

УДК 517.956

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696

EDN: ZKHVDY

О ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

О. С. Розанова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается класс двумерных решений уравнений модели холодной плазмы, совместимых с постоянным магнитным и постоянным электрическим полем. Для этого класса при различных предположениях об электрическом поле изучаются условия на начальные данные, гарантирующие глобальное существование классического решения задачи Коши для заданного периода времени или разрушение решения за конечное время. Особое внимание уделено классу решений с осевой симметрией.

Ключевые слова: модель холодной плазмы, постоянное магнитное поле, постоянное электрическое поле, задача Коши, классическое решение, глобальная разрешимость, разрушение решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 23-11-00056 в Российском университете дружбы народов.

Для цитирования: О. С. Розанова. О плоских колебаниях холодной плазмы в постоянном магнитном поле // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 4. С. 685–696. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696>

1. ВВЕДЕНИЕ

Плазма фактически представляет собой двухфазную среду, состоящую из ионов и электронов, взаимодействующих друг с другом. Существует множество моделей, описывающих ее поведение в различных режимах (см., например, [2, 9]). Среди них выделяется модель так называемой холодной (или электронной) плазмы, включающая движение только электронов. Считается, что плазма при низких температурах подчиняется такой модели, что оправдывает термин «холодная плазма». В настоящее время холодная плазма интенсивно исследуется в связи с ускорителями электронов в следе мощного лазерного импульса [7].

Уравнения гидродинамики холодной плазмы в нерелятивистском приближении в безразмерных величинах принимают вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\mathbf{E} - [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = n\mathbf{V} + \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

где n и $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ — плотность и скорость электронов, а $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ и $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ — векторы электрических и магнитных полей. Все компоненты решения зависят от $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}^3$. Ионы в этой модели предполагаются неподвижными.



Основная проблема, которая интересует физиков в связи с уравнениями, описывающими холодную плазму, — это определение условий на начальные данные, при которых решение сохраняет исходную гладкость как можно дольше (в идеале — всегда). Считается, что при возникновении особенности гладкого решения выделяется энергия, нагревающая плазму, так что предположение о неподвижности ионов перестает быть справедливым.

Для модельного случая одной пространственной переменной, который тем не менее очень важен для тестирования численных методов [3], исходная система уравнений существенно упрощается. Проблема возникновения особенностей в этом случае в настоящее время достаточно хорошо изучена [14], включая специальные упрощения, позволяющие проследить влияние магнитного поля в так называемой модели Дэвидсона (см. [6, 15]).

Однако система (1.1), (1.2) в пространстве многих пространственных переменных чрезвычайно сложна и включает множество мод колебаний. В частности, двумерный случай важен с точки зрения физических экспериментов. Что касается численных исследований, получены результаты, подтверждающие сложное поведение среды (см. [4]).

До настоящего времени для случая многих пространственных измерений существуют теоретические результаты только для случая электростатических колебаний [13] (т. е. $\text{rot } \mathbf{E} = 0$), для решения с радиальной симметрией [12] или для случая линейной зависимости от пространственных переменных [16]. В этих случаях $\mathbf{V} = 0$.

В данной работе изучается частный случай двумерных (плоских) колебаний, для которых магнитное поле является ненулевой константой. Другими словами, $\mathbf{V} = (V_1, V_2, 0)$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$, $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ и V_1, V_2, E_1, E_2, n зависят от x_1, x_2, t . Если магнитное поле постоянно, тогда

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot}(n\mathbf{V}) = 0.$$

Если условие $\text{rot}(n\mathbf{V}) = \nabla n \times \mathbf{V} + n \text{rot } \mathbf{V} = 0$ выполняется изначально, то оно, вообще говоря, не выполняется при всех $t \geq 0$ (существует соответствующий пример).

Однако для классов радиально-симметричных или аффинных решений, где $\nabla n \times \mathbf{V} = 0$, достаточно потребовать $B_0 = 0$. Действительно, как следует из второго уравнения (1.1),

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \xi = -\mathcal{D}(\xi + B_0), \quad (1.3)$$

где $\mathcal{D} = \text{div } \mathbf{V}$, $\text{rot } \mathbf{V} = (0, 0, \xi)$. Таким образом, если ограничиться классом радиально-симметричных или аффинных решений, положить $B_0 = 0$ и выбрать данные такие, что $\xi = 0$, то $\text{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ для всех $t > 0$. Для произвольных исходных данных условие $\text{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ вместе с требованием $B_0 = \text{const}$ делают систему (1.1), (1.2) переопределенной. Другими словами, для общего решения компонента \mathbf{V} не может быть константой.

Однако если предположить, что $n = 0$, то можно рассмотреть константу $B_0 \neq 0$ и более широкий класс решений. Действительно, если $n = 0$, то условие $\text{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ выполняется тождественно. Далее, первые уравнения в (1.1) и (1.2) выполняются тождественно для любого стационарного $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x_1, x_2)$ такого, что $\text{rot } \mathbf{E}_0 = 0$.

Конечно, можно спорить о том, имеет ли рассмотренный класс решений уравнений холодной плазмы физический смысл. Однако с математической точки зрения исследование движения в заданном ландшафте электрических и магнитных полей чрезвычайно интересно. В некотором смысле эта задача напоминает задачу о движении жидкости на вращающейся плоскости, возникающую в геофизических приложениях [1], но значительно сложнее.

Таким образом, рассматриваемая система имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\mathbf{E}_0 - [\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0] \quad (1.4)$$

с начальными данными

$$\mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}_0(x_1, x_2) \in C^2(\mathbb{R}^2). \quad (1.5)$$

Для простоты предположим, что $B_0 > 0$.

Из векторного уравнения (1.4) вытекают следующие дифференциальные уравнения.

1. Матричное уравнение для неизвестной матрицы производных Q :

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathcal{V} = -\mathcal{V}^2 - B_0 L \mathcal{V} - S_0(x_1, x_2),$$

где

$$\mathcal{V} = (v_{ij}) = (\partial_{x_i} V_j), \quad S_0 = (s_{ij}) = (\partial_{x_i} E_{0j}), \quad \partial_{x_i} E_{0j} = \partial_{x_j} E_{0i}, \quad i, j = 1, 2, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

2. Пара скалярных уравнений для \mathcal{D} и ξ :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{D}) = -\mathcal{D}^2 + 2J - \lambda(x_1, x_2) - B_0 \xi, \quad (1.7)$$

где $J = \det(\|\partial_{x_i} V_j\|)$, $i, j = 1, 2$, $\lambda = \operatorname{div} \mathbf{E}$ и выполнено (1.3).

Мы видим, что уравнения (1.4), (1.6), (1.7), (1.3) записаны вдоль одного и того же поля характеристик

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) x_i = V_i, \quad i = 1, 2, \quad (x_1(0), x_2(0)) = (x_{01}, x_{02}), \quad (1.8)$$

поэтому для $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$ гиперболическую систему (1.4), (1.6), (1.8) можно рассматривать как замкнутую квадратично-нелинейную систему ОДУ для векторов \mathbf{V} , $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и матрицы \mathcal{V} . Возникновение особенности означает разрушение компоненты Q за конечное время хотя бы для одной начальной точки (x_{01}, x_{02}) .

Очевидно, для произвольного \mathbf{E}_0 система из 8 уравнений

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -B_0 L \mathbf{V} - E_0(x_1, x_2), \quad (1.9)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V},$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -\mathcal{V}^2 - B_0 L \mathcal{V} - S_0(x_1, x_2), \quad (1.10)$$

$$((V_1(0), V_2(0), x_1(0), x_2(0), Q(0)) = (V_1(x_{01}, x_{02}), V_2(x_{01}, x_{02}), x_{01}, x_{02}, (\partial_{x_i} V_j(x_{01}, x_{02}))), \quad i, j = 1, 2,$$

может быть решена только численно.

Тем не менее, при определенном выборе $\mathbf{E}_0 = \mathcal{S}_0 \mathbf{x}$ с постоянной симметричной матрицей $\mathcal{S}_0 = (s_{ij})$, $i, j = 1, 2$, можно получить критерий возникновения особенностей и достаточное условие глобальной по t гладкости решения в терминах начальных данных \mathbf{V}_0 и входных параметров s_{ij} и B_0 , см. раздел 2, теорема 2.2.

В общем случае достаточные условия гладкости выглядят громоздко, поэтому приведем их следствие для случая осевой симметрии:

$$\mathbf{V} = U(r) \mathbf{x} + V(r) \mathbf{x}_\perp, \quad \mathbf{E}_0 = S(r) \mathbf{x}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \mathbf{x}_\perp = (x_2, -x_1), \quad (1.11)$$

см. раздел 2.1.

В разделе 3 мы изучаем осесимметричный случай с переменной \mathbf{E}_0 такой, что $S_- \leq S(r) \leq S_+$ и $\lambda_- \leq \operatorname{div} \mathbf{E}_0(r) \leq \lambda_+$ с константами S_\pm и λ_\pm , и находим достаточные условия на \mathbf{V}_0 , гарантирующие классическую гладкость задачи Коши на периоде, зависящем от B_0 и $S(r)$, см. теорему 3.1.

2. СЛУЧАЙ АФФИННОГО \mathbf{E}_0

Легко видеть, что в случае аффинного \mathbf{E}_0 (линейная зависимость \mathbf{E}_0 от пространственных переменных) матрицы $S(x_1, x_2) = \mathcal{S}_0$ не зависят от (x_1, x_2) , поэтому систему (1.10) можно рассматривать отдельно.

Покажем, что систему (1.10) можно линеаризовать. Нам понадобится следующая версия леммы Радона 1927 г. (см. [8, теорема 3.1], а также [11]).

Теорема 2.1 (лемма Радона). *Матричное уравнение Риккати*

$$\dot{W} = M_{21}(t) + M_{22}(t)W - WM_{11}(t) - WM_{12}(t)W \quad (2.1)$$

(где $W = W(t)$ — матрица размера $(n \times m)$, M_{21} — матрица размера $(n \times m)$, M_{22} — матрица размера $(m \times m)$, M_{11} — матрица размера $(n \times n)$, M_{12} — матрица размера $(m \times n)$) эквивалентно

линейному однородному матричному уравнению

$$\dot{Y} = M(t)Y, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

(где $Y = Y(t)$ — матрица размера $(n \times (n + m))$, M — матрица размера $(n + m) \times (n + m)$) в следующем смысле.

Пусть на некотором интервале $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ матрица-функция $Y(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$ (где Q — матрица размера $(n \times n)$, P — матрица размера $(n \times m)$) является решением уравнения (2.2) с исходными данными

$$Y(0) = \begin{pmatrix} I \\ W_0 \end{pmatrix}$$

(где I — единичная матрица размера $(n \times n)$, W_0 — постоянная матрица размера $(n \times m)$) и $\det Q \neq 0$ на \mathcal{J} . Тогда $W(t) = P(t)Q^{-1}(t)$ является решением уравнения (2.1) с $W(0) = W_0$ на \mathcal{J} .

Система (1.6) может быть записана как уравнение (2.1), в котором

$$W = \mathcal{V}, \quad M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{21} = -S_0, \quad M_{22} = -B_0L.$$

Таким образом, мы получаем линейную задачу Коши

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{11} & \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{21} & \dot{q}_{22} \\ \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -s_{11} & -s_{12} & 0 & -B_0 \\ -s_{21} & -s_{22} & B_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ v_{11}(0) & v_{12}(0) \\ v_{21}(0) & v_{22}(0) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Здесь $Q = \{q_{ij}\}$, $P = \{p_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$. Система (2.3) представляет собой линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами, которая может быть решена в явном виде стандартным способом. Однако, поскольку порядок системы высок, решение очень громоздко и удобнее всего использовать пакеты компьютерной алгебры (например, MAPLE). Ниже с помощью компьютерных вычислений получено и преобразовано выражение для $\det Q$ в (2.7), а также найдена асимптотика в разделе 2.1.

Напомним, что $\det Q(0) = 1$. Таким образом, производные $v_{ij} = (\partial_{x_i} V_j)$, $i, j = 1, 2$, остаются ограниченными при всех $t > 0$ тогда и только тогда, когда $\det Q > 0$ при всех $t > 0$. Если $\det Q > 0$ при всех $t > 0$ для любой характеристики, начинающейся в $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$, то решение задачи Коши сохраняет гладкость при всех $t > 0$.

Тем не менее, этот критерий неявный, и было бы удобнее найти достаточное условие, гарантирующее глобальную гладкость, т. е. исследовать, когда $\det Q > 0$ при всех $t > 0$.

Собственные значения M следующие:

$$\mu_{1234} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pm \sqrt{(B_0^2 + \lambda)^2 - 4K} - (B_0^2 + \lambda)},$$

$$\lambda = \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = s_{11} + s_{22}, \quad K = \det(\partial_{x_i} E_{0j}) = s_{11}s_{22} - s_{12}^2.$$

Прежде всего заметим, что если $\operatorname{Re} \mu_i \neq 0$, $i = 1, \dots, 4$, то нельзя выбрать $P = (v_{ij}(0), s_{ij}(0)) \in \mathbb{R}^8$ так, чтобы гарантировалась положительность $\det Q$ и эта положительность имела место и в окрестности P . Действительно, для случая $\operatorname{Re} \mu_i \neq 0$ решение $q_{ij}(t)$, вообще говоря, содержит возрастающий показатель.

Поэтому для нахождения достаточного условия гладкости, устойчивого по начальным данным, остановимся на случае $\operatorname{Re} \mu_i = 0$. Легко проверить, что оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$4K < (B_0^2 + \lambda)^2, \quad K > 0. \quad (2.5)$$

Следующее условие, необходимое для ограниченности $\det Q$, состоит в том, что частоты $|\mu_i|$ нерезонансны, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{|\omega_-|}{|\omega_+|} &\neq \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \\ \omega_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{B_0^2 + \lambda \pm \sqrt{(B_0^2 + \lambda)^2 - 4K}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Можно явно вычислить, что

$$\det Q = \frac{1}{k} [C + A_- \sin(\omega_+ - \omega_-)t + B_- \cos(\omega_+ - \omega_-)t + A_+ \sin(\omega_+ + \omega_-)t + B_+ \cos(\omega_+ + \omega_-)t], \quad (2.7)$$

где константы k, C, A_{\pm}, B_{\pm} зависят от $v_{ij}(0), s_{ij}(0), B_0$ (довольно громоздким образом). Очевидно, что $C + A_- + A_+ = k$. Здесь

$$C = B_0 K \sqrt{(B_0^2 + \lambda)^2 - 4K} [B_0^3 + (v_{12} - v_{21})B_0^2 + (\lambda + 2J(0))B_0 + 2s_{12}(v_{11} - v_{22}) - (v_{12} - v_{21})(s_{11} - s_{22})],$$

$$A_- = \lambda(\lambda + 2B_0^2) [a_-(\omega_- + \omega_+) + b_-(\omega_- - \omega_+)], \quad B_- = \lambda(\lambda + 2B_0^2) [b_-(\omega_- + \omega_+) + a_-(\omega_- - \omega_+)],$$

$$A_+ = \frac{1}{2} \sqrt{(B_0^2 + \lambda)^2 - 4K} [a_+ + b_+ \omega_- \omega_+], \quad B_+ = \frac{1}{2} \sqrt{(B_0^2 + \lambda)^2 - 4K} [a_+ - b_+ \omega_- \omega_+],$$

$$k = ((B_0^2 + \lambda)^2 - 4K)^{\frac{3}{2}} K.$$

Мы не выписываем длинные выражения для a_{\pm}, b_{\pm} .

Если предположить, что для характеристики, начинающейся из (x_{01}, x_{02})

$$C^2 > A_-^2 + B_-^2 + A_+^2 + B_+^2, \quad (2.8)$$

тогда компоненты Q ограничены. Таким образом, мы получаем сравнительно простое достаточное условие сохранения гладкости, не совпадающее с необходимым.

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 2.2.

1. Решение задачи Коши (1.4), (1.5) сохраняет классическую гладкость для всех $t > 0$ тогда и только тогда, когда начальные данные $\mathbf{E}_0 = \mathcal{S}_0 \mathbf{x}$ и B_0 таковы, что для всех $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ выполняется свойство $\det Q(t) > 0$, где матричную компоненту $Q = (q_{ij})$ можно найти как часть решения задачи Коши (2.3), (2.4) для линейной системы с постоянными коэффициентами.
2. Если для всех $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ начальные данные (1.5), $\mathbf{E}_0 = \mathcal{S}_0 \mathbf{x}$ и B_0 таковы, что выполняются условия (2.5), (2.6), (2.8), то решение задачи Коши (1.4), (1.5) сохраняет классическую гладкость для всех $t > 0$.

Замечание 2.1. Поскольку в случае 2 теоремы 2.2 функция $\det Q(t)$ является суперпозицией двух периодических движений с периодами $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_+ - \omega_-}$ и $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_+ + \omega_-}$, $T_2 < T_1$ (см. (2.7)), то если $\det Q(t) > 0$ для $t \in (0, T_1]$, то $\det Q(t) > 0$ для всех $t > 0$.

2.1. Анализ влияния напряженности магнитного поля. Напомним, что в случае $\mathbf{E}_0 = 0$ необходимое и достаточное условие сохранения начальной гладкости выглядит очень элегантно:

$$(\mathcal{D}^2 - 4J + 2B_0 \xi - B_0^2) \Big|_{t=0} < 0,$$

см. [1, 10]. Таким образом, если мы зафиксируем исходные данные (1.5) и увеличим $|B_0|$, мы всегда получим глобально гладкое решение.

Для случая $\mathbf{E}_0 \neq 0$ мы заметим, что если увеличить $|B_0|$, мы получим выполнение условия (2.5), т. е. получим случай 2 теоремы 2.2.

Чтобы проследить влияние B_0 в условии (2.8) и избежать громоздких формул, рассмотрим осесимметричный случай (1.11), в котором $s_{11} = s_{22}$, $s_{12} = 0$, $v_{11} = v_{22}$, $v_{12} = -v_{21}$. Здесь константы в (2.8) выглядят проще:

$$\begin{aligned} C &= 2Fs_{11}^2B_0^2(1 + v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{12}B_0 + B_0^2), \quad F = B_0\sqrt{B_0^2 + 4s_{11}}, \\ A_- &= s_{11}v_{11}(B_0^2 + 4s_{11})B_0^2(F(\omega_- - \omega_+) + B_0^2(\omega_- + \omega_+)), \\ B_- &= s_{11}v_{11}(B_0^2 + 4s_{11})B_0^2(B_0^2(\omega_- - \omega_+) - F(\omega_- + \omega_+)), \\ A_+ &= FB_0^2s_{11}(s_{11}(1 - v_{11}^2 - v_{12}^2) - v_{12}B_0)(s_{11} + \omega_- \omega_+), \\ B_+ &= FB_0^2s_{11}(s_{11}(1 - v_{11}^2 - v_{12}^2) - v_{12}B_0)(-s_{11} + \omega_- \omega_+), \\ k &= (B_0^2 + 4s_{11})^{\frac{3}{2}} B_0^3 s_{11}^2. \end{aligned}$$

Легко посчитать, что при $B_0 \rightarrow \infty$ имеем $C \sim B_0^6$, а $A_{\pm}, B_{\pm} \sim B_0^5$, поэтому мы можем получить глобальную гладкость, увеличивая B_0 . Тот же эффект мы получаем и в общем случае, без предположения осевой симметрии.

Отметим также, что для $\lambda \rightarrow \infty$ (в осесимметричном случае $\lambda = 2s_{11}$) имеем $C \sim \lambda^{\frac{7}{2}}$, а $A_{\pm}, B_{\pm} \sim \lambda^{\frac{5}{2}}$, поэтому другим способом добиться глобальной гладкости является увеличение λ .

3. ПРОИЗВОЛЬНОЕ \mathbf{E}_0 , ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Для осесимметричного решения (1.11) уравнение (1.9) преобразуется к виду

$$\dot{U} = -U^2 + V^2 - B_0V - S(r), \quad (3.1)$$

$$\dot{V} = (B_0 - 2V)U, \quad (3.2)$$

$$\dot{r} = rU. \quad (3.3)$$

Далее, поскольку $J = \mathcal{D}U + \xi VU^2 + V^2 + rUU' + rVV'$, $\mathcal{D} = 2U + rU'$, $\xi = 2V + rV'$, мы имеем

$$J = \mathcal{D}U + \xi V - U^2 - V^2,$$

и уравнения (1.7), (1.3) могут быть записаны в виде

$$\dot{\mathcal{D}} = -\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}U + 2\xi V - 2U^2 - 2V^2 - \lambda(r) - B_0\xi, \quad (3.4)$$

$$\dot{\xi} = -\mathcal{D}(\xi - B_0). \quad (3.5)$$

В этом случае $\lambda(r) = rS'(r) + 2S(r)$. Предположим, что

$$S_- \leq S(r) \leq S_+, \quad (3.6)$$

где S_{\pm} — константы.

3.1. Поведение решения.

1. Если $S(r) = S_0 = \text{const}$, т. е. в случае аффинного \mathbf{E}_0 , рассмотренного в предыдущем разделе, система уравнений (3.1), (3.2) может быть явно проинтегрирована. А именно, фазовая кривая на плоскости (U, V) представляет собой окружность

$$U^2 + \left(V + \left(C_1 - \frac{B_0^2}{4} \right) \right)^2 = \left(C_1 + \frac{B_0^2}{4} \right)^2 - S_0 - \frac{B_0^2}{4}, \quad (3.7)$$

$$C_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{4S_0 + B_0^2 + 4U_0^2 + 4V_0^2 - 2B_0V_0}{B_0 - 2V_0} \right), \quad U_0 = U(0), V_0 = V(0), V_0 \neq \frac{B_0}{2}.$$

Система (3.1), (3.2) в случае $S(r) = S_0 = \text{const}$ имеет следующие состояния равновесия:

- $U = 0$, $V = \frac{1}{2}B_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4S_0 + B_0^2}$ при $4S_0 + B_0^2 = 2\lambda + B_0^2 > 0$ — центры, период вращения вдоль каждой фазовой кривой равен $T = \frac{2\pi}{\sqrt{4S_0 + B_0^2}}$;

- $U = \frac{1}{2}\sqrt{4S_0 + B_0^2}$, $V = \frac{1}{2}B_0$ при $4S_0 + B_0^2 = 2\lambda + B_0^2 < 0$ — устойчивые и неустойчивые узлы (вырождающиеся при $4S_0 + B_0^2 = 0$).

2. Для произвольных гладких $S(r)$ из уравнений (3.2), (3.3) следует

$$r = \frac{C_2}{\sqrt{|-2V + B_0|}}, \quad C_2 = r_0\sqrt{|-2V + B_0|}, \quad (3.8)$$

поэтому $S(r) = S(V)$ и фазовая кривая системы (3.1), (3.2) принимает вид

$$U^2 + (B_0 - 2V) \left(-\frac{1}{2}V + C_3 \right) + G(V) = \frac{B_0^2}{4}, \quad (3.9)$$

$$G(V) = 2(B_0 - 2V) \int_{\infty}^V \frac{S(\nu)}{(B_0 - 2\nu)^2} d\nu.$$

Поскольку при $S(r) \in [S_-, S_+]$

$$S_- \leq G(V) \leq S_+,$$

то видим, что фазовая кривая системы (3.1), (3.2) лежит между двумя кругами, соответствующими S_- и S_+ , заданными в виде (3.7), где константы C_1 и C_3 вычислены с теми же исходными данными (U_0, V_0) .

Замечание 3.1. Интеграл $G(V)$ можно найти явно для многих важных вариантов выбора $S(r)$, например, $\sin r$, $\cos r$, $\frac{1}{1+r^\alpha}$ при $\alpha = 1, 2, 3, 4$, и т. д.

Поскольку мы хотим получить аналог теоремы 2.2, остановимся на первом случае $2\lambda + B_0^2 > 4S_- + B_0^2 > 0$ (этому условию соответствует (2.5)).

Лемма 3.1. Пусть условие (3.6) выполнено и $4S_- + B_0^2 > 0$. Тогда решение (U, V, r) задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3)

$$(U, V, r) \Big|_{t=0} = (U_0, V_0, r_0),$$

ограничено сверху и снизу константами, зависящими от начальных данных. А именно,

$$U_- \leq U \leq U_+, \quad V_- \leq V \leq V_+, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\pm} &= \pm \max\{R_-, R_+\}, & V_{\pm} &= \frac{1}{4}B_0 \pm \max\{-c_- \pm R_-, -c_+ \pm R_+\}, \\ c_{\pm} &= \frac{1}{4} \left(\frac{4S_{\pm} + B_0^2 + 4U_0^2 + 4V_0^2 - 2B_0V_0}{B_0 - 2V_0} \right), \\ R_{\pm}^2 &= \left(c_{\pm} + \frac{B_0^2}{4} \right)^2 - S_{\pm} - \frac{B_0^2}{4}, \quad R_{\pm} > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что (3.9) подразумевает, что проекция фазовой кривой системы (3.1), (3.2), (3.2) на плоскость (U, V) симметрична относительно оси $U = 0$ и оси $V = \frac{1}{2}B_0$ (уравнения не меняются при $U_1 = -U$ и $V_1 = B_0 - V$, см. (3.8)), поэтому мы можем рассматривать только квадрант $U \geq 0, V > \frac{1}{2}B_0$.

Из уравнений (3.1), (3.2) мы имеем

$$\frac{dU}{dV} = \frac{-U^2 + V^2 - B_0V - S(r)}{-U(2V - B_0)} = \Psi(Z, V, t),$$

или

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{-Z^2 + V^2 - B_0V - S(r)}{-(2V - B_0)}, \quad Z = \frac{1}{2}U^2. \quad (3.11)$$

Обозначим

$$\Psi_{\pm}(Z, V, t) = \frac{-Z^2 + V^2 - B_0V - S_{\pm}}{-(2V - B_0)}.$$

Поскольку $V > \frac{1}{2}B_0$,

$$\Psi_-(Z, V, t) \leq \Psi(Z, V, t) \leq \Psi_+(Z, V, t).$$

Теперь мы можем применить теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, согласно которой решение $Z(V)$ задачи Коши для (3.11) с начальными условиями $Z(V_0) = Z_0$ при $V > V_0$ удовлетворяет неравенству

$$Z_-(V) \leq Z(V, t) \leq Z_+(V),$$

а при $V < V_0$ — обратному неравенству

$$Z_-(V) \leq Z(V, t) \leq Z_+(V),$$

где $Z_{\pm}(s)$ — решения задач $\frac{dZ}{dV} = \Psi_{\pm}(Z, V)$, $Z(V_0) = Z_0$.

Таким образом, при $V < V_0$ имеем $Z(V, t) \geq Z_-(V)$, при $V > V_0$ имеем $Z(V, t) \geq Z_+(V)$, $U = \sqrt{2Z} \geq 0$. Период T движения по проекции фазовой кривой на (U, V) можно оценить как

$$\frac{2\pi}{\sqrt{4S_+ + B_0^2}} \leq T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{4S_- + B_0^2}}.$$

Поведение проекции фазовых кривых показано на рис. 1. □

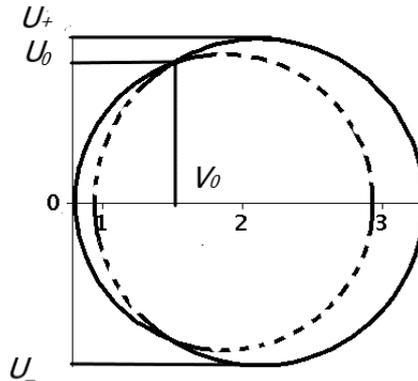


Рис. 1. Графики для $U = \pm\sqrt{2Z_{\pm}}$. Совокупность графиков, ограничивающих проекцию фазовой кривой — сплошная линия, для $1 < S(r) < 2$, $B_0 = 1$, $U_0 = 1$, $V_0 = 1,5$.

FIG. 1. Graphs for $U = \pm\sqrt{2Z_{\pm}}$. Combination of graphs limiting the projection of the phase curve, a solid line, for $1 < S(r) < 2$, $B_0 = 1$, $U_0 = 1$, $V_0 = 1.5$.

3.2. Поведение производных. Теперь мы можем изучить поведение расходимости и завихренности решения. Напомним, что в силу свойств гиперболических систем из ограниченности \mathcal{D} и ξ следует, что решение задачи Коши (1.4), (1.5) сохраняет исходную гладкость [5].

Осуществляя замену $\eta = \xi - B_0$, систему (3.4), (3.5) можно переписать в виде

$$\dot{\mathcal{D}} = Y(\mathcal{D}, \eta, U, V, \lambda) = -\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}U + \eta(2V - B_0) - 2U^2 - 2V^2 - 2B_0V - B_0^2 - \lambda, \quad (3.12)$$

$$\dot{\eta} = -\mathcal{D}\eta. \quad (3.13)$$

Как следует из результатов раздела 3.1, $\lambda(r) = \lambda(V)$ — периодическая функция. Предположим, что

$$\lambda_- \leq \lambda(r) \leq \lambda_+, \quad (3.14)$$

где λ_{\pm} — константы.

1. Систему (3.12), (3.13) можно линеаризовать с помощью леммы Радона (теорема 2.1). Действительно, здесь

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \eta \end{pmatrix}, \quad M_{11} = (0), \quad M_{12} = (1 \ 0), \\ M_{21} &= \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 2UF & 2V - B_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G &= -2U^2 - 2V^2 - 2B_0V - B_0^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем линейную задачу Коши

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ G & 2U & 2V - B_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{D}_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

с периодическими коэффициентами, известными из (3.1)–(3.3). Из системы (3.15) следует

$$\ddot{q} - 2U\dot{q} - Gq = (2V - B_0)\eta_0, \quad q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = \mathcal{D}_0, \quad (3.16)$$

что можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (3V^2 + VB_0 + 2B_0^2 - S(V) + 2\lambda(V))y &= (2V - B_0)\eta_0 e^{-\int_0^t U(\tau) d\tau}, \\ y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = \mathcal{D}_0 - U_0, \quad y &= q e^{-\int_0^t U(\tau) d\tau}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

и решение задачи (3.12), (3.13) разрушается тогда и только тогда, когда решение задачи (3.16) (и (3.17)) обращается в нуль.

Как следует из результатов раздела 2, при $S = S_0 = \text{const}$ если происходит разрушение, то оно происходит на первом периоде колебаний, однако в случае общего вида $S(r)$ решение (3.17) может быть резонансным, и амплитуда колебаний может расти.

2. Найдем достаточное условие сохранения гладкости в первом периоде колебаний $T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{4S_+ + B_0^2}}$.

Предположим, что $V_0 > \frac{B_0}{2}$, $\eta > 0$, и получим двусторонние оценки:

$$\begin{aligned} Y &\leq Y_{1+} = -\frac{3}{4}\mathcal{D}^2 + \eta^2 + K_{11}, \quad K_{11} = 2(U_+^2 + V_+^2 - B_0V_-) - \lambda_-, \\ Y &\leq Y_{2+} = -\frac{3}{4}\mathcal{D}^2 + a_+\eta + K_{12}, \quad K_{12} = 3U_+^2 - 2V_+^2 - 2B_0V_+ - B_0^2 - \lambda_+, \quad a = 2V_- - B_0, \\ Y &\geq Y_- = -\frac{5}{4}\mathcal{D}^2 + a_-\eta + K_2, \quad K_2 = -6U_+^2 - 2V_+^2 - 2B_0V_- - B_0^2 - \lambda_+, \quad a = 2V_- - B_0. \end{aligned}$$

Таким образом, после замены $\mathcal{Z} = \frac{1}{2}\mathcal{D}^2$ будем иметь

$$\frac{d\mathcal{Z}}{d\eta} = \frac{Y}{-\eta} = \Phi(\mathcal{Z}, \eta, U, V, \lambda). \quad (3.18)$$

Аналогично разделу 3.1 обозначим $\Phi_{\pm}(\mathcal{Z}, \eta) = \frac{Y_{\mp}}{-\eta}$, следовательно,

$$\Phi_-(\mathcal{Z}, \eta) \leq \Phi(\mathcal{Z}, \eta, t) \leq \Phi_+(\mathcal{Z}, \eta).$$

Таким образом, из теоремы Чаплыгина следует, что решение $\mathcal{Z}(V)$ задачи Коши для (3.18) с начальными условиями $\mathcal{Z}(\eta_0) = \mathcal{Z}_0$ при $\eta > \eta_0$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{Z}_-(\eta) \leq \mathcal{Z}(\eta, t) \leq \mathcal{Z}_+(\eta),$$

а при $\eta < \eta_0$ — обратному неравенству

$$\mathcal{Z}_+(\eta) \leq \mathcal{Z}(\eta, t) \leq \mathcal{Z}_-(\eta),$$

где $Z_{\pm}(\eta)$ — решения задач $\frac{dZ_{\pm}}{d\eta} = \Phi_{\pm}(Z, \eta)$, $Z_{\pm}(\eta_0) = Z_0$.

При $\eta_0 > 0$, $D_0 = \sqrt{2Z_0} \geq 0$ получим, что Z уменьшается, поэтому $\eta < \eta_0$ и $Z_+(V) \leq Z(\eta, t) \leq Z_-(V)$ вплоть до точки $0 < \eta_{00} \leq \eta_+$, где η_+ — меньшее из решений $Z_+(\eta) = 0$. Тогда в качестве новых исходных данных возьмем точку $(\eta_{00}, 0)$, в полуплоскости $D < 0$ значение η возрастает и $Z(\eta, t) \leq Z_+(\eta)$, $D_0 = -\sqrt{2Z_0} \leq 0$.

Легко видеть, что кривая $D_+ = D_+(\eta)$, ограничивающая проекцию фазовой кривой системы (3.12), (3.13) на плоскость (D, η) сверху при $D > 0$ (с оценкой через Y_{1+}), имеет вид

$$D_+^2 + 4\eta^2 - C_+\eta^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}K_1,$$

где константа C_+ определяется начальной точкой ($D_0 > 0, \eta_0 > 0$), и она ограничена при любом C_+ (старшая степень η равна 2). Это означает, что дивергенция D не может разрушаться в верхней полуплоскости. С другой стороны, кривая $D_- = D_-(\eta)$, ограничивающая проекцию фазовой кривой системы (3.12), (3.13) на плоскость (D, η) снизу при $D < 0$, определяется выражением

$$D_-^2 - \frac{4}{3}a_-\eta - C_-\eta^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}K_2,$$

где константа C_- определяется начальной точкой ($D_0 \leq 0, \eta_0 > 0$), и она ограничена только в том случае, если $C_- < 0$ (старшая степень η равна $\frac{5}{2}$.) Таким образом, начальные данные, соответствующие условию $C_- < 0$, выражаются в виде

$$D_0^2 - \frac{4}{3}(2V_- - B_0)\eta_0 < -6U_+^2 - 2V_+^2 - 2B_0V_+ - B_0^2 - \lambda_+, \quad D_0 < 0, \tag{3.19}$$

где величины U_+, V_{\pm} даны в (3.10), лемма 3.1.

Случай $\xi < 0$ рассматривается аналогично.

Следующая теорема подводит итог нашим рассуждениям.

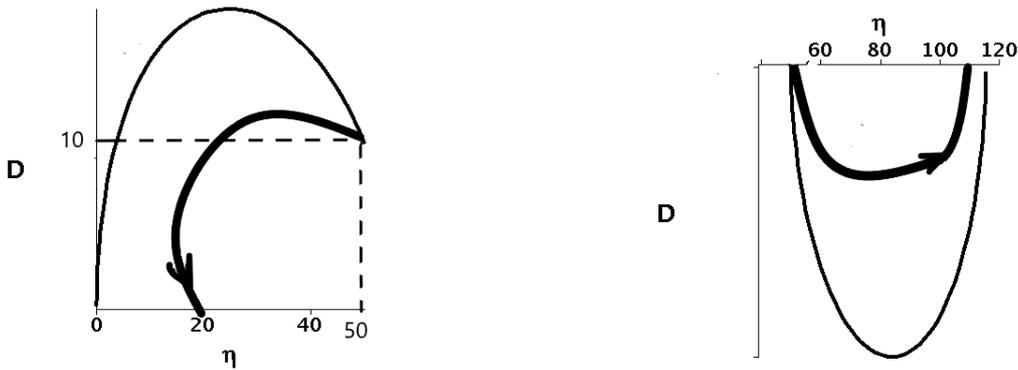


Рис. 2. Слева: графики для $D = \sqrt{2Z_-(\eta)}$, верхняя граница проекции фазовой траектории, $D > 0$, начальная точка $D_0 = 10, \eta_0 = 50$. Справа: графики для $D = -\sqrt{2Z_+(\eta)}$, нижняя граница проекции фазовой траектории, $D < 0$, начальная точка $D_0 = 0, \eta_0 = 50$; траектория (толстая линия) возвращается в верхнюю полуплоскость. Здесь $U_+ = 1, V_+ = 5, V_- = 1, B_0 = 1, \lambda_- = -1, \lambda_+ = 1$.

FIG. 2. Left: graphs for $D = \sqrt{2Z_-(\eta)}$, upper bound for the projection of the phase trajectory, $D > 0$, the initial point is $D_0 = 10, \eta_0 = 50$. Right: graphs for $D = -\sqrt{2Z_+(\eta)}$, lower bound for the projection of the phase trajectory, $D < 0$, the initial point is $D_0 = 0, \eta_0 = 50$; the trajectory (the thick line) returns to the upper half-plane. Here $U_+ = 1, V_+ = 5, V_- = 1, B_0 = 1, \lambda_- = -1, \lambda_+ = 1$.

Теорема 3.1. Рассмотрим задачу Коши (1.4), (1.5) для осесимметричного класса решений (1.11) и предположим, что фиксированное поле \mathbf{E}_0 таково, что условия (3.6) и (3.14) справедливы для всех $r_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$, при этом $U_0(r), V_0(r), \operatorname{div} \mathbf{V}_0 = \mathcal{D}_0(r), \operatorname{rot} \mathbf{V}_0 = \xi_0(r) = \eta_0(r) + B_0$ таковы, что условие (3.19) справедливо для всех $r_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда время T существования классического решения задачи Коши можно оценить снизу:

$$T \geq \frac{2\pi}{\sqrt{4S_+ + B_0^2}}. \quad (3.20)$$

На рис. 2 показаны оценки фазовых траекторий в верхней и нижней полуплоскостях по \mathcal{D} .

Замечание 3.2. При доказательстве теоремы 3.1 используются грубые и простые оценки $Y(\mathcal{D}, \eta, U, V, \lambda)$, поэтому достаточное условие сохранения гладкости далеко не точно. Отсутствие ограниченной кривой \mathcal{Z}_+ для конкретных начальных данных в нижней полуплоскости $\mathcal{D} < 0$ не означает, что фазовая траектория уходит в бесконечность. Нижняя оценка (3.20) также очень груба, и мы можем продолжить подсчет количества оборотов, следуя алгоритму [13].

Замечание 3.3. Обратите внимание, что большая начальная завихренность помогает реализовать (3.19) с фиксированными всеми остальными параметрами.

Замечание 3.4. Очень интересная задача, которую, кажется, можно решить только численно, — это вычисление множителей Флоке для линейной системы (3.15) (см. [16]) для различных ландшафтов \mathbf{E}_0 . Это помогло бы ответить на вопрос, можем ли мы контролировать гладкость решения и устойчивость равновесий с помощью \mathbf{E}_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розанова О. С., Успенская О. В. О свойствах решения задачи Коши для двумерного уравнения переноса на вращающейся плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2021. — № 1. — С. 3–10.
2. Alexandrov A. F., Bogdankevich L. S., Rukhadze A. A. Principles of plasma electrodynamics. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1984.
3. Chizhonkov E. V. Mathematical aspects of modelling oscillations and wake waves in plasma. — Boca Raton: CRC Press, 2019.
4. Gorbunov L. M., Frolov A. A., Chizhonkov E. V., Andreev N. E. Breaking of nonlinear cylindrical plasma oscillations // Plasma Phys. Rep. — 2010. — 36, № 4. — С. 345–356.
5. Dafermos C. M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2016.
6. Davidson R. C. Methods in nonlinear plasma theory. — New York: Acad. Press, 1972.
7. Esarey E., Schroeder C. B., Leemans W. P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators // Rev. Mod. Phys. — 2009. — 81. — С. 1229–1285.
8. Freiling G. A survey of nonsymmetric Riccati equations // Linear Algebra Appl. — 2002. — 351–352. — С. 243–270.
9. Ginzburg V. L. Propagation of electromagnetic waves in plasma. — New York: Pergamon, 1970.
10. Liu H., E. Tadmor Rotation prevents finite-time breakdown // Phys. D: Nonlinear Phenom. — 2004. — 188. — С. 262–276.
11. Reid W. T. Riccati differential equations. — New York: Academic Press, 1972.
12. Rozanova O. S. On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler—Poisson equations // Phys. D: Nonlinear Phenom. — 2022. — 443. — 133578.
13. Rozanova O. S. On the properties of multidimensional electrostatic oscillations of an electron plasma // Math. Meth. Appl. Sci. — 2023. — 46. — С. 7557–7571.
14. Rozanova O. S., Chizhonkov E. V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // Z. Angew. Math. Phys. — 2021. — 72. — 13.
15. Rozanova O. S., Chizhonkov E. V. The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations // Z. Angew. Math. Phys. — 2022. — 73. — С. 249.
16. Rozanova O., Turzynsky M. On the properties of affine solutions of cold plasma equations // Commun. Math. Sci. — 2024. — 22. — в печати.
17. Sheppard C. J. R. Cylindrical lenses—focusing and imaging: a review // Appl. Optics. — 2013. — 52. — С. 538–545.

О. С. Розанова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

UDC 517.956

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696

EDN: ZKHDVY

On plane oscillations of the cold plasma in a constant magnetic field

O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

For citation: O. S. Rozanova, “On plane oscillations of the cold plasma in a constant magnetic field,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 685–696. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696>

REFERENCES

1. O. S. Rozanova and O. V. Uspenskaya, “O svoystvakh resheniya zadachi Koshi dlya dvumernogo uravneniya perenosha na vrashchayushcheyasya ploskosti” [On properties of solutions of the Cauchy problem for two-dimensional transport equations on a rotating plane] *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2021, **76**, No. 1, 1–8 (in Russian).
2. A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1984.
3. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma*, CRC Press, Boca Raton, 2019.
4. L. M. Gorbunov, A. A. Frolov, E. V. Chizhonkov, and N. E. Andreev, “Breaking of nonlinear cylindrical plasma oscillations,” *Plasma Phys. Rep.*, 2010, **36**, No. 4, 345–356.
5. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2016.
6. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Acad. Press, New York, 1972.
7. E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans, “Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators,” *Rev. Mod. Phys.*, 2009, **81**, 1229–1285.
8. G. Freiling, “A survey of nonsymmetric Riccati equations,” *Linear Algebra Appl.*, 2002, **351–352**, 243–270.
9. V. L. Ginzburg, *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*, Pergamon, New York, 1970.
10. H. Liu and E. Tadmor, “Rotation prevents finite-time breakdown,” *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2004, **188**, 262–276.
11. W. T. Reid, *Riccati Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972.
12. O. S. Rozanova, “On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations,” *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, 2022, **443**, 133578.
13. O. S. Rozanova, “On the properties of multidimensional electrostatic oscillations of an electron plasma,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023, **46**, 7557–7571.
14. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2021, **72**, 13.
15. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2022, **73**, 249.
16. O. Rozanova and M. Turzynsky, “On the properties of affine solutions of cold plasma equations,” *Commun. Math. Sci.*, 2024, **22**, in press.
17. C. J. R. Sheppard, “Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review,” *Appl. Optics*, 2013, **52**, 538–545.

O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

