

УДК 517.958+519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663

EDN: YWENJV

МАТЕРИАЛЬНЫЙ БАЛАНС ЭЙНШТЕЙНА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

А. ИБРАГИМОВ^{1,2}, Э. ЗАКИРОВ², И. ИНДРУПСКИЙ², Д. АНИКЕЕВ², А. ЖАГЛОВА²

¹*Texas Tech University, Lubbock, USA*

²*Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия*

Аннотация. Мы рассматриваем технику «сшивания» численного решения конечноразностной задачи и аналитического решения, определенных на разных масштабах: вдали и вблизи границы (источника) области течения. Суть подхода заключается в том, что грубая конечноразностная задача и краевая задача в приближении исходной модели математически моделируют два разных режима течения. В своей замечательной статье Писман предлагает схему, позволяющую работать с решениями, определенными на разных масштабах, для линейных *стационарных* задач, вводя знаменитый радиус блока скважины Писмана. В данной статье предлагается новый подход к решению этой проблемы для неустановившегося течения, обусловленного сжимаемостью жидкости. Мы предлагаем метод склеивания решений через суммарные потоки, заданные на крупной сетке, и изменения давления, обусловленные сжимаемостью, в блоке, содержащем добывающую (нагнетательную) скважину. Важно отметить, что грубое решение «не видит» границы.

С прикладной точки зрения наш отчет предоставляет математический аппарат для аналитической интерпретации смоделированных данных течения сжимаемой жидкости в пористой среде вблизи скважины. Его можно рассматривать как математическую «обертку» известной формулы радиуса блока скважины Писмана для линейного (Дарси) неустановившегося течения, но его можно применять и в гораздо более общем сценарии. В статье мы используем подход Эйнштейна для вывода уравнения материального баланса, ключевого инструмента для определения R_0 для трех режимов течений сжимаемой жидкости (зависящих от времени):

- I. стационарный;
- II. псевдостационарный;
- III. с доминированием граничного условия.

Отметим, что в известных авторам работах соответствующая задача фактически не зависит от времени.

Ключевые слова: сжимаемая жидкость, радиус Писмана, материальный баланс Эйнштейна.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Настоящее исследование является вкладом в выполнение государственного задания Института проблем нефти и газа РАН (проект 122022800272-4).

Для цитирования: А. Ибрагимов, Э. Закиров, И. Индрупский, Д. Анিকেев, А. Жаглова. Материальный баланс Эйнштейна и моделирование течения сжимаемой жидкости вблизи границы // Современ. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 4. С. 643–663. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663>



1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Радиус блока скважины Писмана [7, 13–17] рутинно используется инженерами, моделирующими процесс добычи для интерпретации расчетных данных на блоке B_0 , который содержит скважину. Целью является сравнение численного значения функции давления, полученного на расчетном блоке B_0 , с фактическим значением давления на скважине. При этом суммарный дебит скважины считается заданным.

В приложениях считается, что радиус Писмана не зависит от радиуса скважины, а определяется размером блока B_0 , и задача стационарна. Условия применимости такого подхода, к сожалению, не обоснованы математически строго, и поэтому формулу Писмана трудно обобщать даже для установившихся течений. Подробный обзор основных принципов для построения писмановского радиуса для линейных и нелинейных стационарных течений в пористых средах представлен в статье, принятой к публикации в журнале «Applied and Computational Mathematics» (vol. 23, № 1, 2024) и опубликован в 2022 г. в работе [11] (см. также [4]). Здесь мы хотим отметить следующее: насколько нам известно, понятие эквивалентного радиуса было введено в первые в России (см. [1, 3]), но соответствующие работы не были переведены, а потому не цитируются в современной западной литературе.

В основе идеи радиуса блока скважины Писмана лежит уравнение материального баланса, которое позволяет «сшить» аналитическое решение с численным (дискретным), а также интерпретировать результат расчета значения давления в блоке, содержащем скважину. Обычно в блоках, не содержащих скважину, численное решение мало отличается от фактического при малых размерах блока и для строго эллиптических задач. В настоящей статье мы рассматриваем этот вопрос для нестационарных задач двух типов:

1. с заданным дебитом скважины;
2. заданным давлением на скважине в условиях непротекания на границе дренирования.

Рассматриваемый подход является общим с математической точки зрения, а потому применим к задачам разного происхождения.

В этом разделе мы опишем парадигму материального баланса как систему алгебраических уравнений и укажем предполагаемое применение этого подхода для нашей задачи фильтрации в пористых средах. Чтобы представить систему уравнений материального баланса, сначала рассмотрим следующий набор зависимых переменных:

$$\mathcal{P} = \{p_{\pm r_0,0}(s); p_{0,\pm r_0}(s); p_{\pm 1,0}(s); p_{0,\pm 1}(s); q_x^\pm(s); q_y^\pm(s)\}. \quad (1.1)$$

Предположим, что входные параметры алгебраической модели постоянны:

$$\mathcal{K} = \{K_x^\pm; K_y^\pm\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q} = \{Q_x^\pm; Q_y^\pm\}. \quad (1.2)$$

Как уже отмечалось, мы рассматриваем задачу о течении жидкости к скважине в пористой среде. А именно, рассмотрим диффузионный процесс в области, содержащей центр 0 : $U \ni 0$. Предположим, что диффузионный процесс инициирован источником (стоком), расположенным в центре 0 . Пусть $U_N = \sum_{i=1}^N B_i$ — численная сетка, аппроксимирующая U , такая, что $U_N \supset B_0 \ni 0$ и квадратные блоки B_i имеют характерный размер Δ (см. рис. 1).

Главное предположение о параметрах заключается в том, что процесс течения жидкости в среде несравненно быстрее, чем изменения в жидкости и в пористой среде, потому изменениями в \mathbf{K} и \mathbf{Q} пренебрегают. Предположим, что проводимость по отношению к течению, генерируемому источником, в интересующих нас блоках не зависит от Δ .

Пусть набор \mathcal{P} содержит параметры, определенные только в центре $B_0 = B_{0,0}$ (область значений параметров $p_{\pm r_0,0}(s)$, $p_{0,\pm r_0}(s)$, ... находится в B_0) и ближайших четырех блоках $B_{i,J}$ (области значений параметров $p_{\pm r_0,0}(s)$, $p_{0,\pm r_0}(s)$ находятся в $B_{\pm 1,0}$, $B_{0,\pm 1}$). Рассмотрим фильтрацию, описываемую уравнением материального баланса, как алгебраическое уравнение относительно неизвестной переменной $p_{a,b}(s)$, зависящей от параметра s и входной переменной $q_a^b(s)$, которая также зависит от параметра s . Параметр s моделирует время. Система также характеризуется параметром τ , который связан с изменением свойств переменных p на интервале времени $[s, s + \tau]$. Этот параметр τ в некотором смысле связывает наше уравнение материального баланса (алгебраическое) с уравнением баланса Эйнштейна (см. [8, 10]).

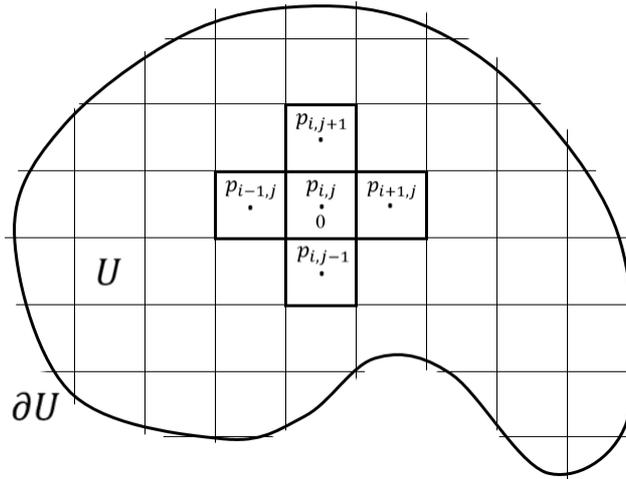


Рис. 1. Дискретная сетка. Блоки расположены в тех же областях, что и $p_{i,j}$; $p_{i,i}$ ассоциируется с B_0 , U_N аппроксимирует область U .

FIG. 1. Discrete grid. Blocks are located in the same areas as $p_{i,j}$; $p_{i,i}$ is associated with B_0 , U_N approximates the area U .

В статье τ фиксировано и предполагается очень маленьким.

Замечание 1.1. Обратим внимание, что уравнение материального баланса Эйнштейна естественно является детерминированным, но с коэффициентом, зависящим от плотности вероятности и интервала τ . Поэтому мы считаем, что подход Эйнштейна можно распространить на случайные процессы, определенные на стохастической сетке. Мы оставим этот вопрос для дальнейших исследований.

Зависимые переменные из множества \mathcal{P} по отношению к независимым (заданным) параметрам \mathcal{K} , \mathcal{Q} , и τ удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\tau K_x^- (p_{-r_0,0}(s) - p_{-1,0}(s)) = \tau q_x^-(s) + Q_x^- (p_{-r_0,0}(s + \tau) - p_{-r_0,0}(s)), \tag{1.3}$$

$$\tau K_x^+ (p_{r_0,0}(s) - p_{1,0}(s)) = \tau q_x^+(s) + Q_x^+ (p_{-r_0,0}(s + \tau) - p_{-r_0,0}(s)), \tag{1.4}$$

$$\tau K_y^- (p_{0,-r_0}(s) - p_{0,-1}(s)) = \tau q_y^-(s) + Q_y^- (p_{-r_0,0}(s + \tau) - p_{-r_0,0}(s)), \tag{1.5}$$

$$\tau K_y^+ (p_{0,r_0}(s) - p_{0,1}(s)) = \tau q_y^+(s) + Q_y^+ (p_{0,r_0}(s + \tau) - p_{0,r_0}(s)). \tag{1.6}$$

Введем обозначения:

$$q_x(s) = q_x^-(s) + q_x^+(s), \quad q_y(s) = q_y^-(s) + q_y^+(s), \quad Q_x = Q_x^- + Q_x^+ \quad Q_y = Q_y^- + Q_y^+, \tag{1.7}$$

$$q(s) = q_x(s) + q_y(s), \quad Q = Q_x + Q_y. \tag{1.8}$$

Введем базовые предположения с целью получения аналитических явных решений. Пусть имеет место симметрия относительно «+» и «-», определяемая следующим образом.

Определение 1.1. Структурная симметрия относительно «+» и «-».

1. Коэффициенты K :

$$K_x^- = K_x^+ = K_x, \quad K_y^- = K_y^+ = K_y. \tag{1.9}$$

2. Параметры q :

$$q_x^-(s) = q_x^+(s) = \frac{q_x(s)}{2}, \quad q_y^-(s) = q_y^+(s) = \frac{q_y(s)}{2}. \tag{1.10}$$

3. Коэффициенты Q :

$$Q_x^- = Q_x^+ = \frac{Q_x}{2}, \quad Q_y^- = Q_y^+ = \frac{Q_y}{2}. \tag{1.11}$$

4. Переменные p по первому индексу:

$$p_{-r_0,0}(s) = p_{r_0,0}(s) = p_{r_0}^x(s), \quad p_{-1,0}(s) = p_{1,0}(s) = p_1^x(s). \tag{1.12}$$

5. Переменные p по второму индексу:

$$p_{0,-r_0}(s) = p_{0,r_0}(s) = p_{r_0}^y(s), \quad p_{0,-1}(s) = p_{0,1}(s) = p_1^y(s). \quad (1.13)$$

Из вышеприведенных предположений о симметрии из уравнений (1.3)–(1.6) после небольших модификаций следует

$$\tau \cdot 2 \cdot K_x (p_{r_0}^x(s) - p_1^x(s)) = \tau q_x(s) + Q_x \cdot 2 \cdot (p_{r_0}^x(s + \tau) - p_{r_0}^x(s)), \quad (1.14)$$

$$\tau \cdot 2 \cdot K_y (p_{r_0}^y(s) - p_1^y(s)) = \tau q_y(s) + Q_y \cdot 2 \cdot (p_{r_0}^y(s + \tau) - p_{r_0}^y(s)). \quad (1.15)$$

Предположим, что $(p_{r_0}^y(s) - p_1^y(s) = 0$ ($p_{r_0}^y(s + \tau) - p_{r_0}^y(s)$) и $q_y(s) = 0$. Это условие представляет собой прототип 1-мерного уравнения материального баланса, которое примет в случае *симметрии* в направлении x следующий вид:

$$\tau \cdot 2 \cdot K_x (p_{r_0}^x(s) - p_1^x(s)) = \tau q_x(s) + Q_x \cdot 2 \cdot (p_{r_0}^x(s + \tau) - p_{r_0}^x(s)). \quad (1.16)$$

В 2-мерном случае как прототип для *радиально-симметричного течения* в уравнении материального баланса мы положим $p_{r_0} = p_{r_0}^x = p_{r_0}^y, \dots$, а для *изотропного течения* положим: $K_x = K_y$, $q(s) = q_x(s) + q_y(s)$ и $Q(s) = Q_x(s) + Q_y(s)$. Соответствующее уравнение примет вид:

$$\tau \cdot 4 \cdot K (p_{r_0}(s) - p_1(s)) = \tau q(s) + Q(s) \cdot 4 \cdot (p_{r_0}(s + \tau) - p_{r_0}(s)). \quad (1.17)$$

В динамической постановке искомые алгебраические переменные $p_i^{x,y,\dots}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, зависят также от параметра s (прототип времени), и это достаточно общее обстоятельство для структур в алгебраической геометрии.

Замечание 1.2. Структура алгебраических зависимостей абстрактна, хотя в этой статье мы применяем эту конструкцию к задачам подземной гидромеханики. В этом смысле мы отметим общие характеристики уравнения материального баланса. С учетом алгебраической структуры уравнения параметры $p_i(s)$ являются зависимыми переменными. Положим $i = 0, 1$; тогда, применяя ранее приведенные рассуждения, мы можем использовать параметрическую алгебраическую структуру как технику спивания (усреднения) между аналитическим и численным решением. Это весьма общее обстоятельство, которое может быть использовано для разных задач. С этой целью мы перепишем уравнения материального баланса с общими коэффициентами:

$$\tau \left(J_{1,0}^p (p_0(s) - p_1(s)) - I_q q(s) \right) = L_q^{p_0} (p_0(s + \tau) - p_0(s)). \quad (1.18)$$

В дальнейшем мы выберем их в специальном виде, связанном с размерностью и областью дискретизации.

Значения коэффициентов и их зависимость от входных параметров могут варьироваться в зависимости от предполагаемого применения, размерности, геометрии и динамики процесса, дискретности и т. д.

В уравнении (1.18) функция $q(s)$ — это основная *функция, определяющая процесс*, и три других коэффициента $J_{1,0}^p$, I_q , и $L_q^{p_0}$ содержат существенные характеристики алгебраической и геометрической структуры среды течения и ее дискретизации по области U_N . Эти коэффициенты мы выберем в следующем разделе.

2. КОЭФФИЦИЕНТЫ В УРАВНЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КОНЕЧНОРАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Рассмотрим течение слабосжимаемой жидкости в области U и соответствующую модель в форме краевой задачи без начальных условий. Известно, что численное моделирование течения дает три базовые характеристики процесса:

1. геометрическую аппроксимацию области фильтрации композитной жидкости;
2. численные значения таких функций, как давление или скорость и т. д.;
3. величины основных параметров, характеризующих область фильтрации по отношению к химическим и физическим свойствам жидкостей в пористой среде.

Чтобы объяснить алгебраическую структуру уравнения материального баланса (1.18), рассмотрим ортогональную сетку размерности $M \times N$ и размеров Δ_x и Δ_y . Пусть $P_{(M,N)}$ — матрица размерности $M \times N$ значений давления с элементами $p_{i,j}(t)$, которые привязаны к блоку $B_{i,j}$.

В этом разделе мы явно определим коэффициенты в системе уравнений материального баланса в зависимости от Δ_x и Δ_y на пятиточечной ортогональной сетке. Предположим, что блок $B_{0,0}$ содержит источник в центре $(0, 0)$, и этот источник порождает конечные разности функции $p_{i,j}(t)$ для различных i и j . Здесь $D = \Omega \times (0, h)$ — трёхмерная цилиндрическая область, и отсутствует поток в направлении z . Предположим, что функция типа Грина $p(x, y, t)$ является решением базовой задачи моделирования:

$$L \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} - J \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p = I \delta(x, y) \quad \text{в } (U \setminus (0, 0)) \times (-\infty, \infty), \quad (2.1)$$

$$B(p) = 0 \quad \text{на } \partial U \times (-\infty, \infty). \quad (2.2)$$

Здесь B — граничный оператор, которым в нашем случае будет оператор Дирихле или Ньюмана. Для аппроксимации функции $p(x, y, t)$ рассмотрим конечно-разностное решение задачи в прямоугольной области:

$$\begin{aligned} L \frac{p_{i,i}(t + \tau) - p_{i,i}(t)}{\tau} - J \left(\frac{p_{i-1,j}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i+1,j}(t)}{\Delta_x^2} + \frac{p_{i,j-1}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i,j+1}(t)}{\Delta_y^2} \right) = \\ = I \frac{\delta_{i,j}}{\Delta_x \Delta_y h} \quad \text{в } \Omega_N \setminus (0, 0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$B(p) = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_N \times (-\infty, \infty),$$

или

$$\begin{aligned} L(\Delta_x \Delta_y h) (p_{i,j}(t + \tau) - p_{i,j}(t)) = \\ = \tau \left[Jh \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} (p_{i-1,j}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i+1,j}(t)) + \frac{\Delta_x}{\Delta_y} (p_{i,j-1}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i,j+1}(t)) \right) + I \delta_{i,j} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$B(p) = 0 \quad \text{на } \partial \Omega_N \times (-\infty, \infty).$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Приведенное выше уравнение является основным и может изменяться как в 1-мерном, так и в 2-мерном случае. Хотя в обоих случаях есть много общего, мы будем рассматривать их отдельно. А именно:

- 1-мерный материальный баланс в «последних блоках» B_0, B_1 .

В случае 1-мерной симметрии естественно предположить, что $\Delta_y h = 1$ при любых $\Delta = \Delta_x$.

Тогда уравнение материального баланса примет вид

$$\begin{aligned} L \cdot \Delta \cdot 1 \cdot (p_0(t + \tau) - p_0(t)) = \\ = \tau \left(2 \cdot J \cdot 1 \cdot \frac{(p_1(t) - p_0(t))}{\Delta} + I \delta_{0,0} \right) = \tau \left(2 \cdot J \cdot 1 \cdot \frac{(p_1(t) - p_0(t))}{\Delta} + q \delta_{0,0} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

2. Радиально-симметричный материальный баланс для «последних блоков» $B_0, B_{pm1,0}, B_{0,pm1}$.

В предположении 2-мерной симметрии имеем

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y. \quad (2.6)$$

Напомним, что толщина скважины постоянна, а потому

$$I = q. \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.4) может быть упрощено:

$$L \Delta^2 h (p_0(t + \tau) - p_0(t)) = \tau (4Jh (p_1(t) - p_0(t)) + I \delta_{i,j}) = \tau (4(Jh) (p_1(t) - p_0(t)) + q \delta_{i,j}). \quad (2.8)$$

Замечание 2.1. Для удобства суммируем комментарии о свойствах среды по отношению к потоку жидкости в виде списка примечаний.

1. Всюду выше q — это общий расход скважины (дебит скважины), который зависит от времени, $q = q(s)$, для псевдостационарного режима и режима с доминированием граничного условия.
2. В этой статье в случае 2-мерных потоков предполагаются условия симметричности и изотропии в следующем виде:

$$K = K_x^- = K_x^+ = K_y^- = K_y^+, \quad q_x^- = q_x^+ = q_y^- = q_y^+, \quad Q_x^- = Q_x^+ = Q_y^- = Q_y^+. \quad (2.9)$$

3. В этой статье в случае 1-мерных потоков предполагаются условия симметричности и изотропии в следующем виде:

$$K = K_x^- = K_x^+, \quad q = q_x^- = q_x^+ q_y^- = q_y^+ = 0, \quad Q = Q_x^- = Q_x^+ Q_y^- = Q_y^+ = 0. \quad (2.10)$$

4. Все приведенные выше предположения позволяют получить аналитическое решение, которое можно построить явно. В случае, когда явное аналитическое решение недоступно для «склеивания», можно использовать численное решение на мелком масштабе для соответствующего параболического уравнения с граничными условиями. В этом смысле задача Писмана является задачей усреднения.
5. Уравнение материального баланса «не видит» границы (внутренней) Ω_N и используется для склеивания аналитического решения путем решения задачи Писмана. Но аналитическое решение будет учитывать влияние граничных условий на значение радиуса Писмана как на самой скважине (внутренней границе) так и на границе области дренирования (внешней границе). Мы увидим, что в линейном случае в нестационарной задаче R_0 будет зависеть только от размера области. В случае стационарной задачи, как было показано Писманом, R_0 не зависит от размера области дренирования, и это весьма примечательное открытие. Этот вопрос подробно обсуждался в нашей статье [11].

3. 1-МЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА

Рассмотрим сетку, определенную на рис. 2 при отсутствии течения в направлении вертикальной оси y . Пусть $h\Delta_y = 1$ и $\Delta_x = \Delta$. Материальный баланс в вертикальном направлении (направлении y) для 1-мерного уравнения материального баланса предполагается тривиальным. Определим в уравнении (1.18) соответствующие коэффициенты следующим образом:

$$I_q(s) = q \frac{1}{1 \cdot \Delta_x}, \quad (3.1)$$

$$J_{1,0}^p = 2K \frac{1}{\Delta_x^2}, \quad (3.2)$$

$$C^0 = L_q^{p_0} = \phi C_p. \quad (3.3)$$

Тогда уравнение материального баланса (1.18) можно переписать в виде

$$2K(p_0(s) - p_1(s)) = -q\Delta + C^0 \frac{p_0(s + \tau) - p_0(s)}{\tau} \Delta^2. \quad (3.4)$$

Отметим, что если мы будем использовать конечноразностную аппроксимацию в качестве уравнение материального баланса (2.8), мы получим

$$L\Delta \cdot 1 \cdot (p_0(t + \tau) - p_{i,i}(t)) = \tau \left(2(J \cdot 1 \cdot \frac{p_1(t) - p_0(t)}{\Delta} + q\delta_{i,j} \right), \quad (3.5)$$

$$B(p) = 0 \quad \text{на} \quad \partial U \times (-\infty, \infty),$$

что эквивалентно уравнению (3.4) при $J = K$ и $L = C^0$.

3.1. 1-мерная стационарная задача. В данном разделе мы рассмотрим элементарную задачу, в которой p не зависит от s . А именно, рассмотрим случай, когда p_i , $i = 0, 1$ не зависят от s . Для этого достаточно член в левой части уравнения (3.4) положить равным нулю:

$$\phi C_p \Delta^2 \frac{p_0(s + \tau) - p_0(s)}{\tau} \equiv 0. \quad (3.6)$$

С физической точки зрения (см. (3.6)), это означает следующее:

1. интервал времени τ с точки зрения сжатия фиксированного объема $V_0 = \Delta^2$ относительно объема всей области течения достаточно велик;
2. пористость ϕ незначительна;
3. сжимаемость C_p незначительна;
4. изменение давления в блоке V_0 за время τ пренебрежимо мало.

Определение 3.1. Будем говорить, что уравнение материального баланса является *установившимся*, если условие (3.6) выполняется для всех s и τ .

Тогда симметричное, изотропное и стационарное 1-мерное уравнение баланса имеет вид

$$2K(p_0 - p_1) = q\Delta. \quad (3.7)$$

Замечание 3.1. Обратим внимание, что для стационарной задачи в уравнении материального баланса p_i не зависит от параметра s (времени в нашем предполагаемом приложении).

Чтобы согласовать значение p_0 с профилем давления гидродинамической задачи на границе области течения, порожденного заданным дебитом q , рассмотрим 1-мерное течение несжимаемой жидкости в направлении слоя $x = 0$. На поток воздействуют:

1. силы, порождающие линейное уравнение Дарси — связи скорости и градиента фильтрации;
2. независимое от s давление $p = p_e$ на границе резервуара $x = r_e$;
3. дебит q на слое $x = 0$ в качестве внутренней границы потока.

Соответствующая аналитическая модель для 1-мерного давления имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{d}{dx} p_{an}(x) \right) = 0; \quad (3.8)$$

$$p_{an}(x) \Big|_{x=R_e} = p_e; \quad (3.9)$$

$$-K \frac{dp_{an}}{dx} \Big|_{x=0} = q. \quad (3.10)$$

Определение 3.2. Пусть на 1-мерной области $(0; R_e)$ задана сетка $[0, \Delta, 2\Delta, \dots, N\Delta]$, где $N\Delta = r_e$. Мы говорим, что проблема Писмана корректно определена относительно материального баланса (3.7) для 1-мерных потоков, если для любого заданного Δ существует такое R_0 , зависящее только от Δ , что аналитическое решение 1-мерной стационарной задачи (3.8)–(3.10) удовлетворяет уравнению:

$$-2K(p_{an}(\Delta) - p_{an}(R_0)) = q\Delta. \quad (3.11)$$

Теорема 3.1. *Чтобы проблема Писмана была корректно определена относительно уравнения материального баланса (3.7) для 1-мерных потоков, необходимо и достаточно, чтобы*

$$R_0 = \frac{\Delta}{2}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Очевидно, что аналитическое решение $p_{an}(x)$ имеет вид

$$p_{an}(x) = Ax + B, \quad A = -\frac{q}{K}, \quad B = p_e + \frac{q}{K}r_e. \quad (3.13)$$

Подставив $p_{an}(x)$ в уравнение (3.11), получим

$$2KA((\Delta) - R_0 + (B - B)) = q\Delta, \quad \text{или} \quad 2(\Delta) = \Delta + 2R_0, \quad \text{или} \quad \Delta = 2R_0. \quad (3.14)$$

Отсюда следует формула (3.12) в утверждении теоремы. \square

Замечание 3.2. Теорема 3.1 элементарна, но мы привели ее здесь, чтобы подчеркнуть, почему формула Писмана для R_0 в случае стационарного режима зависит только от размера блока Δ , но не зависит от размера области, проводимости и суммарной скорости потока. Фактически это следует из теоремы Лагранжа о среднем значении, закона Дарси и теоремы о дивергенции (закона сохранения) для несжимаемой жидкости (т. е. формула 1-мерна по самой природе).

3.2. Линейный 1-мерный псевдостационарный материальный баланс (алгебраический) и соответствующий радиус R_0 . Для псевдостационарного материального баланса определим дополнительные ограничения на решение алгебраического уравнения материального баланса, предполагая, что на p_0 p_1 и q наложены следующие условия.

Определение 3.3. Будем говорить, что материальный баланс является *установившимся относительно к псевдостационарного режима*, если

$$q(s) = q \text{ не зависит от } s, \quad (3.15)$$

$$p_0(s + \tau) - p_0(s) = qC_0\tau \text{ и } C_0 \text{ зависят от } s. \quad (3.16)$$

Из этого очевидно следует, что разность

$$p_1(s) - p_0(s) \text{ не зависит от } s. \quad (3.17)$$

Тогда уравнение линейного 1-мерного псевдостационарного материального баланса будет иметь вид

$$2K(p_1 - p_0) = q\Delta(1 - \phi c_p \cdot 1 \cdot C_0\Delta) = q\Delta(1 - C_1\Delta). \quad (3.18)$$

Для простоты положим $C_1 = 1$, $\Delta < 1$.

3.3. Аналитическая модель для 1-мерной псевдостационарной задачи. Аналитическая модель для 1-мерного псевдостационарного течения Дарси слабосжимаемой жидкости при естественных предположениях о пористости и проницаемости аппроксимируется как начально-краевая задача для скалярной функции давления $p(x, t)$ (см [6]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{на } (0; r_e) \times (0, \infty), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=r_e} = 0, \quad (3.20)$$

$$-K \frac{\partial p_{an}}{\partial x} \Big|_{x=0} = q, \quad (3.21)$$

$$p(x, 0) = p_{an}(x). \quad (3.22)$$

Положим в задаче (3.22) начальную функцию $p_{an}(x)$ решением стационарной задачи

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{d}{dx} p_{an}(x) \right) = Q = \frac{q}{r_e} \quad \text{на } (0; r_e), \quad (3.23)$$

$$K \frac{d p_{an}}{dx} \Big|_{x=r_e} = 0, \quad (3.24)$$

$$-K \frac{d p_{an}}{dx} \Big|_{x=0} = q. \quad (3.25)$$

Очевидно, что аналитическое решение начально-краевой задачи для псевдостационарного режима течения имеет вид

$$p_{ps}(x, t) = w(x) + A_0 t, \quad \text{где } w(x) = p_{an}(x) \quad (3.26)$$

и $A_0 = \frac{1}{r_e} q$. Решение $p_{an}(x)$ краевой задачи (3.23)–(3.25) для удобства обозначается через $w(x)$. Псевдостационарный режим порождает давление $p_{ps}(x, t)$, которое называется *псевдостационарным давлением*.

Стационарная часть общего решения $p_{an}(x)$ представляется в виде

$$p_{an}(x) = w(x) = Ax^2 + Bx. \quad (3.27)$$

Константы A и B определяются из задачи непосредственно формулами

$$B = \frac{q}{K}, \quad (3.28)$$

$$A = \frac{B}{2r_e} = -\frac{q}{2Kr_e}. \quad (3.29)$$

Замечание 3.3. Заметим, что вспомогательная функция $w(x)$ по построению обращается в нуль при $x = 0$ («на скважине»).

По аналогии со стационарной задачей дадим определение «корректности» для псевдостационарного режима, зависящего от времени.

Определение 3.4. Будем говорить, что задача Писмана для псевдостационарного режима *корректно определена* относительно уравнения материального баланса (3.4) для 1-мерных потоков, зависящего от времени, если для любых заданных Δ и r_e существует $R_0^{ps}(\Delta, r_e)$ (зависящее от Δ и r_e) такое, что аналитическое решение 1-мерной псевдостационарной задачи (3.23)–(3.25) удовлетворяет уравнению, а также условиям (3.15) и (3.16).

Теорема 3.2. *Проблема Писмана корректно определена для 1-мерного уравнения материального баланса, зависящего от времени. А именно, существует $R_0^{pss}(\Delta, r_e)$ такое, что $p_1(t) = p(\Delta, t)$, $p_0(t) = p(R_0, t)$ и q удовлетворяет уравнению материального баланса, зависящему от времени, и обоим ограничениям в определении 3.3.*

Более того, справедлив следующий предельный результат:

$$\lim_{r_e \rightarrow \infty} R_0^{pss}(\Delta, r_e) = R_0. \quad (3.30)$$

Доказательство. Для доказательства подставим явную формулу для аналитического псевдостационарного решения в уравнение материального баланса (3.18):

$$2K(p_{pss}(\Delta, t) - p_{pss}(R_0, t)) = 2K(w(\Delta) - w(R_0)) = q\Delta \left(1 - \phi c_p \cdot 1 \cdot C_2 \frac{\Delta}{r_e}\right). \quad (3.31)$$

Из явного представления для $w(x)$ следует, что R_0 должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\Delta^2}{2r_e} + \Delta - \frac{(R_0^{pss})^2}{2r_e} - R_0^{pss} = \frac{\Delta}{2} - C_3 \frac{\Delta^2}{2r_e}, \quad (3.32)$$

при этом константа C_3 зависит только от c_p , C_2 . Отсюда явно следует формула для R_0^{pss} :

$$(1 + C_3) \frac{\Delta^2}{2r_e} + \frac{\Delta}{2} = R_0^{pss} + \frac{(R_0^{pss})^2}{2r_e}. \quad (3.33)$$

Полагая для простоты $C_3 = 0$, нетрудно видеть, что

$$\frac{(R_0^{pss})^2}{1} + 2r_e R_0^{pss} - \left(r_e \frac{\Delta}{1} + \frac{\Delta^2}{1}\right) = 0. \quad (3.34)$$

Отсюда следует, что положительная ветвь корня удовлетворяет цепочке равенств

$$R_0^{pss} = \frac{-2r_e + \sqrt{4r_e^2 + 4\Delta r_e + 8\Delta^2}}{2} = \frac{\Delta}{1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta}{r_e} + 2\frac{\Delta^2}{r_e^2}}} + \frac{2\Delta^2}{r_e}. \quad (3.35)$$

Из этой цепочки следует утверждение теоремы 3.2. \square

Следующая теорема получается непосредственно с помощью неявного дифференцирования равенства (3.32) и критерия монотонности.

Теорема 3.3. *Пусть фиксированы Δ и все параметры задачи, кроме r_e . Тогда при достаточно больших r_e величина R_0^{pss} убывает как функция от r_e .*

3.4. Линейное 1-мерное уравнение материального баланса для режима фильтрации с доминированием граничного условия и соответствующий радиус Писмана R_0 . Для определения не зависящего от времени приведенного радиуса Писмана в задаче фильтрации с доминирующим на границе давлением нам понадобятся вспомогательные ограничения. Их удобно сформулировать в виде определения терминах ограничений на входные ключевые характеристики уравнения материального баланса: $q(s)$, $p_i(s)$, $i = 1, 0$, и $p_0(s + \tau)$.

Определение 3.5. Алгебраические ограничения на уравнения материального баланса для течения с доминирующим давлением на границе (режим с доминированием граничного условия) формулируются следующим образом.

Существуют константы Q_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_0 , такие, что для переменных p_i и q в уравнении материального баланса выполняются соотношения:

1. $\frac{q(s)}{p_0(s)} = Q_0(r_e)$, где $Q_0(r_e)$ не зависит от Δ и s ;
2. $\frac{p_1(s)}{p_0(s)} = \mathbf{P}_1(\Delta, r_e)$, где $\mathbf{P}_1(\Delta, r_e)$ является функцией только от Δ и r_e , но не от s ;
3. $\frac{p_0(s + \tau)}{p_0(s)} = \mathbf{P}_0(\Delta, r_e) \frac{e^{-C(K, r_e)\tau} - 1}{\tau}$ где, как и в предыдущем пункте, величина $\mathbf{P}_0(\Delta, r_e)$ является функцией от Δ и r_e , но не зависит от s .

3.4.1. 1-мерная аналитическая задача с доминированием давления на границе. Рассмотрим аналитическую начально-краевую задачу

$$Lu_0(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right) = c_0 \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t}, \quad (3.36)$$

$$K \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=r_e} = 0, \quad (3.37)$$

$$u_0(x, t) \Big|_{t=0} = \phi_0(x), \quad (3.38)$$

где $\phi_0(x)$ и λ_0 — первая собственная функция и первое собственное значение задачи

$$L\phi_0(x) = -\lambda_0\phi_0(x), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi_x(r_e) = 0.$$

Полагая для простоты $c_0 = 1$, нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение 3.1. Пусть $u_0(x, t)$ — аналитическое решение начально-краевой задачи (3.36)–(3.38):

$$u_0(x, t) = e^{-K\lambda_0 t} \sin(\lambda_0 x). \quad (3.39)$$

Определим переменные в уравнении материального баланса посредством функции $u_0(x, t)$:

$$p_0(s) = u_0(R_0, s), \quad (3.40)$$

$$p_1(s) = u_0(\Delta, s), \quad (3.41)$$

$$q(s) = K \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (3.42)$$

Тогда все соотношения в определении 3.5 корректно определены для некоторых констант Q_0 , P_0 , P_1 для любых R_0 и Δ , а также

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2r_e}. \quad (3.43)$$

Замечание 3.4. Заметим, что все исходные данные для всех трех аналитических задач задаются таким образом, что соответствующие значения для коэффициента продуктивности (см. [9]) не зависят от времени.

Важно отметить, что существование констант из предложения 3.1 представляет основной интерес и будет рассмотрено ниже. Мы сформулировали это предложение, чтобы мотивировать следующее определение корректности по Писману для режима с доминированием граничных условий.

Определение 3.6. Будем говорить, что проблема Писмана для режима, определяемого граничным давлением на скважине, корректно определена относительно зависящего от времени материального баланса (3.36)–(3.38) для 1-мерных потоков, если для любых заданных Δ и r_e существует $R_0^{BD}(\Delta, r_e)$, зависящее от Δ и r_e , такое, что аналитическое решение 1-мерной задачи с доминированием граничных условий (3.36)–(3.38) удовлетворяет уравнению и, кроме того, выполняются ограничения из определения (3.5).

Лемма 3.1. Предположим, что $R_0^{bd} < \Delta$, тогда режим фильтрации Писмана корректен в случае доминирования граничных условий, если

$$\sin(\lambda_0 R_0^{bd}) - \sin(\lambda_0 \Delta) + \frac{\lambda_0 \Delta}{2} = \sin(\lambda_0 R_0^{bd}) \frac{1}{2K} \frac{e^{-\lambda_0^2 \tau} - 1}{\tau}. \quad (3.44)$$

Более того, при $r_e \rightarrow \infty$ и $\tau \rightarrow 0$ величина $R_0^{bd}(\lambda_0, \tau)$ сходится к стационарному радиусу Писмана R_0 . Здесь λ_0 — первое собственное значение, а R_0^{bd} , удовлетворяющее трансцендентному уравнению (3.44), зависит от Δ , а также от r_e , τ , K , c_p .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно вычислить решение задачи (3.36)–(3.38) при $x = 0$:

$$q(s) = K \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = e^{-K\lambda_0 s} \lambda_0 \cos(\lambda_0 x) \Big|_{x=0} = K e^{-K\lambda_0 s} \lambda_0. \quad (3.45)$$

Здесь λ_0 — первое собственное значение соответствующей краевой задачи со смешанными граничными условиями (см. последнюю строку в (3.36)–(3.38)).

Для удобства перепишем еще раз уравнение материального баланса:

$$2K(p_0(s) - p_1(s)) = -q(s)\Delta + 1 \cdot \frac{p_0(s + \tau) - p_0(s)}{\tau} \Delta. \quad (3.46)$$

Полагая $R_0 = R_0^{bd} < \Delta$ неизвестным, получим

$$p_0(s) = e^{-K\lambda_0^2 s} \sin(\lambda_0 R_0^{bd}), \quad (3.47)$$

$$p_1(s) = e^{-K\lambda_0^2 s} \sin(\lambda_0^2 \Delta), \quad (3.48)$$

$$p_0(s + \tau) = e^{-K\lambda_0^2 (s+\tau)} \sin(\lambda_0 R_0^{bd}), \quad (3.49)$$

$$q(s) = K e^{-K\lambda_0^2 s} \lambda_0. \quad (3.50)$$

С учетом (3.47)–(3.50) уравнение материального баланса (3.46) примет вид

$$2K e^{-\lambda^2 s} \left(\sin(\lambda R_0^{bd}) - \sin(\lambda \Delta) \right) = -K\lambda \Delta e^{-\lambda^2 s} + 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd}) \frac{e^{-\lambda^2 (s+\tau)} - e^{-\lambda^2 s}}{\tau} \Delta. \quad (3.51)$$

Здесь $\lambda = \lambda_0$. После деления на $e^{-\lambda^2 s}$ уравнение (3.51) примет вид

$$2K \left(\sin(\lambda R_0^{bd}) - \sin(\lambda \Delta) \right) = -K\lambda \Delta + 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd}) \frac{e^{-\lambda^2 \tau} - 1}{\tau} \Delta. \quad (3.52)$$

Разделив (3.52) на $2K$, получим (3.44).

Чтобы аналитическое решение удовлетворяло уравнению материального баланса, достаточно, чтобы $R_0^{bd}(\Delta, r_e, \tau)$ являлось решением уравнения (3.44). Чтобы «явно» найти решение, удобно работать с уравнением (3.52), которое эквивалентно

$$2K \cdot 2 \left(\sin \frac{\lambda(R_0^{bd} - \Delta)}{2} \cos \frac{\lambda(R_0^{bd} + \Delta)}{2} \right) = -K\lambda \Delta + 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd}) \lambda^2 \frac{e^{-\lambda^2 \tau} - 1}{\lambda^2 \tau} \Delta. \quad (3.53)$$

При $\tau \rightarrow 0$ из (3.53) получим, что

$$4K \left(\sin \frac{\lambda(R_0^{bd} - \Delta)}{2} \cos \frac{\lambda(R_0^{bd} + \Delta)}{2} \right) = -K\lambda \Delta + 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd}) \lambda^2 \cdot (-1) \cdot \Delta. \quad (3.54)$$

Положим, что λ таково, что $\cos \frac{\lambda(R_0^{bd} + \Delta)}{2} \approx 1$. Для получения простой формулы для R_0^{bd} , предположим, что R_0^{bd} достаточно мало:

$$R_0^{bd} \approx \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2K} \lambda^2 R_0^{bd} \Delta, \quad (3.55)$$

то есть

$$R_0^{bd} \approx \frac{\frac{\Delta}{2}}{1 + \frac{1}{2K} \lambda^2 \Delta}. \quad (3.56)$$

Принимая во внимание, что в 1-мерном случае $\lambda = \frac{\pi}{2r_e}$, и предполагая, что $\frac{\Delta}{8K} \frac{\pi^2}{r_e^2}$ достаточно мало, мы получим простую аппроксимацию для формулы расчета радиуса Писмана для режима с заданным давлением на границе области течения:

$$R_0^{bd} \approx \frac{\frac{\Delta}{2}}{1 + \frac{1}{8K} \frac{\pi^2}{r_e^2} \Delta}. \quad (3.57)$$

□

Замечание 3.5. Отметим, что для достаточно малого τ , малого $\lambda \Delta$ и малого частного $\frac{\phi c_p}{2K}$ соответствующее решение R_0^{BD} для (3.52) существует.



РИС. 2. Материальный баланс Эйнштейна для 1-мерного потока

FIG. 2. Einstein material balance for 1D flow

Обратим также внимание на следующее. Используя теорему Лагранжа о среднем, из рассуждений выше можно показать, что если область течения «не ограничена», то получим такой же радиус Писмана, как и в стационарном (классическом) случае. Мы приводим формулировку и доказательство следующей теоремы для будущего более общего рассмотрения с учетом многомерной теоремы Ландиса о среднем значении [2].

Теорема 3.4. *Полученный радиус $R_0^{bd}(r_e, \Delta)$ в 1-мерной постановке, при котором задача Писмана корректно определена в псевдостационарном случае, асимптотически сходится к радиусу Писмана для стационарной задачи, который не зависит от размеров области фильтрации:*

$$\lim_{r_e \rightarrow \infty} R_0^{bd}(r_e, \Delta) = \frac{\Delta}{2} = R_0 \quad (3.58)$$

для любого фиксированного τ .

Доказательство. Сначала заметим, что из теоремы Лагранжа о среднем значении следует, что

$$\cos \xi \lambda \left(R_0^{bd} - \Delta \right) + \frac{\lambda \Delta}{2} = \sin(\lambda R_0^{bd}) \frac{1}{2K} \frac{e^{-\lambda^2 \tau} - 1}{\tau}. \quad (3.59)$$

Здесь

$$\lambda R_0^{bd} < \xi < \lambda \Delta \quad \text{и, следовательно,} \quad \cos \xi = 1 + O(\lambda). \quad (3.60)$$

После деления на λ в (3.59) получим

$$(\cos \xi) \left(R_0^{bd} - \Delta \right) + \frac{\Delta}{2} = \lambda \sin(\lambda R_0^{bd}) \frac{1}{2K} \frac{e^{-\lambda^2 \tau} - 1}{\lambda^2 \tau}, \quad (3.61)$$

или, предполагая, как и раньше, что λ таково, что $\cos \xi \approx 1$, получим

$$R_0^{bd} - \frac{\Delta}{2} = \lambda \sin(\lambda R_0^{bd}) \frac{1}{2K} \frac{e^{-\lambda^2 \tau} - 1}{\lambda^2 \tau} + O(\lambda). \quad (3.62)$$

Очевидно, в правой части (3.63) имеем $-1 \cdot \frac{e^{-\lambda^2 \tau} - 1}{\lambda^2 \tau} = O(1)$ и $\sin(\lambda R_0^{bd}) = o(\lambda)$, поэтому формулировка теоремы следует из (3.43) и равенства

$$R_0^{bd} - \frac{\Delta}{2} = O(\lambda). \quad (3.63)$$

□

4. ПСЕВДОСТАЦИОНАРНЫЙ МАТЕРИАЛЬНЫЙ БАЛАНС И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим 2-мерное течение к скважине Γ_w в изолированном резервуаре U с границей $\partial U = \Gamma_w \cup \Gamma_e$, высотой $h = 1$ и $\phi c_p = 1$. Пусть V — объем области дренирования U . Уравнение материального баланса для нестационарного течения слабосжимаемой жидкости в блоке размерами $\Delta \times \Delta \cdot 1$ с объемом $V_0 = \Delta^2 \cdot 1$ и давлением p_0 , содержащем скважину Γ_w (источник или сток) с дебитом q (положительным для источника и отрицательным для стока) имеет вид:

$$-4K(p_0(s) - p_1(s)) + \frac{q}{h} = \Delta^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\tau} (p_0(s + \tau) - p_0(s)). \quad (4.1)$$

Приведем уравнение материального баланса для слабосжимаемой жидкости с коэффициентом сжимаемости c_p , ассоциированное с псевдостационарным течением в терминах следующих предположений.

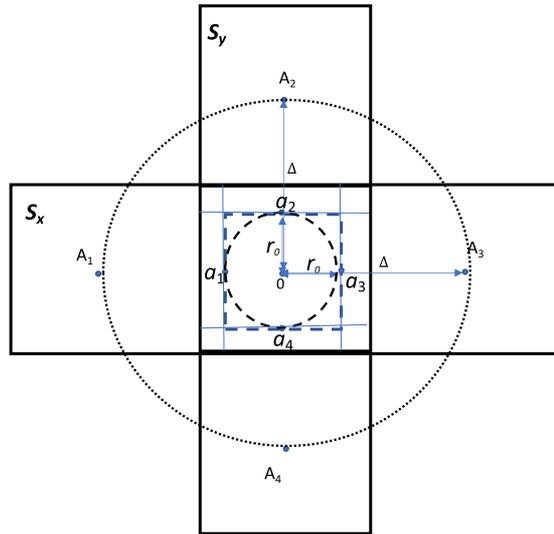


Рис. 3. Уравнение материального баланса Эйнштейна на сетке из 5 точек, 2-мерный случай

FIG. 3. Einstein material balance equation on the 5 spots grid, 2D case

Предположение 4.1. *Предположим, что*

$$p_0(s + \tau) - p_0(s) = q \frac{\tau}{1 \cdot V}, \tag{4.2}$$

$$\text{разность } p_0(s) - p_1(s) = \text{const} \text{ (не зависит от } s\text{)}. \tag{4.3}$$

При этих предположениях уравнение (4.1) принимает вид

$$4K(p_0(s) - p_1(s)) = \frac{q}{1} \left(1 - \frac{\Delta^2}{V} \right), \tag{4.4}$$

где q — заданная константа по времени и характеризует суммарную на Γ_w скорость потока при любом s .

Замечание 4.1. Важно отметить, что $p_i(s)$ зависят от параметра s (времени в нашем приложении), и это принципиальное отличие по сравнению со стационарным режимом (уравнения материального баланса). В тоже время разность в псевдостационарном уравнении материального баланса не зависит от s , и мы это существенно используем.

4.1. Аналитическое решение, соответствующее 2-мерному течению. Рассмотрим диффузионную модель неустановившегося 2-мерного радиального течения в изолированной области U для слабо сжимаемой жидкости в направлении скважины Γ_w с заданным дебитом и отсутствием потока на внешней границе Γ_e .

Как известно, при этом функция давления $p(x, t)$ аппроксимируется решением начально-краевой задачи:

$$K \Delta p = 1 \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{в } U = U(0, r_w, r_e), \tag{4.5}$$

$$K \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_e, \tag{4.6}$$

$$K \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p}{\partial \nu} ds = -\tilde{q} \quad \text{на } \Gamma_w. \quad (4.7)$$

Здесь

$$U(0, r_w, r_e) = \{x : r_w < |x| < r_e\}, \quad \Gamma_w = \{x : |x| = r_w\}, \quad \Gamma_e = \{x : |x| = r_e\}, \quad x = (x_1, x_2),$$

$\tilde{q} = \frac{q}{1}$, $V = 1 \cdot |U|$, $K = \frac{k}{\mu}$, $\frac{\partial p}{\partial \nu}$ — «внешняя» производная в конормальном направлении.

В общем случае для решения задачи естественно рассмотреть смешанную краевую задачу для параболического уравнения, которая с математической точки зрения четко корректно определена и может быть обобщена для различных сценариев.

Чтобы писмановский радиус R_0 не зависел от времени, мы воспользуемся псевдостационарной начально-краевой задачей. А именно, рассмотрим псевдостационарное решение задачи (5.2)–(4.7) в виде суммы:

$$p_{pss}(x, t) = w(x) + At, \quad (4.8)$$

где

$$A = \frac{\tilde{q}}{1 \cdot |U|}, \quad (4.9)$$

а $w(x)$ — решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона:

$$\nabla (K \nabla w(x)) = \frac{\tilde{q}}{|U|} \quad \text{в } U, \quad (4.10)$$

$$w(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma_w, \quad (4.11)$$

$$K \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_e. \quad (4.12)$$

В радиально-симметричном случае, обозначая $r = |x|$, псевдостационарное решение удобно записать в виде

$$p_{pss}(r, t) = w(r) + At. \quad (4.13)$$

Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет условиям (4.2) и (4.3). Далее, подставляя эту функцию в уравнение материального баланса (4.1), нетрудно получить в общем виде теорему для нахождения радиуса Писмана для псевдостационарной задачи.

Теорема 4.1. Радиус Писмана $[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]$ для псевдостационарной задачи можно найти из уравнения

$$4K (w(\Delta) - w([R_0^{PSS}(r_e, \Delta)])) = -\frac{q}{1 \cdot V} (V - \Delta^2). \quad (4.14)$$

Из явной формы решения задачи (4.10)–(4.12) можно выразить такой $[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]$.

Мы воспользуемся другим подходом, основанным на постановке задачи в терминах поля скоростей. Этот подход поможет в будущем работать с нелинейными потоками, а в некоторых случаях — явно получить соответствующий радиус блока скважины Писмана. Начнем с технического замечания.

Замечание 4.2. В общем случае U — область кусочной границей $\partial U = \Gamma_e \cup \Gamma_w$, и

$$\Gamma_e \cap \Gamma_w = \emptyset.$$

Будем говорить, что поле скоростей $v(x)$ имеет псевдостационарный профиль, если выполнено следующее предположение.

Предположение 4.2. Будем говорить, что поле скорости соответствует псевдостационарному режиму потоков, если скорость не зависит от времени и является решением следующей краевой задачи:

$$\nabla \vec{v} = C \quad \text{в } U, \quad (4.15)$$

$$\vec{v} \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_e. \quad (4.16)$$

Заметим, что по теореме о дивергенции константа C из уравнения (4.15) удовлетворяет

$$\int_{\Gamma_w} \vec{v}\vec{v}ds = \tilde{q} = C|U|. \tag{4.17}$$

Замечание 4.3. Обратим внимание, что в нашем исходном исследовании псевдостационарные режимы [9] определялись через функцию давления. А именно, мы предполагали, что течение является псевдостационарным, если $\frac{\partial p}{\partial t} = \text{const}$, и нет условий течения на внешней границе. В рассматриваемом приложении оба определения эквивалентны друг другу.

4.2. Формула приведенного радиуса Писмана для 2-мерного симметричного течения (радиального). Начнем этот пункт с формулировки общей теоремы о формуле Писмана для псевдостационарного режима в радиальной постановке.

Теорема 4.2. *Существует решение задачи Писмана для нестационарного псевдостационарного режима течения, и соответствующий радиус $R_0^{PSS}(r_e, \Delta)$ определяется уравнением*

$$-\pi + \frac{[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]^2}{r_e^2} + \pi \frac{r_w^2}{r_e^2} = -2 \left(\ln \frac{\Delta}{[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]} \right). \tag{4.18}$$

Более того,

$$\lim_{r_e \rightarrow \infty} [R_0^{PSS}(r_e, \Delta)] = R_0^{SS} = R_{Peaceman}. \tag{4.19}$$

Доказательство. В общем случае решение краевой задачи для вектора скорости (4.15)-(4.16) не является единственным, но в радиальном случае однозначно определено:

$$-\frac{1}{r}(rv(r))_r = C = \frac{\tilde{q}}{|U|}, \tag{4.20}$$

$$\vec{v}\vec{r}|_{r=r_e} = 0. \tag{4.21}$$

Тогда для $r_w \leq r \leq r_e$:

$$v(r) = -\frac{C}{2}r + \frac{C_1}{r}. \tag{4.22}$$

Указанные выше постоянные могут быть выбраны так, что

$$C = \frac{q}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} = \frac{q}{|U|} \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{C}{2}r_e^2. \tag{4.23}$$

Вспомним, что скорость и градиент давления в случае, рассматриваемом в статье, связаны законом Дарси, а потому псевдостационарное решение для функции давления имеет вид

$$w(r) = -\frac{\mu}{k} \int v(r)dr$$

и, соответственно

$$w(r) = -K^{-1} \left[-\frac{C}{4}r^2 + C_1 \ln r + C_2 \right]. \tag{4.24}$$

Выше постоянная C_2 выбрана так, что $w(r)|_{r=r_w} = 0$, и потому

$$C_2 = \left[\frac{C}{4}r_w^2 - C_1 \ln r_w \right]. \tag{4.25}$$

Соответственно, выражение для выбора $R_0^{PSS}(r_e, \Delta)$ с использованием псевдостационарного материального баланса в форме, представленной в теореме 4.1, принимает вид:

$$-\tilde{q} \left(1 - \frac{\Delta^2}{V} \right) = 4K(p_1 - p_0) = 4K[w(\Delta) - w(R_0)]. \tag{4.26}$$

Тогда в силу (4.24) и (4.23) нетрудно видеть, что

$$-\tilde{q} \left(1 - \frac{\Delta^2}{|U|} \right) = 4KK^{-1} \left[\left(C \frac{\Delta^2}{4} - C_1 \ln(\Delta) - C_2 \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(C \frac{[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]^2}{4} - C_1 \ln([R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]) - C_2 \right) \Big] = \\
& = \left[C (\Delta^2 - R_0^2) - 4 \left(C_1 \ln \frac{\Delta}{[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]} \right) \right] = \\
& = C \left[(\Delta^2 - [R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]^2) - 2 \left(r_e^2 \ln \frac{\Delta}{[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]} \right) \right]. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

После упрощений получим

$$\Delta^2 - |U| = \left(\Delta^2 - [R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]^2 \right) - 2 \left(r_e^2 \ln \frac{\Delta}{[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]} \right), \quad (4.28)$$

или

$$[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]^2 - \pi (r_e^2 - r_w^2) = [R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]^2 - |U| = -2 \left(r_e^2 \ln \frac{\Delta}{[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)]} \right). \quad (4.29)$$

Отсюда следует основное уравнение (4.18). Второе утверждение теоремы следует из (4.18). \square

По теореме 4.2 из формулы (4.18) следует свойство монотонности псевдостационарного радиуса Писмана $R_0^{PSS}(r_e, \Delta)$ относительно внешнего радиуса r_e .

Теорема 4.3. При условии применимости формул для псевдостационарной задачи выполняется $r_e \geq R_0^{PSS}(r_e, \Delta)$ и функция $R_0^{PSS}(r_e, \Delta)$ монотонно убывает.

Доказательство. Взяв производную от левой и правой части уравнения (4.18), можно получить

$$2 \frac{[r_e^2 - (R_0^{PSS}(r_e, \Delta))^2]}{R_0^{PSS}(r_e, \Delta) r_e^2} \frac{d}{dr_e} R_0^{PSS}(r_e, \Delta) = -2 \left[\frac{(R_0^{PSS}(r_e, \Delta))^2}{r_e^3} + \pi \frac{r_w^2}{r_e^3} \right] < 0. \quad (4.30)$$

Но с точки зрения применимости подхода выражение $[r_e^2 - (R_0^{PSS}(r_e, \Delta))^2] > 0$, поэтому утверждение теоремы следует из (4.30). \square

Замечание 4.4. Очевидно, что при $r_e \gg R_0$ можно получить хорошее приближение, используя выражение для радиуса блока скважины Писмана

$$\frac{\pi}{2} \approx \left(\ln \frac{\Delta}{R_0} \right). \quad (4.31)$$

5. РАДИУС ПИСМАНА ДЛЯ РЕЖИМА С ДОМИНИРОВАНИЕМ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Уравнение линейного материального баланса (4.1) для слабосжимаемой жидкости такое же, как и раньше для потока в сторону скважины Γ_w в изолированном резервуаре V высотой $h = 1$ и $\phi c_p = 1$. Предположим, что ограничение для доминирования граничного условия в случае слабосжимаемой жидкости такое же, как и для псевдостационарного случая. А именно,

$$-4K(p_0(s) - p_1(s)) + \frac{q(s)}{h} = 1 \cdot \frac{V_0}{1} \frac{1}{\tau} (p_0(s + \tau) - p_0(s)). \quad (5.1)$$

Снова пусть V — объем области-резервуара U с границей $\partial U = \Gamma_e \cup \Gamma_w$. Чтобы радиус Писмана для режима с доминированием границы был независимым от времени, введем следующее предположение.

Предположение 5.1. Предположим, что:

$$(A_1) \quad \frac{q(s)}{p_1(s)} = C_1, \text{ где постоянная } C_1 \text{ не зависит от } s;$$

$$(A_2) \quad \frac{p_0(s)}{p_1(s)} = C_2 \text{ где постоянная } C_2 \text{ не зависит от } s;$$

$$(A_3) \quad \tau^{-1} \left(\frac{p_0(s + \tau)}{p_0(s)} - 1 \right) \approx C_3 \text{ при } \tau \ll 1, \text{ где постоянная } C_3 \text{ не зависит от } s \text{ и } \tau.$$

Аналитическая модель для режима с доминированием граничного условия определяется как динамическая краевая задача без начальных условий

$$K\Delta p = c_p\phi \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{в} \quad U = U(0, r_e, r_w) = B(0, r_e) \setminus B(0, r_w); \quad (5.2)$$

$$K \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_e, \quad r = r_e; \quad (5.3)$$

$$p(x) = p_w \quad \text{на} \quad \Gamma_w, \quad r = r_w. \quad (5.4)$$

Для простоты положим $p_w = 0$.

Снова предполагая, что радиальный поток направлен к скважине радиуса r_w , будем искать базовое решение вышеприведенной задачи в виде

$$p(x, t) = u_0(x, t) = e^{-\lambda_0 t \frac{K}{1}} \varphi_0(x). \quad (5.5)$$

Здесь $\varphi_0(x)$ — первая собственная функция, соответствующая первому собственному значению λ_0 задачи в области U с кусочной границей $\partial U = \Gamma_w \cup \Gamma_e$. Тогда:

$$-\Delta \varphi_0(x) = \lambda_0 \varphi_0(x) \quad \text{в} \quad U, \quad (5.6)$$

$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_w, \quad r = r_w, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_e, \quad r = r_e. \quad (5.8)$$

Замечание 5.1. Мотивацией к рассмотрению такого вида решения послужила статья [9], в которой нами было доказано, что соответствующий индекс коэффициента продуктивности для такого режима с доминированием граничного условия не зависит от времени.

Проверим что такое аналитическое решение (5.5) удовлетворяет всем ограничениям.

Действительно, нетрудно увидеть, что все три условия: (A_1) , (A_2) и (A_3) в предположении 5.1 удовлетворяются:

$$C_1(\Delta, R_0) = \frac{\varphi_0(\Delta)}{\varphi_0(R_0)}, \quad C_2 = \Lambda \frac{\int \varphi_0 dx}{\varphi_0(R_0)}, \quad C_3 = \phi V_0 c_p \Lambda.$$

Наконец, предположив, что $c_p = 1$ для заданного Δ , получим уравнение для R_0^{bd} :

$$\frac{\varphi_0(\Delta)}{\varphi_0(R_0)} + \lambda_0 \frac{\int \varphi_0 dx}{\varphi_0(R_0)} = \lambda_0 V_0, \quad \text{или} \quad \frac{\varphi_0(\Delta)}{\Delta^2} + \frac{1}{c_p} \frac{\int_{\Gamma_w} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} ds}{\Delta^2} = \lambda_0 \varphi_0(R_0). \quad (5.9)$$

Функция $\varphi_0(r)$, удовлетворяющая условиям (5.7)-(5.8), является решением задачи Штурма—Лиувилля для уравнения Гельмгольца в кольцевой области с условиями Дирихле и Неймана:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \lambda_0 \varphi_0(r) = 0, \quad r_w < r < r_e; \quad (5.10)$$

$$\varphi_0(r_w) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0(r)}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0. \quad (5.11)$$

Нас интересует неотрицательное решение указанной краевой задачи, которое имеет вид (см. [5])

$$\varphi_0(r) = J_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) N_0(\sqrt{\lambda_0} r) - N_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) J_0(\sqrt{\lambda_0} r), \quad (5.12)$$

где λ_0 — первое собственное значение, которое представляет собой решение трансцендентного уравнения:

$$N_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) J_0'(\sqrt{\lambda_0} r_e) - N_0'(\sqrt{\lambda_0} r_e) J_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) = 0 \quad (5.13)$$

Следовательно, решение задачи (5.2)–(5.4) имеет вид

$$u_0(r, t) = e^{-\lambda_0 t \frac{K}{1}} \left[J_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) N_0(\sqrt{\lambda_0} r) - N_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) J_0(\sqrt{\lambda_0} r) \right] \quad (5.14)$$

Можно непосредственно проверить все ограничения из предположения 5.1, полагая

$$p_1(s) = u_0(\Delta, s), \quad p_0(s) = u_0(R_0, s), \quad p_0(s + \tau) = u_0(R_0, s + \tau), \quad q(s) = -2\pi r_w K \left. \frac{\partial u_0(r, s)}{\partial r} \right|_{r=r_w}. \quad (5.15)$$

В данной статье мы не приводим доказательства существования радиуса блока скважины Писмана для режима с доминированием граничного условия в радиальном случае и не исследуем его свойства в зависимости от параметров радиуса области дренирования. Вместо этого мы сформулируем утверждение в форме замечания, оставив подробности для последующей публикации.

Замечание 5.2. Подставив $p_0(s)$, $p_1(s)$, $p_0(s + \tau)$ и $q(s)$ в уравнение материального баланса (5.1), мы получим трансцендентное уравнение для нахождения $R_0^{BD}(r_e, \Delta)$ вида

$$\varphi_0(R_0^{BD}(r_e, \Delta)) - \varphi_0(\Delta) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{\Delta}{R_0^{BD}(r_e, \Delta)}, \quad (5.16)$$

где $\varphi_0(r)$ — первая собственная функция задачи (5.10)-(5.11), определяемая уравнением (5.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вахитов Г. Г. Решение задач подземной гидродинамики методом конечных разностей // Тр. ВНИИ-нефть. — 1957. — 10. — С. 53–88.
2. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.
3. Толстов Ю. Г. Применение метода электрического моделирования физических явлений к решению некоторых задач подземной гидравлики // Ж. техн. физ. — 1942. — 12, № 10. — С. 20–25.
4. Anikeev D. P., Ibragimov A. I., Indrupskiy I. M. Non-linear flow simulations with corrected Peaceman formula for well pressure calculation // AIP Conf. Proc. — 2023. — 2872. — 120053.
5. Budak B. M., Samarskii A. A., Tikhonov A. N. A collection of problems on mathematical physics. — Oxford—London—Edinburgh—New York—Paris—Frankfurt: Pergamon Press, 1964.
6. Dake L. P. Fundamentals of reservoir engineering. — Amsterdam—London—New York—Tokyo: Elsevier, 1978.
7. Ding Y., Renard G., Weill L. Representation of wells in numerical reservoir simulation // SPE Res. Eval. Engrg. — 1998. — 1. — С. 18–23.
8. Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // Ann. Phys. — 1905. — 322, № 8. — С. 549–560.
9. Ibragimov A., Khalmanova D., Valko P. P., Walton J. R. On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering // SIAM J. Appl. Math. — 2005. — 65. — С. 1952.
10. Ibragimov A., Sobol Z., Hevage I. Einstein's model of "the movement of small particles in a stationary liquid" revisited: finite propagation speed // Turkish J. Math. — 2023. — 47, № 4. — Article 4.
11. Ibragimov A., Zakirov E., Indrupskiy I., Anikeev D. Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well // ArXiv. — 2022. — 2203.10140.
12. Klausen R. A., Aavatsmark I. Connection transmissibility factors in reservoir simulation for slanted wells in 3D grids // В сб.: « Proc. of the 7th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery, Baveno, Italy, 5-8 September 2000 ». — cp-57-00032.
13. Mochizuki S. Well productivity for arbitrarily inclined well // SPE Reservoir Simulation Symposium. — 1995. — SPE-29133-MS.
14. Ouyang L. B., Aziz K. A general single-phase wellbore/reservoir coupling model for multilateral wells // SPE Res. Eval. Engrg. — 2001. — 4. — С. 327–335.
15. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // SPE Journal. — 1978. — 18. — С. 183–194.
16. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // SPE Journal. — 1983. — 23. — С. 531–543.
17. Peaceman D. W. Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation // SPE Adv. Tech. Ser. — 1993. — 1. — С. 7–16.

А. Ибрагимов

Texas Tech University, Lubbock, USA

Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия

E-mail: akif.ibragimov@ttu.edu

Э. Закиров

Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия

E-mail: ezakirov@ogri.ru

И. Индрупский
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: i-ind@ipng.ru

Д. Аникеев
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: anikeev@ogri.ru

А. Жаглова
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: azhalova90@gmail.com

UDC 517.958+519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663

EDN: YWEHJV

Einstein material balance and modeling of the flow of compressible fluid near the boundary

A. Ibraguimov^{1,2}, E. Zakirov², I. Indrupskiy², D. Anikeev², and A. Zhaglova²

¹*Texas Tech University, Lubbock, USA*

²*Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia*

Abstract. We consider sewing machinery between finite difference and analytical solutions defined at different scales: far away and near the source of the perturbation of the flow. One of the essences of the approach is that the coarse problem and the boundary-value problem in the proxy of the source model two different flows. In his remarkable paper, Peaceman proposes a framework for dealing with solutions defined on different scales for linear *time independent* problems by introducing the famous Peaceman well block radius. In this article, we consider a novel problem: how to solve this issue for transient flow generated by the compressibility of the fluid. We are proposing a method to glue solution via total fluxes, which are predefined on coarse grid, and changes in pressure, due to compressibility, in the block containing production (injection) well. It is important to mention that the coarse solution “does not see” the boundary. From an industrial point of view, our report provides a mathematical tool for the analytical interpretation of simulated data for compressible fluid flow around a well in a porous medium. It can be considered a mathematical “shirt” on the Peaceman well-block radius formula for linear (Darcy) transient flow but can be applied in much more general scenarios. In the article, we use the Einstein approach to derive the material balance equation, a key instrument to define R_0 . We will expand the Einstein approach for three regimes of Darcy and non-Darcy flows for compressible fluids (time-dependent):

- I. stationary;
- II. pseudostationary;
- III. boundary dominated.

Note that in all known authors literature, the rate of production on the well is time-independent.

Keywords: compressible fluid, Peaceman radius, Einstein material balance.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This study is a contribution to fulfillment of the state assignment of Oil and Gas Research Institute RAS (project 122022800272-4).



For citation: A. Ibragimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, D. Anikeev, A. Zhaglova, “Einstein material balance and modeling of the flow of compressible fluid near the boundary,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 643–663. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663>

REFERENCES

1. G. G. Vakhitov, “Reshenie zadach podzemnoy gidrodinamiki metodom konechnykh raznostey” [Solving problems of underground hydrodynamics by the finite difference method], *Tr. VNIIneft'* [Proc. VNIIneft], 1957, **10**, 53–88 (in Russian).
2. E. M. Landis, *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [Second-Order Equations of Elliptic and Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
3. Yu. G. Tolstov, “Primenenie metoda elektricheskogo modelirovaniya fizicheskikh yavleniy k resheniyu nekotorykh zadach podzemnoy gidravliki” [Application of the method of electrical modeling of physical phenomena to solving some problems of underground hydraulics], *Zh. tekhn. fiz.* [J. Techn. Phys.], 1942, **12**, No. 10, 20–25 (in Russian).
4. D. P. Anikeev, A. I. Ibragimov, and I. M. Indrupskiy, “Non-linear flow simulations with corrected Peaceman formula for well pressure calculation,” *AIP Conf. Proc.*, 2023, **2872**, 120053.
5. B. M. Budak, A. A. Samarskii, and A. N. Tikhonov, *A collection of problems on mathematical physics*, Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt, 1964.
6. L. P. Dake, *Fundamentals of reservoir engineering*, Elsevier, Amsterdam–London–New York–Tokyo, 1978.
7. Y. Ding, G. Renard, and L. Weill, “Representation of wells in numerical reservoir simulation,” *SPE Res. Eval. Engrg.*, 1998, **1**, 18–23.
8. A. Einstein, “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen,” *Ann. Phys.*, 1905, **322**, No. 8, 549–560.
9. A. Ibragimov, D. Khalmanova, P. P. Valko, and J. R. Walton, “On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, **65**, 1952.
10. A. Ibragimov, Z. Sobol, and I. Hevage, “Einstein’s model of “the movement of small particles in a stationary liquid” revisited: finite propagation speed,” *Turkish J. Math.*, 2023, **47**, No. 4, article 4.
11. A. Ibragimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, and D. Anikeev, “Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well,” *ArXiv*, 2022, 2203.10140.
12. R. A. Klausen and I. Aavatsmark, “Connection transmissibility factors in reservoir simulation for slanted wells in 3D grids,” In: *Proc. of the 7th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery, Baveno, Italy, 5-8 September 2000*, cp-57-00032.
13. S. Mochizuki, “Well productivity for arbitrarily inclined well,” *SPE Reservoir Simulation Symposium*, 1995, SPE-29133-MS.
14. L. B. Ouyang and K. Aziz, “A general single-phase wellbore/reservoir coupling model for multilateral wells,” *SPE Res. Eval. Engrg.*, 2001, **4**, 327–335.
15. D. W. Peaceman, “Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation,” *SPE Journal*, 1978, **18**, 183–194.
16. D. W. Peaceman, “Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability,” *SPE Journal*, 1983, **23**, 531–543.
17. D. W. Peaceman, “Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation,” *SPE Adv. Tech. Ser.*, 1993, **1**, 7–16.

A. Ibragimov

Texas Tech University, Lubbock, USA

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: akif.ibragimov@ttu.edu

E. Zakirov

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ezakirov@ogri.ru

I. Indrupskiy

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: i-ind@ipng.ru

D. Anikeev

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: anikeev@ogri.ru

A. Zhaglova

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: azhalova90@gmail.com