2), (1.5) *тогда и только тогда, когда существует решение операторного уравнения*

$$\partial_t R_Q u + A R_Q u = f, \qquad u \in W(T) := \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*,\ u|_{t=0} = u|_{t=T}\}, \tag{2.4}$$

причем $w = R_Q u$.

Доказательство. Так как выполнены условия 1–3, то существует разностный оператор $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q)) \to L_p(0,T;W^1_{p,\gamma}(Q))$, являющийся изоморфизмом, см. теорему 2.1. Кроме того, $R_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ невырожденный, т. е. $R_Q : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_\gamma$ — также изоморфизм. Таким образом, для каждого $w \in W_\gamma$ существует единственный элемент $u \in \mathcal{V}$ такой, что $w = R_Q u$, $u = R_Q^{-1} w$.

Покажем, что $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in \mathcal{V}^*$ при $\partial_t u \in \mathcal{V}^*$. Сначала покажем, что если $u \in L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))$, $\partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))$, то $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))$. Линейный оператор $R_Q : L_q(\Omega_T) \to L_q(\Omega_T)$ ограничен, см. [22, лемма 4]. Для любого $u \in L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))$ такого, что $\partial_t u \in L_q(\Omega_T)$, имеем, что $R_Q \partial_t u \in L_q(\Omega_T)$. Выполнено $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u$ по построению. В силу непрерывности вложения пространств $L_q(\Omega_T) \subset L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))$ для любого $u \in W$ получаем, что существует последовательность $\{u_n\} \subset W$ такая, что $L_q(\Omega_T) \ni \partial_t u_n \to \partial_t u$ в $L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))$. Кроме того, $R_Q \partial_t u = \lim\limits_{n\to\infty} R_Q \partial_t u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \partial_t R_Q u_n = \partial_t R_Q u$ в силу замкнутости графика линейного ограниченного оператора R_Q.

[1]Напомним, что разбиение $\overline{Q} = \bigcup\limits_{s,m} \overline{Q_{sm}}$ и множество сдвигов $\{h_{sm}\}$ согласовано с краевыми условиями (1.2).

Рассмотрим общий случай. Если $\partial_t u \in \mathcal{V}^*$, то существуют $f_1 \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и $f_2 \in L_2(\Omega_T)$ такие, что $\partial_t u = f_1 + f_2$. Тогда $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u = R_Q f_1 + R_Q f_2 \in \mathcal{V}^*$, поскольку $R_Q f_1 \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, см. выше, и $R_Q f_2 \in L_2(\Omega_T)$ по построению оператора $R_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$. То есть $R_Q \partial_t u = \partial_t w \in \mathcal{V}^* = L_q(0,T;W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T)$.

Поскольку оператор $R_Q : C(0,T;L_2(Q)) \to C(0,T;L_2(Q))$ также невырожден, то значения функций $u|_{t=0} = R_Q^{-1} w|_{t=0}$ и $u|_{t=T} = R_Q^{-1} w|_{t=T}$ определены однозначно, т. е. $w|_{t=0} = w|_{t=T}$ тогда и только тогда, когда $u|_{t=0} = u|_{t=T}$. □

3. Максимальная монотонность оператора $\partial_t R_Q$

Определение 3.1. Оператор $\Lambda : \mathcal{V} \supset \mathcal{D}(\Lambda) \to \mathcal{V}^*$ *монотонен*, если

$$\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Lambda).$$

Плотно определенный, монотонный оператор Λ *максимально монотонен*, если не существует нетривиального расширения данного оператора, сохраняющего монотонность.

Как известно, линейный оператор ∂_t с областью определения $\mathcal{D}(\partial_t) = W(T)$ максимально монотонен, и $\partial_t^* = -\partial_t$, см. [8, гл. 3, п. 2.2]. Для доказательства максимальной монотонности оператора $\partial_t R_Q$ используем критерий, доказанный, в частности, в [8, лемма 1.1, гл. 3]: в рефлексивных, строго выпуклых со своим сопряженным пространствах максимальная монотонность линейного оператора Λ эквивалентна условию

$$\langle \Lambda u, u \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Lambda), \qquad \langle \Lambda^* u, u \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Lambda^*). \tag{3.1}$$

Обозначим через R_Q^* сопряженный R_Q оператор. Выделим симметрическую и кососимметрическую части оператора: $R_Q^{sym} = \dfrac{1}{2}(R_Q + R_Q^*)$ и $R_Q^{sk} = \dfrac{1}{2}(R_Q - R_Q^*)$.

Лемма 3.1. *Оператор $\partial_t R_Q : W(T) \to \mathcal{V}^*$ максимально монотонен.*

Доказательство. По построению $\mathcal{D}(\partial_t R_Q) = W(T) \subset W$, $\mathcal{D}(R_Q^*) = \mathcal{D}(R_Q)$. Кроме того,

$$(\partial_t R_Q)^* = R_Q^* \partial_t^* = \partial_t^* R_Q^* = -\partial_t R_Q^*.$$

То есть $\mathcal{D}(\partial_t R_Q^*) = W(T)$. Заметим, что

$$(R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = \big(u(t), R_Q^* u(t)\big)_{L_2(Q)} = \Big(R_Q^{sym} u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)}.$$

Более того, согласно правилам дифференцирования,

$$\partial_t (R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = (\partial_t R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} + (R_Q u(t), \partial_t u(t))_{L_2(Q)} =$$
$$= (R_Q \partial_t u(t), u(t))_{L_2(Q)} + \big(u(t), R_Q^* \partial_t u(t)\big)_{L_2(Q)} = 2\Big(\partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)}.$$

Поскольку $\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u \rangle = 0$ и $u|_{t=T} = u|_{t=0}$, получаем, что

$$\langle \partial_t R_Q u, u \rangle = \langle \partial_t R_Q^{sym} u, u \rangle = \int\limits_0^T \Big(\partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)} dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^T \partial_t (R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} dt =$$
$$= \frac{1}{2} (R_Q u(T), u(T))_{L_2(Q)} - \frac{1}{2} (R_Q u(0), u(0))_{L_2(Q)} = 0.$$

С другой стороны,

$$\langle (\partial_t R_Q)^* u, u \rangle = -\langle \partial_t R_Q^* u, u \rangle = -\langle \partial_t R_Q^{sym} u, u \rangle = 0.$$

Условие (3.1) для оператора $\partial_t R_Q$ выполнено. □

4. Существование обобщенного решения. Условие эллиптичности

С 60-х годов прошлого века многими математиками рассматривались нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, см. [8] и библиографию. При этом ключевую роль играли псевдомонотонные операторы, принадлежность к классу которых определяли условия эллиптичности и коэрцитивности нелинейного дифференциального оператора. В данной работе мы рассматриваем уравнение с нелинейным дифференциально-разностным оператором и будем использовать условия эллиптичности и коэрцитивности для этого оператора. Подробно доказательства свойств нелинейных дифференциально-разностных операторов, удовлетворяющих алгебраическому условию эллиптичности, см. в [16].

Определение 4.1. Оператор $\mathcal{A}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}^*$ *деминепрерывен*, если он непрерывен из сильной топологии $\mathcal{V}$ в слабую топологию $\mathcal{V}^*$. Оператор $\mathcal{A}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}^*$ *ограничен*, если образ ограниченного множества ограничен.

Оператор $\mathcal{A}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}^*$ *коэрцитивен*, если существует элемент $u_0\in\mathcal{V}$ такой, что

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{V}}\to\infty}\|u\|_{\mathcal{V}}^{-1}\langle\mathcal{A}u,u-u_0\rangle=\infty. \tag{4.1}$$

Определение 4.2. Пусть $u_n\rightharpoonup u$ слабо в W и

$$\varlimsup_{n\to\infty}\langle\mathcal{A}u_n,u_n-u\rangle\leqslant 0. \tag{4.2}$$

Если при этом

$$\varliminf_{n\to\infty}\langle\mathcal{A}u_n,u_n-\xi\rangle\geqslant\langle\mathcal{A}u,u-\xi\rangle\quad\forall\xi\in\mathcal{V}, \tag{4.3}$$

то оператор $\mathcal{A}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}^*$ называется *псевдомонотонным*[1] *на* W.

Будем использовать матрицы $\zeta\in\mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$; обозначим через $\zeta_{\cdot i}$ i-й столбец ζ, а через $\zeta_{l\cdot}$ обозначим l-ю строку ζ.

Теорема 4.1. *Пусть* $p\in(1,\infty)$, R_s *и* R_{s0} $(s=s(r),r\in B)$ *невырождены. Предположим, что справедливы условия:*

(A1) **Условие интегрируемости**[2]. $A_i(x,t,\xi)$, $i=0,1,\dots,n$, — *функции типа Каратеодори, т. е.* A_i *измеримы по* x *и* t *для всех* $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}$ *и непрерывны по* $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}$ *для п. в.* $(x,t)\in\overline{\Omega_T}$; *более того, для п. в.* $(x,t)\in\overline{\Omega_T}$ *и любых* $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}$ *существуют* $c_1>0$, $g_1\in L_q(\Omega_T)$ *такие, что*

$$|A_i(x,t,\xi)|\leqslant g_1(x,t)+c_1\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^{p-1},\qquad i=0,\dots,n. \tag{4.4}$$

(A2) **Условие коэрцитивности.** *Для всех* s, *п. в.* $(x,t)\in\overline{Q_{s1}}\times[0,T]$ *и любых* $\zeta\in\mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ *существуют* $\hat{p}\in(1,p)$, $c_2>0$ *и* $c_3,c_4\in\mathbb{R}$ *такие, что*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{0\leqslant i\leqslant n}A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})\left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l\geqslant c_2\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}|^p-c_3\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}|\zeta_{l0}|^{\hat{p}}-c_4. \tag{4.5}$$

(A3) **Условие эллиптичности.** *Для всех* s, *п. в.* $(x,t)\in\overline{Q_{s1}}\times[0,T]$ *и любых* $\zeta,\eta\in\mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l>0\qquad\text{при}\quad\eta\neq\zeta. \tag{4.6}$$

Тогда для любого $f\in\mathcal{V}^*$ *существует обобщенное решение* $u\in W(T)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.5), *а множество решений слабо компактно в* $W(T)$.

---

[1] В [8] используется термин *псевдомонотонный на* $\mathcal{D}(\Lambda)$, где $\Lambda=\partial_t$.

[2] Условие интегрируемости (A1) является стандартным (с небольшими вариациями) для построения интегрального представления дифференциального оператора, см. [5, 7, 8] и др. Благодаря этому условию корректно задана интегральная форма

$$\langle A_Ru,v\rangle=\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}A_i(x,t,R_Qu,\partial_1R_Qu,\dots,\partial_nR_Qu)\partial_iv\,dx\,dt\qquad\forall u,v\in\mathcal{V};$$

здесь и ниже $\partial_0v:=v$.

Доказательство. В силу невырожденности оператора R_Q и условий (A1)–(A3) оператор A_R ограничен, деминепрерывен, коэрцитивен и псевдомонотонен на W, см. [16, леммы 4, 5 и 8]. Кроме того, оператор $\partial_t R_Q : W(T) \to \mathcal{V}^*$ максимально монотонен, см. лемму 3.1. Согласно [8, теорема 1.1, гл. 3] существует решение $u \in W(T)$ операторного уравнения (2.4). Множество решений уравнения (2.4) ограничено в силу коэрцитивности оператора $\partial_t R_Q + A_R$ и слабо компактно в $W(T)$ в силу псевдомонотонности на W оператора $\partial_t R_Q + A_R$. Значит, в силу ограниченности оператора R_Q и согласно теореме 2.2, множество решений $\{w = R_Q u\} \subset W_\gamma(T)$ операторного уравнения (1.8) непусто и слабо компактно. □

5. Существование обобщенного решения. Условия сильной эллиптичности

В этом разделе будут рассмотрены дифференциально-разностные операторы, удовлетворяющие более сильному условию: алгебраическому условию сильной эллиптичности. С алгебраическим условием сильной эллиптичности связывают классы сильно монотонных операторов, а также операторов с полуограниченной вариацией, см. [3, 4]. Эти свойства важны при изучении проблем гладкости решения, единственности решения, а также используются в регуляризационных схемах. Условие сильной эллиптичности более вариативно, поскольку в правой части, в частности, может стоять достаточно произвольный положительно определенный полином, а левую часть можно выбирать в зависимости от дифференцируемости функций A_i. В данной работе будут рассмотрены наиболее простые варианты[1] условия сильной эллиптичности при $p \in [2, \infty)$.

Определение 5.1. Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ называется *оператором с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция C такая, что для любых $u, y \in W$, $\|u\|_{\mathcal{V}} \leqslant r$, $\|y\|_{\mathcal{V}} \leqslant r$, справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}y, u - y\rangle \geqslant -C(r; \|u - y\|'_W), \tag{5.1}$$

где $\tau^{-1}C(r, \tau h) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r, h > 0$, а $\|\cdot\|'_W$ — компактная полунорма относительно $\|\cdot\|_W$ и непрерывная относительно $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$.

В качестве $\|\cdot\|'_W$ удобно рассмотреть $\|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$. Компактность вложения $W \subset L_p(\Omega_T)$ известна, см., например, [8, гл. 3, п. 2, (2.16)] и [8, гл. 1, п. 5, теорема 5.1].

Теорема 5.1. *Пусть $p \in [2, \infty)$, R_s и R_{s0} $(s = s(r), r \in B)$ невырождены. Предположим, что справедливы условия интегрируемости и коэрцитивности* (A1)-(A2), *а также выполнены*:

(A3) **Условие сильной эллиптичности.** *Для всех s, п. в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = \zeta_{l0} \neq 0$, существует константа $\hat{\Upsilon} > 0$ такая, что*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, t, \eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_l \geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p. \tag{5.2}$$

(A4) **Условие локальной липшицевости.** *Функции $A_i(x,t,\xi)$ $(i = \overline{1,n})$ локально липшицевы по ξ_0, $A_0(x,t,\xi)$ локально липшицева по ξ_j $(j = \overline{0,n})$ с константами Липшица Ψ, т. е. существует $\varepsilon > 0$ и функция типа Каратеодори[2] Ψ такие, что для любых $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(|\delta| = \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n} |\delta_j| = |\delta_k| < \varepsilon)$*

$$|A_i(x,t,\xi + \delta) - A_i(x,t,\xi)| \leqslant \Psi(x,t,\xi)|\delta_k|, \tag{5.3}$$

$$|\Psi(x,t,\xi)| \leqslant g_\Psi(x,t) + \widehat{\Psi} \sum_{0\leqslant j\leqslant n} |\xi_j|^{p-2}, \tag{5.4}$$

где $\widehat{\Psi} > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$, $q' = p/(p-2)$ при $p > 2$ и $q' = \infty$ при $p = 2$.

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}^* = L_q(0,T; W_q^{-1}(Q))$ существует обобщенное решение $u \in W(T)$ задачи (1.1), (1.2), (1.5), *а множество решений слабо компактно в $W(T)$.*

[1] Случай $p \in (1, 2)$ позволяет упростить некоторые условия, но требует более сложного доказательства.

[2] $\Psi(x,t,\xi)$ измерима по x и t для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывна по $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п. в. $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$.

Доказательство. В силу невырожденности оператора R_Q и условий (A1)–(A3) оператор A_R ограничен, деминепрерывен и коэрцитивен, см. [16, леммы 4 и 5]. Кроме того, A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией, см. [17, лемма 4.1], т. е. является псевдомонотонным на W, см. [9, предложение 4.2.2], например. Кроме того, оператор $\partial_t R_Q : W(T) \to \mathcal{V}^*$ максимально монотонен, см. лемму 3.1. Согласно [8, гл. 3, теорема 1.1], существует решение $u \in W(T)$ операторного уравнения (2.4). Множество решений уравнения (2.4) ограничено в силу коэрцитивности оператора $\partial_t R_Q + A_R$ и слабо компактно в $W(T)$ в силу псевдомонотонности на W оператора $\partial_t R_Q + A_R$. Значит, в силу ограниченности оператора R_Q и согласно теореме 2.2, множество решений $\{w = R_Q u\} \subset W_\gamma(T)$ операторного уравнения (1.8) непусто и слабо компактно. ☐

От условия коэрцитивности (A2) можно отказаться, если ограничить рост функций с производными младшего порядка.

Теорема 5.2. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены. Пусть справедливы условия* (A3)-(A4). *Кроме того, предположим что справедливо условие*:

(A1') **Условие роста.** $A_i(x, t, \xi)$, $i = 0, 1, \dots, n$ — *функции типа Каратеодори*; *более того, для п. в.* $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$ *и любых* $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *существуют* $p' \in (1, p)$, $c_1 > 0$ *и* $g_1 \in L_q(\Omega_T)$ *такие, что*

$$|A_i(x, t, \xi)| \leqslant g_1(x, t) + c_1 |\xi_0|^{p'-1} + c_1 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^{p-1}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{5.5}$$

$$|A_0(x, t, \xi)| \leqslant g_1(x, t) + c_1 \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^{p'-1}. \tag{5.6}$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ *существует обобщенное решение* $u \in W(T)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.5), *а множество решений слабо компактно в* $W(T)$.

Доказательство. Из условия (A1') следует выполнение условия (A1), т. е. оператор A_R ограничен и деминепрерывен, см. [16, лемма 4]. Кроме того, A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией, см. [17, лемма 4.1]. Таким образом, доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1, если показать, что A_R коэрцитивен. Это доказано в лемме 5.1, см. ниже. ☐

Лемма 5.1. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, R_Q *невырожден и справедливы условия* (A1'), (A2) *и* (A4). *Тогда дифференциально-разностный оператор* $A_R : L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ *коэрцитивен.*

Доказательство. Обозначим $w = R_Q u$, $u \in L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q))$, причем в силу невырожденности оператора R_Q существует обратный оператор R_Q^{-1}. По определению оператора A_R

$$\langle A_R u, u \rangle = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) \partial_i u dx dt = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x, t, w, \nabla w) R_Q^{-1} \partial_i w dx dt =$$

$$= \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{\bigcup\limits_l Q_{sl}} \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} P_s A_i(x, t, w, \nabla w) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \, dx \, dt =$$

$$= \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big(U_s P_s \left(A_i(x, t, w, \nabla w) - A_i(x, w, \nabla 0) \right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - 0) \Big) \, dx \, dt +$$

$$+ \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(U_s P_s A_i(x, t, w, \nabla 0), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) \, dx \, dt +$$

$$+ \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s P_s A_0(x, t, w, \nabla w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) \, dx \, dt = \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3}) \, dx \, dt, \tag{5.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. Поскольку нас интересует поведение данного интеграла при $\|u\|_{\mathcal{V}} \to \infty$, то, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x) \neq 0$ для почти всех $x \in Q$, т. е. $w(x) \neq 0$ для почти всех $x \in Q$.

Введем матрицу порядка $N(s) \times (n+1)$

$$\zeta = (U_s P_s w, U_s P_s \partial_1 w \ldots, U_s P_s \partial_n w),$$

а также матрицу η такую, что $\eta_{\cdot 0} = \zeta_{\cdot 0}$ и $\eta_{\cdot i} = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Первую сумму правой части (5.7) оценим с помощью условия сильной эллиптичности:

$$I_{s1} = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, t, \eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l \geqslant$$

$$\geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta_{li}|^p = \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\partial_i w(x + h_{sl}, t)|^p .$$

То есть

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_{s1}\, dx\, dt \geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\partial_i w\|^p_{L_p(\Omega_T)} = \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|R_Q \partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)} \geqslant c_5 \hat{\Upsilon} \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}, \tag{5.8}$$

где $\|R_Q \partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)} \geqslant c_5 \|\partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)}$ в силу невырожденности линейного оператора R_Q.

Рассмотрим вторую сумму правой части (5.7) с учетом оценки роста (A1'):

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s2}|\, dx\, dt \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_{\Omega_T} |A_i(x,t,w,\nabla 0)\partial_i u|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_{\Omega_T} \left(g_1(x,t) + c_1 |w(x,t)|^{p'-1}\right) |\partial_i u(x,t)|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} + c_6 \|w\|^{p'-1}_{L_p(\Omega_T)}\right) \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant$$

$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'-1}_{L_p(\Omega_T)} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant$$

$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{c_6 c_7^{p'-1}}{p'} \left(\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + (p'-1)\|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)}\right), \tag{5.9}$$

где $\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_7 \|u\|_{L_p(\Omega_T)}$ в силу ограниченности оператора R_Q.

Аналогично для третьего слагаемого правой части (5.7) имеем

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}|\, dx\, dt \leqslant \int_{\Omega_T} |A_0(x,t,w,\nabla w) u|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_T} \left(g_1(x,t) + c_1 |w(x,t)|^{p'-1} + c_1 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |\partial_j w(x,t)|^{p'-1}\right) |u(x,t)|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} + c_6 \|w\|^{p'-1}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}\right) \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(Q)} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'-1}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(Q)} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_6 c_7^{p'-1}}{p'} \left((p'-1)\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)}\right). \tag{5.10}$$

Таким образом, подставляя оценки (5.8)–(5.10) в (5.7), мы имеем:

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_2\hat{\Upsilon}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \|g_1\|_{L_q(\Omega_T)}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \\ - c_6 c_7^{p'-1}\|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} - c_6 c_7^{p'-1}\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}. \quad (5.11)$$

Первое слагаемое правой части (5.11) строго положительно и имеет степень роста $p > 1$. Остальные слагаемые имеют степень роста 1 и $p' < p$. Следовательно, A_R коэрцитивен. □

Пусть коэффициенты A_i дифференцируемы, $p \in [2, \infty)$, т. е. существуют производные $A_{ij}(x,t,\xi) := \dfrac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}$, $i,j = 0,\dots,n$, интегрируемые в соответствующих пространствах:

$$|A_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant g_2(x,t) + c_8 \sum_{0\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^{p-2}, \qquad i = 0,\dots,n, \quad (5.12)$$

где $c_8 > 0$, $g_2 \in L_{q'}(\Omega_T)$, $\dfrac{1}{q'} + \dfrac{2}{p} = 1$. Тогда можно сформулировать теорему существования решения для случая, когда дифференциально-разностный оператор удовлетворяет другому условию сильной эллиптичности.

Теорема 5.3. *Пусть $p \in [2,\infty)$, R_s и R_{s0} ($s = s(r)$, $r \in B$) невырождены. Пусть коэффициенты дифференциального оператора удовлетворяют условиям роста* (A1') *и оценке дифференцируемости* (5.12). *Кроме того, пусть справедливо следующее алгебраическое условие сильной эллиптичности: для любого класса s, п. в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$:*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} r^s_{lm} A_{ij}\left(x + h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot}\right) \eta_{mj}\eta_{li} \geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}|^{p-2}|\eta_{li}|^2. \quad (5.13)$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}^* = L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))$ существует обобщенное решение $u \in W(T)$ задачи (1.1), (1.2), (1.5), *а множество решений слабо компактно в $W(T)$.*

Доказательство. Очевидно, что доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.2, если показать, что A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией. Это доказано в лемме 5.2, см. ниже. □

Лемма 5.2. *Пусть $p \in [2,\infty)$, R_Q невырожден и справедливы условия* (A1), (5.12) *и* (5.13). *Тогда A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией.*

Доказательство. Разобъем интегральную форму на три слагаемых:

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \langle \mathcal{A}^1_R(u,u) - \mathcal{A}^1_R(u,y), u - y\rangle + \\ + \langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u-y\rangle + \langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u - y\rangle, \quad (5.14)$$

где

$$\langle \mathcal{A}^0_R u, y\rangle = \int_{\Omega_T} A_0(x,t,R_Q u, \nabla R_Q u) y\, dx\, dt,$$

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u,y), v\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q y)\, \partial_i v\, dx\, dt.$$

Заметим, что в силу условий (5.13), (5.12) оператор $\mathcal{A}^1_R(u,\cdot)$ («главная часть» оператора A_R, содержащая слагаемые со старшими производными) сильно монотонен, причем

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u,u) - \mathcal{A}^1_R(u,y), u - y\rangle \geqslant c_9\hat{\Upsilon}\|u - y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}, \quad (5.15)$$

см. [22, теорема 1]. Для оценки остальных слагаемых воспользуемся оценками интегрируемости (A1) и дифференцируемости (5.12). Второе слагаемое правой части (5.14) оценивается как

$$\left|\langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u - y\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} |A_i(x,t,R_Q u,\nabla R_Q y) - A_i(x,t,R_Q y,\nabla R_Q y)\,\partial_i(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \left|\int\limits_0^1 A_{i0}(x,t,\tau R_Q u + (1-\tau)R_Q y,\nabla R_Q y)\,d\tau\right| |u-y|\,|\partial_i(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_T} \left(g_2(x,t) + c_8 \int\limits_0^1 |\tau R_Q u + (1-\tau)R_Q y|^{p-2}\,d\tau + c_8 \sum_{1\leqslant k\leqslant n} |\partial_k R_Q y|^{p-2}\right) \times$$

$$\times |R_Q u - R_Q y| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8\|R_Q u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}\right) \times$$

$$\times \|R_Q u - R_Q y\|_{L_p(\Omega_T)} \|u-y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))},$$

т. к.

$$\|R_Q u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_7 \|u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}$$

в силу ограниченности оператора R_Q и

$$\|u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_{10}\|u\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))},$$

см. неравенство Фридрихса. То есть для всех y и u из шара радиуса r_1

$$\|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8\|R_Q u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \hat{c}_1(r_1) < \infty,$$

где $\hat{c}_(r_1) = \|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8 c_7^{p-2}(1+2c_{10}) r_1^{p-2}$. Таким образом,

$$\left|\langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u-y\rangle\right| \leqslant \hat{c}_1(r_1)\,\|R_Q u - R_Q y\|_{L_p(\Omega_T)} \|u-y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^p}{p}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{c_7^q \hat{c}_1^q(r_1)}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \quad (5.16)$$

Аналогично для третьего слагаемого правой части (5.14) имеем

$$\left|\langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u-y\rangle\right| \leqslant \int\limits_{\Omega_T} |A_0(x,t,R_Q u,\nabla R_Q u) - A_0(x,t,R_Q y,\nabla R_Q y)\,(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \left(g_2(x,t) + c_8 \sum_{1\leqslant k\leqslant j} |\partial_k R_Q u|^{p-2} + c_8 \sum_{j\leqslant k\leqslant n} |\partial_k R_Q y|^{p-2}\right) |\partial_j(R_Q u - R_Q y)|\,|u-y|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8\|R_Q u\|^{p-2}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} + c_8\|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}\right) \times$$

$$\times \|R_Q u - R_Q y\|_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}\,\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \hat{c}_2(r_1) c_7\,\|u-y\|_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}\,\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)},$$

где $\hat{c}_2(r_1) = \|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + 2c_8 c_7^{p-2}(1+c_{10}) r_1^{p-2}$. То есть

$$\left|\langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u-y\rangle\right| \leqslant \hat{c}_2(r_1) c_7\,\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} + \frac{\varepsilon^p}{p}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{c_7^q \hat{c}_2^q(r_1)}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \quad (5.17)$$

Выбрав $\varepsilon^p = c_9 \hat{\Upsilon} p/2$ и подставив оценки (5.15), (5.16), (5.17) в (5.14) мы получим, что

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \geqslant -\frac{c_7^q}{\varepsilon^q q}\left(\hat{c}_1^q(r_1) + \hat{c}_2^q(r_1)\right)\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)} - \hat{c}_2(r_1) c_7\,\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)}.$$

Поскольку $q > 1$, $2 > 1$ и $W \subset L_p(\Omega_T)$ компактно, то A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией. □

Замечание. В работе рассмотрено уравнение с неклассическими краевыми условиями. Для определения типа уравнения были использованы методы нелинейного анализа. Поскольку доказано, что в уравнении (2.4) в первом слагаемом левой части стоит линейный, плотно определенный, максимально монотонный оператор, а во втором — оператор псевдомонотонного типа, то это позволяет определить уравнение (2.4) как уравнение параболического типа, см. [8]. Следовательно, эквивалентное уравнение (1.8) также будет уравнением параболического типа, что и определяет исходную задачу (1.1), (1.2), (1.5) как параболическую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Смешанная задача для параболической системы на плоскости и граничные интегральные уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 1. — С. 20–36.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
3. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 1. — С. 45–90.
4. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1976. — *9*. — С. 5–130.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
6. *Камынин Л. И.* О единственности решения краевой задачи с граничными условиями А. А. Самарского для параболического уравнения второго порядка // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1976. — *16*, № 6. — С. 1480–1488.
7. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
9. *Мельник В. С., Згуровский М. З.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наукова думка, 1999.
10. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 1. — С. 1925–1935.
11. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
12. *Солонуха О. В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — *57*, № 3. — С. 60–72.
13. *Солонуха О. В.* О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 2. — С. 349–362.
14. *Солонуха О. В.* О периодических решениях параболических квазилинейных уравнений с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского// Докл. РАН. — 2022. — *503*. — С. 83–86.
15. *Солонуха О. В.* Нелинейные дифференциально-разностные уравнения эллиптического и параболического типа и их приложения к нелокальным задачам// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 3. — С. 445–563.
16. *Солонуха О. В.* О разрешимости нелинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами по пространственным переменным// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 5. — С. 757–773.
17. *Солонуха О. В.* О разрешимости параболических уравнений с существенно нелинейными дифференциально-разностными операторами// Сиб. мат. ж. — 2023. — *64*, № 5. — С. 1094–1113.
18. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Bitsadze-Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients// Complex Var. Elliptic Equ. — 2019. — *64*, № 5. — С. 753–765.
19. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
20. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
21. *Solonukha O. V.* On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2021. — *51*, № 2. — С. 7–11.
22. *Solonukha O. V.* The first boundary value problem for quasilinear parabolic differential-difference equations// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 1067–1077.
23. *Solonukha O. V.* On nonlinear nonlocal parabolic problem// Russ. J. Math. Phys. — 2022. — *29*, № 1. — С. 121–140.

О. В. Солонуха
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: solonukha@yandex.ru

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725
EDN: ZSASZP

On the existence of time-periodic solutions of nonlinear parabolic differential equations with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type

O. V. Solonukha

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. We study a nonlinear parabolic differential equation in a bounded multidimensional domain with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type. We prove existence theorems for a periodic in time generalized solution. Sufficient conditions for the existence of generalized solutions contain either an algebraic ellipticity condition or an algebraic strong ellipticity condition for the auxiliary differential-difference operator.

Keywords: parabolic differential equation, nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type, operator of shifts in spatial variables, pseudomonotone operator.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author thanks the reviewer for comments that helped to improve this paper. The author declares that no financial support was received.

For citation: O. V. Solonukha, "On the existence of time-periodic solutions of nonlinear parabolic differential equations with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 712–725. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725

REFERENCES

1. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Smeshannaya zadacha dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti i granichnye integral'nye uravneniya" [Mixed problems for plane parabolic systems and boundary integral equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 1, 20–36 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskiy, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh zadach" [On some simple generalizations of linear elliptic problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. Yu. A. Dubinskiy, "Kvazilineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya lyubogo poryadka" [Quasilinear elliptic and parabolic equations of any order], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1968, **23**, No. 1, 45–90 (in Russian).
4. Yu. A. Dubinskiy, "Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya" [Nonlinear elliptic and parabolic equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1976, **9**, 5–130 (in Russian).

5. H. Gajewski, K. Groeger, and K. Zacharias, *Nelineynye operatornye uravneniya i operatorno-differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
6. L. I. Kamynin, "O edinstvennosti resheniya kraevoy zadachi s granichnymi usloviyami A. A. Samarskogo dlya parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka" [On the uniqueness of the solution to a boundary-value problem with A. A. Samarsky boundary conditions for a second-order parabolic equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1976, **16**, No. 6, 1480–1488 (in Russian).
7. M. A. Krasnosel'skii, *Topologicheskie metody v teorii nelineynykh integral'nykh uravneniy* [Topological methods in the theory of nonlinear integral equations], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
8. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. V. S. Mel'nik and M. Z. Zgupovskii, *Nelineynyy analiz i uppavlenie beskonechnomepnymi sistemami* [Nonlinear Analysis and Control for Infinite-Dimensional Systems], Naukova Dumka, Kiev, 1999 (in Russian).
10. A. A. Samarskii, "O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy" [On some problems of the theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 1, 1925–1935 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
12. O. V. Solonukha, "Ob odnoy nelineynoy nelokal'noy zadache ellipticheskogo tipa" [On one nonlinear nonlocal problem of elliptic type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 60–72 (in Russian).
13. O. V. Solonukha, "O razreshimosti lineynoy parabolicheskoy zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami" [On solvability of a linear parabolic problem with nonlocal boundary conditions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 2, 349–362 (in Russian).
14. O. V. Solonukha, "O periodicheskikh resheniyakh parabolicheskikh kvazilineynykh uravneniy s kraevymi usloviyami tipa Bitsadze—Samarskogo" [On periodic solutions of parabolic quasilinear equations with boundary conditions of Bitsadze–Samarsky type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2022, **503**, 83–86 (in Russian).
15. O. V. Solonukha, "Nelineynye differentsial'no-raznostnye uravneniya ellipticheskogo i parabolicheskogo tipa i ikh prilozheniya k nelokal'nym zadacham" [Nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic type and their applications to nonlocal problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 3, 445–563 (in Russian).
16. O. V. Solonukha, "O razreshimosti nelineynykh parabolicheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy so sdvigami po prostranstvennym peremennym" [On the solvability of nonlinear parabolic functional differential equations with shifts in spatial variables], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 5, 757–773 (in Russian).
17. O. V. Solonukha, "O razreshimosti parabolicheskikh uravneniy s sushchestvenno nelineynymi differentsial'no-raznostnymi operatorami" [On the solvability of parabolic equations with essentially nonlinear differential-difference operators], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 5, 1094–1113 (in Russian).
18. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Bitsadze-Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients," *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2019, **64**, No. 5, 753–765.
19. T. Carleman, "Sur la theorie des equations integrales et ses applications," *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich*, 1932, **1**, 138–151.
20. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
21. O. V. Solonukha, "On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions," *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2021, **51**, No. 2, 7–11.
22. O. V. Solonukha, "The first boundary value problem for quasilinear parabolic differential-difference equations," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1067–1077.
23. O. V. Solonukha, "On nonlinear nonlocal parabolic problem," *Russ. J. Math. Phys.*, 2022, **29**, No. 1, 121–140.

O. V. Solonukha
Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: `solonukha@yandex.ru`