Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 621–642
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.977.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642
EDN: YRJVVX

ЗАДАЧА СУЩЕСТВОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА

А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется задача управления с обратной связью для одной математической модели, описывающей движение вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий поля скоростей. Доказывается существование оптимального управления, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества. При доказательстве используется аппроксимационно-топологический подход, теория регулярных лагранжевых потоков и теория топологической степени для многозначных векторных полей.

Ключевые слова: дробная модель Фойгта, вязкоупругая жидкость, движение с памятью, оптимальное управление, аппроксимационно-топологический подход, регулярный лагранжев поток, топологическая степень, многозначное векторное поле.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026, `https://rscf.ru/project/23-71-10026/`.

Для цитирования: *А. В. Звягин, Е. И. Костенко.* Задача существования управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 621–642. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642`

1. Введение

Задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число работ (см., например, [16] и имеющуюся там литературу). Однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье—Стокса. Но в природе существует огромное число жидкостей, которые описываются более сложными системами уравнений (такие жидкости называются «неньютоновские жидкости»). Список работ, изучающих задачи оптимального управления, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости, намного беднее. В настоящей работе изучается задача оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью. Вначале опишем изучаемую модель.

В ограниченной области $Q_T = [0,T] \times \Omega$, где $T \geqslant 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \triangle v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathrm{Div} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))ds + \nabla p = f(t,x); \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} v(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in Q_T; \tag{1.2}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \qquad t,\tau \in [0,T], \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{1.3}$$

$$v(t,x) \mid_\Gamma = 0, \qquad (t,x) \in \Gamma = [0,T] \times \partial\Omega; \qquad v(0,x) = v_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), \dots, v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ — искомые скорость и давление рассматриваемой среды, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с элементами

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big),$$

$\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ — константы, отвечающие за вязкоупругие свойства изучаемой жидкости, а $z(\tau;t,x)$ — траектория движения частицы жидкости, $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int\limits_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$ (см. [15]). Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, т. е. вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы.

Начально-краевая задача (1.1)–(1.4) описывает математическую модель, изучающую движение вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траектории движения частицы среды (см. работы [8, 9, 12, 24, 26, 27], в которых изучался вопрос слабой разрешимости частных случаев рассматриваемой модели). История возникновения данной модели тесно связана с потребностью изучения большого класса полимеров, в которых необходимо учитывать эффекты ползучести и релаксации. Оказывается, что подходящими для этого являются модели с дробными производными (см. [19]), что превращает их в задачи интегро-дифференциального вида. Интегральная модель учитывает все предшествующие состояния вязкоупругой среды, как бы далеко ни отстояли они от текущего момента времени. Такие модели используются при значительном влиянии эффектов памяти и большом времени релаксации. В [23] дана механическая интерпретация этих моделей и приведен хороший библиографический обзор.

Наличие интегрального слагаемого в (1.1) отражает учет памяти сплошной среды. Различные модели с памятью возникали и изучались в большом числе работ (см., например, [1]). Но, как правило, математические постановки рассматривали вклад памяти при постоянном значении пространственной переменной x (см. [10, 17]). На практике такие модели абсолютно «не физичны». Память среды необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы. Таким образом, в (1.1) появляется $z(s;t,x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x. Данная траектория определяется полем скоростей v.

Заметим, что для корректной постановки задачи необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v, другими словами, чтобы уравнение (1.3) имело единственное решение для поля скоростей v. Для этого в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, в работах [20, 22] была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (1.3) и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков (РЛП) — обобщения понятия классического решения. Эти результаты дают возможность корректно рассмотреть поставленную задачу.

Из-за сложности моделей такого типа известно крайне мало математических результатов для них. Одним из первых, кто смог доказать теоремы существования решений для ряда математических моделей такого типа, был профессор В. Г. Звягин (см. [10, 12, 24, 26, 27]). В данной статье продолжается использование предложенных им идей и подходов для моделей исследуемого типа, и изучается задача управления с обратной связью для одной модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью вдоль траектории поля скоростей.

2. Постановка задачи и основной результат

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых вектор-функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-ой степенью. Через $W_p^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, будем обозначать пространства Соболева. Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из

Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω. Обозначим $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 — замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ и через V^2 — пространство $W_2^2(\Omega) \cap V^1$.

Введем шкалу пространств V^β, $\beta \in \mathbb{R}$. Для этого рассмотрим проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$ и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через

$$E_\infty = \Big\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j :\ v_j \in \mathbb{R},\, N \in \mathbb{N} \Big\},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^β, $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{где } v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k. \tag{2.1}$$

На пространстве V^β, $\beta > -1/2$, норма (2.1) эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{W_2^\beta(\Omega)}$ пространства $W_2^\beta(\Omega)$ (см. [16]). Кроме того, нормы в пространствах V^1, V^2 и V^3 могут быть заданы следующим образом:

$$\|v\|_{V^1} = \left(\int\limits_\Omega \nabla v(x) : \nabla v(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V^2} = \left(\int\limits_\Omega \Delta v(x) \Delta v(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{V^3} = \left(\int\limits_\Omega \nabla\Delta v(x) : \nabla\Delta v(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение.

Далее, через $V^{-\beta} = (V^\beta)^{-1}$, $\beta \in \mathbb{N}$, будем обозначать сопряженное пространство к V^β.

Введем пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{ v \in L_2(0,T;V^1) \cap L_\infty(0,T;V^0),\ v' \in L_{4/3}(0,T;V^{-1}) \}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$.

Как было описано выше, по скорости $v \in W_1$ требуется найти траекторию движения частицы z. Для этого потребуется понятие регулярного лагранжева потока (см. [20–22]).

Определение 2.1. *Регулярным лагранжевым потоком* (РЛП), порожденным v, называется функция $z(\tau;t,x)$, $(\tau;t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \bar{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при п.в. x и любом $t \in [0,T]$ функция $\gamma(t) = z(\tau;t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению
$$z(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^\tau v(s, z(s;t,x)) ds, \qquad t,\tau \in [0,T];$$
2. для любых $t,\tau \in [0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau;t,B)) = m(B)$;
3. при всех $t_i \in [0,T], i = \overline{1,3}$, и п.в. $x \in \bar{\Omega}$
$$z(t_3;t_1,x) = z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x)).$$

Приведем также следующие необходимые в дальнейшем результаты о РЛП (см. [20–22]).

Теорема 2.1. *Пусть $v \in L_1(0,T;W_p^1(\Omega))$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\operatorname{div} v(t,x) = 0$ и $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D;L)$, порожденный v, и*

$$z(\tau;t,\bar\Omega) \subset \bar\Omega, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau} z(\tau;t,x) = v(\tau, z(\tau;t,x)), \qquad \tau \in [0,T], \quad x \in \Omega,$$

где $C(D,L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D = [0,T]\times[0,T]$ со значениями в L — метрическом пространстве измеримых на Ω вектор-функций.

Теорема 2.2. *Пусть $v, v^m \in L_1(0,T;W_1^p(\Omega))$, $m = 1,2,\dots$, при некотором $p > 1$. Пусть* $\operatorname{div} v(t,x) = 0$, $\operatorname{div}^m v(t,x) = 0$, $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = v^m|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. *Пусть выполняются неравенства*

$$\|v_x\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega))} + \|v\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \leqslant C_1, \qquad \|v_x^m\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \leqslant C_2.$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1(Q_T)$ при $m \to +\infty$. Пусть $z(\tau;t,x)$ и $z^m(\tau;t,x)$ — РЛП, порожденные v и v^m, соответственно. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега на множестве $[0,T]\times\Omega$ при $t \in [0,T]$.

Здесь v_x — матрица Якоби вектор-функции v.

Таким образом, в силу теоремы 2.2 для каждого $v \in L_2(0,T;V^1)$ и для почти всех $x \in \Omega$ уравнение (1.3) имеет единственное решение $z(v)$.

Перейдем к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;
(Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху[1] и компактно[2];
(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} := \sup\Big\{\|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} : u \in \Psi(v)\Big\} \leqslant M \quad \text{для всех } v \in W_1;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1$, $v_l \rightharpoonup v_0$, $u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, тогда $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Мы будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1.1)–(1.4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \tag{2.2}$$

Отметим, что в последнее десятилетие при исследовании различных аспектов теории управляемых систем классическое понятие обратной связи в литературе используется и в расширенном смысле: отображение обратной связи понимается многозначным, ставящим в соответствие состоянию системы целое множество допустимых значений. При этом это множество может определяться как в каждый момент времени функционирования системы, так и на всем временном промежутке. Этот подход позволяет эффективно использовать для описания управляемых систем теорию дифференциальных включений, основываясь на известной лемме А. Ф. Филиппова о неявной функции и теории степени многозначных отображений. Познакомиться с данным подходом можно, например, в монографиях [3, 18], обзорной статье [25] или работах [6, 7, 11, 28].

Таким образом, в работе рассматривается задача управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2). Сформулируем определение слабого решения задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2). Будем предполагать, что начальное условие v_0 принадлежит пространству V^0.

---

[1]То есть для каждого $v \in W_1$ и открытого множества $V \subset L_2(0,T;V^{-1})$ такого, что $\Psi(v) \subset V$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$.

[2]То есть образ Ψ относительно компактен в $L_2(0,T;V^{-1})$.

Определение 2.2. *Слабым решением* задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2) называется пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющая a) условию обратной связи (2.2), b) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_\Omega \int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \, ds \, \varepsilon(\varphi) \, dx = \langle f, \varphi \rangle, \tag{2.3}$$

и c) начальному условию $v(0) = v_0$. Здесь z — РЛП, порожденный v.

Первым результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть многозначное отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4). *Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления с обратной связью* (1.1)–(1.4), (2.2).

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1.1)–(1.4), (2.2). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geqslant \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;
(Φ2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_m \to f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m)$.

В качестве примера такого функционала можно привести следующий функционал качества:

$$\Phi(v, f) = \int\limits_0^T \|v(t) - u_*(t)\|_{V^1}^2 \, dt + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V^{-1}}^2 \, dt.$$

Здесь u_* — некоторое заданное поле скоростей. Данный функционал характеризует отклонение имеющейся скорости от требуемой скорости. Его минимум даст нам минимальное отклонение скорости от заданной при минимальном управлении. Таким образом, мы перешли к задаче оптимального управления с обратной связью.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.4. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4), *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Φ1)-(Φ2), *тогда задача оптимального управления с обратной связью* (1.1)–(1.4), (2.2) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что*

$$\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f).$$

Доказательство данных результатов состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного В. Г. Звягиным (см. [5, 13]), доказывается существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Для этого вводится семейство ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$) вспомогательных включений, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для многозначных векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи управления с обратной связью при $\xi = 1$. Далее, для доказательства разрешимости исходной задачи управления с обратной связью на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение показывается, что во множестве решений найдется хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3. Аппроксимационная задача

На протяжении этого раздела будем предполагать, что $v_0 \in V^3$. Рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$) с малым параметром $\theta > 0$. Для данного семейства введем еще одно функциональное пространство $W_2 = \{v \in C([0, T]; V^3),\, v' \in L_2(0, T; V^3)\}$.

Задача 3.1. Найти пару функций $(v, f) \in W_2 \times L_2(0,T;V^{-1})$, удовлетворяющих: a) условию обратной связи (2.2), b) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0,T)$ тождеству

$$\langle v', \varphi\rangle - \xi \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx - \xi\theta \int\limits_\Omega \nabla \Delta v' : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_\Omega \int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)) \mathcal{E}(\varphi)\, ds\, dx = \xi \langle f, \varphi\rangle \tag{3.1}$$

и c) начальному условию $v(0,\cdot) = \xi v_0$. Здесь z — РЛП, порожденный v.

Далее будет доказано существование решения аппроксимационной задачи при $\xi = 1$ и показано, что из последовательности ее решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению задачи (1.1)–(1.4), (2.2) при стремлении параметра аппроксимации θ к нулю. Для этого перейдем к операторной трактовке задачи 3.1. Введем операторы:

$$J : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega v\varphi \, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi \, dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A_2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi\rangle = -\int\limits_\Omega \nabla\Delta v : \nabla\varphi \, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B : V^1 \times [0,T] \times [0,T] \times \overline{\Omega} \to V^{-1},$$

$$(B(v,z)(t), \varphi) = \left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\, ds,\ \mathcal{E}(\varphi) \right),$$

$$v \in V^1, \qquad z \in [0,T] \times [0,T] \times \overline{\Omega}, \qquad \varphi \in V^1, \qquad t \in (0,T);$$

$$K : L_4(\Omega) \to V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \qquad \varphi \in V^1.$$

Поскольку в равенстве (3.1) функция $\varphi \in V^1$ произвольна, оно эквивалентно в $L_2(0,T;V^{-1})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv' - \theta A_2 v' + \mu_0 Av + \frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v,z) - \xi K(v) = \xi f. \tag{3.2}$$

Таким образом, задача 3.1 существования слабого решения аппроксимационной задачи при $\xi = 1$ эквивалентна задаче существования решения $v \in W_2$ следующего операторного включения:

$$Jv' - \theta A_2 v' + \mu_0 Av + \frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v,z) - \xi K(v) = \xi f \in \Psi(v), \tag{3.3}$$

удовлетворяющего начальному условию $v(0,\cdot) = \xi v_0$.

Также определим операторы при помощи следующих равенств:

$$L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \qquad L(v) = ((J + \theta A_2)v' + \mu_0 Av, v|_{t=0});$$

$$C : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \qquad C(v) = (K(v), 0);$$

$$G : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \qquad G(v) = (\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v,z), 0).$$

Тогда задача о нахождении решения операторного уравнения (3.2) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, удовлетворяющего начальному условию $v(0,\cdot) = \xi v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ операторного уравнения

$$L(v) = \xi(C(v) - G(v) + (f, v_0)).$$

Рассмотрим свойства введенных выше операторов.

Лемма 3.1.

1. *Для любого* $v \in L_2(0,T;V^1)$ *функция* Av *принадлежит* $L_2(0,T;V^{-1})$*, оператор* $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и справедливы оценки*

$$\|Av\|_{V^{-1}} \leqslant \|v\|_{V^1}; \qquad \|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

2. *Для любой функции* $v \in L_p(0,T;V^3)$, $1 \leqslant p < \infty$, *функция* $(J+\theta A_2)v$ *принадлежит* $L_p(0,T;V^{-1})$ *и оператор* $(J+\theta A_2) : L_p(0,T;V^3) \to L_p(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и обратим. Кроме того, имеет место оценка*

$$\theta\|v\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\theta A_2)v\|_{L_p(0,T;V^{-1})} \leqslant C_3(1+\theta)\|v\|_{L_p(0,T;V^3)}.$$

Причем обратный к нему оператор $(J+\theta A_2)^{-1} : L_p(0,T;V^{-1}) \to L_p(0,T;V^3)$ *непрерывен и для любого* $w \in L_p(0,T;V^{-1})$ *имеет место оценка*

$$\|(J+\theta A_2)^{-1}w\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \frac{1}{\theta}\|w\|_{L_p(0,T;V^{-1})}.$$

3. *Оператор* $L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ *обратим и обратный к нему оператор* $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ *является непрерывным оператором.*
4. *Для любой функции* $v \in W_2$ *функция* $K(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$*, отображение* $K : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ *является компактным и для него имеет место оценка*

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4\|v\|^2_{L_4(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Доказательство данной леммы является достаточно стандартным и проводится аналогично леммам 2.5.4, 4.4.1–4.4.3 и 7.7.6 в монографии [13].

Перейдем к изучению свойств оператора B. Введем норму $\|v\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})}$, равную норме $\|\overline{v}\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$, где $\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $k \geqslant 0$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2. *Для любых* $v \in L_2(0,T;V^1)$ *и* $z^m \in [0,T]\times[0,T]\times\bar{\Omega}$ *выполнено* $B(v,z) \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и отображение* $B : L_2(0,T;V^1)\times[0,T]\times[0,T]\times\bar{\Omega} \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и ограничено. Кроме того, для любого фиксированного* $z \in [0,T]\times[0,T]\times\bar{\Omega}$*, для любых* $u,v \in L_2(0,T;V^1)$ *справедлива оценка*

$$\|B(v,z)-B(u,z)\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_5T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}\|v-u\|_{k,L_2(0,T;V^1)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Первая часть данной леммы доказывается аналогично лемме 2.2 из статьи [10]. Докажем необходимую оценку (3.5).

Пусть $\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $\overline{u}(t) = e^{-kt}u(t)$. Для любого $\varphi \in L_2(0,T,V^1)$ имеем:

$$\langle e^{-kt}B(v,z)(t) - e^{-kt}B(u,z)(t), \varphi(t)\rangle =$$
$$= \int_0^T\int_\Omega\int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}_{ij}(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,ds\,\mathcal{E}_{ij}(\varphi)(t)\,dx\,dt.$$

Тогда с помощью неравенства Гёльдера:

$$\langle e^{-kt}B(v,z)(t) - e^{-kt}B(u,z)(t), \varphi(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T\int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\left(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\varphi)(t,x)\,dx\right)^{1/2} ds\,dt =$$
$$= \int_0^T\int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\left(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,dx\right)^{1/2}\|\varphi\|_{V^1}\,ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{V^1}\|\varphi\|_{V^1}\,ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t [(t-s)^{-\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{V^1}]^2\,ds\right)^{1/2} \|\varphi\|_{V^1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^t (t-s)^{-2\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|^2_{V^1}\,ds\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{C_5}T^{1/2-\alpha}\left(\int_0^T \|\overline{v}-\overline{u}\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{C_5}T^{1/2-\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{L_2(0,T;V^1)} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2}.$$

Здесь мы воспользовались оценкой (см. [15])

$$\left\|\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\varphi(s)\,ds\right\|_{L_p(0,T)} \leqslant C_5T^{1-\alpha}\|\varphi(s)\|_{L_p(0,T)}, \quad \varphi(s)\in L_p(0,T), \quad 1\leqslant p<\infty.$$

Оценим последний интеграл:

$$\left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi(t,\cdot)\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)}\int_0^T 1-e^{-2t(1/\lambda+k)}\|\varphi(t,\cdot)\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)}\int_0^T \|\varphi(t,\cdot)\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)}\right)^{1/2}\|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Таким образом, получили оценку:

$$\langle e^{-kt}B(v,z)(t)-e^{-kt}B(u,z)(t),\varphi(t)\rangle \leqslant C_5T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{L_2(0,T;V^1)}\|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)},$$

откуда следует оценка (3.5). □

Напомним несколько понятий, касающихся меры некомпактности и L-уплотняющих операторов (см. [4, 14]).

Определение 3.1. Неотрицательная вещественная функция ψ, определенная на подмножестве банахова пространства F, называется *мерой некомпактности*, если для любого подмножества $\mathcal{M}$ этого пространства выполнены следующие свойства:

1. $\psi(\overline{co}\,\mathcal{M})=\psi(\mathcal{M})$;
2. для любых двух множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ из того, что $\mathcal{M}_1\subset\mathcal{M}_2$, следует, что $\psi(\mathcal{M}_1)\leqslant\psi(\mathcal{M}_2)$.

В качестве примера меры некомпактности возьмем *меру некомпактности Куратовского*: точная нижняя граница $d>0$, для которой множество $\mathcal{M}$ допускает разбиение на конечное число подмножеств, диаметры которых меньше d. Приведем некоторые важные свойства меры некомпактности Куратовского:

3. $\psi(\mathcal{M})=0$, если $\mathcal{M}$ — относительно компактное подмножество;
4. $\psi(\mathcal{M}\cup K)=\psi(\mathcal{M})$, если K — относительно компактное множество.

Определение 3.2. Пусть X — ограниченное подмножество банахова пространства и $L : X \to F$ — отображение X в банахово пространство F. Отображение $g : X \to F$ называется *L-уплотняющим*, если $\psi(g(\mathcal{M})) < \psi(L(\mathcal{M}))$ для любого множества $\mathcal{M} \subseteq X$ такого, что $\psi(g(\mathcal{M})) \neq 0$.

Пусть γ_k — мера некомпактности Куратовского в пространстве $L_2(0,T;V^{-1})$ с нормой

$$\|v\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})} = \left(\int\limits_0^T \|v\|^2_{V^{-1}} e^{-kt} dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3. *Отображение $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ является L-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k.*

Доказательство. Пусть $M \subset W_2 \subset L_2(0,T;V^1)$ — произвольное ограниченное множество. В силу теоремы 2.1 множество $z(M)$ — множество траекторий z, однозначно определяемых по скоростям $v \in M$, — относительно компактно. Тогда множество $B(v, z(M))$ относительно компактно для любого фиксированного $v \in W_2$. Кроме того, для любых $z \in z(M)$ отображение $B(\cdot, z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2+2k\lambda}}$ в нормах $\|\cdot\|_{k,L_2(0,T,V^1)}$ и $\|\cdot\|_{k,L_2(0,T,V^{-1})}$. Тогда отображение $B(v,z)$ (см. [2, теорема 1.5.7]), а следовательно, и отображение G является ограниченным относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ_k. Известно, что меры некомпактности Хаусдорфа и Куратовского удовлетворяют неравенствам $\chi_k(M) \leqslant \gamma_k(M) \leqslant 2\chi_k(M)$ (см. [2, теорема 1.1.7]). Поэтому справедлива оценка

$$\gamma_k(G(M)) \leqslant C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}\gamma_k(L(M)).$$

Выбирая k так, чтобы $C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2+2k\lambda}} < 1$, получаем утверждение леммы. □

Используя полученные выше свойства операторов, докажем следующие априорные оценки для семейства вспомогательных задач 3.1.

4. Априорные оценки

Лемма 4.1. *Решения семейства включений* (3.3) *удовлетворяют следующим оценкам:*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_6(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{4.1}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_7(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{4.2}$$

$$\theta\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_8(\|v_0\|^2_{V^0} + \theta\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{4.3}$$

где постоянные C_6, C_7, C_8 не зависят от θ и ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение операторного включения (3.3) для некоторого $\xi \in [0,1]$. Тогда для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство (3.1). Поскольку оно справедливо при всех $\varphi \in V^1$, возьмем $\varphi = \overline{v}$, где $\overline{v}(t) = e^{-kt}v$. Тогда

$$\int\limits_\Omega v'\overline{v}\,dx - \xi\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}dx + \mu_0\int\limits_\Omega \nabla(v) : \nabla(\overline{v})dx +$$

$$+\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}(\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds, \mathcal{E}(\overline{v})) - \theta\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla\overline{v}(t)\,dx = \xi\langle f, \overline{v}\rangle.$$

Выполним замену $v = e^{kt}\overline{v}$ и отдельно преобразуем слагаемые в левой части:

$$\int\limits_\Omega v'\overline{v}\,dx = \int\limits_\Omega (e^{kt}\overline{v})'\overline{v}\,dx = e^{kt}\int\limits_\Omega \overline{v}'\overline{v}\,dx + ke^{kt}\int\limits_\Omega \overline{v}\overline{v}\,dx =$$

$$= \frac{e^{kt}}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial(\overline{v}\overline{v})}{\partial t}\,dx + ke^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} = \frac{e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + ke^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^0};$$

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i}dx = \frac{e^{kt}}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\overline{v_i}\frac{\partial \overline{v_j}\overline{v_j}}{\partial x_i}dx = -\frac{e^{kt}}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\overline{v_j}\overline{v_j} = -\frac{e^{kt}}{2}\int\limits_{\Omega}\mathrm{div} v\sum_{j=1}^{n}\overline{v_j}\overline{v_j} = 0.$$

Преобразуем следующее слагаемое:

$$-\theta\int\limits_{\Omega}\nabla\Delta v' : \nabla\overline{v}\,dx = -\theta\int\limits_{\Omega}\nabla\Delta(e^{kt}\overline{v})' : \nabla\overline{v}\,dx = -\theta k e^{kt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Delta\overline{v} : \nabla\overline{v}\,dx - \theta e^{kt}\int\limits_{\Omega}\nabla\Delta\overline{v}' : \nabla\overline{v}\,dx =$$

$$= \theta k e^{kt}\int\limits_{\Omega}\Delta\overline{v}\Delta\overline{v}\,dx + \frac{\theta e^{kt}}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta\overline{v}\Delta\overline{v}\Big)\,dx = \theta k e^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + \frac{\theta e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^2}.$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое:

$$e^{kt}\mu_0\int\limits_{\Omega}\nabla(\overline{v}) : \nabla(\overline{v})dx = e^{kt}\mu_0\|\overline{v}\|^2_{V^1}.$$

В итоге получаем:

$$\frac{e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + ke^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \mu_0 e^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^1} + \theta k e^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + \frac{\theta e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} =$$

$$= -\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}(\mathcal{E}(\overline{v})(s,z(s;t,x))ds, \mathcal{E}(\overline{v})) = e^{kt}\xi\langle f,\overline{v}\rangle.$$

Оценим по модулю правую часть полученного равенства. Воспользовавшись неравенством Коши $bc \leqslant \dfrac{\delta b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2\delta}$ для $\delta = 1/\mu_0$, мы получим:

$$\xi e^{kt}\langle f,\overline{v}\rangle \leqslant e^{kt}\|f\|_{V^{-1}}\|\overline{v}\|_{V^1} \leqslant \frac{e^{kt}}{2\mu_0}\|f\|^2_{V^{-1}} + \frac{\mu_0 e^{kt}}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^1}.$$

Умножая обе части равенства на e^{-kt}, при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + k\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \frac{\mu_0}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^1} + \frac{\theta}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + \theta k\|\overline{v}\|^2_{V^2} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\left(e^{-kt}\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}(\mathcal{E}(e^{-kt}\overline{v})(s,z(s;t,x))ds,\ \mathcal{E}(\overline{v})\right)\right| + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{V^{-1}}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до τ, где $\tau \in [0,T]$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^0}\,dt + \frac{\mu_0}{2}\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^1}\,dt + \theta k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_0^\tau \|f\|^2_{V^{-1}}\,dt + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\tau\left|\left(e^{-kt}\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}(\mathcal{E}(e^{-kt}\overline{v})(s,z(s;t,x))ds,\ \mathcal{E}(\overline{v})\right)\right|\,dt.$$

Используя оценку (3.5) для $u = 0$, получаем:

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^0}\,dt + \frac{\mu_0}{2}\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^1}\,dt + \theta k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\mu_1 C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Возьмем k достаточно большим, чтобы $\dfrac{\mu_1 C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \leqslant \mu_0/4$. Оценим каждый член левой части отдельно:

$$\frac{\mu_0}{2}\int_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$
$$\frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$
$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^0} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Так как правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от τ, то в левой части возьмем максимум по $\tau \in [0,T]$:

$$\frac{\mu_0}{2}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2},$$
$$\frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2},$$
$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Отсюда непосредственно следуют требуемые оценки (4.1)–(4.3). □

Лемма 4.2. *Если $v \in W_2$ — решение операторного включения* (3.3) *для некоторого $\xi \in [0,1]$, то для него имеют место следующие оценки*:

$$\theta\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_9\Big(1+\frac{1}{\theta}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + C_9\sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + C_9\|v_0\|^2_{V^2}; \tag{4.4}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_9T^{\frac12}}{\theta}\Big(1+\frac{1}{\theta}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \frac{C_9T^{\frac12}}{\sqrt{\theta}}\Big(\|v_0\|_{V^2} + \frac{\|v_0\|^2_{V^2}}{\sqrt{\theta}}\Big); \tag{4.5}$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{10}(\|v_0\|^2_{V^0} + \theta\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1); \tag{4.6}$$

$$\theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{11}(\|v_0\|^2_{V^0} + \theta\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{4.7}$$

где постоянные C_9, C_{10}, C_{11} не зависят от θ, v, ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (3.3). Тогда оно удовлетворяет следующему равенству

$$\|(J+\theta A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \Big\|\xi f - \mu_0 Av - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z) - \xi K(v)\Big\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Оценим правую часть, используя оценку (3.5) при $u = 0$.

$$\Big\|\xi f - \mu_0 Av - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z) + \xi K(v)\Big\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1 C_5 T^{1/2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \mu_0\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{4.8}$$

Отдельно оценим величину $\|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Используя (3.4), а также непрерывность вложения $V^2 \subset L_4(\Omega)$, имеем:

$$\|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \left(\int_0^T \|K(v)\|^2_{V^{-1}}\,dt\right)^{\frac12} \leqslant C_4\left(\int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\left(\int_0^T \|v(t)\|^4_{V^2}\,dt\right)^{\frac12} \leqslant C_{12}T^{\frac12}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{V^2} = C_{12}T^{\frac12}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}.$$

Перепишем (4.8) в виде:

$$\left\|\xi f - \mu_0 Av - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z) + \xi K(v)\right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_{13}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C_{12}T^{\frac12}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}).$$

Из априорных оценок (4.1) и (4.3) следует, что

$$\|(J+\theta A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_9\Big(1+\frac1\theta\Big)(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}) + C_9\sqrt\theta\|v_0\|_{V^2} + C_9\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Для того, чтобы получить оценку снизу, воспользуемся оценкой на $(J+\theta A_2)^{-1}$. Получим:

$$\theta\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\theta A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_9\Big(1+\frac1\theta\Big)(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}) + C_9\sqrt\theta\|v_0\|_{V^2} + C_9\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Следовательно, доказано неравенство (4.4).

Перейдем к оценке (4.5). Представим функцию $v \in W_2$ в виде $v = v_0 - \int_0^t v'(s)\,ds$. Тогда

$$\|v\|_{V^1} \leqslant \left\|v_0 - \int_0^t v'(s)\right\|_{V^1} ds \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \sqrt T\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Так как правая часть полученного неравенства не зависит от t, то перейдем к максимуму по $\tau \in [0,T]$ в левой части. Тогда с учетом оценки (4.4) получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^3} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_9T^{\frac12}}{\theta}\Big(1+\frac1\theta\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \frac{C_9T^{\frac12}}{\sqrt\theta}\|v_0\|_{V^2} + \frac{C_9T^{\frac12}}{\theta}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, установлена оценка (4.5).

Теперь мы докажем (4.6). Как и ранее, $v \in W_2$ — решение операторного уравнения (3.3). Тогда

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \left\|\xi f - \mu_0 Av - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z) - \theta A^2v' + K(v)\right\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \theta\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \tag{4.9}$$

Отдельно рассмотрим слагаемые в правой части последнего неравенства. Сначала установим оценку на $\|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$. Учитывая известное неравенство для $n = 3$

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leqslant 2^{\frac12}\|u\|^{\frac14}_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac34}_{L_2(\Omega)}, \quad u \in V^1,$$

и оценку (3.4), мы получим (для случая $n = 2$ доказательство аналогично):

$$\|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \left(\int_0^T \|K(v)\|^{\frac43}_{V^{-1}}\,dt\right)^{\frac34} \leqslant C_4\left(\int_0^T \|v\|^{\frac83}_{L_4(\Omega)}\,dt\right)^{\frac34} \leqslant$$
$$\leqslant 2C_4\left(\int_0^T \|v\|^{\frac23}_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\right)^{\frac34} \leqslant C_{14}\left(\int_0^T \|v\|^{\frac23}_{V^0}\|v\|^2_{V^1}\,dt\right)^{\frac34} \leqslant$$
$$\leqslant C_{14}\|v\|^{\frac12}_{C([0,T];V^0)}\left(\int_0^T \|v\|^2_{V^1}\,dt\right)^{\frac34} = C_{14}\|v\|^{\frac12}_{C([0,T];V^0)}\|v\|^{\frac32}_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Используя неравенство Гёльдера:

$$\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \left(\int\limits_0^T \|Av\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \left(\int\limits_0^T \|v\|_{V^1}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant T^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_0^T \|v\|_{V^1}^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{4}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Аналогичным образом с помощью неравенства Гёльдера и оценки (3.5) для $u = 0$ получим:

$$\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \left(\int\limits_0^T \|B(v,z)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant T^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_0^T \|B(v,z)\|_{V^{-1}}^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= T^{\frac{1}{4}}\|B(v,z)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant T^{\frac{1}{4}}T^{1/2-\alpha}C_5\|v\|_{L_2(-0,T;V^1)}.$$

Наконец, рассмотрим последнее слагаемое:

$$\theta\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \theta\left(\int\limits_0^T \|A^2v'\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \theta\left(\int\limits_0^T \|v'\|_{V^3}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)}.$$

Оценим правую часть для $p = 4/3$:

$$\theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} - \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_1\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом,

$$\theta\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Итак, из (4.9), оценок наших операторов выше и априорных оценок (4.1) и (4.2), получим

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{15}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{16}((\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2}) + (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} +$$
$$+ \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{17}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^2 \leqslant 4C_{17}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2}).$$

Тогда получаем неравенство (4.6), где $C_{10} = 4C_{17}$.

Наконец, вновь применяя оценки на наши операторы, для правой части (4.9), а также априорные оценки (4.1) и (4.2), получим

$$\theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_{18}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} +$$
$$+ (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^2 \leqslant 4C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2}).$$

Таким образом, установлено неравенство (4.7), где $C_{11} = 4C_{19}$. □

Из лемм 4.1 и 4.2 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 4.1. *Если $v \in W_2$ — решение* (3.3) *для некоторого $\xi \in [0,1]$, то для него имеет место оценка*

$$\|v\|_{W_2} \leqslant C_{20},$$

где константа C_{20} зависит от θ.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему о существовании решений вспомогательной задачи (3.1) при $\xi = 1$.

5. Существование решения аппроксимационной задачи

Теорема 5.1. *Операторное включение* (3.3) *при $\xi = 1$ имеет хотя бы одно решение $v \in W_2$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [3]).

Введем оператор $\mathcal{Y} : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ следующим образом: $\mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0)$. Тогда задача существования решения $(v,f) \in W_2 \times L_2(0,T;V^{-1})$ задачи 3.1 эквивалентна задаче существования решения $v \in W_2$ для следующего операторного включения:

$$v \in \xi\mathcal{M}, \quad \text{где } \mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v)). \tag{5.1}$$

Из следствия 4.1 следует, что все решения уравнения (5.1) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{20} + 1$. Согласно утверждению 3) леммы 3.1 оператор $L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi\mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R.

В силу части 3) леммы 3.1 оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ является непрерывным. Согласно части 4) леммы 3.1 и лемме 3.3 отображение $(\mathcal{Y}+C(v)-G(v)) : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является L-уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k. Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_2 \to W_2$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k.

Таким образом, векторное поле $v - \xi\mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R, а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi\mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля, степень отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ включения (3.3) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи 3.1 при $\xi = 1$. $\square$

6. Предельный переход

Перейдем к доказательству разрешимости исходной задачи управления. Для этого осуществим предельный переход во вспомогательной задаче 3.1 при $\xi = 1$. Поскольку пространство V^3 плотно в V^0, то для каждого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0. Если $v_0^* \equiv 0$, то положим $v_0^m \equiv 0$, $\theta_m = 1/m$. Если же $\|v_0^*\|_{V^0} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^2} \neq 0$. Тогда положим $\theta_m = 1/(m\|v_0^m\|_{V^2}^2)$. В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\theta_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. При этом $\theta_m\|v_0^m\|_{V^2}^2 \leqslant 1$.

По теореме 5.1 при каждом θ_m и v_0^m существует решение $v_m \in W_2 \subset W_1$ вспомогательной задачи 3.1 при $\xi = 1$. Таким образом, каждое решение v_m для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle (v^m)', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v^m : \nabla\varphi\, dx - \theta_m \int\limits_\Omega \nabla\Delta(v^m)' : \nabla\varphi\, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi\rangle \tag{6.1}$$

и начальному условию $v(0,x) = v_0^m$. Таким образом, из оценок (4.1), (4.2), (4.6) и (4.7) получаем, что

$$\|v^m\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{21}, \quad \|v^m\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{22}, \tag{6.2}$$

$$\|(v^m)'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{23}, \quad \theta\|(v^m)'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{24}, \tag{6.3}$$

где константы C_{21}–C_{24} не зависят от θ. В силу непрерывности вложения $C([0,T];V^0) \subset L_\infty(0,T;V^0)$ и оценок (6.2)-(6.3), без ограничения общности (если необходимо, переходя к подпоследовательности) получим, что $v^m \to v^*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$ при $m \to \infty$, $v^m \to v^*$ $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$ при $m \to \infty$, $(v^m)' \to (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$, и что предельная функция v^* принадлежит пространству W_1.

Принимая во внимание априорные оценки (6.2)-(6.3) и условия (Ψ1)–(Ψ4), без ограничения общности можем предположить, что существует $f^* \in L_2(0,T;V^{-1})$ такое, что $f^m \to f^* \in \Psi(v^*)$ при $m \to \infty$.

Рассмотрим задачу Коши (1.3) для предельной функции v^*. Так как $v^* \in W_1$, тогда v^* удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Поэтому в $[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}$ существует РЛП $z^*(\tau;t,x)$, порожденный v^*. Обозначим через $z^m(\tau;t,x)$ РЛП, порожденный v^m.

Лемма 6.1. *Последовательность $z^m(\tau;t,x)$ сходится по мере Лебега на $[0,T]\times\Omega$ по (τ,x) к $z(\tau;t,x)$ для $t \in [0,T]$.*

Данная лемма следует из априорной оценки леммы 4.2 и теоремы 2.2.

Доказательство разрешимости задачи управления (1.1)–(1.4), (2.2) разделим на две части. В первой части перейдем к пределу в задаче 3.1 при $\xi = 1$ с гладкой пробной функцией φ из V^1, во второй части — для производной функции $\varphi \in V^1$.

I часть. Пусть пробная функция φ из V^1 — гладкая. Перейдем к пределу в каждом слагаемом (6.1). При $m \to \infty$ для любого $\varphi \in V^1$ по определению слабой сходимости $v^m \to v^*$ в $L_2(0,T;V^1)$ получим

$$\mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v^m : \nabla\varphi\,dx \to \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v^* : \nabla\varphi\,dx.$$

В силу слабой сходимости $(v^m)' \to (v^*)'$ в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$ получим, что $\langle (v^m)',\varphi\rangle \to \langle (v^*)',\varphi\rangle$ для любого $\varphi \in V^1$. Далее, используя оценку (6.3), без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) мы имеем, что существует функция $u \in L_{4/3}(0,T;V^3)$ такая, что $\theta_m(v^m)' \to u$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^3)$ при $m \to \infty$. Тогда

$$\theta_m\langle \nabla\Delta(v^m)',\nabla\varphi\rangle \to \langle \nabla\Delta u,\nabla\varphi\rangle \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Однако последовательность $\theta_m(v^m)'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3}. Действительно, для любой гладкой скалярной функции ψ с компактным носителем и $\varphi \in V^3$ мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\left|\theta_m \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla\Delta(v^m)' : \nabla\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| = \lim_{m\to\infty}\theta_m\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Delta(v^m)'\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\theta_m\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla(v^m)' : \nabla\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| = \lim_{m\to\infty}\theta_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla(v^m)' : \nabla\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\theta_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T \nabla(v^m)'\psi(t)\,dt\right) : \nabla\Delta\varphi\,dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\theta_m\lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^T \nabla v^m\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\,dt\right) : \nabla\Delta\varphi\,dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \theta_m \lim_{m\to\infty} \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v^m : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt \right|.$$

Так как v^m слабо сходится к v^* в $L_2(0,T;V^1)$ и, следовательно, сходится к v^* в смысле распределений, то

$$\lim_{m\to\infty} \theta_m \lim_{m\to\infty} \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v^m : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt \right| = \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v^* : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt \right| \lim_{m\to\infty} \theta_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела $\theta_m \langle \nabla\Delta(v^m)', \nabla\varphi\rangle \to 0$ при $m \to \infty$.

Теперь покажем, что

$$\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) \to$$
$$\to \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right). \quad (6.4)$$

Рассмотрим разность

$$\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) -$$
$$- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) =$$
$$= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x)) - \mathcal{E}(v^*)(s,\, z^m(s;t,x))] : \mathcal{E}(\varphi)\, dx\, ds \right) +$$
$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_\Omega [\mathcal{E}(v^*)(s,\, z^m(s;t,x)) - \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s;t,x))] : \mathcal{E}(\varphi)\, dx\, ds \right) =$$
$$= Z_1^m + Z_2^m.$$

1. Покажем сначала, что $Z_1^m \to 0$ при $m \to \infty$.

Обозначим интеграл по области Ω в Z_1^m через I:

$$I = \int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x)) - \mathcal{E}(v^*)(s,\, z^m(s;t,x))] : \mathcal{E}(\varphi)\, dx.$$

Сделаем в I замену переменных $x = z^m(t;s,y)$ (где обратная замена $y = z^m(s;t,x)$):

$$I = \int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t;s,y))\, dy.$$

Перепишем Z_1^m и продолжим разложение:

$$Z_1^m = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t;s,y))\, dy\, ds \right) =$$
$$= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] : \right.$$

$$: [\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t;s,y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z^*(t;s,y))]\,dy\,ds\Bigg) +$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int\limits_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^*(t;s,y))\,dy\,ds\right) = Z_{11}^m + Z_{12}^m.$$

a) Получаем, что $Z_{12}^m \to 0$ при $m \to \infty$ в силу слабой сходимости v^m к v^* в пространстве $L_2(0,T;V^1)$.

b) Применяя неравенства Гёльдера и Коши—Буняковского, получим

$$|Z_{11}^m|^2 \leqslant C_{25}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\|v^m(s,\cdot) - v^*(s,\cdot)\|_{V^1}\|\varphi_x(z^m(t;s,\cdot)) - \varphi_x(z^*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\,ds\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{26}\|v^m(s,\cdot) - v^*(s,\cdot)\|_{L_2(0,T;V^1)}\int\limits_0^T \|\varphi_x(z^m(t;s,\cdot)) - \varphi_x(z^*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\,ds. \tag{6.5}$$

Обозначим второй сомножитель в последнем неравенстве через $\Phi_m(s)$:

$$\Phi_m(s) = \int\limits_0^T \|\varphi_x(z^m(t;s,\cdot)) - \varphi_x(z^*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\,ds.$$

Покажем сходимость $\Phi_m(s) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $s \in [0,T]$. Заметим, что

$$\Phi_m(s) = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\varphi_x(z^m(t;s,y)) - \varphi_x(z^*(t;s,y))|^2\,dy\,ds.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ будет достаточно малым числом. Непрерывность функции φ_x в $\overline{\Omega}$ означает, что существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что если $|x'' - x'| \leqslant \delta(\varepsilon)$, то

$$|\varphi_x(x'') - \varphi_x(x')| \leqslant \varepsilon. \tag{6.6}$$

Так как последовательность $z^m(t;s,y)$ сходится к $z^*(t;s,y)$ по мере Лебега по (t,y), то для $\delta(\varepsilon)$ существует такое число $N = N(\delta(\varepsilon))$, что для $m \geqslant N$ выполнено неравенство

$$m(\{(t,y):\ |z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| \geqslant \delta(\varepsilon)\}) \leqslant \varepsilon. \tag{6.7}$$

Обозначим

$$Q(>\delta(\varepsilon)) = \{(t,y) \in Q_T:\ |z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| > \delta(\varepsilon)\};$$
$$Q(\leqslant\delta(\varepsilon)) = \{(t,y) \in Q_T:\ |z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| \leqslant \delta(\varepsilon)\}.$$

Тогда

$$\Phi_m(s) \leqslant C_{27}\left(\int\limits_{Q(>\delta(\varepsilon))} |\varphi_x(z^m(t;s,y)) - \varphi_x(z^*(t;s,y))|^2\,dy\,ds +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{Q(\leqslant\delta(\varepsilon))} |\varphi_x(z^m(t;s,y)) - \varphi_x(z^*(t;s,y))|^2\,dy\,ds\right) = C_{27}(\Phi_m^1(s) + \Phi_m^2(s)). \tag{6.8}$$

Для $\Phi_m^2(s)$ в силу (6.6) имеем $|z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\Phi_m^2(s) \leqslant \int\limits_{Q(\leqslant\delta(\varepsilon))} \varepsilon^2\,dy\,ds = C_{28}\varepsilon^2. \tag{6.9}$$

Для $\Phi_m^1(s)$ в силу (6.7) имеем $m(Q(>\delta(\varepsilon)))\leqslant\varepsilon$. Следовательно,

$$\Phi_m^1(s)\leqslant C_{29}\|\varphi_x\|_{C(\Omega)}\int\limits_{Q(>\delta(\varepsilon))}dy\,ds=C_{29}\varepsilon\|\varphi_x\|_{C(\Omega)}. \tag{6.10}$$

Таким образом, из (6.8), (6.9) и (6.10) следует, что для малого $\varepsilon>0$ и $m\geqslant N(\delta(\varepsilon))$ выполнено неравенство $\Phi_m(s)\leqslant C_{30}\varepsilon$. Следовательно, получена сходимость $\Phi_m(s)\to 0$ при $m\to\infty$ для всех $s\in[0,T]$. Рассмотрим правую часть неравенства (6.5). В силу ограниченности первого сомножителя (т. к. $v^m\in L_2(0,T;V^1)$) и сходимости к 0 второго сомножителя при $m\to\infty$, получаем, что $Z_{11}^m\to 0$ при $m\to\infty$.

Таким образом, доказано, что $Z_1^m\to 0$ при $m\to\infty$.

2. Теперь покажем, что $Z_2^m\to 0$ при $m\to\infty$. Рассмотрим вспомогательную гладкую и конечную на $[0,T]\times\Omega$ функцию $\widetilde{v}(t,x)$ такую, что $\|v^*-\widetilde{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant\varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon>0$. Оценим теперь Z_2^m через три интеграла:

$$|Z_2^m|\leqslant C_{31}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int\limits_\Omega\|v^*(s,\,z^m(s;t,x))-\widetilde{v}(s,z^m(s;t,x))\|_{V^1}\,ds+\right.$$
$$+\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int\limits_\Omega\|\widetilde{v}(s,\,z^m(s;t,x))-\widetilde{v}(s,z^*(s;t,x))\|_{V^1}\,ds+$$
$$\left.+\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int\limits_\Omega\|\widetilde{v}(s,\,z^*(s;t,x))-v^*(s,z^*(s;t,x))\|_{V^1}\,ds\right)=C_{31}(Z_{21}^m+Z_{22}^m+Z_{23}^m).$$

Сделаем замену переменных в нормах под интегралами Z_{21}^m и Z_{23}^m:

$$\|v^*(s,\,z_m(s;t,x))-\widetilde{v}(s,z^m(s;t,x))\|_{V^1}=\|v^*(s,y)-\widetilde{v}(s,y)\|_{V^1};$$
$$\|\widetilde{v}(s,\,z^*(s;t,x))-v^*(s,z^*(s;t,x))\|_{V^1}=\|\widetilde{v}(s,y)-v^*(s,y)\|_{V^1}.$$

Тогда получим $Z_{21}^m+Z_{23}^m=C_{32}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\|v^*(s,\cdot)-\widetilde{v}(s,\cdot)\|_{V^1}\,ds\right)\leqslant C_{32}\varepsilon$. Оценим также Z_{22}^m:

$$Z_{22}^m\leqslant C_{32}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\left(\int\limits_\Omega|\widetilde{v}_x(s,\,z^m(s;t,\cdot))-\widetilde{v}_x(s,z^*(s;t,\cdot))|^2\,dx\right)^{1/2}ds\right).$$

В силу леммы 6.1 $z^m(s;t,x)$ сходится к $z(s;t,x)$, а функция $\widetilde{v}_x(t,x)$ — ограниченная и гладкая, поэтому по теореме Лебега получим сходимость $Z_2^m\to 0$ при $m\to\infty$. Таким образом, доказали сходимость (6.4).

В итоге показали, что функция v^* при гладкой пробной функции φ из V^1 удовлетворяет равенству:

$$\langle(v^*)',\varphi\rangle-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_i^*v_j^*\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\mu_0\int\limits_\Omega\nabla v^*:\nabla\varphi\,dx+$$
$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^*)(s,z^*(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right)=\langle f^*,\varphi\rangle. \tag{6.11}$$

Так как для последовательности $\{v^m\}$ имеют место априорные оценки (6.2)-(6.3), то в силу свойств слабой сходимости для v^* непосредственно получаем оценку:

$$\|v^*\|_{L_\infty(0,T;V^0)}+\|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+\|v^*\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}\leqslant C_{33}.$$

Таким образом, доказали предельный переход при гладкой пробной функции φ из V^1.

II часть. Докажем данный предельный переход для произвольной пробной функции φ из V^1. Перепишем (6.11) для гладкой φ в виде:

$$[G_1,\varphi]-[G_2,\varphi]=0, \tag{6.12}$$

где

$$[G_1,\varphi]=\langle v',\varphi\rangle-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\mu_0\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx+$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right);$$

$$[G_2,\varphi]=\langle f,\varphi\rangle.$$

Лемма 6.2. *Пусть пробная функция φ — гладкая. Тогда*

$$|[G_1,\varphi]|\leqslant C_{41}\|\varphi\|_{V^1},\quad |[G_2,\varphi]|\leqslant C_{42}\|\varphi\|_{V^1}. \tag{6.13}$$

Так как множество гладких функций плотно в V^1, для $\varphi\in V^1$ существует последовательность гладких функций $\varphi^l\in V^1$ таких, что $|\varphi^l-\varphi|_{V^1}\to 0$ при $l\to\infty$. В силу (6.12) получим

$$[G_1,\varphi]-[G_2,\varphi]=[G_1,\varphi-\varphi^l]-[G_2,\varphi-\varphi^l]+[G_1,\varphi^l]-[G_2,\varphi^l]=[G_1,\varphi-\varphi^l]-[G_2,\varphi-\varphi^l].$$

Из последнего равенства и оценок (6.13) получим $|[G_1,\varphi]-[G_2,\varphi]|\leqslant C_{43}|\varphi-\varphi^l|$. Принимая во внимание последнее неравенство и переходя к пределу при $l\to\infty$ в равенстве (6.11) для $\varphi=\varphi^l$, получим равенство (6.11) для произвольной $\varphi\in V^1$, что и завершает доказательство теоремы 2.3 о существовании слабых решений задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2).

7. Существование оптимального управления с обратной связью

Из теоремы 2.3 мы получаем, что множество решений Σ непусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l,f_l)\in\Sigma$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty}\Phi(v_l,f_l)=\inf_{(v,f,)\in\Sigma}\Phi(v,f).$$

Как и ранее, используя оценку (6.2)-(6.3), мы без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что: $v_l\rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$; $v_l\to v_*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$; $v_l\rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$; $z_l(\tau;t,x)\to z_*(\tau;t,x)$ по норме Лебега относительно $(\tau,x)\in[0,T]\times\Omega$; $f_l\to f_*\in\Psi(v^*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m\to+\infty$.

Аналогично предыдущему разделу, переходя к пределу во включении

$$Jv_l'+\mu_0Av_l+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v_l,z_l)-K(v_l)=f_l\in\Psi(v_l),$$

мы получим следующее включение:

$$Jv_*'+\mu_0Av_*+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v_*,z_*)-K(v_*)=f_*\in\Psi(v_*).$$

Следовательно $(v_*,f_*)\in\Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v_*,f_*)\leqslant\inf_{(v,f)\in\Sigma}\Phi(v,f),$$

что доказывает, что (v_*,f_*) — требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. — М.: Мир, 1979.
2. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. — Новосибирск: Наука, 1986.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либроком, 2011.
4. *Дмитриенко В. Т., Звягин В. Г.* Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений// Мат. заметки. — 1982. — *31*, № 5. — С. 801–812.

5. *Звягин В. Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *46*. — С. 92–119.
6. *Звягин А. В.* Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 2. — С. 245–249.
7. *Звягин А. В.* Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье—Стокса// Докл. РАН. — 2019. — *486*, № 5. — С. 527–530.
8. *Звягин А. В.* О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 3. — С. 189–190.
9. *Звягин А. В.* Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта// Изв. РАН. Сер. мат. — 2021. — *85*, № 1. — С. 66–97.
10. *Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т.* О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 12. — С. 1633–1645.
11. *Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В.* Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — *477*. — С. 54–86.
12. *Звягин В. Г., Орлов В. П.* О регулярности слабых решений обобщенной модели вязкоупругости Фойгта// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2020. — *60*, № 11. — С. 1933–1949.
13. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: Красанд, 2012.
14. *Садовский Б. Н.* Предельно компактные и уплотняющие операторы// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 1. — С. 81–146.
15. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
16. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
17. *Agranovich Yu. Ya., Sobolevskii P. E.* Motion of nonlinear visco-elastic fluid// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 6. — С. 755–760.
18. *Aubin J. P., Cellina A.* Differential inclusions. Set valued maps and viability theory. — Berlin: Springer, 1984.
19. *Bagley R. L., Torvik P. J.* A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity// J. Rheol. — 1983. — *27*. — С. 201–210.
20. *Crippa G.* The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields// Boll. Unione Mat. Ital. (9). — 2008. — *1*, № 2. — С. 333–348.
21. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna—Lions flow// J. Reine Angew. Math. — 2008. — *616*. — С. 15–46.
22. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces// Invent. Math. — 1989. — *98*, № 3. — С. 511–547.
23. *Mainardi F., Spada G.* Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology// Eur. Phys. J. Spec. Topics. — 2011. — *193*. — С. 133–160.
24. *Zvyagin V. G., Kostenko E. I.* Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory// Lobachevskii J. Math. — 2023. — *44*, № 3. — С. 969–988.
25. *Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.* On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems// J. Fixed Point Theory Appl. — 2014. — *16*. — С. 27–82.
26. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2018. — *38*, № 12. — С. 6327–6350.
27. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory// J. Math. Fluid Mech. — 2021. — *23*, № 1. — Article 9.
28. *Zvyagin V., Zvyagin A., Ustiuzhaninova A.* Optimal feedback control problem for the fractional Voigt-α model// Mathematics. — 2020. — *8*, № 7. — С. 1197.

А. В. Звягин
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: `zvyagin.a@mail.ru`

Е. И. Костенко
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: `ekaterinalarshina@mail.ru`

UDC 517.977.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642
EDN: YRJVVX

The existence problem of feedback control for one fractional Voigt model

A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we study the feedback control problem for a mathematical model that describes the motion of a viscoelastic fluid with memory along velocity field trajectories. We prove the existence of an optimal control that gives a minimum to a given bounded and semi-continuous from below quality functional. The proof uses the approximation-topological approach, the theory of regular Lagrangian flows, and the theory of topological degree for multivalued vector fields.

Keywords: fractional Voigt model, viscoelastic fluid, motion with memory, optimal control, approximation-topological approach, regular Lagrangian flow, topological degree, multivalued vector field.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the Russian Science Foundation, grant № 23-71-10026, `https://rscf.ru/project/23-71-10026/`.

For citation: A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko, "The existence problem of feedback control for one fractional Voigt model," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 621–642. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642`

REFERENCES

1. G. Astarita and G. Marrucci, *Osnovy gidrodinamiki nen'yutonovskikh zhidkostey* [Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
2. R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, and B. N. Sadovskii, *Mery nekompaktnosti i uplotnyayushchie operatory* [Non-Compactness Measures and Condensing Operators], Nauka, Novosibirsk, 1986 (in Russian).
3. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, and V. V. Obukhovskiy, *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions], Librokom, Moscow, 2011 (in Russian).
4. V. T. Dmitrienko and V. G. Zvyagin, "Gomotopicheskaya klassifikatsiya odnogo klassa nepreryvnykh otobrazheniy" [Homotopy classification of one class of continuous mappings], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1982, **31**, No. 5, 801–812 (in Russian).
5. V. G. Zvyagin, "Approksimatsionno-topologicheskiy podkhod k issledovaniyu matematicheskikh zadach gidrodinamiki" [Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **46**, 92–119 (in Russian).
6. A. V. Zvyagin, "Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya statsionarnoy modeli slabo kontsentrirovannykh vodnykh rastvorov polimerov" [Optimal control problem for a stationary model of weakly concentrated water solutions of polymers], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 2, 245–249 (in Russian).
7. A. V. Zvyagin, "Optimal'noe upravlenie s obratnoy svyaz'yu dlya al'fa-modeli Lere i al'fa-modeli Nav'e—Stoksa" [Optimal feedback control for the Leray alpha model and the Navier–Stokes alpha model], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **486**, No. 5, 527–530 (in Russian).
8. A. V. Zvyagin, "O slaboy razreshimosti i skhodimosti resheniy drobnoy al'fa-modeli Foygta dvizheniya vyazkouprugoy sredy" [On the weak solvability and convergence of solutions to the fractional alpha Voigt

model of motion of a viscoelastic medium], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2019, **74**, No. 3, 189–190 (in Russian).
9. A. V. Zvyagin, "Issledovanie slaboy razreshimosti drobnoy al'fa-modeli Foygta" [Investigation of the weak solvability of the fractional alpha Voigt model], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2021, **85**, No. 1, 66–97 (in Russian).
10. V. G. Zvyagin and V. T. Dmitrienko, "O slabykh resheniyakh regulyarizovannoy modeli vyazkouprugoy zhidkosti" [On weak solutions of a regularized model of a viscoelastic fluid], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 12, 1633–1645 (in Russian).
11. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin and M. V. Turbin, "Optimal'noe upravlenie s obratnoy svyaz'yu dlya modeli Bingama s periodicheskimi usloviyami po prostranstvennym peremennym" [Optimal feedback control for the Bingham model with periodic conditions in spatial variables], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 54–86 (in Russian).
12. V. G. Zvyagin and V. P. Orlov, "O regulyarnosti slabykh resheniy obobshchennoy modeli vyazkouprugosti Foygta" [On the regularity of weak solutions of the generalized Voigt viscoelasticity model], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2020, **60**, No. 11, 1933–1949 (in Russian).
13. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred* [Mathematical Problems of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], Krasand, Moscow, 2012 (in Russian).
14. B. N. Sadovskii, "Predel'no kompaktnye i uplotnyayushchie operatory" [Limit-compact and condensing operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1972, **27**, No. 1, 81–146 (in Russian).
15. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
16. A. V. Fursikov, *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications], Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1999 (in Russian).
17. Yu. Ya. Agranovich and P. E. Sobolevskii, "Motion of nonlinear visco-elastic fluid," *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 6, 755–760.
18. J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions. Set Valued Maps and Viability Theory*, Springer, Berlin, 1984.
19. R. L. Bagley and P. J. Torvik, "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity," *J. Rheol.*, 1983, **27**, 201–210.
20. G. Crippa, "The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields," *Boll. Unione Mat. Ital. (9)*, 2008, **1**, No. 2, 333–348.
21. G. Crippa and C. de Lellis, "Estimates and regularity results for the diPerna—Lions flow," *J. Reine Angew. Math.*, 2008, **616**, 15–46.
22. R. J. DiPerna and P. L. Lions, "Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces," *Invent. Math.*, 1989, **98**, No. 3, 511–547.
23. F. Mainardi and G. Spada, "Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology," *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2011, **193**, 133–160.
24. V. G. Zvyagin and E. I. Kostenko, "Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory," *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 3, 969–988.
25. V. Zvyagin, V. Obukhovskii, and A. Zvyagin, "On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems," *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2014, **16**, 27–82.
26. V. Zvyagin and V. Orlov, "Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, **38**, No. 12, 6327–6350.
27. V. Zvyagin and V. Orlov, "Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory," *J. Math. Fluid Mech.*, 2021, **23**, No. 1, article 9.
28. V. Zvyagin, A. Zvyagin, and A. Ustiuzhaninova, "Optimal feedback control problem for the fractional Voigt-α model," *Mathematics*, 2020, **8**, No. 7, 1197.

A. V. Zvyagin
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: `zvyagin.a@mail.ru`

E. I. Kostenko
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: `ekaterinalarshina@mail.ru`