Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 578–587
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.968.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587
EDN: WVMHMR

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДИНАМИКЕ ПОПУЛЯЦИЙ С МИГРАЦИЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПОТОМСТВОМ

А. А. Давыдов[1], **Х. А. Хачатрян**[2,1]

[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*

Аннотация. Для интегрального уравнения, решения которого доставляют стационарные состояния популяции, распределенной в арифметическом пространстве, найдены условия существования его решения и условия, при которых у этого уравнения не более одного решения.

Ключевые слова: динамика популяций, стационарное состояние, миграция, распределенное потомство, интегральное уравнение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

Для цитирования: *А. А. Давыдов, Х. А. Хачатрян.* Стационарные состояния в динамике популяций с миграцией и распределенным потомством// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 578–587. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587

1. Введение

Качественный анализ динамики распределенных популяций и их стационарных состояний является одной из востребованных задач прикладного характера. Если такое состояние является глобальным аттрактором нетривиальных динамик, то анализ изменения состояния популяции в долгосрочной перспективе при наличии внешнего воздействия, например, в силу появления эксплуатации популяции или изменений в экологии среды обитания, фактически сводится к анализу изменения этого стационарного состояния и оценки скорости сходимости к нему.

Для качественного анализа динамики популяций используются различные виды уравнений, включая исторически появившееся первыми модели типа Мальтуса и Ферхюльста [24, 26], затем модели динамики структурированных или распределенных популяций двадцатого века типа Мак-Кендрика (или Мак-Кендрика—фон Ферстера) [25, 27] или Колмогорова—Пискунова—Петровского и Фишера [19, 21], а также различные модификации этих моделей. При этом поиск стационарных или периодических решений и их анализ является важной составляющих таких исследований (см., например, [2, 6, 7, 9, 11–13, 15, 17, 18, 20, 23]). Для распределенных популяций поиск таких состояний нередко приводит к поиску решений интегральных уравнений (см., например, [3–7, 9, 13, 14, 17, 20, 23]). О разрешимости одного из таких уравнений и пойдет речь в настоящей работе.

Первоначальная форма уравнения, которое мы будем рассматривать, была получена при анализе модели распределенной популяции, в которой учитывалась различные естественные параметры типа плотности троек индивидуумов, вероятность миграции индивидуумов из одного положения в другое, а также появления у них потомства на удалении от их местоположения (см. [16, 22]). Несколько позже анализ этого уравнения показал, что с его разрешимостью есть проблемы, поэтому потребовалась корректировка модели. В итоге была предложена модификация этого уравнения с дополнительным параметром, что позволило устранить возникшее препятствие к разрешимости. Для новой модели был получен ряд результатов о существовании решений и их свойствах [3–5, 14]. Однако все эти результаты относились к случаю одномерной среды — вещественного арифметического пространства. В настоящей работе предложены условия разрешимости уравнения для случая арифметического пространства любой размерности в качестве среды обитания популяции. Отметим, что изучались и другие аналоги исходной модели [6, 7, 23].

А именно, мы рассматриваем следующее интегральное уравнение на n-мерном, $n > 1$, арифметическом пространстве:

$$(1+\omega(x))P(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(x-x')P(x'dx' + cm(x), \tag{1.1}$$

где x и x' — точки этого пространства, P — искомая функция, доставляющая плотность популяции в стационарном состоянии, $c \neq 0$ — произвольный числовой параметр; неотрицательные измеримые функции w и m — характеристики популяции, при этом вторая из них — распределение вероятностей. Таким образом, имеем

$$w \geqslant 0, \quad m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(x)dx = 1. \tag{1.2}$$

Для j от 1 до n для интегрируемой на $\mathbb{R}^n_x$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, функции ϕ определим

$$\Phi_j(x_j) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x)d\bar{x}, \tag{1.3}$$

где интегрирование по $d\bar{x}$ — это интегрирование по всем координатам, кроме x_j (ниже, если не оговорено противное, мы используем обозначения $z := x_j$, $y := \bar{x}$). Например, для функций m и $g = cm/(1+w)$ имеем

$$M_1(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} m(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n, \qquad G_1(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n.$$

Отметим, что все M_j и G_j — интегрируемые на прямой функции, к тому же первые из них являются распределениями вероятностей, что нетрудно видеть.

Основной результат настоящей работы — существование измеримого неотрицательного решения уравнения (1.1) при условии, что для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ функция G_j ограничена, а распределение M_j имеет конечный первый момент и ненулевое матожидание (в частности, это распределение несимметрично), т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |z|M_j(z)dz < +\infty, \qquad \nu(M_j) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} zM_j(z)dz \neq 0. \tag{1.4}$$

Условие конечности первого момента заведомо выполнено, если распределение m достаточно быстро убывает при удалении от начала координат, например, экспоненциально, когда имеет место оценка

$$m(x) \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$$

с некоторыми константами $C > 0$ и $\alpha > 0$. Это вполне естественно, например, для распределения, моделирующего миграцию, при этом предположение о несимметричности также вполне разумно, поскольку процесс миграции в большей степени стимулируется предпочтениями индивидуумов, которые обычно несимметричны по направлению перемещения.

Мы также обсуждаем единственность решения уравнения (1.1) в этом случае и в случае симметричного ядра.

2. Основные результаты

Здесь приведены формулировки основных результатов и их доказательства.

2.1. Существование решения, несимметричный случай.

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.1) *имеет измеримое неотрицательное решение, если для некоторого* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *функция* G_j *ограничена, а распределение* M_j *имеет конечный первый момент и ненулевое матожидание* (*см.* (1.4)).

Доказательство. Для упрощения записи координату x_j будем обозначать через z, совокупность остальных координат через y (о чем договорились выше), а функции M_j и G_j через M и G соответственно.

Теперь наряду с уравнением (1.1) рассмотрим также следующее интегральное уравнение на прямой:

$$f(z) = G(z) + \int_{-\infty}^{\infty} M(z-t) f(t) dt, \tag{2.1}$$

относительно неизвестной функции f. Как отмечено выше, G является интегрируемой функцией на прямой. По условию теоремы имеем (1.4) с $M_j = M$. Следовательно, по теореме Н. Б. Енгибаряна (см. [28]) существует неотрицательное ограниченное решение уравнения (2.1), при этом в силу теоремы Карлина (см. [8]) у этого решения есть конечные пределы на бесконечности и справедливо следующее равенство:

$$\lim_{z\to+\infty} f(z) - \lim_{z\to-\infty} f(z) = \frac{1}{\nu(M)} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) d\tau. \tag{2.2}$$

Теперь для поиска решения уравнения (1.1) положим $P_0 := g$ и определим последующие приближения к этому решению через итерации

$$P_{k+1}(x) = g(x) + \lambda(x) \int_{\mathbb{R}^n} m(x-x') P_k(x') dx', \tag{2.3}$$

где $\lambda = 1/(1+w(x)) \leqslant 1$.

Лемма 2.1. *Приближения* $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ *доставляют последовательность неубывающих интегрируемых функций на* $\mathbb{R}^n$, *при этом при всех* k *справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_k(x) dy \leqslant f(z), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Из этой леммы и теоремы Б. Леви (см. [10]) получаем, что при всяком фиксированном $z \in \mathbb{R}$ последовательность измеримых функций $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ почти всюду (по $y \in \mathbb{R}^{n-1}$) имеет предел при $k \to \infty$, причем предельная функция P интегрируема, удовлетворяет уравнению (1.1) и следующим неравенствам:

$$P \geqslant g \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x) dy \leqslant f(z). \tag{2.5}$$

В частности, учитывая ограниченность функции f, имеем

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x) dy < +\infty. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1 доказана по модулю леммы 2.1.

Для завершения доказательства теоремы докажем эту лемму.

При $k = 0$ оценка (2.4) имеет место в силу следующих соотношений:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P_0(x)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x)dy = G(z) \leqslant f(z),\ z \in \mathbb{R},$$

где последнее неравенство вытекает из (2.1) в силу неотрицательности M и f. Предположим теперь, что эта оценка имеет место при некотором целом $k \geqslant 0$. Тогда из (2.3), учитывая неотрицательность функций g и m, а также ограничение $0 < \lambda \leqslant 1$, в силу теоремы Фубини (см. [10]) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{k+1}(x)dy \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} m(x-x')P_k(x')dx'dy =$$

$$= G(z) + \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} P_k(x') \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} m(x-x')dydx' = G(z) + \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} M(z-z')P_k(x')dx' =$$

$$= G(z) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(z-z') \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P_k(x')dy'dz' \leqslant G(z) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(z-z')f(z')dz' = f(z).$$

для $z \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.1 доказана. □

2.2. О неединственности решения при суммируемой ω.

Теорема 2.2. *Если в условиях теоремы* 2.1 *функция ω является суммируемой, то решение уравнения* (1.1) *неединственно, более того, существует однопараметрическое семейство решений этого уравнения.*

Доказательство. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ вспомогательное интегральное уравнение

$$\psi(x) = 1 - \lambda(x) + \lambda(x) \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} m(x-x')\psi(x')dx' \tag{2.7}$$

относительно искомой функции ψ. Очевидно, что функция $\psi \equiv 1$ является решением этого уравнения.

В силу неотрицательности ω для $\lambda = 1/(1+\omega)$ имеем $0 < 1-\lambda \leqslant \omega$ и, следовательно,

$$1 - \lambda \in L_1(\mathbb{R}^n), \tag{2.8}$$

поскольку $\omega \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по условию.

Для поиска других решений рассмотрим итерации

$$\begin{gathered} \psi_{k+1}(x) = 1 - \lambda(x) + \lambda(x) \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} m(x-x')\psi_k(x)dx', \\ \psi_0(x) = 1 - \lambda(x) \end{gathered} \tag{2.9}$$

для уравнения (2.7) при $k = 0, 1, 2, \ldots$

Как и в предыдущем пункте, доказывается, что эти итерации доставляют неубывающую последовательность измеримых функций, ограниченных сверху единицей. Кроме того, при условии (1.4) с некоторым j (от 1 до n) имеет место оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi_k(x)dy \leqslant f(z), \tag{2.10}$$

где $z = x_j$, $y = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n)$, а f — решение одномерного интегрального уравнения (2.1) со свободным членом g, где

$$g(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \lambda(x))dy. \tag{2.11}$$

Следовательно, существует поточечный предел ψ_∞ этой последовательности, который в силу теоремы Б. Леви удовлетворяет уравнению (2.7). Имеем

$$1-\lambda(x)\leqslant\psi_\infty\leqslant 1 \tag{2.12}$$

в силу неубывания членов этой последовательности и их ограниченности сверху единицей, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\psi_\infty(x)dy\leqslant f(z) \tag{2.13}$$

в силу (2.10). Следовательно, ψ_∞ отлично от единицы. Понятно, что функция $S(x):=1-\psi_\infty(x)$ будет неотрицательным нетривиальным и ограниченным сверху единицей решением однородного уравнения

$$S(x)=\lambda(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}m(x-x')S(x')dx' \tag{2.14}$$

на прямой. Таким образом, при наложенных условиях уравнение (1.1) обладает однопараметрическим семейством решений P_τ,

$$P_\tau(x)=P_\infty(x)+\tau S(x), \tag{2.15}$$

где P_∞ — решение этого уравнения, построенное при помощи последовательных приближений (2.3), и τ — вещественный параметр. □

Замечание 2.1. Отметим, что примененный подход построения нетривиального решения однородного уравнения в одномерном случае был впервые применен в работе [1].

Замечание 2.2. Понятно, что каждое из построенных решений (2.15) является ограниченной функцией на прямой.

2.3. О единственности решения в изучаемом случае. Пусть, как и выше в доказательстве, $z=x_j$, а y — остальные координаты. Справедлива

Теорема 2.3. *Если в условиях теоремы* 2.1 *функция* μ, $\mu(z)=\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^{n-1}}\lambda(x)$ *интегрируема и удовлетворяет неравенству*

$$Q(z):=\int\limits_{\infty}^{\infty}\mu(z+t)M_j(t)dt<1, \tag{2.16}$$

то уравнение (1.1) *в классе измеримых неотрицательных функций с ограниченным интегралом* $\int\limits_{y\in\mathbb{R}^{n-1}}P(x)dy$ *имеет не более одного решения.*

Замечание 2.3. Следует отметить, что в известных случаях (см. [3, 14]) функция ω является суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функцией, так что последняя теорема в этих случаях не работает.

Доказательство. Допустим противное, что в этом классе у уравнения (1.1) есть два решения P и $\tilde{P}$. Для их разности из (1.1) имеем

$$0\leqslant|P(x)-\tilde{P}(x)|\leqslant\lambda(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}m(x-x')|P(x')-\tilde{P}(x')|dx'. \tag{2.17}$$

Отсюда, интегрируя по y (что возможно в рассматриваемом классе решений), будем иметь

$$\begin{aligned}0\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|P(x)-\tilde{P}(x)|dy\leqslant\mu(z)\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}m(x-x')|P(x')-\tilde{P}(x')|dx'dy=\\=\mu(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_j(z-z')\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|P(x')-\tilde{P}(x')|dydz'.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Определим функцию R, $R(z):=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|P(x)-\tilde{P}(x)|dy$. В силу условия (2.16), суммируемости функции μ и теоремы Фубини из (2.18) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(z)dz\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(z')Q(z')dz',\qquad\text{или}\qquad\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)(1-Q(x))dx\leqslant 0.$$

Но $Q(x) < 1$ по условию, а $R \geqslant 0$ по определению. Следовательно, последнее неравенство возможно лишь при $R = 0$ почти всюду на прямой. Это влечёт $P = \tilde{P}$ почти всюду на прямой, а значит, решения совпадают почти всюду на прямой.

Теорема доказана. □

3. О разрешимости в случае с симметрией

Предположим теперь, что для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ядро M_j и свободный член G_j:

I) являются четными, при этом $M_j \geqslant 0$, $G_j > 0$;

II) образуют D-пару, т. е. $\alpha M_j \leqslant G_j$ с некоторым числом $\alpha > 0$;

III) ядро M_j является регулярным, т. е. существует число $\nu > 0$ такое, что для k-кратных ядер $M_j^k := M_j * \dots * M_j$ (k раз) справедливы неравенства

$$\int_{-\nu k}^{\nu k} M_j^k(z)dz \geqslant \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

При таких ограничениях на M_j и G_j в работе [3] доказано, что уравнение (2.1) имеет неотрицательное и ограниченное решение и исследованы некоторые свойства этого решения.

Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть для некоторого* $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, *функции* M_j *и* G_j *удовлетворяют условиям* I)–III). *Тогда уравнение* (1.1) *обладает неотрицательным измеримым решением* P. *Более того, если распределение* m *ограничено и существует измеримая интегрируемая функция* B, $B(x) = B(x_j)$ *такая, что*

$$m \leqslant B, \tag{3.1}$$

то решение P *ограничено и удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x)dy \leqslant f(z), \tag{3.2}$$

где f — *решение уравнения* (2.1) *при* $G = G_j$ *и* $M = M_j$.

Доказательство. Снова рассматривая последовательные приближения (2.3) для уравнения (1.1) и проводя рассуждения, как в доказательстве теоремы 2.1, построим решение P этого уравнения в изучаемом случае, при этом построенное решение P будет удовлетворять неравенству (3.2).

Далее, при выполнении условий $I)-III)$, ограниченности распределения m и выполнении (3.1) при некоторой интегрируемой B получаем ограниченность построенного решения. □

В конце работы для иллюстрации полученных результатов приведем наглядные примеры функций m и ω.

Сперва приведем следующие примеры ядра m:

A): $m(x) = \dfrac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|x|^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$,

B): $m(x) = \int\limits_a^b e^{-(|x_1+c_1|+\dots+|x_n+c_n|)s} d\sigma(s)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

где $\sigma(s)$ — определенная на интервале $[a, b)$, $0 < a < b \leqslant +\infty$, монотонно возрастающая функция, причем

$$2^n \int_a^b \frac{1}{s^n} d\sigma(s) = 1,$$

а $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$ — числовые параметры.

Теперь приведем несколько примеров функции ω:

1): $\omega(x) = \dfrac{\varepsilon_0 e^{-|x|^2}}{1 - \varepsilon_0 e^{-|x|^2}}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ – числовой параметр,

2): $\omega(x) = \dfrac{\varepsilon_0 e^{-(|x_1|+\dots+|x_n|)}}{1 - \varepsilon_0 e^{-(|x_1|+\dots+|x_n|)}}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$,

3): $\omega(x) = \dfrac{1}{\delta} e^{|x|} - 1$, $\delta \in (0,1)$ — параметр, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Заметим теперь, что если $c_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то для ядра m вида B) условия теорем 1, 2 и 3 автоматически выполняются. Примеры 1) и 2) для функции ω удовлетворяют соответствующим условиям теорем 1 и 2. Следует отметить, что условиям теоремы 3 удовлетворяют примеры B) (для $c_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$) и 3).

Рассмотрим теперь примеры A) и 1). Подробно проверим условия $I) - III)$ для этих примеров. Условие $I)$ выполняется очевидным образом. Убедимся, что ядро M_j и свободный член G_j для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ образует D-пару. Действительно, для примеров $A)$ и 1) имеем

$$M_j(x_j) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|x|^2} dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_j^2},$$

$$G_j(x_j) = \frac{c}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|x|^2} (1 - \varepsilon_0 e^{-|x|^2}) dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-x_j^2} - \frac{\varepsilon_0 c}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{n-1}{2}}} e^{-2x_j^2}.$$

Очевидно, что для $\alpha := c\left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right) > 0$ неравенство $\alpha M_j(x_j) \leqslant G_j(x_j)$ выполняется при всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, условие $II)$ выполняется. Так как ядра M_j имеют конечные моменты любого порядка для примера A), то условие регулярности $III)$ также выполняется (см. [3,14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 9. — С. 1618–1622.
2. *Беляков А. О., Давыдов А. А.* Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — *22*, № 2. — С. 38–46.
3. *Давыдов А. А., Данченко В. И., Звягин М. Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества// Тр. МИАН. — 2009. — *267*. — С. 46–55.
4. *Давыдов А. А., Данченко В. И., Никитин А. А.* Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ// В сб.: «Проблемы динамического управления». — М.: МАКС Пресс, 2010. — С. 15–29.
5. *Данченко В. И., Рубай Р. В.* Об одном интегральном уравнении стационарного распределения биологических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 50–60.
6. *Николаев М. В., Дикман У., Никитин А. А.* Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике// Докл. РАН. — 2021. — *499*. — С. 35–39.
7. *Николаев М. В., Никитин А. А.* О существовании и единственности решения одного нелинейного интегрального уравнения// Докл. РАН. — 2019. — *488*. — С. 595–598.
8. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
9. *Сергеев А. Г., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2019. — *80*, № 1. — С. 113–131.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.
11. *Belyakov A. O., Davydov A. A.* Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource// Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.). — 2017. — *299*, suppl. 1. — С. 14–21.
12. *Belyakov A. O., Davydov A. A., Veliov V. M.* Optimal cyclic exploitation of renewable resources// J. Dyn. Control Syst. — 2015. — *21*, № 3. — С. 475–494.
13. *Davydov A. A.* Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion// Proc. Steklov Inst. Math. — 2020. — *310*. — С. 124–130.
14. *Davydov A. A., Danchenko V. I., Zvyagin M. Yu.* Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community// Proc. Steklov Inst. Math. — 2009. — *267*. — С. 40–49.
15. *Davydov A. A., Platov A. S.* Optimal stationary solution in forest management model by accounting intraspecies competition// Mosc. Math. J. — 2012. — *12*, № 2. — С. 269–273.
16. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments// В сб.: «The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity». — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — С. 412–455.

17. *Diekmann O.* Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection// J. Math. Biol. — 1978. — *6.* — С. 109–130.
18. *Diekmann O., Gyllenberg M., Metz J. A. J.* Steady-state analysis of structured population models// Theor. Popul. Biol. — 2003. — *63.* — С. 309–338.
19. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes// Ann. Eugenics. — 1937. — *7*, № 4. — С. 353–369.
20. *Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S.* On solvability of a class of multidimensional integral equations in the mathematical theory of geographic distribution of an epidemic// J. Contemp. Math. Anal. — 2021. — *56*, № 5. — С. 143–157.
21. *Kolmogorov A. N., Petrovskii I. G., Piskunov N. S.* A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem// Bull. Moscow Univ. Math. Mech. — 1937. — *1.* — С. 1–25.
22. *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models// В сб.: «The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity». — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — С. 252–270.
23. *Nikolaev M. V., Dieckmann U., Nikitin A. A.* Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics// Dokl. Math. — 2021. — *104*, № 1. — С. 188–192.
24. *Malthus T.* An essay on the principle of population. — London: St. Paul's Church-Yard, 1798.
25. *McKendrick A. G.* Applications of mathematics to medical problems// Proc. Edinb. Math. Soc. — 1926. — *44*, № 1. — С. 98–130.
26. *Verhulst P. F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement// Corr. Math. Phys. — 1838. — *10.* — С. 113–121.
27. *Von Foerster H.* Some remarks on changing populations// В сб.: «The Kinetics of Cellular Proliferation». — New York: Grune and Stratton, 1959. — С. 382–407.
28. *Yengibarian N. B.* Renewal equation on the whole line// Stoch. Process Appl. — 2000. — *85*, № 2. — С. 237–247.

А. А. Давыдов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: davydov@mi-ras.ru

Х. А. Хачатрян
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

UDC 517.968.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587
EDN: WVMHMR

Stationary states in population dynamics with migration and distributed offspring

A. A. Davydov[1] and Kh. A. Khachatryan[2,1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2] *Yerevan State University, Yerevan, Armenia*

Abstract. For an integral equation whose solutions provide stationary states of a population distributed in an arithmetic space, we find the conditions for the existence of its solution and conditions under which this equation has no more than one solution.

Keywords: population dynamics, stationary state, migration, distributed offspring, integral equation.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-11-00223).

For citation: A. A. Davydov, Kh. A. Khachatryan, "Stationary states in population dynamics with migration and distributed offspring," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 578–587. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587

REFERENCES

1. L. G. Arabadzhyan, "Ob odnom integral'nom uravnenii teorii perenosa v neodnorodnoy srede" [On one integral equation of the theory of transport in an inhomogeneous medium], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 9, 1618–1622 (in Russian).
2. A. O. Belyakov and A. A. Davydov, "Optimizatsiya effektivnosti tsiklicheskogo ispol'zovaniya vozobnovlyaemogo resursa" [Optimizing the efficiency of circular use of a renewable resource], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2016, **22**, No. 2, 38–46 (in Russian).
3. A. A. Davydov, V. I. Danchenko, and M. Yu. Zvyagin, "Sushchestvovanie i edinstvennost' statsionarnogo raspredeleniya biologicheskogo soobshchestva" [Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2009, **267**, 46–55 (in Russian).
4. A. A. Davydov, V. I. Danchenko, and A. A. Nikitin, "Ob integral'nom uravnenii dlya statsionarnykh raspredeleniy biologicheskikh soobshchestv" [On the integral equation for stationary distributions of biological communities], In: *Problemy dinamicheskogo upravleniya* [Dynamic Control Problems], MAKS Press, Moscow, 2010, pp. 15–29 (in Russian).
5. V. I. Danchenko and R. V. Rubay, "Ob odnom integral'nom uravnenii statsionarnogo raspredeleniya biologicheskikh sistem" [On integral equations of stationary distributions for biological systems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 50–60 (in Russian).
6. M. V. Nikolaev, U. Dieckmann, and A. A. Nikitin, "Primenenie spetsial'nykh funktsional'nykh prostranstv k issledovaniyu nelineynykh integral'nykh uravneniy, voznikayushchikh v ravnovesnoy prostranstvennoy logisticheskoy dinamike" [Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **499**, 35–39 (in Russian).
7. M. V. Nikolaev and A. A. Nikitin, "O sushchestvovanii i edinstvennosti resheniya odnogo nelineynogo integral'nogo uravneniya" [On the existence and uniqueness of a solution to a nonlinear integral equation], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **488**, 595–598 (in Russian).
8. W. Rudin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
9. A. G. Sergeev and Kh. A. Khachatryan, "O razreshimosti odnogo klassa nelineynykh integral'nykh uravneniy v zadache rasprostraneniya epidemii" [On the solvability of one class of nonlinear integral equations in the problem of epidemic spread], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2019, **80**, No. 1, 113–131 (in Russian).
10. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
11. A. O. Belyakov and A. A. Davydov, "Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource," *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, **299**, suppl. 1, 14–21.
12. A. O. Belyakov, A. A. Davydov, and V. M. Veliov, "Optimal cyclic exploitation of renewable resources," *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, **21**, No. 3, 475–494.
13. A. A. Davydov, "Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, **310**, 124–130.
14. A. A. Davydov, V. I. Danchenko, and M. Yu. Zvyagin, "Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, **267**, 40–49.
15. A. A. Davydov and A. S. Platov, "Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition," *Mosc. Math. J.*, 2012, **12**, No. 2, 269–273.
16. U. Dieckmann and R. Law, "Relaxation projections and the method of moments," In: *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, pp. 412–455.
17. O. Diekmann, "Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection," *J. Math. Biol.*, 1978, **6**, 109–130.

18. O. Diekmann, M. Gyllenberg, and J. A. Metz, "Steady-state analysis of structured population models," *Theor. Popul. Biol.*, 2003, **63**, 309–338.
19. R. A. Fisher, "The wave of advance of advantageous genes," *Ann. Eugenics*, 1937, **7**, No. 4, 353–369.
20. Kh. A. Khachatryan and H. S. Petrosyan, "On solvability of a class of multidimensional integral equations in the mathematical theory of geographic distribution of an epidemic," *J. Contemp. Math. Anal.*, 2021, **56**, No. 5, 143–157.
21. A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, and N. S. Piskunov, "A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem," *Bull. Moscow Univ. Math. Mech.*, 1937, **1**, 1–25.
22. R. Law and U. Dieckmann, "Moment approximations of individual-based models," In: *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, pp. 252–270.
23. M. V. Nikolaev, U. Dieckmann, and A. A. Nikitin, "Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics," *Dokl. Math.*, 2021, **104**, No. 1, 188–192.
24. T. Malthus, *An essay on the principle of population*, St. Paul's Church-Yard, London, 1798.
25. A. G. McKendrick, "Applications of mathematics to medical problems," *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 1926, **44**, No. 1, 98–130.
26. P. F. Verhulst, "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement," *Corr. Math. Phys.*, 1838, **10**, 113–121.
27. H. von Foerster, "Some remarks on changing populations," In: *The Kinetics of Cellular Proliferation*, Grune and Stratton, New York, 1959, pp. 382–407.
28. N. B. Yengibarian, "Renewal equation on the whole line," *Stoch. Process Appl.*, 2000, **85**, No. 2, 237–247.

A. A. Davydov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: davydov@mi-ras.ru

Kh. A. Khachatryan
Yerevan State University, Yerevan, Armenia
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am