Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 565–577
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 515.168.5, 517.96
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577
EDN: ECEVOW

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОПЕРАТОРОВ СО СКРУЧИВАНИЯМИ

А. В. Болтачев

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются нелокальные краевые задачи, в которых основной оператор и операторы граничных условий включают дифференциальные операторы и операторы скручивания. Дано определение траекторных символов для этого класса краевых задач. Показано, что эллиптические задачи определяют фредгольмовы операторы в соответствующих пространствах Соболева. Дано условие эллиптичности таких нелокальных краевых задач.

Ключевые слова: эллиптичность, оператор скручивания, фредгольмов оператор, траекторный символ, нелокальная краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 21-51-12006-ННИО.

Для цитирования: *А. В. Болтачев.* Об эллиптичности операторов со скручиваниями// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 565–577. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577

Введение

Во многих разделах математической физики возникают нелокальные краевые задачи, которые содержат дифференциальные операторы и операторы сдвига, отвечающие дискретной группе, действующей на многообразии диффеоморфизмами, и требуется установить условия, при которых такие краевые задачи являются эллиптическими. Рассматриваются нелокальные краевые задачи двух типов: при которых диффеоморфизмы сохраняют область (см., напр., [5, 8, 9, 13]) или не сохраняют ее (см., напр., [4, 6, 15, 16, 18, 20, 21]).

Исследование классических краевых задач включает нахождение условий эллиптичности, т. е. условий, обеспечивающих фредгольмову разрешимость задачи. Эти условия состоят в требовании обратимости символа основного оператора краевой задачи как функции на косферическом расслоении многообразия с краем и условия Шапиро—Лопатинского на крае, которое накладывается в точках косферического расслоения края на символы основного оператора задачи и оператора, определяющего краевое условие (см., напр., [14]).

В том случае, когда краевые задачи включают операторы сдвига, такие задачи становятся нелокальными и условия их эллиптичности формулируются в терминах так называемых траекторных символов, которые учитывают коэффициенты оператора не в одной точке, а на всей траектории точки под действием группы. Далее, при изучении задач с операторами сдвига надо учитывать тот факт, что в случае бесконечной группы для доказательства фредгольмовости приходится привлекать методы теории C^*-алгебр (см. [8, 9]).

В данной работе проводится исследование краевых задач с операторами сдвига, отвечающими скручиванию конечного цилиндра $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ с координатами (x,t). Скручивание определяется формулой $(x,t) \mapsto (x+\alpha t, t)$, где $\alpha > 0$ — фиксированное число, а соответствующий оператор сдвига дается формулой $(Tu)(x,t) = u(x-\alpha t, t)$. Ранее такие операторы сдвига не рассматривались специалистами в области нелокальных задач, а потому им посвящена данная работа. Скручивание не является изометрическим, а также оно не сохраняет нормальную переменную к краю, поэтому результаты работ [8,9] в данном случае неприменимы. Для исследования таких нелокальных краевых задач используются результаты, полученные в статьях [2,10,11]. Даны явные формулы для траекторных символов задачи, и на основе этих формул предоставлены условия эллиптичности нелокальной краевой задачи для дифференциального оператора со скручиваниями.

Кратко остановимся на содержании работы. В первом разделе дается постановка краевой задачи со скручиваниями конечного цилиндра. Следуя [11], во втором разделе исследуется внутренний символ дифференциального оператора со сдвигами и даются условия его эллиптичности. Оказывается, что в ряде случаев исследование внутреннего символа сводится к исследованию дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. Дальнейшее исследование состоит в получении условий эллиптичности граничного символа дифференциального оператора со скручиваниями. Левое основание цилиндра, в отличие от правого, является неподвижным при скручивании, поэтому отдельно вычисляются граничные траекторные символы на различных основаниях цилиндра. В третьем разделе данной работы исследуется граничный символ на левом основании цилиндра и дается условие его эллиптичности как условие обратимости оператора с периодическими коэффициентами на полуоси. В четвертом разделе вычисляется граничный символ на правом основании цилиндра, который является краевой задачей на полуоси с постоянными операторными коэффициентами. На основе этих формул сформулированы основные результаты работы. В заключительном разделе приводится пример, иллюстрирующий основные результаты работы, а именно, рассмотрена краевая задача для дифференциального оператора со сдвигами и постоянными коэффициентами, для которой условия эллиптичности даются как условия однозначной разрешимости некоторого уравнения Матьё.

1. Постановка задачи

Фиксируем число $\alpha > 0$, несоизмеримое с π. Рассмотрим бесконечный цилиндр $Y = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, на котором группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует скручиваниями перпендикулярно образующей цилиндра $(x,t) \mapsto (x + k\alpha t, t)$, $k \in \mathbb{Z}$. Определим оператор сдвига, отвечающий скручиваниям, формулой

$$(Tu)(x,t) = u(x - \alpha t, t).$$

На конечном цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset Y$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ i^*B \end{pmatrix} : H^s(M) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, \mathbb{C}^N). \end{matrix} \tag{1.1}$$

Определим операторы, участвующие в краевой задаче (1.1). Во-первых,

$$D = D\left(e^{ix}, t, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}, T\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} D_l \left(e^{ix}, t, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) T^l, \qquad \operatorname{ord} D = m, \tag{1.2}$$

— дифференциальный оператор со сдвигами на цилиндре M, а коэффициенты D_l в нем являются дифференциальными операторами порядка $\leqslant m$ с гладкими коэффициентами. Здесь и ниже для операторов со сдвигами предполагается, что операторы $D_l \neq 0$ только для конечного числа l. Во-вторых, оператор $B = (B_0, B_1)$ в задаче (1.1) представляет собой пару операторов на левом/правом основании цилиндра, причем дифференциальный оператор на левом основании

$$B_0 = B_0\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

имеет порядок $\operatorname{ord} B_0 = b_0$ и определяет $N_0 \in \mathbb{N}$ граничных условий, а дифференциальный оператор со сдвигами на правом основании

$$B_1 = B_1\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}, T\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} B_{1,l}\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) T^l$$

имеет порядок $\operatorname{ord} B_1 = b_1$ и определяет $N_1 \in \mathbb{N}$ граничных условий, в то время как $B_{1,l}$ — дифференциальные операторы. Положим $b = (b_0, b_1)$, $N = (N_0, N_1)$ и обозначим

$$H^{s-b-1/2}(\partial M, \mathbb{C}^N) = H^{s-b_0-1/2}(\partial M|_{t=0}, \mathbb{C}^{N_0}) \oplus H^{s-b_1-1/2}(\partial M|_{t=1}, \mathbb{C}^{N_1}).$$

Вложение $i : \partial M \hookrightarrow M$ индуцирует отображение сужения $i^* : H^s(M) \longrightarrow H^{s-1/2}(\partial M)$ функций на границу при $s > 1/2$.

Замечание 1.1. Левое основание цилиндра M является неподвижным относительно скручиваний. Поэтому добавление к оператору B_0 операторов сдвига не приведет к новому классу операторов.

Цель данной работы — дать условия эллиптичности задачи (1.1) в явном виде, обеспечивающие ее фредгольмову разрешимость. Общая теория была построена в работах [2, 10, 11], в которых условие эллиптичности дается в терминах внутреннего и граничного символов оператора (1.1).

2. Эллиптичность внутреннего символа

Внутренний символ. Перед тем, как вычислить внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ по формуле (16) из работы [11], сначала вычислим дифференциал $d\gamma : TM \longrightarrow TM$ и кодифференциал $\partial\gamma = ((d\gamma)^t)^{-1} : T^*M \longrightarrow T^*M$ диффеоморфизма

$$\gamma : M \longrightarrow M, \qquad \gamma(x,t) = (x + k\alpha t,\ t),$$

где T^*M — кокасательное расслоение многообразия M. Фиксируем точку $(x,t,\xi_1,\xi_2) \in T_0^*M$. Поскольку диффеоморфизм γ линеен, $d\gamma$ и $\partial\gamma$ действуют как операторы умножения на матрицы

$$d\gamma = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & k\alpha\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \partial\gamma = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -k\alpha & 1\end{pmatrix}.$$

Далее по формуле из [11, § 5] вычислим вес, который равен

$$\mu_s(k) = \frac{\gamma^{*-1}(dx\wedge dt)}{dx\wedge dt}\partial\gamma^{*-1}(|\xi|^{2s}) = \frac{d(x-k\alpha t)\wedge dt}{dx\wedge dt}(\xi_1^2 + (\xi_2 + k\alpha\xi_1)^2)^s \sim \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1 = 0,\\ |k|^{2s}, & \text{если } \xi_1 \neq 0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь символом «$\sim$» обозначается эквивалентность весов[1].

Получаем следующее описание весового пространства $\ell_s^2(\mathbb{Z})$:

$$\ell_s^2(\mathbb{Z}) := \Big\{ w : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \Big| \sum_k |w(k)|^2 \mu_s(k) < \infty \Big\}.$$

Тогда в соответствии с формулой (16) из работы [11] внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ в точке $(x,t,\xi_1,\xi_2) \in T_0^*M$ по определению равен

$$\begin{aligned} \sigma_{\rm int}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2) : \ell_s^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell_{s-m}^2(\mathbb{Z}),\\ \sigma_{\rm int}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2) &= D(e^{i(x-k\alpha t)}, t, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}), \end{aligned} \quad \text{где } (\mathcal{T}w)(k) = w(k+1), \tag{2.2}$$

и является конечно-разностным оператором с переменными коэффициентами:

$$D(e^{i(x-k\alpha t)}, t, \xi_1, k\alpha\xi_1 + \xi_2, \mathcal{T}) = \sum_l D_l\left(e^{i(x-k\alpha t)}, t, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l,$$

---

[1] Веса $\mu(k)$ и $\mu'(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы C_1, C_2, что для любых $k \in \mathbb{Z}$ выполнены неравенства

$$C_1\mu(k) \leqslant \mu'(k) \leqslant C_2\mu(k).$$

где $D_l\left(e^{ix},t,\xi_1,\xi_2\right)$ — главные символы слагаемых в операторе (1.2).

Отметим, что в частном случае, когда $\xi_1 = 0$, в соответствии с формулой (2.1) получаем $\mu_s(k) \sim 1$, и внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ в точке $(x,t,0,\xi_2) \in T_0^*M$ равен

$$\sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x,t,0,\xi_2) : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \qquad \sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x,t,0,\xi_2) = D(e^{i(x-k\alpha t)},t,0,\xi_2,\mathcal{T}). \tag{2.3}$$

Эллиптичность внутреннего символа. В дальнейшем изложении будем пользоваться обратным преобразованием Фурье

$$\begin{array}{llll} \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}: & \ell^2_s(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^s(\mathbb{S}^1), \\ & \{w(k)\} & \longmapsto & \widetilde{w}(\varphi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w(k)e^{ik\varphi}, \end{array} \tag{2.4}$$

которое осуществляет изоморфизм весовых пространств на $\mathbb{Z}$ и пространств Соболева на окружности $\mathbb{S}^1$ с координатой φ. Следующее утверждение дает условия эллиптичности внутреннего символа оператора $\mathcal{D}$.

Утверждение 2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *внутренний символ* $\sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x,t,\xi_1,\xi_2)$ *эллиптичен при любых значениях параметров* $(x,t,\xi_1,\xi_2) \in T_0^*M$;
2) *семейство дифференциально-разностных операторов на окружности* $\mathbb{S}^1$

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) = \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})\mathcal{F}_{\varphi\to k} = D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t},t,1,\xi_2 - i\alpha\frac{d}{d\varphi},e^{-i\varphi}\right) : H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1), \tag{2.5}$$

где $(\widetilde{T}_{\alpha t}u)(\varphi) = u(\varphi - \alpha t)$, *обратимо при любых значениях параметров* $(x,t) \in M$, $\xi_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для доказательства эквивалентности условий 1) и 2) преобразуем внутренний символ. Положим $\xi_1 \neq 0$ и рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \ell^2_s(\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}"'] & \ell^2_{s-m}(\mathbb{Z}) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}"] \\ H^s(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})"] & H^{s-m}(\mathbb{S}^1). \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Здесь $\mathcal{F}_{k\to\varphi}$ — преобразования Фурье (2.4), а в нижней строке диаграммы (2.6) участвует оператор (2.5).

Коммутативность диаграммы (2.6) доказывается прямым вычислением. Приведем таблицу для операторов в k-пространстве и их образов в φ-пространстве под действием обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$:

Оператор в k-пространстве/ Operator in k-space	Оператор в φ-пространстве/ Operator in φ-space
$w(k) \mapsto kw(k)$	$u(\varphi) \mapsto -i\partial_\varphi u(\varphi)$
$w(k) \mapsto e^{-ika}w(k), a \in \mathbb{R}$	$u(\varphi) \mapsto u(\varphi - a)$
$w(k) \mapsto w(k+1)$	$u(\varphi) \mapsto e^{-i\varphi}u(\varphi)$

Теперь рассмотрим случай $\xi_1 = 0$. Для оператора (2.5) на окружности рассмотрим условие эллиптичности (см. [9]). Это условие состоит в требовании обратимости разностного оператора с переменными коэффициентами

$$D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t},t,0,\xi_2,e^{-i\varphi}\right) : L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1) \qquad \forall (x,t) \in M, \xi_2 \neq 0, \tag{2.7}$$

обратимость которого эквивалентна обратимости оператора (2.3).

Эквивалентность условий 1) и 2) следует из диаграммы (2.6) и изоморфности обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$.

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 2.2. *Пусть операторы* D_l *в формуле* (1.2) *имеют постоянные по* x *коэффициенты (всюду ниже опускаем первый аргумент операторов). Тогда условия* 1) *и* 2) *из утверждения* 2.1 *эквивалентны условию*

3) *обратимо семейство дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами на прямой*

$$D\left(t, 1, -i\alpha\frac{d}{d\psi}, e^{-i\psi}\right) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Для проверки эквивалентности условий 2) и 3) в этом случае воспользуемся преобразованием Фурье—Лапласа (см., напр., [22, § 4]). Преобразование Фурье—Лапласа дается формулой

$$\mathcal{F}_\theta : H^s(\mathbb{R}_\psi) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)),$$
$$(\mathcal{F}_\theta u)(\varphi, \theta) = e^{i\theta\varphi/2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta} u(\varphi + 2\pi n),$$

а обратное — формулой

$$u(\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\theta\psi/2\pi}(\mathcal{F}_\theta u)(\psi,\theta)\, d\theta.$$

В работе [3] показано, что это преобразование определяет изоморфизм указанных пространств.

Теперь положим $\xi_2 = -\alpha\theta/(2\pi)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, и семейству операторов (2.5) сопоставим оператор

$$a(\theta) = D\left(t, 1, \alpha(-i\partial_\varphi - \theta/(2\pi)), e^{-i\varphi}\right) : L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^{s-m}(\mathbb{S}^1_\varphi)). \tag{2.9}$$

Применим к оператору (2.9) обратное преобразование Фурье—Лапласа и составим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^s(\mathbb{R}_\psi) \arrow[r, "\mathcal{F}_\theta^{-1} a(\theta)\mathcal{F}_\theta"] \arrow[d, "\mathcal{F}_\theta"'] & H^{s-m}(\mathbb{R}_\psi) \arrow[d, "\mathcal{F}_\theta"] \\ L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)) \arrow[r, "a(\theta)"] & L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^{s-m}(\mathbb{S}^1_\varphi)). \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

Поскольку имеет место коммутационное соотношение

$$\left(-i\partial_\varphi - \frac{\theta}{2\pi}\right)(\mathcal{F}_\theta u(\psi)) = \left(-i\partial_\varphi - \frac{\theta}{2\pi}\right)\left(e^{i\theta\varphi/2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\theta n} u(\varphi + 2\pi n)\right) = \mathcal{F}_\theta(-i\partial_\psi u(\psi)),$$

а экспоненты $e^{-i\psi}$ являются периодическими функциями, то оператор в верхней строчке диаграммы (2.10) совпадает с оператором (2.8).

В силу коммутативности диаграммы (2.10) эллиптичность внутреннего символа $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x, t, \xi_1, \xi_2)$ эквивалентна обратимости семейства операторов (2.8). □

3. Граничный символ на левом основании цилиндра

Будем рассматривать граничные символы на разных основаниях цилиндра по отдельности. Рассмотрим сначала левое основание цилиндра $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Фиксируем точку $(x, \xi_1) \in T^*_0\partial M$, т. е. $\xi_1 \neq 0$. Граничный символ на левом основании — это оператор, действующий по формуле (см. [11])

$$\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s_+ \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C}^{N_0} \end{matrix}, \qquad w(\xi_2) \overset{\sigma^L_\partial(\mathcal{D})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \Pi_+ D(e^{ix}, 0, \xi_1, \xi_2, T_{\alpha\xi_1}) w(\xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}(B_0(x,\xi_1,\xi_2) w(\xi_2)) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Здесь

- $B_0(x, \xi_1, \xi_2)$ — главный символ оператора B_0 в задаче (1.1);
- $T : H^s_+ \longrightarrow H^s_+$ — оператор сдвига, действующий по формуле $(T_{\alpha\xi_1} w)(\xi_2) = w(\xi_2 + \alpha\xi_1)$;
- пространство $H^s_+ = \mathcal{F}_{t\to\xi_2}(H^s(\overline{\mathbb{R}}_+))$ означает пространство образов при преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{t\to\xi_2}$ пространства Соболева $H^s(\overline{\mathbb{R}}_+)$ функций на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$;

- оператор $\Pi_+ : H^s_+ \oplus H^s_- \to H^s_+$ — проектор на первое слагаемое, где пространство H^s_- аналогично определяется как $H^s_- = \mathcal{F}_{t\to\xi_2}(H^s(\overline{\mathbb{R}}_-))$;
- Π' — непрерывный функционал

$$\begin{array}{rcl} \Pi' : H^s_+ \oplus H^s_- & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ u(\xi_2) & \longmapsto & \lim\limits_{t\to 0+} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}(u(\xi_2)). \end{array}$$

Более подробно, см., напр., в работах [12, 17, 19].

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$, перейдем от задачи (3.1) к краевой задаче для оператора с периодическими коэффициентами периода $2\pi/(\alpha\xi_1)$ на полуоси

$$\widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow \begin{array}{c} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^{N_0} \end{array}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) \\ j^* B_0(e^{ix}, \xi_1, -i\partial_t) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

а j^* — сужение в точку $t = 0$. Получим условия однозначной разрешимости краевой задачи (3.2).

Пусть $\mathcal{M}$ — матрица монодромии при $t = 0$ оператора с периодическими коэффициентами

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}). \tag{3.3}$$

Напомним, что *матрица монодромии* — это квадратная матрица $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$, равная

$$\mathcal{M}(v_0, \ldots, v_{m-1}) = (u(t), u'(t), \ldots, u^{(m-1)}(t))\Big|_{t=2\pi/\alpha\xi_1}.$$

Здесь $u(t)$ — решение однородного уравнения

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t})u(t) = 0$$

с данными Коши в начальной точке $t = 0$

$$u(0) = v_0, \ldots, u^{(m-1)}(0) = v_{m-1}.$$

Из теории дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами (см., напр., [7, гл. 2]) известно, что оператор (3.3) обратим тогда и только тогда, когда спектр его матрицы монодромии не пересекает единичную окружность.

Составим матрицу монодромии $\mathcal{M}$ оператора (3.3) и обозначим через λ_k собственные значения этой матрицы. Обозначим через $L_+(x,\xi_1)$ пространство решений уравнения (3.3), стремящихся к нулю при $t \to +\infty$. Ясно, что имеет место изоморфизм конечномерных линейных пространств

$$L_+(x,\xi_1) \simeq \bigoplus_{k:|\lambda_k|<1} V_k,$$

где через V_k обозначено корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ_k матрицы $\mathcal{M}$.

Утверждение 3.1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *граничный символ* $\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ *на левом основании цилиндра* (*см.* (3.1)) *эллиптичен при любых значениях параметров* $(x,\xi_1) \in T^*_0\partial M|_{t=0}$;
2) *краевая задача* (3.2) *на* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *с периодическими коэффициентами обратима при любых значениях параметров* $(x,\xi_1) \in T^*_0\partial M|_{t=0}$;
3) (*условие Шапиро—Лопатинского на левом основании цилиндра* $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$) *обратим оператор*

$$j^*\left(B_0(e^{ix}, \xi_1, -i\partial_t)\right) : L_+(x,\xi_1) \longrightarrow \mathbb{C}^{N_0}, \tag{3.4}$$

где N_0 — *число граничных условий в задаче* (1.1) *на левом основании цилиндра.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) утверждения следует из изоморфности преобразования Фурье. Докажем эквивалентность условий 2) и 3), для чего воспользуемся следующей известной леммой.

Лемма 3.1. *Пусть дан ограниченный оператор*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} : H_1 \longrightarrow \begin{matrix} H_2 \\ \oplus \\ H_3 \end{matrix}, \tag{3.5}$$

где пространства H_1, H_2, H_3 банаховы, а оператор $A_1 : H_1 \longrightarrow H_2$ сюръективен. Тогда оператор A является изоморфизмом тогда и только тогда, когда сужение оператора $A_2|_{\ker A_1} : \ker A_1 \longrightarrow H_3$ на ядро оператора A_1 является изоморфизмом.

Вернемся к доказательству утверждения 3.1. Утверждается, что оператор

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \tag{3.6}$$

сюръективен. В самом деле, продолжим функцию $f \in H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ на всю прямую $\mathbb{R}$ с помощью оператора продолжения $\mathcal{E} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$ (см., напр., [1, с. 157]). Оператор

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R})$$

является изоморфизмом на всей прямой (см. (2.8)). Применив оператор сужения на полупрямую $\overline{\mathbb{R}}_+$ к функции $u = (D^{-1}\mathcal{E})f$, получим функцию в $H^s(\overline{\mathbb{R}}_+)$, что доказывает сюръективность оператора (3.6) на полупрямой.

В силу приведенной леммы изоморфность оператора (3.4) эквивалентна обратимости краевой задачи (3.2) при любых значениях параметров $(x, \xi_1) \in T_0^*\partial M|_{t=0}$. Таким образом, условия 2) и 3) эквивалентны. Утверждение доказано. □

4. Граничный символ на правом основании цилиндра

Теперь рассмотрим правое основание $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ цилиндра. Фиксируем точку $(x, \xi_1) \in T_0^*\partial M|_{t=1}$. Граничный символ, обозначаемый через $\sigma_\partial^R(\mathcal{D})(x, \xi_1)$, согласно формуле (20) из [11], действует в пространствах

$$\sigma_\partial^R(\mathcal{D})(x, \xi_1) : \ell^2(\mathbb{Z}, H_-^s) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, H_-^{s-m} \oplus \mathbb{C}) \tag{4.1}$$

по формуле

$$w(k, \xi_2) \longmapsto \begin{pmatrix} D(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k, \xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}\left(B_1(e^{i(x-k\alpha)}, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k, \xi_2)\right) \end{pmatrix},$$

где $(\mathcal{T}w)(k, \xi_2) = w(k+1, \xi_2 + \alpha\xi_1)$, и выражения

$$D(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}) = \sum_l D_l\left(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l,$$

$$B_1(e^{i(x-k\alpha)}, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}) = \sum_l B_{1,l}\left(e^{i(x-k\alpha)}, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l$$

определяются главными символами операторов D и B_1 в задаче (1.1). Дадим явные выражения для пространств в (4.1). Имеем пространство

$$\ell^2(\mathbb{Z}, H_-^s) = \left\{\{w(k)\} \,\middle|\, w(k) \in H_-^s \text{ и } \sum_k \|w(k)\|_{H_-^s}^2 k^{2s} < \infty\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{H_-^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\Pi_-(i\xi_2 + |\xi_1|)^s u(\xi_2)|^2 d\xi_2$$

и пространство

$$\ell^2(\mathbb{Z}, H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \oplus \mathbb{C}^{N_1}) = \Big\{(w, v) = \{(w(k), v(k))\} \,\Big|\, w(k) \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-),\ v(k) \in \mathbb{C}^{N_1} \\ \text{и } \sum_k \|(w(k), v(k))\|_{s,k}^2 < \infty\Big\},$$

где в соответствии с формулой (19) из [11] семейство норм $\|(w, v)\|_{s,k}^2$ в последнем пространстве равно

$$\|(w,v)\|^2_{s,k} = \|\Pi_-\partial\gamma^{*-1}\ell^s_-w\|^2_{L^2}\frac{\partial\gamma^{*-1}\operatorname{vol}M}{\operatorname{vol}M} + |v|^2(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta_{X_M})^s)\left(\frac{\partial\gamma^{*-1}\operatorname{vol}_{X_M}}{\operatorname{vol}_{X_M}}\right) =$$
$$= \|\Pi_-\partial\gamma^{*-1}\ell^s_-w\|^2_{L^2} + |v|^2(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta_{X_M})^s) = \|\Pi_-(i(\xi_2+k\alpha\xi_1)+|\xi_1|)^s w\|^2_{L^2} + |v|^2\xi_1^{2s}. \quad (4.2)$$

Здесь

- $\ell_- : T^*_0M \longrightarrow \mathbb{C}$ — эллиптические символы первого порядка, которые в окрестности края многообразия M равны $\ell_-(x,t,\xi_1,\xi_2) = i\xi_2 + |\xi_1|$;
- второе равенство в (4.2) справедливо в силу того, что формы объема $\operatorname{vol}M = dx\wedge dt$ и $\operatorname{vol}_{X_M} = dx$ не изменяются при скручиваниях цилиндра;
- в третьем равенстве в (4.2) мы учли, что $\gamma(x,t) = (x+k\alpha t, t)$, и сделали подстановки $\partial\gamma^{*-1}\ell_- = i(\xi_2+k\alpha\xi_1)+|\xi_1|$ и $\sigma(\Delta_{X_M}) = \xi_1^2$.

Далее для простоты будем полагать $\xi_1 = 1$ и приведем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Справедлива коммутативная диаграмма*:

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}, H^s_-) & \xrightarrow{\sigma^R_\partial(\mathcal{D})} & \ell^2(\mathbb{Z}, H^{s-m}_- \oplus \mathbb{C}^{N_1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\otimes\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\otimes\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}} \\ H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-) & \xrightarrow{\widetilde{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D})} & H^{s-m}_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)\oplus L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^{N_1}), \end{array} \quad (4.3)$$

где $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$ и $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$ — обратные преобразования Фурье, а в нижней строчке диаграммы участвует оператор, действующий по формуле

$$\widetilde{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D})u(\varphi,t) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, 1, -i\partial_t - i\alpha\partial_\varphi, e^{-i(\varphi-\alpha t)})u(\varphi,t) \\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, -i\partial_t - i\alpha\partial_\varphi, e^{-i(\varphi-\alpha t)})u(\varphi,0) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\varphi,t) = u(\varphi-\alpha,t)$. Пространства H^s_a в диаграмме (4.3) *являются анизотропными пространствами Соболева с нормой*

$$\|w\|^2_{H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)} = \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}}_-}\left[(1-(\partial_t+\alpha\partial_\varphi)^2)^s w(\varphi,t)\right]\overline{w(\varphi,t)}\,dtd\varphi. \quad (4.5)$$

Знак «$\otimes$» в диаграмме (4.3) *означает, что первое преобразование действует по первой переменной, а второе — по второй переменной.*

Доказательство. Для нахождения нормы в пространстве $H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)$ вычислим второе вертикальное отображение в диаграмме. Введем обозначения $\hat{w}(k,\xi_2) = \mathcal{F}_{\varphi\to k}(w(\varphi,\xi_2))$ и $\hat{v}(k) = \mathcal{F}_{\varphi\to k}(v(\varphi))$ и выразим норму в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}, H^s_-\oplus\mathbb{C})$ в терминах обратных преобразований Фурье:

$$\|(\hat{w},\hat{v})\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z},H^s_-\oplus\mathbb{C})} = \sum_k\int\limits_{\mathbb{R}}\Pi_-((\xi_2+k\alpha)^2+1)^s\hat{w}(k,\xi_2)\overline{\hat{w}(k,\xi_2)}d\xi_2 + |\hat{v}(k)|^2 =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\mathbb{R}}\Pi_-((\xi_2-i\alpha\partial_\varphi)^2+1)^s w(\varphi,\xi_2)\overline{w(\varphi,\xi_2)}d\xi_2 d\varphi + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}}_-}(1-(\partial_t+\alpha\partial_\varphi)^2)^s w(\varphi,t)\overline{w(\varphi,t)}dtd\varphi + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Полученное выражение является квадратом нормы в пространстве $H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)\oplus L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$. В первом интеграле мы воспользовались обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$, а во втором — обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$. Последнее равенство справедливо в силу того, что преобразование Фурье переводит проектор Π_- в отображение сужения на $\mathbb{R}_-$. $\square$

Воспользуемся в краевой задаче (4.4) следующей заменой переменных: $(\varphi, t) = (\psi + \alpha\tau, \tau)$ с соответствующей заменой производных $\partial_\psi = \partial_\varphi, \partial_\tau = \partial_t + \alpha\partial_\varphi$. Тогда задача (4.4) примет вид

$$\overline{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D}) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-, L^2(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-, L^2(\mathbb{S}^1)) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^{N_1}) \end{matrix}, \tag{4.6}$$

$$\overline{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D})u(\tau, \psi) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(\tau, \psi) \\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(0, \psi) \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\tau, \psi) = u(\tau, \psi - \alpha)$.

Следующее утверждение является аналогом утверждения 3.1 для граничного символа на правом основании цилиндра.

Утверждение 4.1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *граничный символ* $\sigma^R_\partial(\mathcal{D})(x, \xi_1)$ *на правом основании цилиндра* (*см.* (4.1)) *эллиптичен при любых значениях параметров* $x \in \mathbb{S}^1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$;
2) *оператор* (4.6) *обратим при любых* $x \in \mathbb{S}^1$;

Если операторы D_l *в формуле* (1.2) *имеют постоянные по* x *коэффициенты, то условия* 1) *и* 2) *эквивалентны условию*:

3) (*условие Шапиро—Лопатинского на правом основании цилиндра* $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$) *обратимо семейство краевых задач для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на полупрямой*:

$$\begin{pmatrix} D(1, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \\ j^* B_1(1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \end{pmatrix} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^{N_1} \end{matrix} \tag{4.7}$$

с параметром $\psi \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Аналогично утверждению 3.1 условия 1) и 2) эквивалентны в силу диаграммы (4.3) и изоморфности преобразования Фурье. В случае, когда оператор $\mathcal{D}$ имеет постоянные по x коэффициенты, оператор (4.6) отвечает семейству операторов (4.7) с параметром $\psi \in [0, 2\pi]$. В силу коммутативности диаграммы (4.3) и изоморфности преобразования Фурье условия 1) и 3) эквивалентны. □

Из утверждений 2.1, 3.1 и 4.1 получаем условие эллиптичности задачи (1.1), которое является основным результатом данной работы.

Теорема 4.1. *Краевая задача* (1.1) *эллиптична тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия*:

1) *внутренний символ оператора* $\mathcal{D}$ (*см.* (2.2)) *эллиптичен*;
2) *выполнено условие Шапиро—Лопатинского на левом основании цилиндра* M (*см. утверждение* 3.1);
3) *выполнено условие Шапиро—Лопатинского на правом основании цилиндра* M (*см. утверждение* 4.1).

Пусть α несоизмеримо с π. Применяя результаты из [2, следствие 2] и [11, § 4], получаем следствие.

Следствие 4.1. *Если выполнены условия теоремы* 4.1, *то краевая задача* (1.1) *фредгольмова.*

5. Пример

На цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ найдем условия эллиптичности задачи

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (1 + \varepsilon(T + T^*))\partial_x^2 u = f(x, t), \\ \quad u|_{t=0} = g_0(x), \quad u|_{t=1} = g_1(x), \end{cases} \tag{5.1}$$

где $u \in H^s(M)$, $(Tu)(x, t) = u(x - \alpha t, t)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что оператор T является унитарным, т. е., $T^* = T^{-1}$.

Выпишем условия эллиптичности задачи (5.1).

1. В силу утверждения 2.1 обратимость внутреннего символа задачи (5.1) эквивалентна обратимости оператора Матьё (см., напр., [23])

$$\alpha^{-2}\widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2}\cos\varphi\right) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-2}(\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

2. В силу утверждения 3.1 граничному символу $\sigma_\partial^L(\mathcal{D})(\xi_1)$ соответствует краевая задача

$$\begin{cases} -u''(t) + \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{2\varepsilon}{\alpha^2}\cos t\right) u(t) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_+), \\ u(0) = h_1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Дифференциальный оператор в полученной краевой задаче является оператором Матьё, аналогичным оператору (5.2). Условие эллиптичности состоит в однозначной разрешимости задачи (5.3).

3. Теперь зафиксируем $\psi \in [0, 2\pi]$. В силу утверждения 4.1 обратимость граничного символа задачи (5.1) на правом основании цилиндра эквивалентна однозначной разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} -\alpha^2 u''(\tau) + (1 + 2\varepsilon\cos\psi)\, u(\tau) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-), \\ u(0) = h_1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Это условие легко проверить. Уравнение

$$-\alpha^2 u''(\tau) + (1 + 2\varepsilon\cos\psi)\, u(\tau) = 0$$

имеет решение $u(\tau) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}\tau} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}\tau}$, где $\lambda = \alpha^{-2}(1+2\varepsilon\cos\psi)$. Для однозначной разрешимости задачи (5.4) необходимо выполнение условия $1+2\varepsilon\cos\psi > 0$ при всех $\psi \in [0, 2\pi]$, откуда получаем условие $|\varepsilon| < 1/2$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Задача* (5.1) *эллиптична, когда выполнены следующие условия*:

1) *уравнение Матьё* (5.2) *однозначно разрешимо*;
2) *краевая задача для уравнения Матьё* (5.4) *однозначно разрешима*;
3) *выполнено условие* $|\varepsilon| < 1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
2. *Балдаре А., Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Шроэ Э.* C^*-алгебры задач сопряжения и эллиптические краевые задачи с операторами сдвига// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 5. — С. 692–716.
3. *Жуйков К. Н., Савин А. Ю.* Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 4. — С. 600–621.
4. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
5. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 10. — С. 99–130.
6. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями на границе соседних подобластей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 1. — С. 152–165.
7. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
8. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^*-applications. Part 2: Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems. — Harlow: Longman, 1998.
9. *Antonevich A. B., Lebedev A. V.* Functional equations and functional operator equations. A C^*-algebraic approach// В сб.: «Proc. SPb. Math. Soc. Vol. VI». — Providence: Am. Math. Soc., 2000. — С. 25–116.
10. *Baldare A., Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schrohe E.* C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators// Math. Notes. — 2022. — *111*, № 5. — С. 701–721.
11. *Boltachev A. V., Savin A. Yu.* Trajectory symbols and the Fredholm property of boundary value problems for differential operators with shifts// Russ. J. Math. Phys. — 2023. — *30*. — С. 135–151.

12. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators// Acta Math. — 1971. — *126*. — C. 11–51.
13. *Connes A.* Noncommutative geometry. — San Diego: Academic Press, 1994.
14. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. III. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer, 1985.
15. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — C. 192–207.
16. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — C. 491–500.
17. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. — Berlin: Akademie, 1982.
18. *Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Elliptic differential dilation-contraction problems on manifolds with boundary// Differ. Equ. — 2017. — *53*, № 5. — C. 665–676.
19. *Schrohe E.* A short introduction to Boutet de Monvel's calculus// В сб.: «Approaches to singular analysis». — Basel: Birkhäuser, 2001. — C. 85–116.
20. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
21. *Skubachevskii A. L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications// Russ. Math. Surv. — 2016. — *71*, № 5. — C. 801–906.
22. *Taubes C. H.* Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds// J. Differ. Geom. — 1987. — *25*. — C. 363–430.
23. *Van der Pol B., Strutt II M. J. O.* On the stability of the solutions of Mathieu's equation// Philos. Magazine — 1928. — *5*, № 27. — C. 18–38.

А. В. Болтачев
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `boltachevandrew@gmail.com`

UDC 515.168.5, 517.96
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577
EDN: ECEVOW

On ellipticity of operators with shear mappings

A. V. Boltachev

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The nonlocal boundary value problems are considered, in which the main operator and the operators in the boundary conditions include the differential operators and twisting operators. The definition of the trajectory symbols for this class of problems is given. We show that the elliptic problems define the Fredholm operators in the corresponding Sobolev spaces. The ellipticity condition of such nonlocal boundary value problem is given.

Keywords: ellipticity, twisting operator, Fredholm operator, trajectory symbol, nonlocal boundary-value problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was carried out with financial support from the Russian Foundation for Basic Research within the framework of the scientific project 21-51-12006-NNIO.

For citation: A. V. Boltachev, “On ellipticity of operators with shear mappings,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 565–577. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577`

REFERENCES

1. M. C. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTsNMO, Moscow, 2013 (in Russian).
2. A. Baldare, V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and E. Schrohe, “C^*-algebry zadach sopryazheniya i ellipticheskie kraevye zadachi s operatorami sdviga” [C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 5, 692–716 (in Russian).
3. K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin, “Eta-invariant ellipticheskikh kraevykh zadach s parametrom” [Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 4, 600–621 (in Russian).
4. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
5. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Ob indekse ellipticheskikh operatorov dlya gruppy rastyazheniy” [On the index of elliptic operators for the group of dilations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2011, **202**, No. 10, 99–130 (in Russian).
6. A. L. Tasevich, “Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'-no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami na granitse sosednikh podoblastey” [Smoothness of generalized solutions to the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions on the boundary of adjacent subdomains], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 152–165 (in Russian).
7. V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskiy, *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
8. A. Antonevich, M. Belousov, and A. Lebedev, *Functional Differential Equations: II. C^*-applications. Part 2: Equations with Discontinuous Coefficients and Boundary Value Problems*, Longman, Harlow, 1998.
9. A. B. Antonevich and A. V. Lebedev, “Functional equations and functional operator equations. A C^*-algebraic approach,” In: *Proc. SPb. Math. Soc. Vol. VI*, Am. Math. Soc., Providence, 2000, pp. 25–116.
10. A. Baldare, V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and E. Schrohe, “C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators,” *Math. Notes*, 2022, **111**, No. 5, 701–721.
11. A. V. Boltachev and Savin A. Yu., “Trajectory symbols and the Fredholm property of boundary value problems for differential operators with shifts,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2023, **30**, 135–151.
12. L. Boutet de Monvel, “Boundary problems for pseudodifferential operators,” *Acta Math.*, 1971, **126**, 11–51.
13. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
14. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1985.
15. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
16. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, “On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
17. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index Theory of Elliptic Boundary Problems*, Akademie, Berlin, 1982.
18. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Elliptic differential dilation-contraction problems on manifolds with boundary,” *Differ. Equ.*, 2017, **53**, No. 5, 665–676.
19. E. Schrohe, “A short introduction to Boutet de Monvel's calculus,” In: *Approaches to Singular Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 85–116.
20. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
21. A. L. Skubachevskii, “Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications,” *Russ. Math. Surv.*, 2016, **71**, No. 5, 801–906.
22. C. H. Taubes, “Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds,” *J. Differ. Geom.*, 1987, **25**, 363–430.

23. B. van der Pol and M. J. O. Strutt II, "On the stability of the solutions of Mathieu's equation," *Philos. Magazine*, 1928, **5**, No. 27, 18–38.

A. V. Boltachev
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: boltachevandrew@gmail.com