Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 676–684
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684
EDN: ZEGDSE

О СТРУКТУРЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Е. Ю. Панов[1,2]

[1]*Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия*
[2]*Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия*

Аннотация. Найден явный вид слабых решений задачи Римана для вырождающегося нелинейного параболического уравнения с кусочно постоянным коэффициентом диффузии. Показано, что линии фазовых переходов (свободные границы) соответствуют точке минимума некоторой строго выпуклой и коэрцитивной функции конечного числа переменных. Аналогичный результат верен и для задачи Стефана. В пределе, когда число фаз стремится к бесконечности, возникает вариационная формулировка автомодельных решений уравнения с произвольной неотрицательной функцией диффузии.

Ключевые слова: вырождающееся нелинейное параболическое уравнение, задача Римана, задача Стефана, слабое решение, фазовый переход, автомодельное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор благодарен Е. В. Радкевичу за ценные замечания по содержанию работы. Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 22-21-00344.

Для цитирования: *Е. Ю. Панов.* О структуре слабых решений задачи Римана для вырождающегося нелинейного уравнения диффузии// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 676–684. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684

1. Введение

В полуплоскости $\Pi = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение диффузии

$$u_t = (a^2(u)u_x)_x = A(u)_{xx}, \tag{1.1}$$

где $A'(u) = a^2(u)$ (в смысле распределений), $a(u) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, $a(u) \geqslant 0$. Поскольку коэффициент диффузии $a(u)$ может принимать и нулевое значение, уравнение (1.1) является вырождающимся. Будем рассматривать слабые решения этого уравнения, понимаемые в смысле распределений.

Определение 1.1. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *слабым решением* уравнения (1.1), если $u_t - A(u)_{xx} = 0$ в пространстве распределений на Π (в $\mathcal{D}'(\Pi)$), т. е. для всех пробных функций $f = f(t,x) \in C_0^2(\Pi)$

$$\int\limits_\Pi [uf_t + A(u)f_{xx}]dtdx = 0.$$

© Е. Ю. Панов, 2023
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

При замене $U = A(u)$ уравнение (1.1) сводится к уравнению

$$b(U)_t = U_{xx},$$

в котором $b(U) = A^{-1}(U)$ — строго возрастающая и возможно разрывная функция. Похожая замена применялась в [3, гл. 5, § 9] при исследовании задачи Стефана. Рассуждения, аналогичные используемым в [3], позволяют установить существование и единственность слабого решения задачи Коши для уравнения (1.1) с произвольными начальными данными

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{1.2}$$

понимаемыми в смысле следующего соотношения:

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} u(t, \cdot) = u_0 \quad \text{в} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Конечно, эти результаты известны и в случае многих пространственных переменных. Заметим, что для более общих уравнений конвекции—диффузии

$$u_t + \varphi(u)_x = (A(u))_{xx} \tag{1.3}$$

свойство единственности слабого решения задачи Коши может нарушаться, и необходимо рассматривать более узкий класс энтропийных решений, введённый в работе [4]. В гиперболическом случае (когда $A(u) = 0$) понятие энтропийного решения совпадает с хорошо известным понятием обобщённого энтропийного решения в смысле Кружкова [2] для скалярных законов сохранения $u_t + \varphi(u)_x = 0$. В случае, когда диффузия невырождена (т. е. когда функция $A(u)$ строго возрастает), энтропийная формулировка решений уравнения (1.3) не нужна, см. [5, Remark 3].

Для кусочно-гладкого слабого решения уравнения (1.1) следующие условия (типа Ранкина—Гюгонио) должны выполняться на линиях разрыва $x = x(t)$:

$$[A(u)] = 0, \quad [u]x'(t) + [A(u)_x] = 0, \tag{1.4}$$

где

$$[v] = v(t, x(t)+) - v(t, x(t)-)$$

обозначает скачок функции $v = v(t, x)$ на линии разрыва. Для вывода этих условий нужно применить распределение $0 = u_t - A(u)_{xx}$ к произвольной пробной функции $f = f(t, x)$ и проинтегрировать по частям с помощью формулы Грина. В результате возникнет соотношение

$$\int\limits_{x=x(t)} \big[([u]x'(t) + [A(u)_x])f - [A(u)]f_x\big]dt = 0.$$

Из произвольности и независимости f и f_x на линии $x = x(t)$ и следуют соотношения (1.4). Ясно, что эти соотношения вместе с требованием, что в областях гладкости $u(t, x)$ является классическим решением уравнения (1.1), эквивалентны утверждению, что $u = u(t, x)$ — слабое решение этого уравнения.

Мы будем изучать задачу Коши для уравнения (1.1) с начальными данными Римана

$$u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Из единственности слабого решения задачи (1.1), (1.5) и инвариантности этой задачи относительно преобразований $(t, x) \to (\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda > 0$, слабое решение задачи (1.1), (1.5) автомодельно: $u(t, x) = v(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{t}$. Для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ автомодельное решение $u = v(\xi)$ определяется из линейного обыкновенного дифференциального уравнения $a^2 v'' = -\xi v'/2$, общее решение которого $v = C_1 F(\xi/a) + C_2$, $C_1, C_2 = \text{const}$, где

$$F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-s^2/4} ds$$

— функция ошибок (немного изменённая). В частности, решение задачи Римана (1.1), (1.5) получится при выборе $C_2 = u_-$, $C_1 = u_+ - u_-$.

Перейдём теперь к нелинейному случаю, предполагая, что коэффициент диффузии кусочно постоянен: $a(u) = a_k$ при $u_k < u < u_{k+1}$, $k = 0, \dots, n$, где

$$u_- = u_0 < u_1 < \ldots < u_n < u_{n+1} = u_+$$

(так как уравнение (1.1) инвариантно относительно замены $x \to -x$, можно считать, что $u_+ > u_-$) и $a_{k+1} \neq a_k$, $k = 0, \dots, n-1$. В этом случае наша задача моделирует динамику многофазной среды, так что коэффициент диффузии a_k соответствует k-ой фазе, которая существует в температурном диапазоне $[u_k, u_{k+1}]$.

Целью настоящей работы является описание структуры слабого решения и нахождение неизвестных параметров (свободных границ). При этом мы не будем опираться на общие результаты о существовании и единственности слабого решения, а выведем эти свойства из анализа нелинейной алгебраической системы, задающей параметры свободных границ. Рассмотрим сначала невырожденный случай.

2. Невырожденный случай

В невырожденном случае при $a_k > 0$, $k = 0, \dots, n$, решение естественно искать, склеивая указанные во введении решения уравнений теплопроводности $u_t = a_k^2 u_{xx}$. В результате получим следующую форму слабого решения $u = v(\xi)$ задачи (1.1), (1.5):

$$v(\xi) = u_k + \frac{u_{k+1} - u_k}{F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)}(F(\xi/a_k) - F(\xi_k/a_k)), \quad \xi_k < \xi < \xi_{k+1},\ k = 0, \dots, n, \tag{2.1}$$

где

$$-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1} = +\infty$$

и считается, что $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Неизвестные параболы $\xi = x/\sqrt{t} = \xi_k$, $k = 1, \dots, n$, на которых $u = u_k$, подлежат определению из условий (1.4). Заметим, что кусочно линейная функция $A(u)$ строго возрастает и условие $[A(u)] = 0$ сводится к требованию непрерывности $[u] = 0$. Ясно, что это требование выполнено для решения (2.1), $u = u_k$ на линиях $\xi = \xi_k$ (фазового перехода), и эти линии являются слабыми разрывами $u(t, x)$. Второе условие в (1.4) сводится к требованию $[A(u)'_\xi] = 0$ непрерывности $A(u)'$. Ввиду (2.1) эти условия превращаются в равенства

$$\frac{a_k(u_{k+1} - u_k)F'(\xi_k/a_k)}{F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)} = \frac{a_{k-1}(u_k - u_{k-1})F'(\xi_k/a_{k-1})}{F(\xi_k/a_{k-1}) - F(\xi_{k-1}/a_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Это нелинейная алгебраическая система n уравнений с n неизвестными ξ_k, $k = 1, \dots, n$. Разрешив (2.2), мы получим решение (2.1) нашей задачи. Для анализа разрешимости нелинейной системы (2.2) ключевую роль играет наблюдение, что эта система градиентна и совпадает с равенством $\nabla E(\bar\xi) = 0$, где функция $E(\bar\xi)$ (потенциал) явно выписывается:

$$E(\bar\xi) = -\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2(u_{k+1} - u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)), \quad \bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega, \tag{2.3}$$

она определена в открытом выпуклом конусе Ω, задаваемом неравенствами $\xi_1 < \ldots < \xi_n$. Ясно, что $E(\bar\xi) \in C^\infty(\Omega)$. Заметим также, что при всех $k = 0, \dots, n$

$$\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) < 0 \tag{2.4}$$

и, в частности, $E(\bar\xi) > 0$. Назовём функцию $E(\bar\xi) > 0$ *энтропией*, поскольку она зависит только от разрывов функции $v(\xi)$.

Предложение 2.1 (коэрцитивность энтропии). *Множества подуровня*

$$\Omega_c = \{\bar\xi \in \Omega \mid E(\bar\xi) \leqslant c\}$$

компактны для всех $c > 0$.

Доказательство. Если $E(\bar\xi) \leqslant c$, то ввиду (2.4) для всех $k = 0, \dots, n$

$$-(a_k)^2(u_{k+1} - u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) \leqslant E(\bar\xi) \leqslant c,$$

откуда следует оценка

$$F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k) \geqslant \delta \doteq \exp(-c/m) > 0, \tag{2.5}$$

где $m = \min_{k=0,\dots,n} (a_k)^2(u_{k+1} - u_k) > 0$. При $k = 0, n$ из этих неравенств следует, что

$$F(\xi_1/a_0) \geqslant \delta, \quad F(-\xi_n/a_n) = 1 - F(\xi_n/a_n) \geqslant \delta,$$

откуда $-r \leqslant \xi_1 < \xi_n \leqslant r$, где константа $r > 0$ находится из условий $\max(F(-r/a_0), F(-r/a_n)) \leqslant \delta$. Поскольку остальные координаты точки $\bar\xi$ расположены между ξ_1 и ξ_n, получаем оценку

$$|\bar\xi|_\infty \doteq \max_{k=1,\dots,n} |\xi_k| \leqslant r.$$

Далее, так как $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4} < 1$, то функция $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1, и из (2.5) следует, что

$$(\xi_{k+1} - \xi_k)/a_k \geqslant F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k) \geqslant \delta, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Поэтому, $\xi_{k+1} - \xi_k \geqslant \delta_1 = \delta \min a_k$ при всех $k = 1, \dots, n-1$. Таким образом, множество Ω_c лежит в компакте

$$K = \{\bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid |\bar\xi|_\infty \leqslant r,\ \xi_{k+1} - \xi_k \geqslant \delta_1\ \forall k = 1, \dots, n-1\}.$$

Ввиду непрерывности $E(\bar\xi)$ множество Ω_c является замкнутым подмножеством K и потому компактно. $\square$

Возьмём $c > N \doteq \inf E(\bar\xi)$. Тогда множество Ω_c непусто. По предложению 2.1 это множество компактно, и значит, непрерывная функция $E(\bar\xi)$ достигает на нём минимального значения, очевидно равного N. Итак, существует точка $\bar\xi_0 \in \Omega$ глобального минимума, $E(\bar\xi_0) = \min E(\bar\xi)$. Ясно, что эта точка является критической, $\nabla E(\bar\xi_0) = 0$, и значит, система (2.2) имеет решение. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Слабое решение* (2.1) *задачи* (1.1), (1.5) *существует.*

Единственность этого решения будет следовать из строгой выпуклости энтропии $E(\bar\xi)$ (тогда эта функция имеет не более одной критической точки и решение (2.1) единственно). Для доказательства строгой выпуклости нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1. *Функция $P(x,y) = -\ln(F(x) - F(y))$ строго выпукла в полуплоскости $x > y$.*

Доказательство. Функция $P(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $x > y$. Для доказательства леммы нужно установить положительную определённость гессиана D^2P в любой фиксированной точке (x,y), $x > y$. Прямые вычисления дают

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,y) = \frac{(F'(x))^2 - F''(x)(F(x) - F(y))}{(F(x) - F(y))^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x,y) = \frac{(F'(y))^2 - F''(y)(F(y) - F(x))}{(F(x) - F(y))^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(x,y) = -\frac{F'(x)F'(y)}{(F(x) - F(y))^2}.$$

Достаточно доказать положительную определённость матрицы $Q = (F(x) - F(y))^2 D^2 P(x,y)$ с компонентами

$$Q_{11} = (F'(x))^2 - F''(x)(F(x) - F(y)),$$

$$Q_{22} = (F'(y))^2 - F''(y)(F(y) - F(x)), \qquad Q_{12} = Q_{21} = -F'(x)F'(y).$$

Поскольку $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4}$, то $F''(x) = -\dfrac{x}{2} F'(x)$, и диагональные элементы этой матрицы можно переписать в виде

$$Q_{11} = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x) - F(y)) + F'(x)\Big) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x) - F(y)) + (F'(x) - F'(y))\Big) + F'(x)F'(y),$$

$$Q_{22} = F'(y)\Big(\frac{y}{2}(F(y) - F(x)) + (F'(y) - F'(x))\Big) + F'(x)F'(y).$$

По теореме Коши найдётся такое значение $z \in (y,x)$, что

$$\frac{F'(x) - F'(y)}{F(x) - F(y)} = \frac{F''(z)}{F'(z)} = -z/2.$$

Поэтому

$$Q_{11} = F'(x)(F(x) - F(y))(x - z)/2 + F'(x)F'(y),$$
$$Q_{22} = F'(y)(F(x) - F(y))(z - y)/2 + F'(x)F'(y),$$

и матрица Q допускает представление $Q = R_1 + F'(x)F'(y)R_2$, где R_1 — диагональная матрица с положительными диагональными элементами

$$F'(x)(F(x) - F(y))(x - z)/2, \qquad F'(y)(F(x) - F(y))(z - y)/2,$$

а $R_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Так как $R_1 > 0$, $R_2 \geqslant 0$, заключаем, что $Q > 0$. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. В дополнение к лемме 2.1 покажем, что функции $P(x, -\infty)$, $P(+\infty, x)$ одной переменной являются строго выпуклыми. Так как $P(+\infty, x) = P(-x, -\infty)$, то достаточно доказать строгую выпуклость функции $P(x, -\infty) = -\ln F(x)$. Из предложения 2.2 в пределе при $y \to -\infty$ следует, что эта функция выпукла,

$$(F(x))^2 \frac{d^2}{dx^2} P(x, -\infty) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}F(x) + F'(x)\Big) = \lim_{y\to-\infty} Q_{11} \geqslant 0.$$

Поскольку $F'(x) > 0$, мы видим, что $\frac{x}{2}F(x) + F'(x) \geqslant 0$. Если $\frac{d^2}{dx^2}P(x, -\infty) = 0$ в некоторой точке $x = x_0$, то $0 = \frac{x_0}{2}F(x_0) + F'(x_0)$ — минимум неотрицательной функции $\frac{x}{2}F(x) + F'(x)$. Поэтому $\Big(\frac{x}{2}F + F'\Big)'(x_0) = 0$. Снова используя тождество $F''(x) = -\frac{x}{2}F'(x)$, получим, что

$$0 = \Big(\frac{x}{2}F + F'\Big)'(x_0) = F(x_0)/2 + \frac{x_0}{2}F'(x_0) + F''(x_0) = F(x_0)/2 > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\frac{d^2}{dx^2}P(x, -\infty) > 0$, и значит, функция $P(x, -\infty)$ строго выпукла.

Мы готовы установить строгую выпуклость функции $E(\bar\xi)$.

Предложение 2.2 (строгая выпуклость энтропии). *Функция $E(\bar\xi)$ строго выпукла на Ω.*

Доказательство. При $k = 0, \dots, n$ обозначим $P_k(\bar\xi) = -\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k))$. Как следует из леммы 2.1 и замечания 2.1, функции P_k выпуклы на Ω. Ввиду (2.3) энтропия $E(\bar\xi)$ является линейной комбинацией выпуклых функций P_k с положительными коэффициентами и потому выпукла. Для доказательства строгой выпуклости нужно установить положительную определённость гессиана $D^2E(\bar\xi)$. Заметим, что $D^2E(\bar\xi) \geqslant 0$ по выпуклости $E(\bar\xi)$. Предположим, что для некоторого вектора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$

$$D^2E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 E(\bar\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\zeta_i\zeta_j = 0. \tag{2.6}$$

Так как $D^2E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta$ является линейной комбинацией неотрицательных значений $D^2P_k(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta$ с положительными коэффициентами, приходим к соотношениям

$$D^2P_k(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Из этих соотношений (при $k = 1, \dots, n-1$) и леммы 2.1 следует, что $\zeta_k = \zeta_{k+1} = 0$, $k = 1, \dots, n-1$. Итак, $\zeta_1 = \ldots = \zeta_n = 0$ и (2.6) выполнено только при $\zeta = 0$. Это означает положительную определённость гессиана $D^2E(\bar\xi)$ и строгую выпуклость энтропии. □

Как уже обсуждалось выше, из строгой выпуклости энтропии следует единственность слабого решения (2.1).

Теорема 2.2. *Слабое решение* (2.1) *задачи* (1.1), (1.5) *единственно.*

3. Вырожденный случай

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые из коэффициентов $a_k = 0$. Если $k = 0$ или $k = n$, вид решения (2.1) сохранится, но при $\xi < \xi_1$ (соответственно, при $\xi > \xi_n$) решение становится постоянным: $v \equiv u_-$ (соответственно, $v \equiv u_+$). При этом разрыв $\xi = \xi_1$ ($\xi = \xi_n$) становится сильным и требование (1.4) приводит к следующему условию типа Стефана:

$$-(u_1 - u_-)\xi_1/2 = \frac{a_1(u_2 - u_1)F'(\xi_1/a_1)}{F(\xi_2/a_1) - F(\xi_1/a_1)},$$

соответственно, к условию

$$(u_+ - u_n)\xi_n/2 = \frac{a_{n-1}(u_n - u_{n-1})F'(\xi_n/a_{n-1})}{F(\xi_n/a_{n-1}) - F(\xi_{n-1}/a_{n-1})}.$$

Эти условия заменяют, соответственно, первое и последнее равенство в (2.2). Заметим также, что первое из требований $[A(u)] = 0$ в (1.4) выполнено, так как функция $A(u)$ постоянна на отрезке $[u_-, u_1]$ (на $[u_n, u_+]$). Заменив первый член в сумме (2.3) на $(u_1 - u_-)(\xi_1)^2/4$ (соответственно, заменив последний член в этой сумме на $(u_+ - u_n)(\xi_n)^2/4$), получим, что условия на линиях $\xi = \xi_k$, $k = 1, \dots, n$, снова сводятся к равенству $\nabla E = 0$ и искомое решение определяется точкой минимума энтропии $E(\bar\xi)$. Заметим, что после описанной коррекции свойства коэрцитивности и строгой выпуклости энтропии сохраняются.

Случай, когда диффузия вырождается на внутреннем интервале, т. е. когда $a_k = 0$ при некотором $0 < k < n$, более сложный. В этом случае линии $\xi = \xi_k$, $\xi = \xi_{k+1}$ сливаются в одну линию $\xi = \xi_k$ сильного разрыва с предельными значениями $v(\xi_k-) = u_k$, $v(\xi_k+) = u_{k+1}$ (нужно положить $\xi_{k+1} = \xi_k$ в формуле (2.1)). Условие (1.4) на линии $\xi = \xi_k$ сводится к равенству

$$-(u_{k+1} - u_k)\xi_k/2 = \frac{a_{k+1}(u_{k+2} - u_{k+1})F'(\xi_k/a_{k+1})}{F(\xi_{k+2}/a_{k+1}) - F(\xi_k/a_{k+1})} - \frac{a_{k-1}(u_k - u_{k-1})F'(\xi_k/a_{k-1})}{F(\xi_k/a_{k-1}) - F(\xi_{k-1}/a_{k-1})}.$$

Это равенство заменяет два уравнения с номерами $k, k+1$ в системе (2.2), где мы полагаем всюду $\xi_{k+1} = \xi_k$. В общем случае (2.2) заменяется на систему $n - l$ уравнений с $n - l$ неизвестными, где l — число внутренних интервалов (u_k, u_{k+1}) с нулевой диффузией ($a_k = 0$). Нетрудно проверить, что решения этой системы совпадают с критическими точками функции $E(\bar\xi)$, определённой следующим выражением:

$$E(\xi_1, \dots, \xi_n) = -\sum_{k=0,\dots,n, a_k>0} (a_k)^2(u_{k+1} - u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) + \\ + \sum_{k=0,\dots,n, a_k=0} (u_{k+1} - u_k)(\xi_k)^2/4. \quad (3.1)$$

Эта функция задана на множестве

$$\Gamma = \{\bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_{k+1} > \xi_k \text{ при } a_k > 0, \xi_{k+1} = \xi_k \text{ при } a_k = 0,\ k = 1, \dots, n-1\}.$$

Заметим, что Γ — это $(n - l)$-мерный выпуклый конус, который является гранью замкнутого конуса $Cl\,\Omega$. Точно так же, как и в невырожденном случае, доказывается коэрцитивность и строгая выпуклость энтропии $E(\bar\xi)$ на конусе Γ. Координаты точки минимума энтропии определяют единственное слабое решение задачи (1.1), (1.5). Таким образом, теоремы 2.1, 2.2 справедливы и в вырожденном случае.

4. О задаче Стефана

Решение многофазной задачи Стефана для уравнений теплопроводности $u_t = a_k^2 u_{xx}$ с начальными данными Римана (1.5) имеет вид (2.1) (мы предполагаем, что $a_k > 0$, $k = 0, \dots, n$), но для определения линий $x = x_k(t) = \xi_k\sqrt{t}$ фазового перехода вместо условий Ранкина—Гюгонио (1.4) задаётся условие Стефана

$$d_k x_k'(t) + h_k u_x(t, x_k(t)+) - h_{k-1} u_x(t, x_k(t)-), \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где $h_k > 0$ — коэффициент теплопроводности для k-ой фазы, а $d_k \geqslant 0$ — скрытая удельная теплота k-ого фазового перехода (между фазами с номерами $k-1$ и k). Из (4.1) вытекает следующая алгебраическая система:

$$d_k\xi_k/2 + \frac{h_k(u_{k+1}-u_k)F'(\xi_k/a_k)}{a_k(F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k))} - \frac{h_{k-1}(u_k-u_{k-1})F'(\xi_k/a_{k-1})}{a_{k-1}(F(\xi_k/a_{k-1})-F(\xi_{k-1}/a_{k-1}))} = 0, \quad k=1,\ldots,n,$$

см., например, [1, гл. XI]. Оказалось, что эта система является градиентной: нетрудно проверить, что она совпадает с равенством $\nabla E(\bar\xi)=0$, где функция

$$E(\bar\xi) = -\sum_{k=0}^{n} h_k(u_{k+1}-u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k)) + \sum_{k=1}^{n} d_k\xi_k^2/4, \quad \bar\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\Omega, \tag{4.2}$$

определена в открытом конусе Ω из раздела 2 и имеет вид (3.1) (только с другими коэффициентами). Коэрцитивность и строгая выпуклость $E(\bar\xi)$ непосредственно вытекают из коэрцитивности и строгой выпуклости функции

$$\tilde E(\bar\xi) = -\sum_{k=0}^{n} h_k(u_{k+1}-u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k)),$$

доказанной в предложениях 2.1, 2.2. Таким образом, решение задачи Стефана имеет вид (2.1) и однозначно определяется по координатам точки минимума энтропии (4.2). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Решение* (2.1) *задачи Стефана существует, единственно и соответствует точке глобального минимума энтропии* (4.2).

Следует отметить, что в недавней статье [6] исследовалась некорректная задача Стефана, в которой условие неотрицательности значений d_k может нарушаться. В этой работе было найдено необходимое и достаточное условия коэрцитивности функции (4.2) и более сильное достаточное условие её строгой выпуклости.

5. Вариационная формулировка

Вернёмся к изучению слабых решений задачи (1.1), (1.5). Добавив к энтропии (3.1) константу

$$\sum_{\substack{k=0,\ldots,n,\\ a_k>0}} (a_k)^2(u_{k+1}-u_k)\ln((u_{k+1}-u_k)/a_k),$$

получим эквивалентную её форму

$$E_1(\bar\xi) = -\sum_{\substack{k=0,\ldots,n,\\ a_k>0}} (a_k)^2(u_{k+1}-u_k)\ln\left(\frac{F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k)}{(u_{k+1}-u_k)/a_k}\right) + \\ + \sum_{\substack{k=0,\ldots,n,\\ a_k=0}} (u_{k+1}-u_k)(\xi_k)^2/4. \tag{5.1}$$

Пусть кусочно постоянные коэффициенты диффузии аппроксимируют в пределе, когда ранг разбиения $\max\limits_{k=0,\ldots,n}(u_{k+1}-u_k)$ отрезка $[u_-,u_+]$ стремится к нулю, произвольную функцию $a(u)\in L^2([u_-,u_+])$, $a(u)\geqslant 0$. Тогда соответствующие кусочно-линейные функции $A=A_r(u)$ (для простоты предположим, что они образуют последовательность $\{A_r\}$, $r\in\mathbb{N}$) сходятся равномерно на отрезке $[u_-,u_+]$ к функции $A(u)=\int a^2(u)du$. Как установлено в [5], соответствующая последовательность $u_r=u_r(t,x)$ слабых решений $*$-слабо в $L^\infty(\Pi)$ сходится к слабому решению предельной задачи, причём в случае, когда функция $A(u)$ строго возрастает, сходимость сильная — в $L^1_{loc}(\Pi)$. На самом деле, указанное свойство установлено в [5] в более общем случае энтропийных решений уравнения (1.3). В частности, это свойство обосновывает законность кусочно-постоянной аппроксимации коэффициентов.

Переходя формально к пределу при $\max\limits_{k=0,\dots,n}(u_{k+1}-u_k)\to 0$ в выражении (5.1), получим интегральный функционал

$$J(\xi)=-\int\limits_{\substack{\{u\in[u_-,u_+],\\ a(u)>0\}}}(a(u))^2\ln(F'(\xi(u)/a(u))\xi'(u))du+\int\limits_{\substack{\{u\in[u_-,u_+],\\ a(u)=0\}}}(\xi(u))^2/4du,$$

зависящий от возрастающей функции $\xi(u)$ на отрезке $[u_-,u_+]$, обратной к искомому автомодельному решению $u=u(\xi)$ задачи (1.1), (1.5). Учитывая, что

$$\ln(F'(\xi(u)/a(u))\xi'(u))=\ln F'(\xi(u)/a(u))+\ln\xi'(u)=-\frac{(\xi(u))^2}{4a^2(u)}+\ln\xi'(u),$$

мы можем упростить выражение для функционала $J(\xi)$:

$$J(\xi)=\int\limits_{u_-}^{u_+}\left[-(a(u))^2\ln(\xi'(u))+(\xi(u))^2/4\right]du. \tag{5.2}$$

Ясно, что этот функционал строго выпуклый. Соответствующее уравнение Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\xi(u)/2+((a(u))^2/\xi'(u))'=0. \tag{5.3}$$

Так как $u'(\xi)=1/\xi'(u)$, $u=u(\xi)$, можно переписать (5.3) в форме

$$\xi(u)/2+((a(u))^2u'(\xi))'_u=0.$$

Умножив это равенство на $u'(\xi)$, придём к уравнению

$$(a^2u')'=-\xi u'/2,\quad u=u(\xi),$$

которое совпадает с уравнением (1.1) в классе автомодельных функций. Таким образом, функционал $J(\xi)$ даёт вариационную формулировку автомодельных решений задачи (1.1), (1.5). Конечно, эта формулировка является формальной, её обоснование является отдельной задачей, выходящей за рамки данного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карслоу Г., Егер Дж.* Теплопроводность твёрдых тел. — М.: Наука, 1964.
2. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81*, № 2. — С. 228–255.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
4. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1999. — *147*. — С. 269–361.
5. *Panov E. Yu.* On weak completeness of the set of entropy solutions to a degenerate non-linear parabolic equation// SIAM J. Math. Anal. — 2012. — *44*, № 1. — С. 513–535.
6. *Panov E. Yu.* Solutions of an ill-posed Stefan problem// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2023. — *274*, № 4. — С. 534–543.

Е. Ю. Панов
Новгородский государственный университет, Великий Новгород, Россия
Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

UDC 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684
EDN: ZEGDSE

On the structure of weak solutions of the Riemann problem for a degenerate nonlinear diffusion equation

E. Yu. Panov[1,2]

[1] *Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia*
[2] *Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia*

Abstract. An explicit form of weak solutions to the Riemann problem for a degenerate nonlinear parabolic equation with a piecewise constant diffusion coefficient is found. It is shown that the lines of phase transitions (free boundaries) correspond to the minimum point of some strictly convex and coercive function of a finite number of variables. A similar result is true for Stefan's problem. In the limit, when the number of phases tends to infinity, there arises a variational formulation of self-similar solutions to the equation with an arbitrary nonnegative diffusion function.

Keywords: degenerate nonlinear parabolic equation, Riemann problem, Stefan problem, weak solution, phase transition, self-similar solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author is grateful to E. V. Radkevich for valuable comments on this work. The work was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 22-21-00344.

For citation: E. Yu. Panov, "On the structure of weak solutions of the Riemann problem for a degenerate nonlinear diffusion equation," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 676–684. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684

REFERENCES

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Teploprovodnost' tverdykh tel* [Conduction of Heat in Solids], Nauka, Moscow, 1964 (Russian translation).
2. S. N. Kruzhkov, "Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi" [First-order quasilinear equations with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 2, 228–255 (in Russian).
3. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
4. J. Carrillo, "Entropy solutions for nonlinear degenerate problems," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1999, **147**, 269–361.
5. E. Yu. Panov, "On weak completeness of the set of entropy solutions to a degenerate non-linear parabolic equation," *SIAM J. Math. Anal.*, 2012, **44**, No. 1, 513–535.
6. E. Yu. Panov, "Solutions of an ill-posed Stefan problem," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **274**, No. 4, 534–543.

E. Yu. Panov
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia
Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

© E. Yu. Panov, 2023
This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/