Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 3 (2023). С. 445–563
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563
EDN: EANPTD

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЛОКАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

О. В. Солонуха

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящем обзоре изучаются краевые задачи для нелинейных дифференциально-разностных уравнений эллиптического и параболического типов, а также связанные с ними нелинейные уравнения с нелокальными краевыми условиями. Главной особенностью рассматриваемых уравнений является то, что разностный оператор находится в главной части нелинейного оператора, содержащей старшие производные.

Ключевые слова: нелинейные дифференциально-разностные уравнения, нелокальные краевые условия, сдвиг по пространственным переменным, эллиптическое уравнение, параболическое уравнение, начально-краевая задача, периодические решения, псевдомонотонный оператор, оператор с полуограниченной вариацией, условие эллиптичности, условие сильной эллиптичности.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115), Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Для цитирования: *О. В. Солонуха.* Нелинейные дифференциально-разностные уравнения эллиптического и параболического типа и их приложения к нелокальным задачам// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 3. С. 445–563. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563`

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциально-разностные уравнения являются одним из направлений функционально-дифференциальных уравнений и нелокальных задач. Изучение нелокальных задач было начато еще в классических работах А. Зоммерфельда [113], Я. Д. Тамаркина [84] и М. Пиконе [99, 100] для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теория функционально-дифференциальных уравнений (в частности дифференциально-разностных уравнений) получила развитие в трудах А. Д. Мышкиса и многих других математиков, см. монографии [2, 12, 41, 85, 106] и имеющуюся там библиографию. При этом в настоящее время наиболее хорошо изучены функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени и задачи с интегро-дифференциальными членами.

Общая теория линейных эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений и линейных нелокальных эллиптических задач (разрешимость, априорные оценки, гладкость обобщенных решений, спектральные свойства операторов) достаточно развита, см. [10–14, 17, 32, 38–40, 45, 46, 53, 54, 58–71, 104, 106, 107] и приведенную там библиографию. Задачи с нелинейными младшими членами рассмотрены, например, в [51, 101, 107]. Многие математики изучали задачи с абстрактными нелокальными граничными условиями и абстрактными функциональными возмущениями дифференциального оператора, как линейные, так и нелинейные, см. [6, 86, 87, 89, 91, 92, 103]. При этом, в абстрактных нелинейных задачах рассматривались монотонные и псевдомонотонные операторы.

Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений со сдвигами по пространственным переменным вызвано рядом приложений. В 1969 г. такая задача была поставлена в работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [3] в связи с приложениями в теории плазмы. Такого типа задачи возникают также в теории многомерных диффузионных процессов [5, 60, 94, 95, 102, 106, 114].

Исследованию этой задачи был посвящен целый ряд работ, см. [1, 18, 21, 22, 28, 37, 52, 73, 83] и библиографию. В 1980 г. исследование задачи Бицадзе—Самарского в случае произвольного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами и произвольной структуры носителя нелокальных членов было сформулировано как нерешенная проблема [55]. Теория линейных нелокальных эллиптических краевых задач с условиями типа Бицадзе—Самарского была построена в работах А. Л. Скубачевского [59, 61–63, 67, 68, 105, 106]. Одним из методов исследования этих задач является сведение нелокальных эллиптических задач к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям, см. [61, 106].

Для исследования нелинейных задач начиная с 60-х годов прошлого века применяется теория операторов монотонного (псевдомонотонного) типа, см. [4, 27, 97]. В работах М. И. Вишика и других советских математиков основным элементом исследования являлись краевые и смешанные задачи для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов, эллиптический оператор которых задан в дивергентной или недивергентной форме. Такими уравнениями занимались М. И. Вишик, О. Ф. Ладыженская, С. И. Похожаев, Ю. А. Дубинский и др., см. [7–9, 19, 20, 30, 31, 47, 48] и библиографию. Также такие уравнения активно исследовались в других странах Х. Брезисом, Ф. Браудером, Ж.-Л. Лионсом и многими другими, см. [15, 33, 88, 90] и библиографию. Западные математики ввели понятие псевдомонотонного оператора, см. [33, 88]. Основное условие, которому удовлетворяли дифференциальные операторы, получившие название псевдомонотонных, — условие эллиптичности. В 60-е годы также Ю. А. Дубинский ввел понятие алгебраического условия сильной эллиптичности и рассмотрел уравнения с операторами с полуограниченной вариацией [19, 20]. Позже было доказано, что операторы с полуограниченной вариацией являются псевдомонотонными, а операторы, удовлетворяющие условию эллиптичности и коэрцитивности, являются не только псевдомонотонными, но и обладают свойством (S_+), см. работы И. В. Скрыпника [57] и др. Класс оператора определяет свойства решения (множества решений) операторного уравнения. В нелинейном анализе сформулированы теоремы существования решений для уравнений с операторами разных классов псевдомонотонного типа и изучены свойства решений, см. [15, 20, 33, 57] и др. Однако до сих пор эти теоремы применялись только для исследования дифференциальных уравнений.

С 60-х годов математики полагали, что при исследовании нелинейных функционально-дифференциальных и нелокальных задач также следует использовать теорию операторов псевдомонотонного типа, см. [87, 89, 91], однако рассмотрены были только достаточно абстрактные задачи.

В данной работе нелинейные дифференциально-разностные уравнения и нелинейные уравнения с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского рассмотрены с помощью теории операторов псевдомонотонного типа и метода разбиения области, разработанного в линейной теории дифференциально-разностных уравнений. При этом условия на дифференциально-разностный оператор или нелокальные краевые условия типа Бицадзе—Самарского конструктивны и содержат условия на коэффициенты разностного оператора и коэффициенты дифференциального оператора.

Глава 1

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$ARu(x) = f(x) \quad (x \in Q) \tag{1.1}$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \tag{1.2}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d) \times G$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geqslant 3$). В случае $n = 1$ мы полагаем[1] $Q = (0,d)$. Полагаем также, что оператор A задан формулой

$$Au(x) = -\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \partial_i A_i(x,u,\nabla u) + A_0(x,u,\nabla u), \tag{1.3}$$

функции вещественнозначны, а ограниченный разностный оператор R определяется по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h), \tag{1.4}$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными (или соизмеримыми) координатами, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Разностный оператор R является нелокальным: сдвиги на векторы $h \in \mathcal{M}$ могут отображать точки $x \in Q$ в точки $x + h \in \mathbb{R}^n \setminus Q$. Поэтому краевые условия должны задавать значения неизвестной функции не только на границе ∂Q, но и на некотором множестве вне Q. Для простоты в дальнейшем будем считать, что это множество совпадает с $\mathbb{R}^n \setminus Q$.

Пусть[2] $p \in (1,\infty)$ и $1/p + 1/q = 1$.

Введем оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$, где $I_Q : L_p(Q) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_p(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(Q)$ — оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ на Q. Таким образом, функция $u(x)$, определенная на Q, отображается в функцию $(I_Q u)(x)$, определенную на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. После действия оператора R на $I_Q u$ мы получаем функцию, определенную на $\mathbb{R}^n$. Оператор P_Q вводится, чтобы получить сужение функции $(RI_Q u)(x)$ на область Q.

Обозначим через $W_p^1(Q)$ множество функций $u \in L_p(Q)$ таких, что их частные производные 1-го порядка также являются функциями из $L_p(Q)$. При $p \in (1,\infty)$ соболевские пространства $W_p^1(Q)$ банаховы и рефлексивны относительно нормы

$$\|u\|_{W_p^1(Q)} = \left\{ \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q |\partial_i u|^p dx + \int\limits_Q |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.5}$$

Через $\mathring{W}_p^1(Q)$ обозначается замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых в Q функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в пространстве $W_p^1(Q)$. Как известно, эквивалентной нормой в пространстве $\mathring{W}_p^1(Q)$ является норма

$$\|y\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} = \left\{ \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q |\partial_i y|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

(следствие из неравенства Фридрихса, см. [15, гл. II, §1]), сопряженным пространством к $\mathring{W}_p^1(Q)$ является $W_q^{-1}(Q)$.

Для определения корректной интегральной формы рассматриваемые в теории уравнений в частных производных дифференциальные операторы должны удовлетворять условию интегрируемости: коэффициенты оператора A, заданного в (1.3), являются функциями типа Каратеодори (т. е. измеримы по $x \in Q$ и непрерывны по остальным переменным для п.в. $x \in Q$), а также удовлетворяют оценке

$$|A_i(x,\xi)| \leqslant g(x) + c_1 \sum_{0\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^{p-1}, \qquad i = 0,1,\ldots,n, \tag{1.6}$$

где $c_1 > 0$ и $g \in L_q(Q)$. Условие интегрируемости (1.6) является стандартным (с небольшими вариациями) для построения интегрального представления дифференциального оператора, см. [29,

[1] Эти условия могут быть ослаблены, достаточно выполнения условий 5.1 и 5.2 из главы 5.

[2] Квазилинейные уравнения будут рассмотрены при $p \in [2,\infty)$.

гл. 1, §2], а также [15, 20, 33] и др. Если через $\langle\cdot,\cdot\rangle : W_q^{-1}(Q)\times \mathring{W}_p^1(Q)\to\mathbb{R}$ обозначить спаривание в соответствующих банаховых пространствах, то для оператора $AR_Q : \mathring{W}_p^1(Q)\to W_q^{-1}(Q)$, заданного формулами (1.3) и (1.4), для любых $\xi\in\mathring{W}_p^1(Q)$ имеем

$$\langle AR_Qu,\xi\rangle := \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int\limits_Q A_i\left(x, R_Qu, \partial_1R_Qu,\ldots,\partial_nR_Qu\right)\,\partial_i\xi\,dx; \tag{1.7}$$

здесь и ниже $\partial_0u := u$. Далее будем обозначать $A_R := AR_Q$.

Определение 1.1. Пусть $f\in W_q^{-1}(Q)$. Функция $u\in\mathring{W}_p^1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2), если для любого $\xi\in\mathring{W}_p^1(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int\limits_Q A_i\left(x, R_Qu, \partial_1R_Qu,\ldots,\partial_nR_Qu\right)\,\partial_i\xi\,dx = \int\limits_Q f\,\xi\,dx. \tag{1.8}$$

1.2. Разбиение области $Q\subset\mathbb{R}^n$ и свойства разностных операторов

Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q\setminus\big(\bigcup\limits_{h\in M}(\partial Q+h)\big)$.

Определение 1.2. Множество Q_r называется *подобластью.* Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r $(r=1,2,\ldots)$ называется *разбиением* области Q.

Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно, при этом

$$\bigcup_r \partial Q_r = \Big(\bigcup_{h\in M}(\partial Q+h)\Big)\cap\overline{Q}\quad\text{и}\quad \bigcup_r\overline{Q}_r=\overline{Q}.$$

Известно, что для любой подобласти Q_{r_1} и произвольного вектора $h\in M$ либо найдется подобласть Q_{r_2} такая, что $Q_{r_2}=Q_{r_1}+h$, либо $Q_{r_1}+h\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{Q}$, см. [106, лемма 7.1]. Таким образом, семейство $\mathcal{R}$ можно разбить на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2}\in\mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если $Q_{r_2}=Q_{r_1}+h$ для некоторого $h\in M$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса, а l — номер подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N=N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s)\leqslant([\mathrm{diam}Q]+1)^n$ для целочисленных сдвигов. Множество классов может быть конечным или счетным, см. примеры в [106, гл. II, §7].

Лемма 1.1. *Операторы* $I_Q : L_p(Q)\to L_p(\mathbb{R}^n)$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(Q)$, $R : L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)$ *и* $R_Q : L_p(Q)\to L_p(Q)$ *ограничены,* $1<p<\infty$.

Обозначим через $L_p(\bigcup\limits_l Q_{sl})$ подпространство функций из $L_p(Q)$, обращающихся в нуль вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$ $(l=1,\ldots,N(s))$. Введем ограниченный оператор $P_s : L_p(Q)\to L_p(\bigcup\limits_l Q_{sl})$ по формуле $P_su(x)=u(x)\,(x\in\bigcup\limits_l Q_{sl})$, $P_su(x)=0\,(x\in Q\setminus\bigcup\limits_l Q_{sl})$. Очевидно, что P_s является оператором проектирования на $L_p(\bigcup\limits_l Q_{sl})$. Поскольку $\mathrm{mes}_n(\partial Q_{sl})=0$, имеем прямую сумму

$$L_p(Q)=\dot{+}_s\, L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right). \tag{1.9}$$

Лемма 1.2. $L_p\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ *является инвариантным подпространством оператора* R_Q *для любого* $1<p<\infty$.

Изоморфизм рефлексивных банаховых пространств

$$U_s : L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)\to L_p^N(Q_{s1})$$

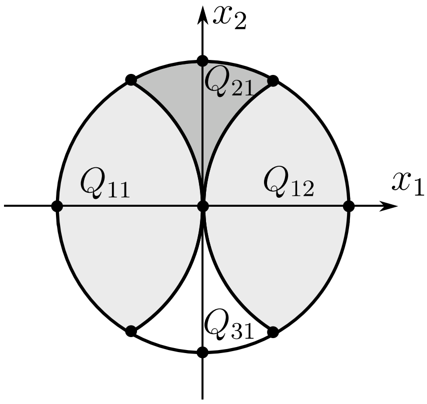

Рис. 1.1. Разбиение области $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.
Fig. 1.1. Partition of the domain $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

определяется по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \qquad (x \in Q_{s1}), \tag{1.10}$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$, а вектор h_{sl} таков, что

$$Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl} \qquad (h_{s1} = 0), \qquad L_p^N(Q_{s1}) = \prod_l L_p(Q_{s1}).$$

Лемма 1.3. *Оператор* $R_{Qs} : L_p^{N(s)}(Q_{s1}) \to L_p^{N(s)}(Q_{s1})$, *заданный соотношением*

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{1.11}$$

есть оператор умножения на матрицу R_s *порядка* $N(s) \times N(s)$ *с элементами*

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Доказательство совпадает с доказательством для операторов $R_{Qs} : L_2^{N(s)}(Q_{s1}) \to L_2^{N(s)}(Q_{s1})$ (см. [106, лемма 8.6]). Для удобства читателей приведем его полностью.

Доказательство. Пусть $V \in L_p^{N(s)}(Q_{s1})$. Обозначим $u = U_s^{-1} V \in L_p(\bigcup_l Q_{sl})$. В силу формулы (1.10) и определения оператора R_Q для всех $x \in Q_{s1}$

$$(R_{Qs} V)_i(x) = (U_s R_Q u)_i(x) = (R_Q u)(x + h_{si}) = \sum_h a_h u(x + h_{si} + h).$$

Здесь суммирование ведется по всем $h \in \mathcal{M}$ таким, что $h + h_{si} = h_{sj}$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant N(s)$. Тогда

$$(R_{Qs} V)_i(x) = \sum_{j=1}^{N(s)} r_{ij}^s (U_s u)_j(x) = \sum_{j=1}^{N(s)} r_{ij}^s V_j(x),$$

где $r_{ij}^s(x)$ определены по формуле (1.12). □

Из ограниченности области Q и формул (1.11)-(1.12) следует, что в случае постоянных коэффициентов a_h число различных матриц R_s конечно. Обозначим это число n_1, и пусть R_{s_ν} обозначают все различные матрицы R_s ($\nu = 1, \dots, n_1$).

Пример 1.1. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Рассмотрим оператор $R : L_p(\mathbb{R}^2) \to L_p(\mathbb{R}^2)$, определенный по формуле

$$Ru(x_1, x_2) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 + 1, x_2) + a_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из трех классов подобластей, в первом классе — две подобласти, а в остальных по одной (см. рис. 1.1), оператору R_Q соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = a_0, \qquad R_3 = a_0.$$

Пример 1.2. Рассмотрим оператор $R: L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{-k \leqslant i \leqslant k} a_i u(x_1 + i, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.13}$$

Пусть $Q = (0, d) \times G$, k — натуральное число, $d = k + \theta$, $0 < \theta \leqslant 1$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$), $a_i \in \mathbb{R}$ — постоянные.

а) Пусть $\theta = 1$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей

$$Q_{1l} = (l - 1, l) \times G \qquad (l = 1, \ldots, k + 1).$$

Кроме того, $h_{1l} = (l - 1, 0, \ldots, 0)$, $l = 1, \ldots, k + 1$, и

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_k \\ a_{-1} & a_0 & \ldots & a_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-k} & a_{-k+1} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

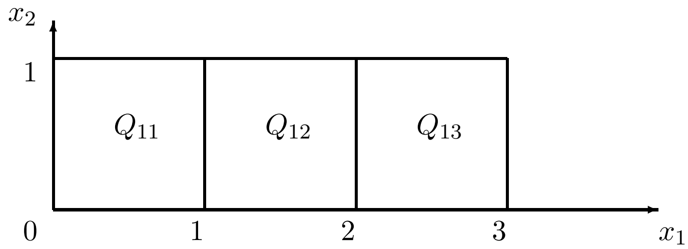

Рис. 1.2. Разбиение области $Q = (0, 3) \times (0, 1)$.

Fig. 1.2. Partition of the domain $Q = (0, 3) \times (0, 1)$.

б) Пусть $\theta < 1$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из двух классов подобластей

$$Q_{1l} = (l - 1, l - 1 + \theta) \times G\,(l = 1, \ldots, k + 1), \quad Q_{2l} = (l - 1 + \theta, l) \times G\,(l = 1, \ldots, k).$$

Кроме того, $h_{1l} = (l - 1, 0, \ldots, 0)\,(l = 1, \ldots, k + 1)$, $h_{2l} = (l - 1, 0, \ldots, 0)\,(l = 1, \ldots, k)$ и

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_k \\ a_{-1} & a_0 & \ldots & a_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-k} & a_{-k+1} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-1} \\ a_{-1} & a_0 & \ldots & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-k+1} & a_{-k+2} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Лемма 1.4. *Спектр оператора* $\sigma(R_Q) = \bigcup\limits_{\nu}^{n_1} \sigma(R_{s_\nu})$.

Доказательство совпадает с доказательством [106, лемма 8.7].

Лемма 1.5. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}_p^1(Q)$ в $W_p^1(Q)$,*

$$(R_Q u)_{x_i} = R_Q u_{x_i}. \tag{1.16}$$

Утверждение леммы следует из равенства (1.16) для функций $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ и плотности подпространства $\dot{C}^\infty(Q)$ в $\mathring{W}_p^1(Q)$.

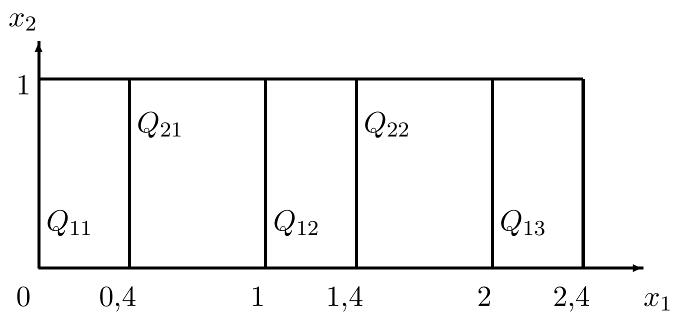

Рис. 1.3. Разбиение области $Q = (0,\ 2{,}4) \times (0, 1)$.
Fig. 1.3. Partition of the domain $Q = (0,\ 2{,}4) \times (0, 1)$.

Лемма 1.6. *$R_Q u \in W_p^1(Q_{sl})$ для всех $u \in W_p^1(Q)$, а также*

$$\|R_Q u\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W_p^1(Q_{sj})} \quad (s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s))\,. \tag{1.17}$$

Более того, если $\det R_{s_\nu} \neq 0$ $(\nu = 1, \dots, n_1)$, то существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$, причем

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s, \tag{1.18}$$

$R_Q^{-1} w \in W_p^1(Q_{sl})$ для всех $w \in W_p^1(Q)$ и

$$\|R_Q^{-1} w\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leqslant c_3 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{W_p^1(Q_{sj})} \quad (s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s))\,. \tag{1.19}$$

Здесь константы $c_2, c_3 > 0$ не зависят от s, u и w. При этом

$$\partial_i (R_Q^{-1} w)(x) = R_Q^{-1} \partial_i w(x) \qquad (x \in Q_{sl}; s = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, N(s))\,.$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость оценки (1.17):

$$\|R_Q u\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leqslant \sum_{h \in \mathcal{M}} |a_h| \|(I_Q u)(\cdot + h)\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leqslant \max_h |a_h| \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W_p^1(Q_{sj})}.$$

Перейдем ко второй части утверждения. Согласно условиям леммы $0 \notin \bigcup_\nu \sigma(R_{s_\nu})$. Следовательно, линейный оператор

$$\widehat{A}_0 = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s : L_p(Q) \to L_p(Q)$$

ограничен. В силу леммы 1.2

$$P_s R_Q = R_Q P_s.$$

Воспользуемся этой коммутативностью и разложением (1.9). Тогда

$$\widehat{A}_0 R_Q = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s R_Q P_s = I$$

в силу леммы 1.3, где I — единичный оператор в $L_p(Q)$.

Аналогично доказывается, что $R_Q \widehat{A}_0 = I$. Следовательно, оператор R_Q имеет ограниченный обратный, определяемый по формуле (1.18). Из равенства (1.18) получаем

$$U_s P_s R_Q^{-1} = R_s^{-1} U_s P_s. \tag{1.20}$$

Пусть $w \in W_p^1(Q)$. Тогда из (1.20) следует принадлежность $R_Q^{-1} w \in W_p^1(Q_{sl})$ $(s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s))$, неравенство (1.19) и коммутируемость с оператором ∂_i на Q_{sl}. $\square$

Ниже нам необходимы несколько свойств для оценки матричных форм.

Лемма 1.7. *Пусть матрица R_s размерности $N(s)\times N(s)$ такова, что $R_s+R_s^*>0$. Тогда существует константа $c_4>0$ такая, что*

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant N(s)} |(R_sv)_i|^{p-2}\,|v_i|^2 \geqslant c_4 \sum_{1\leqslant i\leqslant N(s)} |v_i|^p \qquad \forall v\in\mathbb{R}^{N(s)}. \tag{1.21}$$

Здесь $(R_sv)_i$ — i-я координата вектора R_sv.

Доказательство. Рассмотрим v как элемент банахова пространства $\{\mathbb{R}^{N(s)},\ \|\cdot\|_p\}$ с нормой

$$\|v\|_p=\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant N(s)} |v_i|^p\right)^{1/p}.$$

Предположим, что оценка (1.21) не верна. Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ существует вектор $v^k\not\equiv 0$ такой, что

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant N(s)} \left|(R_sv^k)_i\right|^{p-2}|v_i^k|^2<\frac{1}{k}\|v^k\|_p^p.$$

Обозначим $u^k:=\dfrac{v^k}{\|v^k\|_p}$. Поскольку $\|u^k\|_p=1\,\forall k\in\mathbb{N}$, то ограниченная в конечномерном пространстве последовательность $\{u^k\}$ имеет предел u^0 такой, что $\|u^0\|_p=1$ и

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant N(s)} \left|(R_su^0)_i\right|^{p-2}|u_i^0|^2=\lim_{k\to\infty}\sum_{1\leqslant i\leqslant N(s)} \left|(R_su^k)_i\right|^{p-2}|u_i^k|^2=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\|v^k\|_p^p}\sum_{1\leqslant i\leqslant N(s)} \left|(R_sv^k)_i\right|^{p-2}|v_i^k|^2\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0.$$

В левой части полученной формулы стоит сумма произведений неотрицательных величин. Равенство нулю возможно, если $(R_su^0)_iu_i^0=0$ для всех $i=1,\ldots,N(s)$. То есть, $(R_su^0,u^0)=0$. Однако это противоречит условию положительности симметрической части матрицы $R_s+R_s^*>0$. Полученное противоречие доказывает оценку (1.21). □

Лемма 1.8. *Пусть* $\det R_{s_\nu}\neq 0$ $(\nu=1,\ldots,n_1)$. *Тогда*

$$c_5^{-1}\|u\|_{L_p(Q)}\leqslant\|R_Qu\|_{L_p(Q)}\leqslant c_5\|u\|_{L_p(Q)} \tag{1.22}$$

для некоторой константы $c_5>0$, причем c_5 не зависит от u, но зависит от p.

Доказательство. Доказательство следует из равенства $\sigma(R_Q)=\bigcup\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n_1}\sigma(R_{s_\nu})$ в лемме 1.4 и дискретности спектра разностного оператора. □

Замечание 1.1. Подчеркнем основную идею рассмотрения нелинейных дифференциально-разностных уравнений методами теории операторов монотонного типа. Для этого рассмотрения необходимо понятие обобщенного решения, т. е. наличие корректной интегральной формы (1.8), существование которой гарантирует условие интегрируемости (1.6). Кроме того, структурирование условий требует, как и в линейном случае, см. [69,106] и др., разбиения области. Но в отличие от линейного случая разностный оператор оказывается под знаком нелинейного дифференциального оператора, т. е. нельзя, как в линейном случае, применить свойство аддитивности интеграла Лебега непосредственно. Для того, чтобы это сделать, необходимо использовать невырожденность разностного оператора, существование обратного к нему, а также вспомогательные функции. В случае квазилинейных уравнений активное использование этих объектов идет в доказательствах утверждений, а для существенно нелинейных уравнений матрицы, соответствующие обратному оператору R_Q^{-1}, участвуют в формулировке условий для дифференциально-разностного оператора.

1.3. Квазилинейные уравнения с сильно монотонным оператором. Существование и единственность обобщенного решения

Обозначим через X и Y абстрактные рефлексивные банаховы пространства, X^* — сопряженное к X пространство.

Определение 1.3. Оператор $A : X \to Y$ *деминепрерывен*, если из сходимости $u_m \to u$ в X следует слабая сходимость $Au_m \rightharpoonup Au$ в Y. Оператор $A : X \to Y$ *ограничен*, если образ ограниченного множества из X ограничен в Y.

Лемма 1.9. *Пусть коэффициенты оператора* $A : W_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, *заданного в* (1.3), *являются функциями типа Каратеодори* (*т. е. измеримы по* $x \in Q$ *и непрерывны по остальным переменным для п.в.* $x \in Q$), *а также удовлетворяют оценке* (1.6). *Тогда оператор* $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ *деминепрерывен и ограничен.*

Доказательство. В силу леммы 1.6 линейный оператор $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$ ограничен. Линейный ограниченный оператор непрерывен. Дифференциальный оператор $A : W_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ деминепрерывен и ограничен в силу условия (1.6), см., например, [29, гл. 1, §2]. Композиция $A_R = AR_Q$ является деминепрерывным, ограниченным оператором. $\square$

Определение 1.4. Оператор $\mathcal{A} : X \to X^*$ называется *монотонным*, если

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(y), u - y\rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, u, y \in X.$$

Монотонный оператор *строго монотонен*, если

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(y), u - y\rangle > 0 \qquad \forall\, u \neq y.$$

Определение 1.5. Оператор $\mathcal{A} : X \to X^*$ называется *сильно монотонным*[1], если для любых $u, y \in X$ существуют константы $c_e > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что[2]

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(y), u - y\rangle \geqslant c_e \|u - y\|_X^{1+\alpha}. \tag{1.23}$$

Напомним, что в случае линейности дифференциального $\mathcal{M}$-периодического оператора A положительная определенность симметрической части разностного оператора R_Q гарантирует сильную эллиптичность дифференциально-разностного оператора, см. [106]. Для квазилинейных дифференциальных операторов существует алгебраическое условие сильной эллиптичности, см. [20, гл. 2, §2]. В этом разделе будет сформулировано алгебраическое условие сильной эллиптичности для квазилинейного дифференциально-разностного оператора.

Введем матрицу $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$

$$\zeta := \begin{pmatrix} \zeta_{10} & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{20} & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \cdots & \zeta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N(s)0} & \zeta_{N(s)1} & \zeta_{N(s)2} & \cdots & \zeta_{N(s)n} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Будем обозначать через $\zeta_{\cdot i}$ i-й столбец ζ, через $\zeta_{l\cdot}$ — l-ю строку ζ.

Лемма 1.10. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, $\{R_s\}$ — *матрицы, соответствующие оператору* R_Q, $R_s = \{r_{ml}^s\}_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)}$, $R_s + R_s^* > 0$. *Мы предполагаем, что оператор* $A : W_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, *заданный формулой* (1.3), *имеет измеримые по* $x \in Q$ *и дифференцируемые по* $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ *коэффициенты* $A_i(x, \xi)$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *причем производные* $A_{ij}(x, \xi) = \dfrac{\partial A_i(x, \xi)}{\partial \xi_j}$ *таковы, что для любых* $s = 1, 2, \ldots,$ $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ *и почти всех* $x \in \overline{Q_{s1}}$ *справедливо алгебраическое условие сильной эллиптичности*

$$\sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} r_{ml}^s A_{ij}\left(x + h_{sm}, \zeta_{m\cdot}\right) \eta_{lj}\, \eta_{mi} \geqslant c_6 \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\zeta_{mi}\right|^{p-2} \left|\eta_{mi}\right|^2, \tag{1.25}$$

[1]Употребляется также термин *сильно эллиптический* оператор (нелинейный), однако в этой работе мы оставим этот термин для рассмотрения линейных операторов, см. раздел 5.3, так как определения имеют различия.

[2]Чаще всего в соболевских пространствах рассматривают $\alpha = p - 1$.

а для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и почти всех* $x \in \overline{Q}$ *выполнена оценка роста*

$$|A_{ij}(x,\xi)| \leqslant g_1(x) + c_7 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p-2} \qquad (i,j=0,\dots,n), \tag{1.26}$$

где $g_1 \in L_{p/(p-2)}(Q)$, $c_6, c_7 > 0$ *не зависят от* x, ζ *и* η.

Тогда оператор $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, *заданный формулой* (1.7), *сильно монотонен.*

Доказательство. Пусть $w = R_Q(u-y)$ и $v = R_Q y$, где $u, y \in \mathring{W}_p^1(Q)$. Согласно лемме 1.6 существует ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$. Из равенства (1.7) и леммы 1.5 следует, что

$$\begin{aligned}\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle &= \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \left(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)\right)(\partial_i u - \partial_i y)\, dx = \\ &= \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \left(A_i(x, v+w, \nabla v + \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)\right) R_Q^{-1} \partial_i w\, dx = I_1.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Тогда, используя формулу (1.18), имеем

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{i,s} \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s\big(A_i(x, v+w, \nabla(v+w)) - A_i(x,v,\nabla v)\big) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\, dx = \\ &= \sum_{i,s} \int\limits_{Q_{s1}} \Big(U_s P_s \left(A_i(x, v+w, \nabla(v+w)) - A_i(x,v,\nabla v)\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\Big)\, dx,\end{aligned}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. Используем дифференцируемость коэффициентов A_i и формулу Тейлора:

$$I_1 = \sum_s \sum_{i,j} \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s P_s \left(\int\limits_0^1 A_{ij}(x, v+\tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau\, \partial_j w \right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx. \tag{1.28}$$

Заметим, что в (1.28) интегралы по Q_{s1} существуют в силу условия (1.26). Распишем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned}&\left(U_s P_s \left(\int\limits_0^1 A_{ij}(x, v+\tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau\, \partial_j w \right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) = \\ &= \left(\operatorname{diag}\left\{ U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x, v+\tau w, \nabla v + \tau\nabla w) d\tau \right\} R_s R_s^{-1} \left(U_s P_s \partial_j w\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) = \\ &= \left(\operatorname{diag}\left\{ U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x, v+\tau w, \nabla v + \tau\nabla w) d\tau \right\} R_s \left(U_s P_s \partial_j (u-y)\right), U_s P_s \partial_i (u-y) \right) = \\ &= \sum_{l,m} r_{ml}^s \left(\int\limits_0^1 A_{ij}(x+h_{sm}, (v+\tau w), (\nabla v + \tau \nabla w)) d\tau \right) \partial_j(u-y)(x+h_{sl})\, \partial_i (u-y)(x+h_{sm}),\end{aligned}$$

где

$$\operatorname{diag}\left\{ U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x, v+\tau w, \nabla v + \tau\nabla w) d\tau \right\}$$

— диагональная матрица порядка $N(s)\times N(s)$ с диагональными элементами

$$\int\limits_0^1 A_{ij}(x+h_{sm},(v+\tau w)(x+h_{sm}),(\nabla v+\tau\nabla w)(x+h_{sm}))d\tau.$$

Используем алгебраическое условие сильной эллиптичности (1.25):

$$I_1=\sum_s\int\limits_{Q_{s1}}\sum_{\substack{1\leqslant l,\\ m\leqslant N(s)}}\sum_{\substack{0\leqslant i,\\ j\leqslant n}} r^s_{ml}\int\limits_0^1 A_{ij}(x+h_{sm},v+\tau w,\nabla v+\tau\nabla w)\,d\tau\partial_j(u-y)(x+h_{sl})\partial_i(u-y)(x+h_{sm})dx\geqslant$$

$$\geqslant c_6\sum_s\int\limits_{Q_{s1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_0^1 \left|(\partial_i v+\tau\partial_i w)\,(x+h_{sm})\right|^{p-2}d\tau\;\left|\partial_i(u-y)(x+h_{sm})\right|^2\,dx.$$

Согласно известной оценке[1] $\int\limits_0^1|a+\tau b|^{p-2}\,d\tau\geqslant c_8|b|^{p-2}$ имеем

$$\int\limits_0^1\left|(\partial_i v+\tau\partial_i w)\,(x+h_{sm})\right|^{p-2}d\tau\geqslant c_8\left|\partial_i w(x+h_{sm})\right|^{p-2}.$$

По построению $w=R_Q(u-y)$. В силу положительности симметрической части матрицы R_s справедлива оценка (1.21), т. е.

$$I_1\geqslant c_6c_8\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{s,m}\int\limits_{Q_{s1}}\left|\partial_i w(x+h_{sm})\right|^{p-2}\left|\partial_i(u-y)(x+h_{sm})\right|^2\,dx$$

$$=c_6c_8\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{s,m}\int\limits_{Q_{s1}}\left|\partial_i R_Q(u-y)(x+h_{sm})\right|^{p-2}\left|\partial_i(u-y)(x+h_{sm})\right|^2\,dx\geqslant$$

$$\geqslant c_6c_8c_4\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{s,m}\|\partial_i(u-y)(\cdot+h_{sm})\|^p_{L_p(Q_{s1})}=c_9\|u-y\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)}. \quad (1.29)$$

Сильная монотонность оператора A_R доказана. □

Теорема 1.1. *Пусть $R_s^*+R_s>0$ для всех s, а также выполнены условия интегрируемости* (1.6), *дифференцируемости* (1.26) *для $i,j=0,1,\dots,n$ и сильной эллиптичности* (1.25), *$p\in[2,\infty)$. Тогда для любого $f\in W_q^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2), *причем*

$$\|u_1-u_2\|_{\mathring{W}^1_p(Q)}\leqslant c_{10}\|f_1-f_2\|^{1/(p-1)}_{W_q^{-1}(Q)}, \quad (1.30)$$

где u_1 и u_2 — обобщенные решения задачи (1.1)-(1.2) *при правых частях f_1 и f_2 соответственно. Здесь $c_{10}>0$ не зависит от u_k и f_k.*

[1]Эта оценка была использована в [20]. Для удобства читателей докажем ее. Очевидно, что оценка справедлива при $p=2$. При $p>2$ предположим, что $a\geqslant 0$ (если это не так, можно умножить формулу под знаком модуля на -1). Тогда $\int\limits_0^1|a+\tau b|^{p-2}d\tau=\dfrac{(a+b)^{p-1}-a^{p-1}}{b(p-1)}:=\psi_1(a,b)$ при $a+b\geqslant 0$.Функция $\psi_1(\cdot,b)$ возрастает по первому аргументу на $[0,\infty)$, т.е. $\psi_1(a,b)\geqslant\psi_1(0,b)=\dfrac{|b|^{p-2}}{p-1}$. Если $a+b<0$, то $\int\limits_0^1|a+\tau b|^{p-2}d\tau=\dfrac{|a+b|^{p-1}+a^{p-1}}{|b|(p-1)}:=\psi_2(a,b)$. То есть $\psi_2(a,b)\geqslant\min\limits_a\psi_2(a,b)=\psi_2\left(\dfrac{|b|}{2},b\right)=\dfrac{|b|^{p-2}}{2^{p-2}(p-1)}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^1|a+\tau b|^{p-2}d\tau\geqslant\frac{|b|^{p-2}}{2^{p-2}(p-1)}.$$

Доказательство. Согласно лемме 1.9 оператор A_R деминепрерывен и ограничен. Деминепрерывный, сильно монотонный оператор $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ является гомеоморфизмом, см. [20, следствие 1.1.1]. Существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.2) доказаны.

Пусть $u_1 \in \mathring{W}_p^1(Q)$ и $u_2 \in \mathring{W}_p^1(Q)$ — обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) при правых частях f_1 и $f_2 \in W_q^{-1}(Q)$, соответственно. Тогда

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle.$$

Используем оценку сильной монотонности оператора (1.29):

$$c_9\|u_1 - u_2\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle \leqslant \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}\|u_1 - u_2\|_{\mathring{W}_p^1(Q)},$$

т. е.

$$\|u_1 - u_2\|^{p-1}_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant \frac{1}{c_9}\|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}.$$

Из этой оценки следует (1.30). □

1.4. Операторы с полуограниченной вариацией и (S_+)-операторы. Существование обобщенного решения

В этом разделе рассмотрим ситуацию, когда алгебраическому условию сильной эллиптичности удовлетворяет только «главная часть» оператора, содержащая производные только старшего порядка. Дифференциальные квазилинейные уравнения с подобными операторами были рассмотрены в 60-е годы XX-го века Ю. А. Дубинским, он же сформулировал для них алгебраическое условие сильной эллиптичности и рассмотрел, каким условиям должна удовлетворять остальная часть квазилинейного дифференциального оператора. Построенное в этом разделе условие сильной эллиптичности для квазилинейного дифференциально-разностного оператора при отсутствии сдвигов вырождается в условие, предложенное Ю. А. Дубинским, см. [20]. Позже алгебраическое условие сильной эллиптичности было использовано для изучения дифференциальных операторов, обладающих свойством (S_+), см. [57] и библиографию. Слабо непрерывные операторы[1] с полуограниченной вариацией и (S_+)-операторы являются псевдомонотонными, см. [57, гл. I, §1]. Сильно монотонный оператор является оператором с полуограниченной вариацией. Кроме того, сильно монотонный оператор обладает свойством (S_+), см., например, [15, 57].

Определение 1.6. Оператор $\mathcal{A} : X \to X^*$ называется *оператором с полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция C такая, что для всех $u, y \in X$ таких, что $\|u\|_X \leqslant r_1$, $\|y\|_X \leqslant r_1$,

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}y, u - y\rangle \geqslant -C(r_1; \|u - y\|'_X), \tag{1.31}$$

где $\tau^{-1}C(r_1, \tau r_2) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r_1, r_2 > 0$, $\|\cdot\|'_X$ — компактная полунорма относительно $\|\cdot\|_X$.

При $X = \mathring{W}_p^1(Q)$ в качестве $\|\cdot\|'_X$ удобно рассматривать $\|\cdot\|_{L_p(Q)}$. $\mathring{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$ компактно, см. [72, гл. I, §8, пп. 2].

Определение 1.7. Оператор $\mathcal{A} : X \to X^*$ называется *коэрцитивным*, если существует непрерывная функция $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle \geqslant c(\|u\|_X)\|u\|_X, \tag{1.32}$$

и $c(s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

[1] В [57, гл. I, §1] под общим термином «слабо непрерывные» понимают «деминепрерывные» для операторов, обладающих свойством (S_+), и «радиально непрерывные» для операторов с полуограниченной вариацией. Напомним, $\mathcal{A}$ *радиально непрерывен*, если для любых $u, y, v \in X$ непрерывна функция $\tau \mapsto \langle \mathcal{A}(u + \tau y), v\rangle$. Подробное доказательство свойств операторов с полуограниченной вариацией см. в [24].

Определение 1.8. Оператор $\mathcal{A} : X \to X^*$ называется *псевдомонотонным*, если для любой слабо сходящейся в X последовательности $u_m \rightharpoonup u$ в X при выполнении оценки

$$\varlimsup_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0 \tag{1.33}$$

справедливо неравенство

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - \xi\rangle \geqslant \langle \mathcal{A}u, u - \xi\rangle \qquad \forall \xi \in X. \tag{1.34}$$

Определение 1.9. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ слабо в X и справедлива оценка (1.33). Если при этом мы имеем сильную сходимость $u_m \to u$ в X, то $\mathcal{A} : X \to X^*$ *обладает свойством* (S_+).

Лемма 1.11. *Пусть $p \in [2, \infty)$ и $R_s + R_s^* > 0$. Пусть также оператор A, заданный формулой* (1.3)*, имеет измеримые по $x \in Q$ и непрерывные по $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ коэффициенты $A_i(x, \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющие оценке* (1.6)*. Более того, пусть существуют производные $A_{ij}(x, \xi)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие оценке* (1.26)*, а также алгебраическому условию сильной эллиптичности для всех s, $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$, $\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times n}$ и почти всех $x \in \overline{Q_{s1}}$:*

$$\sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} r^s_{ml} A_{ij}\left(x + h_{sm}, \zeta_{m\cdot}\right) \eta_{lj}\, \eta_{mi} \geqslant c_{11} \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{mi}|^{p-2} \left|\eta_{mi}\right|^2, \tag{1.35}$$

где $c_{11} > 0$ не зависит от x, ζ и η.

Тогда $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ обладает свойством (S_+).

Доказательство. Сначала покажем, что «главная часть» оператора A_R, содержащая слагаемые со старшими производными, сильно монотонна. Выделим три слагаемых:

$$\begin{aligned}\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \langle \mathcal{A}^1_R(u, u) - \mathcal{A}^1_R(u, y), u - y\rangle +\\ + \langle \mathcal{A}^1_R(u, y) - \mathcal{A}^1_R(y, y), u - y\rangle + \langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u - y\rangle,\end{aligned} \tag{1.36}$$

где

$$\langle \mathcal{A}^0_R u, y\rangle = \int\limits_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) y\, dx,$$

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u, y), v\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q y)\, \partial_i v\, dx.$$

Заметим, что в силу условий (1.35), (1.26) оператор $\mathcal{A}^1_R(u, \cdot) : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ удовлетворяет условиям леммы 1.10 (с нулевыми функциональными коэффициентами при $i = 0$). То есть, аналогично (1.29) получаем

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u, u) - \mathcal{A}^1_R(u, y), u - y\rangle \geqslant c_{11} c_8 c_4 \|u - y\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)} = c_{12} \|u - y\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)}. \tag{1.37}$$

Пусть $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathring{W}_p^1(Q)$ и $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \langle A_R u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0$. В силу компактности вложения $\mathring{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$, $u_m \to u$ в $L_p(Q)$. В силу непрерывности оператора R_Q, $R_Q u_m \rightharpoonup R_Q u$ в $W_p^1(Q)$ и $R_Q u_m \to R_Q u$ в $L_p(Q)$. Из сходимости $R_Q u_m \to R_Q u$ в $L_p(Q)$ и условия (1.6) следует, что

$$A_i(\cdot, R_Q u_m, \nabla R_Q u) \to A_i(\cdot, R_Q u, \nabla R_Q u)$$

в $L_q(Q)$, см. [29, гл. 1, §2, п. 4]. Так как $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathring{W}_p^1(Q)$, то $\lim\limits_{m\to\infty} \langle A_R u, u_m - u\rangle = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{m\to\infty} \langle A_R u_m, u_m - u\rangle = \varlimsup_{m\to\infty} \langle A_R u_m - A_R u, u_m - u\rangle =\\ &= \varlimsup_{m\to\infty} \Big\{ \langle \mathcal{A}^1_R(u_m, u_m) - \mathcal{A}^1_R(u_m, u), u_m - u\rangle + \langle \mathcal{A}^1_R(u_m, u) - \mathcal{A}^1_R(u, u), u_m - u\rangle + \langle \mathcal{A}^0_R u_m - \mathcal{A}^0_R u, u_m - u\rangle \Big\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое под знаком предела:

$$\lim_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}^1_R(u_m, u) - \mathcal{A}^1_R(u, u), u_m - u\rangle =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q (A_i(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u))\, \partial_i(u_m - u)\, dx = 0,$$

так как подынтегральными функциями являются произведения, первый сомножитель которых принадлежит последовательности функций, сходящихся к нулю в пространстве $L_q(Q)$, а второй — последовательности функций, слабо сходящихся к нулю в $L_p(Q)$. Для третьего слагаемого

$$\lim_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}^0_R u_m - \mathcal{A}^0_R u, u_m - u\rangle =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_Q (A_0(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u_m) - A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u))\,(u_m - u)\, dx = 0,$$

поскольку подынтегральной функцией является произведение, первый сомножитель которого принадлежит ограниченной в $L_q(Q)$ последовательности, а второй — последовательности функций, сходящихся к нулю в $L_p(Q)$. То есть,

$$0 \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \langle A_R u_m, u_m - u\rangle = \varlimsup_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}^1_R(u_m, u_m) - \mathcal{A}^1_R(u_m, u), u_m - u\rangle.$$

Воспользуемся оценкой (1.37):

$$0 \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \langle A_R u_m, u_m - u\rangle = \varlimsup_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}^1_R(u_m, u_m) - \mathcal{A}^1_R(u_m, u), u_m - u\rangle \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} c_{12}\|u_m - u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} \geqslant 0,$$

т. е.

$$\lim_{m\to\infty} c_{12}\|u_m - u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} = 0.$$

Доказана сходимость по норме последовательности $u_m \to u$ в $\mathring{W}^1_p(Q)$, т. е. оператор A_R обладает свойством (S_+). □

Лемма 1.12. *Пусть выполнены условия леммы* 1.11 *и*

$$|A_i(x, \xi_0, 0, \ldots, 0)| \leqslant g_2(x) + c_{13}|\xi_0|^{p'-1} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.38}$$

$$|A_0(x, \xi)| \leqslant g_2(x) + c_{13} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^{p'-1}, \tag{1.39}$$

где $2 - 1/p < p' < p$, $g_2 \in L_q(Q)$, $c_{13} > 0$. *Тогда оператор* $A_R : \mathring{W}^1_p(Q) \to W^{-1}_q(Q)$ *коэрцитивный.*

Доказательство. Распишем выражение

$$\langle A_R u, u\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\, \partial_i u\, dx =$$
$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q (A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, 0))\; \partial_i u\, dx +$$
$$+ \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, R_Q u, 0)\, \partial_i u\, dx + \int\limits_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\, u\, dx. \tag{1.40}$$

Для первого слагаемого в силу (1.35) получена оценка (1.37):

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q (A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, 0))\; \partial_i u\, dx \geqslant c_{12}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)}. \tag{1.41}$$

Оценим второе слагаемое, используя (1.38) и неравенство Гёльдера:

$$\left|\int\limits_Q A_i(x, R_Q u, 0)\partial_i u\, dx\right| \leqslant \int\limits_Q \left|g_2(x) + c_{15}|R_Q u|^{p'-1}\right|\, |\partial_i u|\, dx \leqslant \int\limits_Q |g_2(x)|\, |\partial_i u|\, dx +$$

$$+\,c_{13}\int\limits_Q |R_Qu|^{p'-1}\,|\partial_i u|\,dx \leqslant c_{13}\left(\int\limits_Q |R_Qu|^{(p'-1)q}\,dx\right)^{1/q}\left(\int\limits_Q |\partial_i u|^p\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+\,\|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} = c_{13}\|R_Qu\|^{p'-1}_{L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)}.$$

Заметим, что $1 < (p'-1)p/(p-1) = (p'-1)q < p$ при $(2-1/p) < p' < p$. Используем непрерывность вложения пространств Лебега $L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q) \subset L_p(Q)$, а также непрерывность оператора $R_Q : L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q) \to L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q)$:

$$\left|\int\limits_Q A_i(x,R_Qu,0)\partial_i u\,dx\right| \leqslant c_{14}\|R_Qu\|^{p'-1}_{L_p(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{15}\|u\|^{p'-1}_{L_p(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{15}\varepsilon^p}{p}\|\partial_i u\|^p_{L_p(Q)} + \frac{c_{15}}{\varepsilon^q q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)} + c_{16}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)}.$$

Таким образом,

$$\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_Q A_i(x,R_Qu,0)\,\partial_i u\,dx\right| \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{c_{15}\varepsilon^p}{p}\|\partial_i u\|^p_{L_p(Q)} + c_{16}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \frac{c_{15}n}{\varepsilon^q q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)} =$$

$$= \frac{c_{15}\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} + c_{16}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} + c_{17}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{15}\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} + c_{16}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} + c_{17}c_{18}^{(p'-1)q}\|u\|^{(p'-1)q}_{\mathring{W}^1_p(Q)}, \quad (1.42)$$

где $c_{17} = nc_{15}/(\varepsilon^q q)$, и в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_{L_p(Q)} \leqslant c_{18}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)}. \quad (1.43)$$

Аналогично для последнего слагаемого (1.40), используем непрерывность вложения $L_{p'}(Q) \subset L_p(Q)$ для $1 < p' < p$, а также непрерывность оператора $R_Q : L_{p'}(Q) \to L_{p'}(Q)$:

$$\left|\int\limits_Q A_0(x,R_Qu,\nabla R_Qu)u\,dx\right| \leqslant \int\limits_Q |A_0(x,R_Qu,\nabla R_Qu)|\,|u|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_Q \left|g_2(x) + c_{13}|R_Qu|^{p'-1} + c_{13}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\partial_i R_Qu|^{p'-1}\right|\,|u|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_Q |g_2|\,|u|\,dx + c_{13}\int\limits_Q |R_Qu|^{p'-1}\,|u|\,dx + c_{13}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_Q |\partial_i R_Qu|^{p'-1}\,|u|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + c_{13}\|u\|_{L_{p'}(Q)}\|R_Qu\|^{p'-1}_{L_{p'}(Q)} + c_{13}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i R_Qu\|^{p'-1}_{L_{p'}(Q)}\|u\|_{L_{p'}(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + c_{19}\|u\|^{p'}_{L_p(Q)} + c_{20}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i u\|^{p'-1}_{L_p(Q)}\|u\|_{L_p(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + c_{19}\|u\|^{p'}_{L_p(Q)} + \frac{c_{20}(p'-1)}{p'}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i u\|^{p'}_{L_p(Q)} + \frac{c_{20}}{p'}\|u\|^{p'}_{L_p(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16}c_{18}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} + c_{21}\|u\|^{p'}_{\mathring{W}^1_p(Q)}, \quad (1.44)$$

где $\|u\|_{L_{p'}(Q)} \leqslant c_{22}\|u\|_{L_p(Q)}$ в силу непрерывности вложения пространств Лебега при $p' < p$ и $c_{21} = c_{18}^{p'}c_{22}^{p'}(c_{19} + c_{20}/p') + c_{20}(p'-1)/p'$, использовано также неравенство Фридрихса (1.43). Выберем ε таким образом, что $c_{15}\varepsilon^p/p = c_{12}/2$, и подставим оценки (1.41), (1.42) и (1.44) в (1.40):

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_{12}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - \frac{c_{15}\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{16}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{17}c_{18}^{(p'-1)q}\|u\|^{(p'-1)q}_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{16}c_{18}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} -$$

$$- c_{21}\|u\|^{p'}_{\mathring{W}^1_p(Q)} \geqslant \frac{c_{12}}{2}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{16}(1+c_{18})\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{23}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)} - c_{21}\|u\|^{p'}_{\mathring{W}^1_p(Q)}. \quad (1.45)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (1.45) положительно и имеет степенной рост порядка p, а остальные (отрицательные) слагаемые имеют степенной рост порядков меньше p. Оператор A_R коэрцитивен. □

Теорема 1.2. *Пусть $R_s^* + R_s > 0$ для всех s, а также выполнены условия интегрируемости* (1.6)*, дифференцируемости* (1.26) *для $i, j = 1, \ldots, n$, сильной эллиптичности* (1.35) *и коэрцитивности* (1.38)-(1.39)*, $p \in [2, \infty)$. Тогда для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$ существует обобщенное решение задачи* (1.1)*,* (1.2) *$u \in \mathring{W}^1_p(Q)$, множество решений задачи* (1.1)*,* (1.2) *слабо компактно.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный (см. лемму 1.9) и коэрцитивный (см. лемму 1.12) оператор, обладающий свойством (S_+) (см. лемму 1.11), т. е. псевдомонотонный. Согласно [33, теорема 2.7, гл. 2] существует обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) $u \in \mathring{W}^1_p(Q)$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора A_R, поскольку для всех решений выполняется неравенство:

$$\|u\|^{-1}_{\mathring{W}^1_p(Q)}\langle A_R u, u\rangle \leqslant \|f\|_{W_q^{-1}(Q)}.$$

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении обладает свойством (S_+). Докажем это. Пусть последовательность $\{u_n\}$ принадлежит множеству решений. Пусть u — предельная точка множества $\{u_n\}$ в слабой топологии $\mathring{W}^1_p(Q)$. С точностью до подпоследовательностей, $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathring{W}^1_p(Q)$. В то же время,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\langle A_R u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f, u_n - u\rangle = 0.$$

Согласно свойству (S_+), $u_n \to u$ в $\mathring{W}^1_p(Q)$. Из деминепрерывности оператора следует, что $A_R u_n \rightharpoonup A_R u$ в $W_q^{-1}(Q)$, u удовлетворяет интегральному тождеству (1.8). □

Лемма 1.13. *Пусть $p \geqslant 2$, $R_s^* + R_s > 0$, а также существуют непрерывные производные $A_{ij}(x, \xi)$, удовлетворяющие алгебраическому условию сильной эллиптичности* (1.35) *и оценке* (1.26) *для всех $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $A_R : \mathring{W}^1_p(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ — оператор с полуограниченной вариацией.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 1.12, разобьем оператор на три слагаемых, см. (1.36), и получим для первого слагаемого правой части (1.36) оценку (1.37).

Оценим второе слагаемое правой части (1.36). Воспользуемся дифференцируемостью коэффициентов, формулой Тейлора и теоремой о среднем:

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u, y) - \mathcal{A}^1_R(y, y), u - y\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int_Q \big(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q y) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)\partial_i(u - y)\, dx =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int_Q \int_0^1 A_{i0}(x, R_Q u + \tau R_Q(y-u), \nabla R_Q y)d\tau\, R_Q(u-y)\,\partial_i(u-y)\Big)\, dx =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int_Q A_{i0}(x, R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u), \nabla R_Q y)\, R_Q(u-y)\,\partial_i(u-y)\Big)\, dx \quad (1.46)$$

для некоторого $\widehat{\tau} \in [0,1]$. Заметим, что интегралы по Q существуют в силу условия (1.26). Оценим подынтегральное выражение, используя (1.26):

$$A_{i0}(x, R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u), \nabla R_Q y) \leqslant g_1(x) + c_7 \, |R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |\partial_j R_Q y|^{p-2}.$$

Подставим полученное выражение в (1.46) и применим неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u-y\rangle \leqslant \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \left(g_1(x) + c_7 \, |R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |\partial_j R_Q y|^{p-2} \right) R_Q(u-y)\, \partial_i(u-y)\, dx \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|R_Q(u-y)\|_{L_p(Q)} \|\partial_i(u-y)\|_{L_p(Q)} \times \\
&\qquad\qquad \times \left(\|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(Q)} + c_7 \left(\|R_Q u\|^{p-2}_{L_p(Q)} + \|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(Q)} + \|R_Q y\|^{p-2}_{\mathring{W}^1_p(Q)} \right) \right).
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $|R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u)|^{p-2} \leqslant |R_Q u|^{p-2} + |R_Q y|^{p-2}$ при $p \geqslant 2$. Используем также неравенства Фридрихса (1.43) и ограниченность оператора R_Q (1.22):

$$\|R_Q u\|_{L_p(Q)} \leqslant c_{18} c_5 \|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} \leqslant c_{18} c_5 r_1, \quad \|R_Q y\|_{L_p(Q)} \leqslant c_{18} c_5 r_1.$$

Тогда

$$\|R_Q u\|^{p-2}_{L_p(Q)} + \|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(Q)} + \|R_Q y\|^{p-2}_{\mathring{W}^1_p(Q)} \leqslant c_5^{p-2}(2c_{18}^{p-2}+1) r_1^{p-2}.$$

Для вспомогательной функции

$$\widehat{c}_1(r_1) := \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(Q)} + 2c_7 c_5^{p-2}(c_{18}^{p-2}+1) r_1^{p-2}$$

имеем, что

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u-y\rangle \leqslant \widehat{c}_1(r_1) \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|R_Q(u-y)\|_{L_p(Q)} \|\partial_i(u-y)\|_{L_p(Q)} \leqslant \\
\leqslant c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u-y\|_{L_p(Q)} \|u-y\|_{\mathring{W}^1_p(Q)}. \quad (1.47)
\end{aligned}$$

Аналогично оценим третье слагаемое правой части (1.36):

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u-y\rangle = \int\limits_Q A_{00}(x, R_Q u + \widehat{\tau}_0 R_Q(y-u), \nabla R_Q u)\, R_Q(u-y)\,(u-y)\, dx + \\
+ \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \int\limits_Q A_{0j}(x, R_Q u, \nabla R_Q u + \widehat{\tau}_j \partial_i R_Q(y-u))\, \partial_j R_Q(u-y))\,(u-y)\, dx.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$|A_{0j}(x, R_Q y, \nabla(R_Q u + \widehat{\tau}_j R_Q(y-u)))| \leqslant g_1(x) + c_7 \, |\partial_j R_Q u|^{p-2} + c_7 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\partial_k R_Q y|^{p-2},$$

то

$$\begin{aligned}
&\|A_{0j}(x, R_Q y, \nabla(R_Q u + \widehat{\tau}_j R_Q(y-u))\|_{L_{p/p-2}(Q)} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(Q)} + c_7 \|R_Q u\|^{p-2}_{W^1_p(Q)} + c_7 \|R_Q y\|^{p-2}_{W^1_p(Q)} \leqslant \widehat{c}_1(r_1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\big|\langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u-y\rangle\big| \leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \widehat{c}_1(r_1) \|\partial_i R_Q(u-y)\|_{L_p(Q)} \|(u-y)\|_{L_p(Q)} \leqslant \\
\leqslant c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u-y\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} \|u-y\|_{L_p(Q)} + c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u-y\|^2_{L_p(Q)}. \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Подставляя оценки (1.37), (1.47) и (1.48) в (1.36), получаем

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \geqslant c_{12}\|u-y\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|_{L_p(Q)}\|u-y\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} -$$
$$- c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|_{\mathring{W}^1_p(Q)}\|u-y\|_{L_p(Q)} - c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(Q)} \geqslant c_{12}\|u-y\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} -$$
$$- 2c_5\widehat{c}_1(r_1)\frac{\varepsilon^p}{p}\|u-y\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - 2c_5\widehat{c}_1(r_1)\frac{1}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(Q)} - c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(Q)}.$$

Пусть $\varepsilon^p = \dfrac{c_{12}p}{4c_5\widehat{c}_1(r_1)}$. Тогда

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \geqslant \frac{c_{12}}{2}\|u-y\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - 2c_5\widehat{c}_1(r_1)\frac{1}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(Q)} - c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(Q)}. \quad (1.49)$$

То есть

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \geqslant -2c_5\widehat{c}_1(r_1)\frac{1}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(Q)} - c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(Q)} =$$
$$= -\frac{2}{q}\left(\frac{4}{c_{12}p}\right)^{1/(p-1)}(c_5\widehat{c}_1(r_1))^q\,\|u-y\|^q_{L_p(Q)} - c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(Q)} =: -C(r_1;\|u-y\|_{L_p(Q)}).$$

Полученная функция удовлетворяет требованиям определения оператора с полуограниченной вариацией. □

Теорема 1.3. *Пусть $R_s^* + R_s > 0$ для всех s, а также оператор A, заданный формулой* (1.3)*, имеет измеримые по $x \in Q$ и непрерывные по $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ коэффициенты $A_i(x,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющие оценке интегрируемости* (1.6)*, дифференцируемости* (1.26) *для $i, j = 0, \dots, n$, условию сильной эллиптичности* (1.35) *и условию коэрцитивности* (1.38)-(1.39)*, $p \in [2,\infty)$.*

Тогда для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$ существует обобщенное решение задачи (1.1)*,* (1.2) *$u \in \mathring{W}^1_p(Q)$, множество решений задачи* (1.1)*,* (1.2) *ограничено и слабо замкнуто.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный (см. лемму 1.9), коэрцитивный оператор с полуограниченной вариацией (см. лемму 1.13). Следовательно, обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует, см. [20, теорема 3.1, гл. 2, §3].

С другой стороны, из условий теоремы 1.3 следует выполнение условий теоремы 1.2, что также доказывает данное утверждение. □

Замечание 1.2. При рассмотрении дифференциальных уравнений с оператором с полуограниченной вариацией в работе [20] вместо условий (1.38)-(1.39) рассматривались оценки

$$|A_{i0}(x,\xi)| \leqslant g_1(x) + c_{19}\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^{p'-2} \qquad (i = 1, \dots, n), \quad (1.50)$$

$$|A_{0j}(x,\xi)| \leqslant g_1(x) + c_{19}\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^{p'-2} \qquad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (1.51)$$

где $g_1 \in L_{p/(p-2)}(Q)$, $c_{19} > 0$, $p' < p$. Очевидно, что при выполнении этих оценок справедливы оценки (1.38)-(1.39), оператор A_R коэрцитивен.

1.5. Условие сильной эллиптичности для симметрического разностного оператора

Для дифференциальных операторов рассматривались также условия сильной эллиптичности при другой правой части, чем в (1.25), см., например, [57]. Аналогичные условия можно построить для дифференциально-разностных операторов. При этом могут измениться условия, гарантирующие коэрцитивность оператора A_R.

В самом общем случае в условии сильной эллиптичности для дифференциально-разностного оператора обязательно присутствуют коэффициенты матрицы R_s или R_s^{-1}, см. далее. Поскольку каждую матрицу можно неединственным способом разложить на сумму произведений матриц, то и левая часть в условии сильной эллиптичности может быть модифицирована в соответствии с дополнительными данными о разностном операторе. Тогда в формулах будут коэффициенты матриц, использованных в разложении. В качестве иллюстрации этого построим условие сильной эллиптичности для симметрического разностного оператора.

Для упрощения изложения рассмотрим дифференциальный оператор, содержащий только старшие производные:

$$Au(x) = -\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \partial_i A_i\left(x, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u\right). \tag{1.52}$$

Введем вспомогательные матрицы, существующие в силу симметричности и положительности матриц R_s:

$$T_s = \sqrt{R_s} \equiv \{t^s_{ml}\}^{N(s)}_{m,l=1}, \qquad \widehat{T}_s = \sqrt{R_s^{-1}} \equiv \{\widehat{t}^s_{ml}\}^{N(s)}_{m,l=1}.$$

Лемма 1.14. *Пусть $p\in[2,\infty)$, $R_s>0$ — симметрические матрицы, соответствующие разностному оператору R_Q. Пусть дифференциальный оператор A, см.* (1.52)*, задан дифференцируемыми коэффициентами $A_i(x,\xi)$, измеримыми для п.в. $x\in\overline{Q}$, непрерывными по всем $\xi\in\mathbb{R}^n$, для производных справедлива оценка роста* (1.26) *и для любых $\zeta,\eta\in\mathbb{R}^{N(s)\times n}$ выполнено алгебраическое условие сильной эллиптичности*

$$\sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \widehat{t}^s_{lm} A_{ij}\left(x+h_{sm}, \zeta_{m\cdot}\right) t^s_{ml}\, \eta_{lj}\, \eta_{mi} \geqslant c_{20} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \widehat{t}^s_{lm}\zeta_{mi} \right|^{p-2} |\eta_{li}|^2, \tag{1.53}$$

где $c_{20}>0$ не зависит от x,ζ и η. Тогда оператор $A_R : \mathring{W}^1_p(Q)\to W^{-1}_q(Q)$ сильно монотонен.

Доказательство. Сначала отметим, что в силу оценки (1.26) справедлива оценка (1.6), т. е. A_R — деминепрерывный, см. лемму 1.9.

Пусть $w=R_Q(u-y)$ и $v=R_Q y$, где $u,y\in\mathring{W}^1_p(Q)$. Согласно лемме 1.6 существует ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1}: L_p(Q)\to L_p(Q)$. Из равенства (1.7) и леммы 1.5 следует, что

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \left(A_i(x,\nabla R_Q u) - A_i(x,\nabla R_Q y)\right)\left(\partial_i u - \partial_i y\right) dx =$$
$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \left(A_i(x,\nabla v+\nabla w) - A_i(x,\nabla v)\right) R_Q^{-1}\partial_i w\, dx = I_1. \tag{1.54}$$

Используя формулу (1.18), распишем

$$I_1 = \sum_{i,s} \int\limits_{\bigcup\limits_l Q_{sl}} P_s\big(A_i(x,\nabla(v+w)) - A_i(x,\nabla v)\big) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\, dx =$$
$$= \sum_{i,s} \int\limits_{Q_{s1}} \Big(U_s P_s\left(A_i(x,\nabla(v+w)) - A_i(x,\nabla v)\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\Big) dx,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. В силу дифференцируемости коэффициентов A_i и справедливости формулы Тейлора

$$I_1 = \sum_{s,i,j} \int\limits_{Q_{s1}} \Big(U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x,\nabla v+\tau\nabla w) d\tau\, \partial_j w,\ R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\Big) dx.$$

Заметим, что интегралы по Q_{s1} существуют в силу (1.26). Распишем подынтегральное выражение, учитывая симметричность и положительную определенность матриц R_s и R_s^{-1}:

$$\left(U_sP_s\int\limits_0^1 A_{ij}(x,\nabla v+\tau\nabla w)d\tau\,\partial_j w, R_s^{-1}U_sP_s\partial_i w\right)=$$

$$=\left(\sqrt{R_s^{-1}}U_sP_s\int\limits_0^1 A_{ij}(x,\nabla v+\tau\nabla w)d\tau\,\partial_j w, \sqrt{R_s^{-1}}U_sP_s\partial_i w\right).$$

По правилу умножения матриц левая часть подынтегрального скалярного произведения может быть представлена в виде

$$\widehat{T}_sU_sP_s\int\limits_0^1 A_{ij}(x,\nabla v+\tau\nabla w)d\tau\,\partial_j w=\widehat{T}_s\mathrm{diag}\left\{U_sP_s\int\limits_0^1 A_{ij}(x,\nabla v+\tau\nabla w)d\tau\right\}T_s\left(\widehat{T}_sU_sP_s\partial_j w\right),$$

где

$$\mathrm{diag}\left\{U_sP_s\int\limits_0^1 A_{ij}(x,\nabla v+\tau\nabla w)d\tau\right\}$$

— диагональная матрица порядка $N(s)\times N(s)$ с диагональными элементами

$$\int\limits_0^1 A_{ij}(x+h_{sl},(\nabla v+\tau\nabla w)(x+h_{sl}))d\tau.$$

Обозначим

$$\widehat{\omega}^s_{lj}(x)=\sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)}\widehat{t}^s_{lm}\partial_j w(x+h_{sm})\qquad (x\in Q_{s1};\ l=1,\dots,N(s);\ j=1,\dots,n). \tag{1.55}$$

Используем алгебраическое условие сильной эллиптичности (1.53):

$$I_2=\sum_{1\leqslant l,m\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\widehat{t}^s_{lm}\int\limits_0^1 A_{ij}(x+h_{sm},(\nabla v+\tau\nabla w)(x+h_{sm}))\,d\tau\,t^s_{ml}\,\widehat{\omega}^s_{mj}\,\widehat{\omega}^s_{li}\geqslant$$

$$\geqslant c_{20}\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_0^1\left|\sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)}\widehat{t}^s_{lm}\left(\partial_i v+\tau\partial_i w\right)(x+h_{sm})\right|^{p-2}d\tau\ |\widehat{\omega}^s_{li}|^2.$$

Поскольку $\int\limits_0^1|a+\tau b|^{p-2}\,d\tau\geqslant c_8|b|^{p-2}$, то

$$\int\limits_0^1\left|\sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)}\widehat{t}^s_{lm}\left(\partial_i v+\tau\partial_i w\right)(x+h_{sm})\right|^{p-2}d\tau\geqslant c_8\left|\sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)}\widehat{t}^s_{lm}\partial_i w(x+h_{sm})\right|^{p-2}=c_8\,|\widehat{\omega}^s_{li}|^{p-2}.$$

Следовательно,

$$I_1\geqslant c_8c_{20}\sum_{s,l,i}\int\limits_{Q_{s1}}|\widehat{\omega}^s_{li}|^{p-2}\,|\widehat{\omega}^s_{li}|^2\,dx=c_8c_{20}\sum_{s,l,i}\|\widehat{\omega}^s_{li}\|^p_{L_p(Q_{s1})}.$$

Дискретный спектр матриц $\widehat{T}_s$ и R_Q не содержит 0, т. е.

$$c_8c_{20}\sum_{s,l,i}\|\widehat{\omega}^s_{li}\|^p_{L_p(Q_{s1})}\geqslant c_{21}\sum_{s,l,i}\int\limits_{Q_{s1}}|\partial_i w\,(x+h_{sl})|^p\,dx=$$

$$=c_{25}\|w\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)}=c_{21}\|R_Q(u-y)\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)}\geqslant c_{21}c_5^{-p}\|u-y\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)}, \tag{1.56}$$

см. (1.22). Сильная монотонность оператора A_R доказана. □

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия леммы* 1.14. *Тогда для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *с дифференциальным оператором* A, *заданным в* (1.52), *причем*

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant c_{10}\|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}, \tag{1.57}$$

где u_1 *и* u_2 *— обобщенные решения задачи* (1.1)-(1.2) *при правых частях* f_1 *и* f_2 *соответственно. Здесь* $c_{10} > 0$ *не зависит от* u_k *и* f_k, $k = 1, 2$.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 1.1.

Очевидно, что при наличии младших производных в дифференциальном операторе мы получим результаты, аналогичные полученным в разделе 1.4.

Глава 2

СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе задача (1.1)-(1.2), см. раздел 1.1, исследуется при условии, что дифференциальный оператор может являться существенно нелинейным. Будут использованы свойства разбиения области и разностного оператора, см. раздел 1.2. Константы $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$ определены в разделах 1.1-1.2. Нумерация остальных констант соответствует этой главе, если нет ссылки на формулы из главы 1.

2.1. Алгебраическое условие эллиптичности и существование решения

Пусть функции $A_i, i = 0, 1, \ldots, n$, и матрицы R_s удовлетворяют следующим условиям:

(A0) Условие невырожденности: $\det R_{s_\nu} \neq 0$ $(\nu = 1, \ldots, n_1)$.

(A1) Условие интегрируемости: *A_i — функции типа Каратеодори, т.е. $A_i(x, \xi)$ измеримы по x для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывны по $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $x \in \overline{Q}$; более того, для п.в. $x \in \overline{Q}$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$*

$$|A_i(x, \xi)| \leqslant g(x) + c_1 \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^{p-1}, \qquad i = 0, \ldots, n, \tag{1.6}$$

где $c_1 > 0$, $g \in L_q(\Omega_T)$.

(A2) Условие коэрцитивности: *для всех s, п.в. $x \in \overline{Q_{s1}}$ и любых $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$, существуют $p' \in (1, p)$, $c_6 > 0$ и $c_7, c_8 \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) \left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l \geqslant c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}|^p - c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}|^{p'} - c_8. \tag{2.1}$$

(A3) Условие эллиптичности: *для всех s, п.в. $x \in \overline{Q_{s1}}$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = \zeta_{l0}$ и $\eta \neq \zeta$, справедлива оценка*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, \eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_l > 0. \tag{2.2}$$

Заметим также, что в случае отсутствия сдвигов (т. е. при $R_Q = \mathbb{I}$) условие **(A2)** трансформируется в условие коэрцитивности для дифференциальных операторов (см. [20, 93], например), а условие **(A3)** является стандартным при исследовании псевдомонотонных дифференциальных операторов (см. [33, 57] и др.), а также дифференциальных операторов, обладающих свойством (S_+) (см. [57] и др.).

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* **(A0)**–**(A2)**. *Тогда оператор* $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, *заданный формулой* (1.7), *коэрцитивен.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$, $w = R_Q u$. Вследствие условия **(A0)** разностный оператор R_Q невырожден, т. е. существует ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$, см. лемму 1.6. Следовательно,

$$\langle A_R u, u\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u)\partial_i u\, dx =$$

$$= \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, w, \partial_1 w, \dots, \partial_n w)\partial_i R_Q^{-1} w\, dx =$$

$$= \sum_s \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\bigcup\limits_l Q_{sl}} A_i(x, P_s w, P_s \nabla w)(U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w)\, dx =$$

$$= \sum_s \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{Q_{s1}} \big(U_s A_i(x, P_s w, P_s\nabla w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\big)\, dx =$$

$$= \sum_{s,l} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{Q_{s1}} A_i\left(x + h_{sl}, (U_s P_s w)_l, \nabla (U_s P_s w)_l\right) (R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w)_l\, dx. \quad (2.3)$$

Подставив оценку (2.1) в формулу (2.3), в силу утверждений леммы 1.6 получим, что

$$\langle A_R u, u\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u)\partial_i u\, dx \geqslant$$

$$\geqslant c_6 \sum_i \int\limits_Q |\partial_i w|^p\, dx - c_7 \int\limits_Q |w|^{p'}\, dx - c_8 \mathrm{mes}(Q).$$

Воспользуемся равенством (1.16), оценкой (1.22) для оператора $R_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ и оценкой (1.17) для оператора $R_Q : L_{p'}(Q) \to L_{p'}(Q)$. Тогда

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_6 c_5^{-p} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q |\partial_i u|^p\, dx - c_7 c_2^{p'} \int\limits_Q |u|^{p'}\, dx - c_8 \mathrm{mes}(Q) \geqslant$$

$$\geqslant c_9 \|u\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)} - c_{10} \|u\|^{p'}_{L_p(Q)} - c_{11}. \quad (2.4)$$

Из неравенства Фридрихса $\|u\|_{L_p(Q)} \leqslant c_{12} \|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}$ и оценки (2.4) получаем

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_9 \|u\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)} - c_{10} c_{12} \|u\|^{p'}_{\mathring{W}_p^1(Q)} - c_{11}, \quad (2.5)$$

где $c_9 > 0$, константы $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$ не зависят от u. И поскольку $1 < p' < p$, а $p > 1$, то для достаточно больших $\|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}$ полученное в правой части (2.5) выражение монотонно возрастает к $+\infty$ при $\|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} \to \infty$, степень роста $p > 1$. Коэрцитивность доказана. $\square$

Построим вспомогательные функции $H_s : Q_{s1} \times \mathbb{R}^{2N(s)\times(n+1)} \to \mathbb{R}^1$:

$$H_s(x, \zeta, \eta) = \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot} + \eta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right)\right) (R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l, \quad (2.6)$$

определенные для всех $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = 0$, $l = 1, \dots, N(s)$. Введем также обозначение

$$|\zeta_{\cdot 0}| := \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}|, \qquad |\zeta| := \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant N(s),\\ 0\leqslant i\leqslant n}} |\zeta_{li}|.$$

Лемма 2.2. *Для любых $\varkappa, C, C_1 > 0$ существует положительная функция $c_s(x)$ такая, что для всех $\zeta \in U(C, C_1)$, где*

$$U(C, C_1) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)} : |\zeta_{\cdot 0}| \leqslant C,\ |\zeta| \leqslant C_1 \right\}$$

и $\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = 0$, $l = 1, \ldots, N(s)$, справедлива оценка

$$H_s(x, \zeta, \eta) \geqslant c_s(x)|\eta| \qquad \forall |\eta| \geqslant \varkappa > 0. \tag{2.7}$$

Здесь $c_s(x) > 0$ определена для почти всех $x \in \overline{Q_{s1}}$, зависит от $\varkappa, C, C_1$ и не зависит от ζ и η.

Доказательство. Пусть $U_\varkappa := \{\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)} : |\eta| = \varkappa,\ \eta_{l0} = 0\}$. При фиксированных $x \in \overline{Q_{s1}}$, $\zeta \in U(C, C_1)$ и $\eta \in U_\varkappa$ определим функцию одной переменной $h_s(\chi) := H_s(x, \zeta, \chi\eta)$, $\chi \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\begin{aligned} h_s(\chi) = \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, (\zeta + \chi\eta)_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right)\right)\chi(R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l = \\ = \sum_{l,i} \Bigg(A_i(x + h_{sl}, (\zeta + \chi\eta)_{l\cdot}) - A_i\big(x + h_{sl}, (\zeta + \eta)_{l\cdot}\big) \Bigg) \chi(R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l + \\ + \chi \sum_{l,i} \Bigg(A_i\left(x + h_{sl}, (\zeta + \eta)_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right) \Bigg) (R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l =: \sigma_s(\chi) + \chi h_s(1). \end{aligned}$$

Согласно условию эллиптичности (2.2), $h_s(1) > 0$. Кроме того, $(\zeta + \chi\eta) - (\zeta + \eta) = (\chi - 1)\eta$, т. е. в силу того же условия для любого $\chi > 1$

$$\sigma_s(\chi) = \frac{\chi}{\chi - 1} \sum_{l,i} \Bigg(A_i\left(x + h_{sl}, t, (\zeta + \chi\eta)_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right) \Bigg) \left(R_s^{-1}\left((\chi - 1)\eta_{\cdot i}\right)\right)_l > 0.$$

Заметим, что $\sigma_s(1) = 0$ по построению. Таким образом,

$$h_s(\chi) = \sigma_s(\chi) + \chi h_s(1) \geqslant \chi h_s(1) \qquad \text{для любого } \chi \geqslant 1.$$

Перепишем этот результат в следующем виде:

$$H_s(x, \zeta, \widehat{\eta}) = H_s(x, \zeta, \chi\eta) = h_s(\chi) \geqslant \chi h_s(1) = \chi H_s(x, \zeta, \eta),$$

поскольку для произвольного $\widehat{\eta} \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ ($|\widehat{\eta}| \geqslant \varkappa$ и $\widehat{\eta}_{l0} = 0$) существуют $\eta \in U_\varkappa$ и $\chi \geqslant 1$ такие, что $\widehat{\eta} = \chi\eta$ и $\chi = \varkappa^{-1}|\widehat{\eta}|$. Следовательно,

$$H_s(x, \zeta, \widehat{\eta}) \geqslant \varkappa^{-1}|\widehat{\eta}| H_s(x, \zeta, \eta).$$

Определим функцию

$$c_s(x) = \varkappa^{-1} \min_{\substack{\zeta\in U(C,C_1),\\ \eta\in U_\varkappa}} H_s(x, \zeta, \eta).$$

Поскольку множества $U(C, C_1)$ и $U_\varkappa$ ограничены и замкнуты, то минимум существует. Более того, этот минимум строго положителен, поскольку $|\eta| = \varkappa > 0$ и справедлива оценка (2.2). Оценка (2.7) доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть справедливы условия* **(A0)**–**(A3)**. *Тогда оператор $A : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, заданный в* (1.7), *обладает свойством* (S_+).

Доказательство. Пусть $u_j \rightharpoonup u$ слабо в $\mathring{W}_p^1(Q)$ и

$$\varlimsup_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle \leqslant 0. \tag{2.8}$$

1. Сначала докажем, что $\lim\limits_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle = 0$. В силу компактности вложения $\mathring{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$, $u_m \to u$ в $L_p(Q)$, см. [72, гл. I, §8, пп. 2]. Используя лемму 1.6, условие (**A1**) и теорему [29, теорема 2.1, гл. 1, §2] о непрерывном отображении получим, что

$$A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \to A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) \quad \text{в } L_q(Q),$$

т. е. в силу слабой сходимости $\partial_i u_j \rightharpoonup \partial_i u$ в $L_p(Q)$

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u)\partial_i(u_j - u)\, dx = 0.$$

В силу условия (**A1**) и ограниченности слабо сходящейся последовательности $\{u_j\}$ множество $\{A_0(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j)\}$ ограничено в $L_q(Q)$, т. е.

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_Q A_0(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j)\,(u_j - u)\, dx = 0,$$

поскольку $u_j \to u$ в $L_p(Q)$. Следовательно,

$$\varliminf_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle = \varliminf_{j\to\infty}\Bigg(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \left(A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u)\right) \partial_i(u_j - u) dx +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u)\partial_i(u_j - u)\, dx + \int\limits_{\Omega_T} A_0(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j)\,(u_j - u)\, dx\Bigg) =$$

$$= \varliminf_{j\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \left(A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u)\right) \partial_i(u_j - u) dx. \quad (2.9)$$

Для изучения правой части (2.9) введем вспомогательные функции $w = R_Q u$ и $w_j = R_Q u_j$. Согласно лемме 1.6 существует ограниченный обратный оператор R_Q^{-1}. Воспользуемся формулой (1.18) и коммутативностью операторов R_Q^{-1} и ∂_i на Q_{sl}:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \Big(A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u)\Big) \partial_i(u_j - u) dx \ =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q \Big(A_i(x, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, w_j, \nabla w)\Big) \partial_i R_Q^{-1}(w_j - w) dx =$$

$$= \sum_s \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s \Big(A_i(x, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, w_j, \nabla w)\Big) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i(w_j - w) dx =$$

$$= \sum_s \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{Q_{s1}} \Big(U_s\left(A_i(x, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, w_j, \nabla w)\right), R_s^{-1} U_s \partial_i(w_j - w)\Big) dx = \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} I_s^j dx,$$

т. е. мы обозначили

$$I_s^j = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_l \Big(A_i(x + h_{sl}, w_j(x + h_{sl}), \nabla w_j(x + h_{sl})) -$$

$$- A_i(x + h_{sl}, w_j(x + h_{sl}), \nabla w(x + h_{sl}))\Big) \left(R_s^{-1} U_s P_s \partial_i(w_j - w)\right)_l.$$

Введем матрицы $\zeta^j = \{\zeta^j_{li}\}$ и $\eta^j = \{\eta^j_{li}\}$ следующим образом:

$$\zeta^j_{l0} = \eta^j_{l0} = w_j(x + h_{sl}), \qquad l = 1, \ldots, N(s),$$

$$\zeta^j_{li} = \partial_i w_j(x + h_{sl}), \quad \eta^j_{li} = \partial_i w(x + h_{sl}), \qquad l = 1, \ldots, N(s),\ i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что при этом $\zeta^j \neq \eta^j$. Из условия (**A3**) следует, что $I_s^j > 0$ для всех j. Подставим эту оценку в (2.9). Тогда

$$\varliminf_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle = \varliminf_{j\to\infty} \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} I_s^j\, dx \geqslant 0.$$

Сопоставив это неравенство с неравенством (2.8), получаем, что

$$\lim_{j\to\infty}\langle A_R u_j, u_j - u\rangle = \lim_{j\to\infty}\int\limits_{Q_{s1}} I_s^j\,dx = 0. \tag{2.10}$$

2. Следующим шагом докажем, что при этом $u_j \to u$ в $\mathring{W}_p^1(Q)$, т. е. $\partial_i u_j \to \partial_i u$ в $L_p(Q)$. Для этого достаточно показать сходимость по мере последовательностей $\{\partial_i u_j\}$ и их равностепенную непрерывность в целом в $L_p(Q)$, см. теорему о сильной сходимости [72, гл. 1, п. 3].

2.1. Для доказательства сходимости по мере используем функцию H_s, определенную в (2.6). Из равенства (2.10) получаем, что

$$0 = \lim_{j\to\infty}\sum_s\int\limits_{Q_{s1}} I_s^j\,dx = \lim_{j\to\infty}\sum_s\int\limits_{Q_{s1}} H_s(x,\zeta^j,\zeta^j-\eta^j)\,dx.$$

Воспользуемся оценкой (2.7). Тогда

$$0 = \lim_{j\to\infty}\sum_s\int\limits_{Q_{s1}} H_s(x,\zeta^j,\zeta^j-\eta^j)\,dx \geqslant \varlimsup_{j\to\infty}\sum_s\int\limits_{Q_{s1}} c_s(x)|\zeta^j-\eta^j|\,dx =$$
$$= \varlimsup_{j\to\infty}\sum_s\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{Q_{s1}} c_s(x)|\zeta_{li}^j-\eta_{li}^j|\,dx = \varlimsup_{j\to\infty}\sum_s\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} c_s(x)|\partial_i R_Q u_j - \partial_i R_Q u|\,dx,$$

здесь $c_s(x+h_{sl}) = c_s(x)$ для любого h_{sl}. Поскольку $c_s(x) > 0$, а оператор R_Q невырожден, то данное равенство возможно лишь при сходимости $\partial_i u_j \to \partial_i u$ по мере для всех $i = 1,\ldots,n$.

2.2. Для доказательства равностепенной непрерывности достаточно показать, что

$$\lim_{\operatorname{mes}E\to 0}\int\limits_E\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\partial_i u_j|^p dx = 0, \qquad E\subset Q, \tag{2.11}$$

и стремление к пределу в (2.11) равномерно относительно j.

Заметим, что

$$I_s^j = \sum_l\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\big(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}^j\big) - A_i\big(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}^j\big)\Big)\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}^j-\eta_{\cdot i}^j)\Big)_l =$$
$$= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{0\leqslant i\leqslant n} A_i(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}^j)\Big(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}^j\Big)_l - \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} A_0(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}^j)\Big(R_s^{-1}\zeta_{\cdot 0}^j\Big)_l -$$
$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n} A_i(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}^j)\Big(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\Big)_l - \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n} A_i\big(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}^j\big)\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}^j-\eta_{\cdot i}^j)\Big)_l. \tag{2.12}$$

Первое слагаемое правой части (2.12) оценим, исходя из условия коэрцитивности (2.2), а остальные — применяя условие **(A1)** и неравенство Гёльдера, также будет применена оценка из условия интегрируемости (1.6):

$$I_s^j \geqslant c_6\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}^j|^p - c_7\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}|\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 -$$
$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\left|g(x+h_{sl}) + c_1\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}^j|^{p-1}\right|\left|\Big(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\Big)_l\right| -$$
$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|g(x+h_{sl}) + c_1\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}^j|^{p-1}\right|\left|\Big(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}^j\Big)_l\right| -$$
$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|g(x+h_{sl}) + c_1\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}^j|^{p-1}\right|\left|\Big(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\Big)_l\right|. \tag{2.13}$$

Здесь вторая и третья сумма правой части (2.12) оценены вместе в четвертом слагаемом правой части (2.13) с учетом того, что $\zeta_{l0}^j = \eta_{l0}^j$. Очевидно, что $\left|\left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l\right| \leqslant c_{13} \sum\limits_{1\leqslant m\leqslant N(s)} |\zeta_{mi}|$. Для сокращения записи введем обозначение $g_{sl}^j = g(x+h_{sl}) + c_1 \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |\eta_{lk}^j|^{p-1}$. Скомпонуем слагаемые и оценим с помощью неравенства Юнга:

$$
\begin{aligned}
I_s^j \geqslant{}& c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - c_1 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} |\zeta_{lk}^j|^{p-1} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\right)_l\right| - c_8 - \\
&- c_{13} \sum_{1\leqslant l,m\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |g_{sl}^j| \left|\zeta_{mi}^j\right| - c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - 2 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left|g_{sl}^j\right| \left|\left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\right)_l\right| \geqslant \\
&\geqslant c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - \frac{c_1(n+1)\varepsilon_1^q}{q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - \frac{c_1 n}{\varepsilon_1^p p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\right)_l\right|^p - \\
&- \frac{c_{13}N(s)\varepsilon_2^p}{p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - \frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |g_{sl}^j|^q - c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 - \\
&- \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left|g_{sl}^j\right|^q - \frac{2}{p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\right)_l\right|^p. \quad (2.14)
\end{aligned}
$$

Выберем $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такими, что $\dfrac{c_1(n+1)\varepsilon_1^q}{q} + \dfrac{c_{13}N(s)\varepsilon_2^p}{p} \leqslant \dfrac{c_6}{2}$. Тогда

$$
I_s^j \geqslant \frac{c_6}{2} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - \widehat{g}_s^j, \quad (2.15)
$$

где $\widehat{g}_s^j \in L_1(Q_{s1})$ — функция, равная сумме третьего и последних пяти слагаемых правой части (2.14):

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_s^j = {}& \frac{c_1 n}{\varepsilon_1^p p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\right)_l\right|^p + \frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |g_{sl}^j|^q + c_8 + \\
&+ c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} + \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left|g_{sl}^j\right|^q + \frac{2}{p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\right)_l\right|^p.
\end{aligned}
$$

Следовательно, для любого s и любого $E \subset Q_{s1}$

$$
\frac{c_6}{2} \lim_{\mathrm{mes}E\to 0} \int\limits_E \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\partial_i w_j(x+h_{sl})|^p dx \leqslant \lim_{\mathrm{mes}E\to 0} \int\limits_E I_s^j\, dx + \lim_{\mathrm{mes}E\to 0} \int\limits_E \widehat{g}_s^j\, dx. \quad (2.16)
$$

Сходимость первого интеграла в правой части (2.16) к нулю при $j \to \infty$ на любом множестве $E \subset Q_{s1}$ доказана выше, см. (2.10). Сходимость второго интеграла в правой части (2.16) к нулю следует из абсолютной непрерывности интеграла и того, что множество $\{\widehat{g}_s^j\} \subset L_1(Q_{s1})$ компактно, поскольку при формировании функций $\widehat{g}_s^j$ участвовали фиксированные функции и функции из компактных множеств $\{w_j\} \subset L_p(Q)$ и $\{u_j\} \subset L_p(Q)$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_s^j = {}& \left(\frac{c_1 n}{\varepsilon_1^p p} + \frac{2}{p}\right) \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left(|u_j(x+h_{sl})|^p + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i u(x+h_{sl})|^p\right) + c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |w_j(x+h_{sl})|^{p'} + c_8 + \\
&+ \left(\frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} + \frac{2(n+1)}{q}\right) \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left|g(x+h_{sl}) + c_1|w_j(x+h_{sl})|^{p-1} + c_1 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i w(x+h_{sl})|^{p-1}\right|^q.
\end{aligned}
$$

Таким образом, сходимость в (2.16) равномерна по j для всех s, множества $\{\partial_i w_j\}$ компактны в $L_p\left(\bigcup\limits_{sl} Q_{sl}\right)$. В силу непрерывности оператора R_Q это возможно тогда и только тогда, когда множества $\{\partial_i u_j\}$ компактны в $L_p\left(\bigcup_{sl} Q_{sl}\right)$. Так как $\operatorname{mes}\left(Q \setminus \left(\bigcup_{sl} Q_{sl}\right)\right) = 0$, то равенство (2.11) доказано.

Слабо сходящаяся в $\mathring{W}_p^1(Q)$ последовательность $\{u_j\}$ принадлежит компактному множеству. Двух пределов существовать не может, т. о. данная последовательность сходится к u в $\mathring{W}_p^1(Q)$. $\square$

Лемма 2.4. *Если справедливы условия* **(A0)**–**(A3)**, *то оператор* $A : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, *заданный формулой* (1.7), *псевдомонотонен.*

Это следует из леммы 2.3, так как деминепрерывный оператор, обладающий свойством (S_+), является псевдомонотонным.

Теорема 2.1. *Пусть справедливы условия* **(A0)**–**(A3)**. *Тогда для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует обобщенное решение задачи* (1.1)-(2.2) $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$. *Более того, множество решений задачи* (1.1), (1.2) *ограничено и слабо замкнуто.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный, см. лемму 1.9, коэрцитивный (см. лемму 2.1), оператор, обладающий свойством (S_+) (см. лемму 2.3), т. е. псевдомонотонный (см. лемму 2.4). Следовательно, обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует, см. [33, теорема 2.7, гл. 2]. Ограниченность и слабая замкнутость множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении коэрцитивен и обладает свойством (S_+), см. доказательство в теореме 1.2. $\square$

2.2. Алгебраическое условие сильной эллиптичности и существование решения

В предыдущей главе построено алгебраическое условие сильной эллиптичности для квазилинейных дифференциально-разностных операторов. Близкую конструкцию можно построить для существенно нелинейных дифференциально-разностных операторов. Для существенно нелинейных дифференциальных операторов аналогичное условие рассмотрено в работах автора, см. [75].

Лемма 2.5. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, *справедливы условия* $(\mathbf{A0}), (\mathbf{A1})$, *а также*

(A4) **Условие сильной эллиптичности:** *для всех* s, *п.в.* $x \in \overline{Q_{s1}}$ *и любых* $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ *таких, что* $\eta_{l0} = \zeta_{l0} \neq 0$ *и* $\eta \neq \zeta$, *существует* $\widehat{\Upsilon} > 0$ *такая, что*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x+h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x+h_{sl}, \eta_{l\cdot}\right)\right) \left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_l \geqslant \widehat{\Upsilon} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p. \quad (2.17)$$

(A5) **Условие локальной липшицевости:** *функции* $A_i(x,\xi)$ $(i = \overline{1,n})$ *локально липшицевы по* ξ_0, $A_0(x,\xi)$ *локально липшицева по* ξ_j $(j = \overline{0,n})$, *т. е. существуют* $\varepsilon > 0$ *и функция типа Каратеодори*[1] Ψ *такие, что для любых* $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|\delta| = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} |\delta_j| < \varepsilon$, δ *имеет единственную ненулевую координату,*

$$|A_i(x, \xi+\delta) - A_i(x,\xi)| \leqslant \Psi(x,\xi)|\delta|, \quad (2.18)$$

$$|\Psi(x,\xi)| \leqslant g_\Psi(x) + \widehat{\Psi} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p-2}, \quad (2.19)$$

где $\widehat{\Psi} > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(Q)$, $q' = p/(p-2)$.

Тогда оператор $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, *заданный формулой* (1.17), *обладает полуограниченной вариацией.*

При доказательстве леммы 2.5 нам понадобятся повторяющиеся вычисления:

Лемма 2.6. *В силу непрерывности функции* Ψ *из условий* (2.18)-(2.19) *следует, что для всех* $\xi, \widehat{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *таких, что* $\xi_j \neq \widehat{\xi}_j$ *и* $\xi_k = \widehat{\xi}_k$ *при* $k \neq j$, *справедлива оценка*

$$\left|A_i\left(x, \widehat{\xi}\right) - A_i\left(x,\xi\right)\right| \leqslant \left(\widehat{\Psi}|\widehat{\xi}_j|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x)\right) |\widehat{\xi}_j - \xi_j|. \quad (2.20)$$

[1] $\Psi(x,\xi)$ измерима по x для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывна по $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $x \in \overline{Q}$.

Доказательство. Очевидно, что существуют $n_2 \in \mathbb{N}$ и $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($|\delta| < \varepsilon$) такие, что $\xi = \widehat{\xi} + n_2\delta$. Тогда

$$\left|A_i\left(x, \widehat{\xi}\right) - A_i\left(x, \xi\right)\right| = \left|\sum_{1 \leqslant k \leqslant n_2} \left(A_i\left(x, \widehat{\xi} + k\delta\right) - A_i\left(x, \widehat{\xi} + (k-1)\delta\right)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n_2} \left|A_i\left(x, \widehat{\xi} + k\delta\right) - A_i\left(x, \widehat{\xi} + (k-1)\delta\right)\right|.$$

Воспользуемся оценкой (2.18):

$$\left|A_i\left(x, \widehat{\xi} + k\delta\right) - A_i\left(x, \widehat{\xi} + (k-1)\delta\right)\right| \leqslant \Psi\left(x, \widehat{\xi} + (k-1)\widehat{\delta}\right)|\delta| = \Psi\left(x, \widehat{\xi} + \frac{k-1}{n_2}(\xi - \widehat{\xi})\right)\frac{|\widehat{\xi} - \xi|}{n_2}.$$

То есть

$$\left|A_i\left(x, \widehat{\xi}\right) - A_i\left(x, \xi\right)\right| \leqslant \frac{1}{n_2}\sum_{1 \leqslant k \leqslant n_2} \Psi\left(x, \widehat{\xi} + \frac{k-1}{n_2}(\xi - \widehat{\xi})\right)|\widehat{\xi} - \xi|.$$

Переходя к пределу при $n_2 \to \infty$, в силу непрерывности функции Ψ получаем, что

$$\left|A_i\left(x, \widehat{\xi}\right) - A_i\left(x, \xi\right)\right| \leqslant \int_0^1 \Psi(x, \widehat{\xi} + \tau(\xi - \widehat{\xi}))\,d\tau\,|\xi - \widehat{\xi}|. \tag{2.21}$$

Оценим теперь интеграл по τ из формулы (2.21). Для этого подставим в (2.21) оценку (2.19) и используем известное неравенство $\int_0^1 |a + \tau(b-a)|^\alpha d\tau \leqslant |a|^\alpha + |b|^\alpha$ при $\alpha \geqslant 0$. Поскольку мы считаем, что ξ и $\widehat{\xi}$ отличаются только в одной координате j, то

$$\int_0^1 \Psi(x, \widehat{\xi} + \tau(\xi - \widehat{\xi}))\,d\tau \leqslant \int_0^1 \left(\widehat{\Psi}\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\widehat{\xi}_k + \tau(\xi_k - \widehat{\xi}_k)|^{p-2} + g_\Psi(x)\right)d\tau =$$
$$= \widehat{\Psi}\int_0^1 |\widehat{\xi}_j + \tau(\xi_j - \widehat{\xi}_j)|^{p-2}\,d\tau + \widehat{\Psi}\sum_{k \neq j} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x) \leqslant \widehat{\Psi}\left|\widehat{\xi}_j\right|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x).$$

Подставив это выражение в (2.21), получаем оценку (2.20). □

Доказательство леммы 2.5. Обозначим $w = R_Q u$ и $v = R_Q y$, $u, y \in \mathring{W}_p^1(Q)$, причем в силу невырожденности оператора R_Q существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$, см. лемму 1.6. По определению оператора A_R и в силу формулы (1.18)

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \int_{\Omega_T} \left(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)\right)\partial_i(u-y)dx =$$
$$= \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \int_{\Omega_T} \big(A_i(x, w, \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)\big)R_Q^{-1}\partial_i(w - v)dxdt =$$
$$= \sum_s \int_{\bigcup_l Q_{sl}} \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} P_s\big(A_i(x, w, \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)\big)U_s^{-1}R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\,dx =$$
$$= \sum_s \int_{Q_{s1}} \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \Big(U_sP_s\left(A_i(x, w, \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)\right), R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\Big)\,dx =$$
$$= \sum_s \int_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3})\,dx, \tag{2.22}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. Очевидно, что при $u(x)=y(x)$ для почти всех $x\in Q$ значение данного интеграла неотрицательно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x)\neq y(x)$ для почти всех $x\in Q$. Очевидно, что при этом $w(x)\neq v(x)$ и существует $\lambda\in[0,1]$ такое, что $\lambda w(x)+(1-\lambda)v(x)\neq 0$, возможно, $\lambda=\lambda(x)$.

Введем матрицы порядка $N(s)\times(n+1)$

$$\zeta=(U_sP_sw,U_sP_s\partial_1 w\ldots,U_sP_s\partial_n w),\quad \eta=(U_sP_sv,U_sP_s\partial_1 v\ldots,U_sP_s\partial_n v),$$

а также матрицы $\widehat{\zeta}$ и $\widehat{\eta}$ такие, что

$$\widehat{\zeta}_{\cdot i}=\zeta_{\cdot i},\qquad \widehat{\eta}_{\cdot i}=\eta_{\cdot i},\qquad \forall i=1,\ldots,n, \tag{2.23}$$

$$\widehat{\zeta}_{l0}=\widehat{\eta}_{l0}=\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0},\qquad \forall l=1,\ldots,N(s). \tag{2.24}$$

По построению $\widehat{\zeta}_{l0}=\widehat{\eta}_{l0}\neq 0$. В то же время $\widehat{\zeta}_{\cdot i}-\widehat{\eta}_{\cdot i}\equiv\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i}$ $\forall i=1,\ldots,n$. Сначала оценим часть подынтегральной суммы правой части (2.22)

$$\begin{aligned}
I_{s1}+I_{s2}&=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(U_sP_s\left(A_i(x,w,\nabla w)-A_i(x,v,\nabla v)\right),R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\Big)=\\
&=\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l=\\
&=\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\Big(x+h_{sl},\widehat{\zeta}_{l\cdot}\Big)-A_i\left(x+h_{sl},\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)\Big)\Big(R_s^{-1}(\widehat{\zeta}_{\cdot i}-\widehat{\eta}_{\cdot i})\Big)_l+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\left(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\Big(x+h_{sl},\widehat{\zeta}_{l\cdot}\Big)\Big)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l.
\end{aligned}\tag{2.25}$$

Первую сумму правой части (2.25) оценим с помощью условия сильной эллиптичности (2.17):

$$\begin{aligned}
I_{s1}&=\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\Big(x+h_{sl},\widehat{\zeta}_{l\cdot}\Big)-A_i\left(x+h_{sl},\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)\Big)\Big(R_s^{-1}(\widehat{\zeta}_{\cdot i}-\widehat{\eta}_{\cdot i})\Big)_l\geqslant\\
&\geqslant\widehat{\Upsilon}\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\widehat{\zeta}_{li}-\widehat{\eta}_{li}|^p=\widehat{\Upsilon}\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\partial_i w(x+h_{sl})-\partial_i v(x+h_{sl})\right|^p.
\end{aligned}$$

То есть

$$\sum_s\int\limits_{Q_{s1}}I_{s1}\,dx\geqslant\widehat{\Upsilon}\|w-v\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)}. \tag{2.26}$$

Рассмотрим вторую и третью суммы правой части (2.25):

$$\begin{aligned}
I_{s2}&\leqslant\Bigg|\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\left(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\Big(x+h_{sl},\widehat{\zeta}_{l\cdot}\Big)\Big)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\Bigg|\leqslant\\
&\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big|A_i\left(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\Big(x+h_{sl},\widehat{\zeta}_{l\cdot}\Big)\Big|\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|A_i\left(x+h_{sl},\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)\right|\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|.
\end{aligned}\tag{2.27}$$

Исходя из условия липшицевости **(A4)** и непрерывности функции Липшица Ψ, воспользуемся оценкой (2.20), см. лемму 2.6:

$$\left|A_i\left(x+h_{sl},\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right)\right| \leqslant \left(\widehat{\Psi}\left|\widehat{\zeta}_{l0}\right|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl})\right)|\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}|. \quad (2.28)$$

Аналогично для второй группы слагаемых правой части (2.27) имеем

$$|A_i\left(x+h_{sl},\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)| \leqslant \left(\widehat{\Psi}\,|\widehat{\eta}_{l0}|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl})\right)|\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0}|. \quad (2.29)$$

Подставим (2.28) и (2.29) в (2.27); учитывая, что $\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0}=\lambda(\eta_{l0}-\zeta_{l0})$ и $\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}=(1-\lambda)(\zeta_{l0}-\eta_{l0})$, см. (2.24), получаем оценку

$$I_{s2}\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\widehat{\Psi}\,|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^{p-2}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+\right.$$
$$\left.+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl})\right)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|\,\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|. \quad (2.30)$$

Заметим, что $|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^\alpha\leqslant|\zeta_{l0}|^\alpha+|\eta_{l0}|^\alpha$ для всех $\lambda\in[0,1]$ при $\alpha\geqslant 0$, а также в силу ограниченности и невырожденности матриц R_s^{-1}

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|\leqslant c_{13}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|$$

для некоторого $c_{13}>0$. Тогда

$$I_{s2}\leqslant c_{13}\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\left(\widehat{\Psi}\,|\zeta_{l0}|^{p-2}+\widehat{\Psi}\,|\eta_{l0}|^{p-2}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+\right.$$
$$\left.+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl})\right)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|. \quad (2.31)$$

Перейдем к переменным w и v:

$$\sum_s\int\limits_{Q_{s1}}I_{s2}\,dx\leqslant c_{13}\left(\widehat{\Psi}\,\|w\|^{p-2}_{L_p(Q)}+\widehat{\Psi}\,\|v\|^{p-2}_{L_p(Q)}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\|\partial_i w\|^{p-2}_{L_p(Q)}+\right.$$
$$\left.+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\|\partial_i v\|^{p-2}_{L_p(Q)}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(Q)}\right)\|w-v\|_{L_p(Q)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(Q)}\leqslant$$
$$\leqslant c_{13}\left(c_{14}r_1^{p-2}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(Q)}\right)\|w-v\|_{L_p(Q)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(Q)}, \quad (2.32)$$

где $\|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}\leqslant r_1$ и $\|y\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}\leqslant r_1$. В этой оценке учтено, что $\|w\|_{L_p(Q)}=\|R_Q u\|_{L_p(Q)}\leqslant c_5\|u\|_{L_p(Q)}$ (см. (1.22)) и $\|u\|_{L_p(Q)}\leqslant c_{15}\|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}\leqslant c_{15}r_1$ (неравенство Фридрихса), для $v=R_Q y$ оценки аналогичны. Для сокращения записи введем функцию $\widehat{c}_1(r_1)=c_{13}\left(c_{14}r_1^{p-2}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(Q)}\right)$. В силу неравенства Юнга из (2.32) следует, что

$$\sum_s\int\limits_{Q_{s1}}I_{s2}\,dx\leqslant\frac{\widehat{\Upsilon}}{p}\|w-v\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)}+\frac{1}{q}\left(\frac{\widehat{c}_1(r_1)}{\widehat{\Upsilon}}\right)^{q/p}\|w-v\|^q_{L_p(Q)}. \quad (2.33)$$

Осталось оценить слагаемое при $i=0$ в подынтегральной сумме правой части (2.22):

$$I_{s3}\leqslant\left|\left(U_sP_s\left(A_0(x,w,\nabla w)-A_0(x,v,\nabla v)\right),R_s^{-1}U_sP_s(w-v)\right)\right|=$$

$$= \left| \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \left(A_0\left(x+h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right) - A_0\left(x+h_{sl}, \eta_{l\cdot}\right)\right) \left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0} - \eta_{\cdot 0})\right)_l \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \left|A_0\left(x+h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right) - A_0\left(x+h_{sl}, \eta_{l\cdot}\right)\right| \left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0} - \eta_{\cdot 0})\right)_l\right|. \quad (2.34)$$

Исходя из условия липшицевости **(A4)** и непрерывности функции Липшица Φ, воспользуемся оценкой (2.20), см. лемму 2.6, и подставим в (2.34) аналогично выводу формулы (2.31) из (2.27):

$$I_{s3} \leqslant \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \left(\widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(|\zeta_{lk}|^{p-2} + |\eta_{lk}|^{p-2}\right) + g_\Psi(x+h_{sl}) \right) |\zeta_{lj} - \eta_{lj}| \left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0} - \eta_{\cdot 0})\right)_l\right|.$$

Вернемся к функциям w, v, u и y и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s3}\, dx \leqslant \sum_s \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \int_{Q_{s1}} \Bigg(\widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k v(x+h_{sl})|^{p-2} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k w(x+h_{sl})|^{p-2} +$$

$$+ g_\Psi(x+h_{sl}) \Bigg) \big|\partial_j w(x+h_{sl}) - \partial_j v(x+h_{sl})\big| \, \big|u(x+h_{sl}) - y(x+h_{sl})\big|\, dx =$$

$$= \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \int_Q \left(\widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k w|^{p-2} + g_\Psi \right) \big|\partial_j w - \partial_j v\big| \, \big|u - y\big|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k w|^{p-2} + g_\Psi \right\|_{L_{q'}(Q)} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(Q)} \, \|u - y\|_{L_p(Q)}.$$

Заметим, что

$$\left\| \widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\partial_k w|^{p-2} + g_\Psi \right\|_{L_{q'}(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16} \left(\|v\|^{p-2}_{W_p^1(Q)} + \|w\|^{p-2}_{W_p^1(Q)} \right) + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(Q)} \leqslant c_{17} r_1^{p-2} + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(Q)} =: \widehat{c}_2(r_1).$$

Здесь, как и выше, были учтены оценки $\|w\|_{L_p(Q)} = \|R_Q u\|_{L_p(Q)} \leqslant c_5 \|u\|_{L_p(Q)}$ и $\|u\|_{L_p(Q)} \leqslant c_{15} \|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant c_{15} r_1$, а также аналогичные оценки для $v = R_Q y$. Осталось воспользоваться известным неравенством $ab \leqslant \dfrac{(\varepsilon a)^p}{p} + \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^q$:

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s3}\, dx \leqslant \widehat{c}_2(r_1)\, \|u - y\|_{L_p(Q)} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(Q)} =$$

$$= \widehat{c}_2(r_1)\, \|u - y\|_{L_p(Q)} \|w - v\|_{L_p(Q)} + \widehat{c}_2(r)\, \|u - y\|_{L_p(Q)} \|w - v\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \widehat{c}_2(r_1)\, \|u - y\|^2_{L_p(Q)} + \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \|w - v\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)} + \frac{1}{q} \left(\frac{\widehat{c}_2(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \|u - y\|^q_{L_p(Q)}. \quad (2.35)$$

Подставляя (2.26), (2.33) и (2.35) в (2.22), получим

$$\langle A_R u - A_R y, u - y \rangle \geqslant \sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}|\, dx \geqslant \left(\widehat{\Upsilon} - 2\frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \right) \|w - v\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)} -$$

$$- \frac{1}{q} \left(\frac{\widehat{c}_1(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \|w - v\|^q_{L_p(Q)} - c_5 \widehat{c}_2(r_1)\, \|u - y\|^2_{L_p(Q)} - \frac{1}{q} \left(\frac{\widehat{c}_2(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \|u - y\|^q_{L_p(Q)} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{q} \left(c_5^q \left(\frac{\widehat{c}_1(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} + \left(\frac{\widehat{c}_2(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \right) \|u - y\|^q_{L_p(Q)} - c_5 \widehat{c}_2(r_1)\, \|u - y\|^2_{L_p(Q)} =$$

$$=: -C(r_1; \|u-y\|_{L_p(Q)}), \quad (2.36)$$

поскольку $\left(1-\dfrac{2}{p}\right)\widehat{\Upsilon} > 0$. Так как $q > 1$ и $\mathring{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$ компактно, то A_R — оператор с полуограниченной вариацией. □

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* **(A0)**–**(A2)** *и* **(A4)**–**(A5)**. *Тогда для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный (см. лемму 1.9) оператор с полуограниченной вариацией (см. лемму 2.5), причем A_R коэрцитивен (см. лемму 2.1). Следовательно, обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует, см. [20, теорема 3.1, гл. 2, §3], множество решений ограниченно в силу коэрцитивности A_R и слабо замкнуто, см. [24, следствие 4.1, гл. 1, §4]. □

Замечание 2.1. Вместо условия **(A2)** в теореме 2.2 может быть использовано другое условие, гарантирующее коэрцитивность задачи. Например, если при $p \in [2, \infty)$ кроме условий $(\mathbf{A0}), (\mathbf{A1}), (\mathbf{A4}), (\mathbf{A5})$ справедливы более сильные оценки для слагаемых с младшими членами:

$$|A_i(x, \xi_0 + \delta_0, \xi_1, \dots, \xi_n) - A_i(x, \xi)| \leqslant \Psi_1(x, \xi)|\delta_0|, \quad (i = 1, \dots, n), \tag{2.37}$$

$$|\Psi_1(x, \xi)| \leqslant g_\Psi(x) + \widehat{\Psi}_1 \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|^{p'-2}, \tag{2.38}$$

$$|A_0(x, \xi)| \leqslant \widehat{g}(x) + \widehat{c}_1 \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|^{p'-1}, \tag{2.39}$$

где $p' \in (1, p)$, $\widehat{\Psi}_1 > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(Q)$, $q' = p/(p-2)$, $\widehat{g} \in L_q(Q)$, $\widehat{c}_1 > 0$.

2.3. Уравнения с p-лапласианом

Рассмотрим существенно нелинейное функционально-дифференциальное уравнение с дифференциальным оператором, заданным p-лапласианом:

$$\Delta_p Ru(x) = f(x) \quad (x \in Q) \tag{2.40}$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus Q). \tag{2.41}$$

Здесь $p > 2$, $f \in W_q^{-1}(Q)$ и Δ_p — p-лапласиан, задаваемый формулой

$$\Delta_p u(x) = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \partial_i \left(|\partial_i u|^{p-2}\, \partial_i u \right). \tag{2.42}$$

Определение 2.1. Функция $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (2.40), (2.41), если для любого $\xi \in \mathring{W}_p^1(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\langle \Delta_p u, \xi \rangle = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_Q |\partial_i R_Q u|^{p-2} \partial_i R_Q u \partial_i \xi \, dx = \int_Q f\, \xi \, dx. \tag{2.43}$$

Как известно [15, 33], p-лапласиан $\Delta_p : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ является ограниченным, максимально сильно монотонным оператором, деминепрерывным и коэрцитивным, удовлетворяющим условию сильной эллиптичности. Особенностью рассмотрения данной задачи является то, что благодаря наличию разностного оператора дифференциально-разностный оператор $\Delta_p R$ в отличие от дифференциального оператора Δ_p не только не обладает свойством монотонности, но и затруднительно предложить условия на R, когда этот оператор удовлетворяет условию эллиптичности, см. пример 2.1 ниже. Поэтому рассмотрение данного уравнения методами предыдущих разделов весьма проблематично.

В этом разделе будут использована связь p-лапласиана с оператором двойственности в L_p. Благодаря этому удается сформулировать достаточные условия существования обобщенного решения задачи (2.40), (2.41) в терминах сильной аккретивности оператора R_Q^{-1}, см. определение 2.3. Заметим, что как и в предыдущей главе, в отличие от линейной теории важное значение имеют свойства не оператора R_Q, а оператора R_Q^{-1}. Ниже будет доказано, что сильная аккретивность оператора R_Q^{-1} гарантирует псевдомонотонность оператора $\Delta_p R_Q$.

Для простоты изложения будет рассмотрен p-лапласиан без младших членов. При наличии младших членов, определяемых непрерывными функциями типа Каратеодори, очевидно, что псевдомонотонность оператора $\Delta R_Q + \mathcal{A}^0 R_Q$ сохраняется: в лемме 1.11 показано, что при $u_m \rightharpoonup m$ в $\mathring{W}(Q)$

$$\lim_{m\to\infty}\langle \mathcal{A}^0 R_Q u_m - \mathcal{A}^0_R u, u_m - u\rangle =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\int\limits_Q \left(A_0(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u_m) - A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\right)(u_m - u)\,dx = 0,$$

что и доказывает псевдомонотонность оператора $\Delta_p R_Q + \mathcal{A}^0 R_Q$ при псевдомонотонности $\Delta_p R_Q$. Сохранение условия коэрцитивности может потребовать дополнительных условий, например, если $\langle \mathcal{A}^0 R_Q u, u\rangle \geqslant 0$ или выполнено условие (1.39) из леммы 1.12.

2.3.1. Примеры при $Q \subset \mathbb{R}$. Проиллюстрируем некоторые особенности дифференциально-разностного оператора с p-лапласианом на примерах при $Q \subset \mathbb{R}$.

Первый пример показывает, что даже при «хорошем» разностном операторе дифференциально-разностный оператор с p-лапласианом может не удовлетворять алгебраическому условию эллиптичности. При этом будет рассмотрен симметрический положительно определенный разностный оператор R_Q с $\dim R_1 = 2$, который сохраняет сильную эллиптичность дифференциально-разностного оператора с лапласианом, см. [69, 106].

Пример 2.1. Пусть $Q = (0, 2)$, $Ru(x) = u(x) + 0{,}9u(x + 1) + 0{,}9u(x - 1)$, $p = 4$. Разностному оператору соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}.$$

В терминах разделов 1.1-2.2 p-лапласиан как дифференциальный оператор определяется функциями $A_i(x, \xi) = A_i(\xi) = |\xi_i|^{p-2}\xi_i$. Классическое условие эллиптичности для оператора $\Delta_p R_Q$ будет иметь вид

$$\sum_{i=1;l=1,2}\left[A_i\left((R_s\zeta_{\cdot i})_l\right) - A_i\left((R_s\eta_{\cdot i})_l\right)\right](\zeta_{li} - \eta_{li}) > 0,$$

где $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times n}, \zeta \neq \eta$. В нашем примере $n = 1$, $N(1) = 2$. Рассмотрим $\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Тогда $R_1\zeta = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}$, $R_1\eta = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$. Нетрудно посчитать, что

$$\sum_{l=1,2}\left[A_1\left((R_1\zeta)_l\right) - A_1\left((R_1\eta)_l\right)\right](\zeta_l - \eta_l) = -0{,}806 < 0.$$

Условие эллиптичности нарушено.

Далее построим явные решения некоторых дифференциально-разностных уравнений с p-лапласианом. Будет показано, что такие уравнения могут иметь неединственное решение, более того, множество решений может быть не конечно.

Пример 2.2. Пусть $p \in (2, \infty)$, $Q = (0, 3)$,

$$Ru(x) = u(x) + u(x + 1) + u(x + 2). \tag{2.44}$$

Рассмотрим задачу

$$-\left(|Ru'|^{p-2}Ru'\right)'(x) = 1 \qquad (x \in (0, 3)), \tag{2.45}$$
$$u(x) = 0 \qquad (x \in [-1, 0] \cup [3, 4]). \tag{2.46}$$

Этому разностному оператору соответствует матрица R_1:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(R_1 + R_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Введем функции

$$\begin{aligned} v_1(x) &= u(x) && (x \in (0,1)), \\ v_2(x) &= u(x+1) && (x \in (0,1)), \\ v_3(x) &= u(x+2) && (x \in (0,1)). \end{aligned}$$

Из уравнения (2.45) получим систему уравнений при $x \in (0,1)$:

$$-\left(|v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x)|^{p-2}(v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x))\right)' = 1, \tag{2.47}$$

$$-\left(|v_2'(x) + v_3'(x)|^{p-2}(v_2'(x) + v_3'(x))\right)' = 1, \tag{2.48}$$

$$-\left(|v_3'(x)|^{p-2}(v_3'(x))\right)' = 1. \tag{2.49}$$

Общее решение системы уравнений (2.47)-(2.49) имеет вид

$$v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = \widetilde{v_1}(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_1 - |x - k_2|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

$$v_2(x) + v_3(x) = \widetilde{v_2}(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_3 - |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

$$v_3(x) = \widetilde{v_3}(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_5 - |x - k_6|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

т. е.

$$v_1(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_1 - k_3 - |x - k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

$$v_2(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_3 - k_5 - |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}} + |x - k_6|^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Запишем уравнения для определения констант k_i. Из краевых условий (2.46) имеем, что $u(0) = v_1(0) = 0$, $u(3) = v_3(1) = 0$. То есть

$$k_1 - k_3 - |k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |k_4|^{\frac{p}{p-1}} = 0, \tag{2.50}$$

$$k_5 - |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}} = 0. \tag{2.51}$$

Из вложения $\mathring{W}_4^1(0,2) \subset C[0,2]$ следует, что $v_1(1) = u(1-0) = u(1+0) = v_2(0)$ и $v_2(1) = u(2-0) = u(2+0) = v_3(0)$, т. е.

$$k_1 - k_3 - |1 - k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |1 - k_4|^{\frac{p}{p-1}} = k_3 - k_5 - |k_4|^{\frac{p}{p-1}} + |k_6|^{\frac{p}{p-1}}, \tag{2.52}$$

$$k_3 - k_5 - |1 - k_4|^{\frac{p}{p-1}} + |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}} = k_5 - |k_6|^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.53}$$

Поскольку правая часть уравнения (2.45) — регулярная функция, то

$$Ru'\big|_{x=1-0} = Ru'\big|_{x=1+0}, \quad Ru'\big|_{x=2-0} = Ru'\big|_{x=2+0}. \tag{2.54}$$

Равенства (2.54) эквивалентны равенствам $\widetilde{v_1}'(1) = \widetilde{v_2}'(0)$ и $\widetilde{v_2}'(1) = \widetilde{v_3}'(0)$, т. е.

$$|1 - k_2| = |0 - k_4|, \qquad |1 - k_4| = |0 - k_6|. \tag{2.55}$$

С учетом равенств (2.55) и (2.52) получаем $k_1 - k_3 = k_3 - k_5$. А соотношения (2.53), (2.51) и (2.55) дают, что $k_1 = k_3 = k_5$. То есть,

$$k_1 = k_3 = k_5 = |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}}, \quad |k_2| = |k_4| = |1 - k_6|, \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Существуют по меньшей мере два набора констант, соответствующих этим условиям. Выпишем решения, соответствующие этим наборам.

Если $k_2 = k_4 = k_6 = \dfrac{1}{2}$, $k_1 = k_3 = k_5 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, то

$$u(x) = \frac{p-1}{p}\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{5}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2,3], \\ 0, & x \notin (2,3). \end{cases}$$

Если $k_2 = k_4 = \dfrac{1}{2}$, $k_6 = -\dfrac{1}{2}$, $k_1 = k_3 = k_5 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, то

$$u(x) = \frac{p-1}{p}\begin{cases} \left|x - \dfrac{1}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1,2], \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2,3), \\ 0, & x \notin (1,3). \end{cases}$$

При этом

$$R_Q u(x) = \frac{p-1}{p}\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{1}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in (0,1], \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1,2], \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{5}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2,3). \end{cases}$$

и

$$R_Q u(x) = \frac{p-1}{p}\begin{cases} \left|x - \dfrac{1}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1,2], \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2,3), \\ 0, & x \notin (1,3). \end{cases}$$

Задача (2.45), (2.46) с разностным оператором из (2.44) имеет два решения.

Пример 2.3. Пусть $p \in (2,\infty)$, $Q = (0,3)$. Рассмотрим задачу (2.45), (2.46) при

$$Ru(x) = u(x) + u(x+2). \tag{2.56}$$

Этому разностному оператору соответствует матрица R_1:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(R_1 + R_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Как и в предыдущем примере, введем функции

$$\begin{aligned} v_1(x) &= u(x) && (x \in (0,1)), \\ v_2(x) &= u(x+1) && (x \in (0,1)), \\ v_3(x) &= u(x+2) && (x \in (0,1)). \end{aligned}$$

Из уравнения (2.45) получим систему уравнений при $x \in (0,1)$:

$$-\left(|v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x)|^{p-2}(v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x))\right)' = 1, \tag{2.57}$$

$$-\left(|v_2'(x)|^{p-2}v_2'(x)\right)' = 1, \tag{2.58}$$

$$-\left(|v_3'(x)|^{p-2}v_3'(x)\right)' = 1. \tag{2.59}$$

Общее решение системы уравнений (2.57)–(2.59) имеет вид

$$v_1(x) + v_3(x) = \widetilde{v_1}(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_1 - |x - k_2|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

$$v_2(x) = \widetilde{v_2}(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_3 - |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

$$v_3(x) = \widetilde{v}_3(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_5 - |x-k_6|^{\frac{p}{p-1}}\right),$$

т. е.

$$v_1(x) = \frac{p-1}{p}\left(k_1 - k_5 - |x-k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |x-k_6|^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Запишем уравнения для определения констант k_i. Из краевых условий (2.46) имеем, что $u(0) = v_1(0) = 0$ и $u(3) = v_3(1) = 0$, т. е.

$$k_1 - k_5 - |k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |k_6|^{\frac{p}{p-1}} = 0, \tag{2.60}$$

$$k_5 - |1-k_6|^{\frac{p}{p-1}} = 0. \tag{2.61}$$

Из вложения $\mathring{W}_4^1(0,2) \subset C[0,2]$ следует, что $v_1(1) = u(1-0) = u(1+0) = v_2(0)$ и $v_2(1) = u(2-0) = u(2+0) = v_3(0)$, т. е.

$$k_1 - k_5 - |1-k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |1-k_6|^{\frac{p}{p-1}} = k_3 - |k_4|^{\frac{p}{p-1}}, \tag{2.62}$$

$$k_3 - |1-k_4|^{\frac{p}{p-1}} = k_5 - |k_6|^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.63}$$

Далее, поскольку правая часть уравнения (2.45) — регулярная функция, то должно выполняться (2.54), т. е. $|1-k_2| = |0-k_4|$, $|1-k_4| = |0-k_6|$. Таким образом, получаем соотношения для коэффициентов:

$$k_1 = k_3 = k_5 = |1-k_6|^{\frac{p}{p-1}}, \qquad |k_2| = |k_6| = |1-k_4|. \tag{2.64}$$

Этим условиям, например, удовлетворяют наборы:

$$k_2 = k_4 = k_6 = \frac{1}{2}, \qquad k_1 = k_3 = k_5 = \left|\frac{1}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}};$$

$$k_2 = k_6 = z\,(z \in \mathbb{R}_+), \quad k_4 = -(z-1), \quad k_1 = k_3 = k_5 = |1-z|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Следовательно, задача (2.45), (2.46) с разностным оператором из (2.56) имеет бесконечное множество решений, в частности,

$$u(x) = \frac{p-1}{p}\begin{cases} 0, & x \notin [1,3], \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1,2], \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \dfrac{5}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2,3], \end{cases}$$

и

$$u(x) = \frac{p-1}{p}\begin{cases} 0, & x \notin (0,3), \\ |x+z|^{\frac{p}{p-1}} - |x-z|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [0,1], \\ |1+z|^{\frac{p}{p-1}} - |x+z-2|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1,3], \end{cases}$$

где $z \in \mathbb{R}_+$.

2.3.2. Достаточное условие сильной аккретивности.

Определение 2.2 (см. [33, гл. 2, п. 2.2])**.** Отображение $J : X \to X^*$ из банахова пространства X в сопряженное ему X^* называется *отображением двойственности относительно функции* Φ, если

$$\langle Ju, u\rangle_X = \|Ju\|_{X^*}\|u\|_X \qquad \text{и} \qquad \|Ju\|_{X^*} = \Phi(\|u\|_X) \qquad \forall u \in X.$$

Учтем, что стандартным оператором двойственности пространства Лебега $L_p(Q)$ является оператор J относительно функции $\Phi(r) = r^{p-1}$, заданный формулой $Ju = |u|^{p-2}u$, а для пространства $\mathring{W}_p^1(Q)$ оператор двойственности задан p-лапласианом.

Определение 2.3. Линейный оператор $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ называется *аккретивным*, если $\langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle \equiv \int\limits_Q Ju\,\widehat{R}_Q u\,dx \geqslant 0$ для любого $u \in L_p(Q)$. Аккретивный линейный оператор $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ *сильно аккретивен*, если

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle \equiv \int\limits_Q Ju\,\widehat{R}_Q u\,dx \geqslant c_a\|u\|^p_{L_p(Q)}. \tag{2.65}$$

В дальнейшем под $\widehat{R}_Q$ мы будем понимать либо оператор R_Q^{-1}, либо его часть $R_{Qs_\nu}^{-1}$ в предположении, что $\det R_{s_\nu} \neq 0$ $(\nu = 1, \dots, n_1)$.

Очевидно, что если оператору $\widehat{R}_Q$ соответствуют диагональные матрицы, то $\widehat{R}_Q$ сильно аккретивен тогда и только тогда, когда диагональные элементы этих матриц строго положительны, причем константа c_a определена минимальным диагональным элементом. Заметим также, что по построению сумма аккретивных операторов является аккретивным оператором. Для сильной аккретивности суммы аккретивных операторов достаточно сильной аккретивности одного из элементов суммы.

Докажем вспомогательную оценку.

Лемма 2.7. *Пусть* $\lambda, a, b \in \mathbb{R}_+$, $p > 2$. *Тогда*

$$a^p \pm \lambda ab\left(a^{p-2} - b^{p-2}\right) + b^p > 0 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_+, \tag{2.66}$$

если $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет оценке*

$$\frac{\lambda^p}{\lambda+1} < \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}. \tag{2.67}$$

В частности, оценка (2.66) *справедлива, если*

$$\lambda < \frac{p}{p-1}\sqrt[p-1]{p} = qp^{1/q}. \tag{2.68}$$

Если в оценке (2.67) *или* (2.68) *неравенство нестрогое, то в оценке* (2.66) *неравенство тоже нестрогое.*

Доказательство. В силу вида формулы (2.66), не нарушая общности, будем считать, что $a \geqslant b$ (иначе поменяем a и b местами). Оценим сначала

$$a^p + \lambda ab\left(a^{p-2} - b^{p-2}\right) + b^p = a^p\left(1 + \lambda\frac{b}{a} - \lambda\left(\frac{b}{a}\right)^{p-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^p\right).$$

Из неравенств $p > 2$ и $b/a \leqslant 1$ следует, что $b/a \geqslant (b/a)^{p-1}$ и

$$1 + \lambda\frac{b}{a} - \lambda\left(\frac{b}{a}\right)^{p-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^p \geqslant 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p > 0 \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Теперь рассмотрим (2.66), если при λ мы имеем противоположный знак. Поскольку $(b/a)^{p-1} \geqslant (b/a)^p$, то

$$1 - \lambda\frac{b}{a} + \lambda\left(\frac{b}{a}\right)^{p-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^p \geqslant 1 - \lambda\frac{b}{a} + (\lambda+1)\left(\frac{b}{a}\right)^p.$$

Используя известную формулу $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$, получим, что

$$1 - \lambda\frac{b}{a} + (\lambda+1)\left(\frac{b}{a}\right)^p \geqslant 1 - \frac{\lambda^q}{q\varepsilon^q} - \frac{\varepsilon^p}{p}\left(\frac{b}{a}\right)^p + (\lambda+1)\left(\frac{b}{a}\right)^p > 0$$

при $1 - \dfrac{\lambda^q}{q\varepsilon^q} \geqslant 0$ и $(\lambda+1) > \dfrac{\varepsilon^p}{p}$. Пусть $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{q^{1/q}}$. Тогда $(\lambda+1) > \dfrac{\varepsilon^p}{p} = \lambda^p p^{-1} q^{-p/q}$. Следовательно, $\dfrac{\lambda^p}{\lambda+1} < pq^{p/q} = \dfrac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$.

Рассмотрим оценку (2.68). Если $\lambda < \dfrac{p}{p-1}\sqrt[p-1]{p}$, то $\lambda^{p-1} < p\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{p-1}$, т. е. $\dfrac{\lambda^p}{\lambda+1} < \dfrac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$.

Для нестрогих оценок доказательство аналогично. □

Лемма 2.8. *Пусть оператору $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ соответствуют матрицы $\widehat{R}_s = \{\widehat{r}^s_{ml}\}$ такие, что для всех $s = 1, \dots, n_1$ и любых $m = 1, 2, \dots, N(s)$ справедлива оценка*

$$2\widehat{r}^s_{mm} > \lambda^{-1}\sum_{l\neq m}|\widehat{r}^s_{ml} - \widehat{r}^s_{lm}| + \sum_{l\neq m}|\widehat{r}^s_{ml} + \widehat{r}^s_{lm}|, \tag{2.69}$$

где λ удовлетворяет (2.67) *или* (2.68). *Тогда $\widehat{R}_Q$ сильно аккретивен. Если в* (2.69) *равенство нестрогое для какого-то s или m, то $\widehat{R}_Q$ аккретивен.*

Доказательство. В силу представления (1.18),

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle = \sum_s \int_{Q_s} |P_s u|^{p-2}(P_s u)\left(U_s^{-1}\widehat{R}_s U_s P_s u\right)dx =$$
$$= \sum_s \int_{Q_{s1}} \left(U_s\left(|P_s u|^{p-2}(P_s u)\right), \widehat{R}_s U_s P_s u\right)dx =$$
$$= \sum_s \sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \int_{Q_{s1}} \widehat{r}^s_{ml}|u(x+h_{sm})|^{p-2}u(x+h_{sm})u(x+h_{sl})\,dx. \tag{2.70}$$

Оценим подынтегральное выражение в (2.70). Пусть $\xi \in \mathbb{R}^{N(s)}$ — произвольный вектор. Обозначим через $\widehat{r}^{s,sym}_{ml} = \frac{1}{2}\big(\widehat{r}^s_{ml} + \widehat{r}^s_{lm}\big)$ и $\widehat{r}^{s,sk}_{ml} = \frac{1}{2}\big(\widehat{r}^s_{ml} - \widehat{r}^s_{lm}\big)$ коэффициенты симметрической и кососимметрической частей матрицы $\widehat{R}_s$. Тогда

$$\sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \widehat{r}^s_{ml}|\xi_m|^{p-2}\xi_m\xi_l = \sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \widehat{r}^{s,sk}_{ml}|\xi_m|^{p-2}\xi_m\xi_l + \sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \widehat{r}^{s,sym}_{ml}|\xi_m|^{p-2}\xi_m\xi_l \geqslant$$
$$\geqslant \lambda^{-1}\sum_{1\leqslant m<l\leqslant N(s)} \left|\widehat{r}^{s,sk}_{ml}\right|\big(|\xi_m|^p - \lambda|\xi_m\xi_l|\,\big||\xi_m|^{p-2} - |\xi_l|^{p-2}\big| + |\xi_l|^p\big) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant m<l\leqslant N(s)} \left|\widehat{r}^{s,sym}_{ml}\right|\big(|\xi_m|^p + \operatorname{sign}(\widehat{r}^{s,sym}_{ml})\left(|\xi_m|^{p-2} + |\xi_l|^{p-2}\right)\xi_m\xi_l + |\xi_l|^p\big) + \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \widehat{r}^s_{mm}|\xi_m|^p -$$
$$- \lambda^{-1}\sum_{1\leqslant m<l\leqslant N(s)} \left|\widehat{r}^{s,sk}_{ml}\right|\big(|\xi_m|^p + |\xi_l|^p\big) - \sum_{1\leqslant m<l\leqslant N(s)} \left|\widehat{r}^{s,sym}_{ml}\right|\big(|\xi_m|^p + |\xi_l|^p\big). \tag{2.71}$$

Первое слагаемое правой части (2.71) неотрицательно в силу оценки (2.66). Второе слагаемое правой части (2.71) неотрицательно, поскольку

$$|\xi_m|^p \pm |\xi_m|^{p-2}\xi_m\xi_l \pm |\xi_l|^{p-2}\xi_m\xi_l + |\xi_l|^p \geqslant (|\xi_m|^{p-1} - |\xi_l|^{p-1})(|\xi_m| - |\xi_l|) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \widehat{r}^s_{ml}|\xi_m|^{p-2}\xi_m\xi_l \geqslant \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \left(\widehat{r}^s_{mm} - \lambda^{-1}\sum_{l\neq m}\left|\widehat{r}^{s,sk}_{ml}\right| - \sum_{l\neq m}\left|\widehat{r}^{s,sym}_{ml}\right|\right)|\xi_m|^p. \tag{2.72}$$

Подставляя оценку (2.72) в (2.70), получаем, что

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle = \sum_s \int_{Q_s} |P_s u|^{p-2}(P_s u)\left(U_s^{-1}\widehat{R}_s U_s P_s u\right)dx \geqslant$$
$$\geqslant \sum_s \int_{Q_{s1}} \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \left(\widehat{r}^s_{mm} - \lambda^{-1}\sum_{l\neq m}\left|\widehat{r}^{s,sk}_{ml}\right| - \sum_{l\neq m}\left|\widehat{r}^{s,sym}_{ml}\right|\right)|u(x+h_{sm})|^p\,dx =$$

$$= \sum_s \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \left(\widehat{r}^{s}_{mm} - \lambda^{-1} \sum_{l\neq m} \left|\widehat{r}^{s,sk}_{ml}\right| - \sum_{l\neq m} \left|\widehat{r}^{s,sym}_{ml}\right| \right) \|u\|^p_{L_p(Q_{sm})}. \quad (2.73)$$

Таким образом, если справедлива оценка (2.67), то оператор $\widehat{R}_Q$ сильно аккретивен с константой

$$c_a = \min_m \left\{ \widehat{r}^{s}_{mm} - \lambda^{-1} \sum_{l\neq m} |\widehat{r}^{s,sk}_{ml}| - \sum_{l\neq m} |\widehat{r}^{s,sym}_{ml}| \right\}. \quad (2.74)$$

Очевидно, что если для некоторого s или m в (2.69) неравенство нестрогое, то из (2.73) следует, что $\langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle \geqslant 0$, оператор $\widehat{R}_Q$ аккретивен. □

Замечание 2.2. Пусть $\lambda_{max}(p)$ удовлетворяет соотношению $\dfrac{\lambda_{max}(p)^p}{\lambda_{max}(p)+1} = \dfrac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$. В силу неравенства (2.67) $\lambda_{max}(p)$ монотонно убывает при росте p, $\lambda_{max}(p) \in (1, 2+2\sqrt{2}]$ для $p \geqslant 2$ и $\lambda_{max}(p) \to 1$ при $p \to \infty$.

Пример 2.4. Пусть $Q = (0,2)\times(0,1)$ и

$$Ru(x) = 4u(x_1,x_2) + 4u(x_1+1,x_2) - 3u(x_1-1,x_2).$$

Этому оператору соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обратной к ней является матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для любого $p \in (2,\infty)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda = 1+\varepsilon$ удовлетворяет условию (2.67). Тогда

$$2\cdot\frac{4}{28} > \frac{1}{1+\varepsilon}\left|-\frac{4}{28} - \frac{3}{28}\right| + \left|-\frac{4}{28} + \frac{3}{28}\right| \quad \Leftrightarrow \quad 8 > \frac{7}{1+\varepsilon} + 1.$$

Условие (2.69) удовлетворено, оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен.

Пример 2.5. Пусть $Q = (0,2)\times(0,1)$ и

$$Ru(x) = u(x_1,x_2) + 5u(x_1+1,x_2) - 5u(x_1-1,x_2).$$

Этому оператору соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратной к ней является матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Симметрические части матриц R_1 и R_1^{-1} положительно определены, т. е. при $p = 2$ разностный оператор R_Q сохраняет сильную эллиптичность оператора ΔR_Q, см. примеры из [106, §9]. Легко проверить, что условие (2.69) нарушено:

$$\frac{1}{26} < \lambda^{-1}\frac{5}{26} \qquad \forall\lambda \in (1, 2+2\sqrt{2}),$$

мы не можем гарантировать сильную аккретивность оператора R_Q^{-1}.

Пример 2.6. Пусть $Q = (0,2)\times(0,1)$ и

$$Ru(x) = u(x_1,x_2) - 2u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2).$$

Тогда $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $R_1^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Условие (2.69) удовлетворено, если

$$2 \cdot \frac{1}{3} > \lambda^{-1}\left|\frac{2}{3} - \frac{-1}{3}\right| + \left|\frac{2}{3} + \frac{-1}{3}\right| \quad \Rightarrow \quad \lambda < 3.$$

Оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен при $p \in (2,3)$.

Пример 2.7. Пусть $Q = (0,3) \times (0,1)$ и

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) - u(x_1+1, x_2) + u(x_1+2, x_2).$$

Тогда $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для любого $p \in (2,\infty)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda = 1+\varepsilon$ удовлетворяет условию (2.65):

$$2 \cdot 1 > (1+\varepsilon)^{-1}|1-0| + |1+0|, \qquad 2 \cdot 1 > (1+\varepsilon)^{-1}|0-1| + |0+1|.$$

Условие (2.69) удовлетворено, оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен.

2.3.3. Свойства оператора $\Delta_p R_Q$ и существование обобщенного решения. Сначала сформулируем несколько свойств оператора двойственности, действующего в сепарабельном, рефлексивном, банаховом пространстве.

Лемма 2.9. *Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $L_p(Q)$. Тогда*

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle Ju_m, u_m\rangle \geqslant \langle Ju, u\rangle. \tag{2.75}$$

Доказательство. Согласно определению оператора двойственности, неравенство (2.75) следует из свойства предела норм слабо сходящихся последовательностей: так как $\varliminf_{m\to\infty} \|u_m\| \geqslant \|u\|$, то $\varliminf_{m\to\infty} \|u_m\|^p = \varliminf_{m\to\infty} \langle Ju_m, u_m\rangle \geqslant \langle Ju, u\rangle = \|u\|^p$, см., например, [15, лемма 5.3, гл. 1]. $\square$

Для двух следующих лемм потребуется покоординатное представление элементов пространств Лебега $L_p(Q)$ и $L_q(Q)$. Введем биортогональный базис пары пространств $L_p(Q)$ и $L_q(Q)$. Поскольку эти пространства рефлексивны, сепарабельны и банаховы, то существует[1] базис $\{e_i, g_i\}$ такой, что $\{e_i\}$ — базис в $L_p(Q)$, $\{g_i = J(e_i)\}$ — базис в $L_q(Q)$, а $\langle e_i, J(e_j)\rangle = \delta_{ij}$. При этом каждому элементу $u \in L_p(Q)$ ставится в соответствие ряд Фурье

$$u = \sum_{1\leqslant i<\infty} \langle g_i, u\rangle e_i \equiv \sum_{1\leqslant i<\infty} u^{(i)} e_i, \tag{2.76}$$

соответственно, элементы $J(u)$ имеют разложение в ряд Фурье

$$J(u) = \sum_{1\leqslant i<\infty} \langle J(u), e_i\rangle g_i \equiv \sum_{1\leqslant i<\infty} (Ju)^{(i)} g_i. \tag{2.77}$$

Распишем формально:

$$J(u) = |u|^{p-2}u = \left|\sum_{1\leqslant i<\infty} u^{(i)} e_i\right|^{p-2} \sum_{1\leqslant i<\infty} u^{(i)} e_i =$$
$$= \sum_{1\leqslant i<\infty} |u^{(i)}|^{p-2} u^{(i)} |e_i|^{p-2} e_i + \sum_{1\leqslant i<\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots : \exists j_k \neq i} c_{j_1 j_2 \ldots} \prod_{\sum p_{j_l} = p-2} |e_{j_l}|^{p_{j_l}} e_i,$$

т. е. в первой сумме участвуют слагаемые с одинаковыми функциями $|e_i|^{p-2}e_i$, а во второй сумме — в произведении обязательно будут участвовать не менее двух различных функций e_{j_k} и e_{j_l},

[1] В общем случае переход к покоординатному представлению с использованием биортогонального базиса описан, например, в [35].

$k \neq l$. По определению биортогональной системы, $\left\langle \prod\limits_{\sum p_{j_l}=p-2; j_k \neq i} |e_{j_l}|^{p_{j_l}} e_i, e_j \right\rangle = 0$. Таким образом,

$$\langle J(u), e_i\rangle = \sum_{1\leqslant j<\infty} |u^{(j)}|^{p-2}u^{(j)}\langle |e_j|^{p-2}e_j, e_i\rangle = |u^{(i)}|^{p-2}u^{(i)}\langle |e_i|^{p-2}e_i, e_i\rangle = |u^{(i)}|^{p-2}u^{(i)},$$

$$J(u) = \sum_{1\leqslant i<\infty} |u^{(i)}|^{p-2}u^{(i)}g_i. \tag{2.78}$$

Поскольку ряд коэффициентов u суммируем в степени p ($\sum\limits_{1\leqslant i<\infty} |u^{(i)}|^p < \infty$), то ряд коэффициентов Ju суммируем в степени q:

$$\sum_{1\leqslant i<\infty} |(Ju)^{(i)}|^q = \sum_{1\leqslant i<\infty} \left(|u^{(i)}|^{p-1}\right)^q = \sum_{1\leqslant i<\infty} |u^{(i)}|^p < \infty.$$

Лемма 2.10. *Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $L_p(Q)$. Тогда $J(u_m) \rightharpoonup J(u)$ в $L_q(Q)$.*

Доказательство. В силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\}$, эта последовательность сходится покоординатно: $u_m^{(i)} \to u^{(i)}$ для всех i. Но тогда имеем сходимость $|u_m^{(i)}|^{p-2}u_m^{(i)} \to |u^{(i)}|^{p-2}u^{(i)}$. С учетом связи покоординатного представления элементов u_m, u и $J(u_m), J(u)$, см. (2.78), получена покоординатная сходимость $J(u_m) \to J(u)$. Покоординатная сходимость в рефлексивном банаховом пространстве эквивалентна слабой, а двух различных слабых пределов не существует, т. е. $J(u_m) \rightharpoonup J(u)$ в $L_q(Q)$. $\square$

Лемма 2.11. *Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $L_p(Q)$. Тогда для произвольного сильно аккретивного оператора $\widehat{R}_Q$ справедливо, что*

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m\rangle \geqslant \langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle. \tag{2.79}$$

Доказательство. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $L_p(Q)$. Тогда $Ju_m \rightharpoonup Ju$ в $L_q(Q)$ (см. лемму 2.10) и $\widehat{R}_Q u_m \rightharpoonup \widehat{R}_Q u$ (в силу непрерывности оператора $\widehat{R}_Q$). Поскольку $\langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m\rangle \geqslant 0$ в силу аккретивности оператора $\widehat{R}_Q$, то в случае, когда $u_m \rightharpoonup 0$, выражение (2.79) справедливо. Поэтому рассмотрим случай, когда $u \neq 0$. Тогда $\|u\| \neq 0$ и, с точностью до подпоследовательности, $\|u_m\| \neq 0$, а также $\langle J(u_m), \widehat{R}_Q u_m\rangle \geqslant c_a\|u_m\|^p > 0$. Распишем данное выражение с помощью соответствующих рядов Фурье. Поскольку

$$u_m = \sum_{1\leqslant i<\infty} u_m^{(i)} e_i, \qquad Ju_m = \sum_{1\leqslant i<\infty} (Ju_m)^{(i)} g_i = \sum_{1\leqslant i<\infty} |u_m^{(i)}|^{p-2}u_m^{(i)} g_i,$$

$$\widehat{R}_Q u_m = \widehat{R}_Q\left(\sum_{1\leqslant i<\infty} u_m^{(i)} e_i\right) = \sum_{1\leqslant i<\infty} u_m^{(i)} \widehat{R}_Q(e_i)$$

(в силу линейности оператора $\widehat{R}_Q$), то

$$\langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m\rangle = \left\langle \sum_{1\leqslant j<\infty} (Ju_m)^{(j)} g_j, \sum_{1\leqslant i<\infty} u_m^{(i)} \widehat{R}_Q(e_i) \right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j<\infty} |u_m^{(j)}|^{p-2}u_m^{(j)}u_m^{(i)} \left\langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i)\right\rangle > 0.$$

То есть для достаточно больших значений $\widehat{N} \in \mathbb{N}$ с точностью до подпоследовательностей

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant \widehat{N}} |u_m^{(j)}|^{p-2}u_m^{(j)}u_m^{(i)} \left\langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i)\right\rangle > 0.$$

Теперь можно использовать теорему о минимаксе и поменять порядок перехода к пределам в следующей формуле:

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m\rangle = \varliminf_{m\to\infty} \sum_{1\leqslant i,j<\infty} |u_m^{(j)}|^{p-2}u_m^{(j)}u_m^{(i)} \left\langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i)\right\rangle =$$

$$= \varliminf_{m\to\infty} \lim_{\widehat{N}\to\infty} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant \widehat{N}} |u_m^{(j)}|^{p-2} u_m^{(j)} u_m^{(i)} \left\langle g_j, \widehat{R}_Q\left(e_i\right)\right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\widehat{N}\to\infty} \varliminf_{m\to\infty} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant \widehat{N}} |u_m^{(j)}|^{p-2} u_m^{(j)} u_m^{(i)} \left\langle g_j, \widehat{R}_Q\left(e_i\right)\right\rangle =$$

$$= \lim_{\widehat{N}\to\infty} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant \widehat{N}} |u^{(j)}|^{p-2} u^{(j)} u^{(i)} \left\langle g_j, \widehat{R}_Q\left(e_i\right)\right\rangle = \langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle.$$

□

Лемма 2.12. *Оператор $\Delta_p R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, заданный формулой* (2.43), *ограничен и деминепрерывен.*

Доказательство. p-Лапласиан удовлетворяет условию интегрируемости с $A_i(x,\xi) = |\xi_i|^{p-2}\xi_i$. Поэтому утверждение леммы 2.12 следует из леммы 1.9.

Можно привести непосредственное доказательство. В силу леммы 1.6 линейный оператор $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$ ограничен; p-лапласиан ограничен и деминепрерывен как отображение двойственности в $\mathring{W}_p^1(Q)$, см. [33, гл. II, пп. 2.2]; следовательно $\Delta_p R_Q$ также ограничен и деминепрерывен. □

Лемма 2.13. *Пусть $W_p^1(Q) \ni u_m \rightharpoonup u_0 \in W_p^1(Q)$ и*

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i(u_m - u_0)\rangle \leqslant 0. \tag{2.80}$$

Тогда, если $\widehat{R}_Q$ сильно аккретивен, то

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \langle J\partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0\rangle. \tag{2.81}$$

Доказательство. Так как $u_m \rightharpoonup u_0$ в $W_p^1(Q)$, то, по определению слабой сходимости в пространстве $W_p^1(Q)$, $\partial_i u_m \rightharpoonup \partial_i u_0$ в $L_p(Q)$ для любого $i = 1, \dots, n$. Исходя из оценки (2.80), существует индекс $i = i_1$ такой, что

$$\varlimsup_{m\to\infty} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i(u_m - u_0)\rangle \leqslant 0. \tag{2.82}$$

В силу свойств оператора двойственности, $J(\partial_i u_m) \rightharpoonup J(\partial_i u_0)$ в $L_q(Q)$ при $\partial_i u_m \rightharpoonup \partial_i u_0$ в $L_p(Q)$, см. лемму 2.10. Кроме того, линейный оператор $\widehat{R}_Q$ непрерывен, т. е. $\widehat{R}_Q\partial_i u_m \rightharpoonup \widehat{R}_Q\partial_i u_0$ в $L_p(Q)$. Воспользуемся линейностью оператора $\widehat{R}_Q\partial_i$ и распишем (2.82):

$$\varlimsup_{m\to\infty} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m\rangle \leqslant \lim_{m\to\infty} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_0\rangle = \langle J\partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0\rangle \tag{2.83}$$

для $i = i_1$. Но в лемме 2.11 доказано, что

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m\rangle \geqslant \langle J\partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0\rangle$$

в силу сильной аккретивности $\widehat{R}_Q$. Таким образом, для $i = i_1$

$$\lim_{m\to\infty} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m\rangle = \langle J\partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0\rangle. \tag{2.84}$$

Из (2.80) и (2.84) следует, что

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sum_{i\neq i_1} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m - \partial_i u_0\rangle \leqslant 0. \tag{2.85}$$

Повторяя рассуждения, использованные при выводе (2.84), из (2.85) получим, что существует индекс $i = i_2 \neq i_1$ такой, что $\lim\limits_{m\to\infty} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m\rangle = \langle J\partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0\rangle$. Следовательно, за конечное число шагов мы докажем равенство (2.81). □

Лемма 2.14. *Пусть разностному оператору* $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$ *соответствуют невырожденные матрицы* R_s, $a_h \in \mathbb{R}^1$. *Кроме того, пусть обратный оператор*[1] R_Q^{-1} *сильно аккретивен*[2]. *Тогда оператор* $\Delta_p R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, *заданный формулой* (2.43), *псевдомонотонен и коэрцитивен.*

Доказательство. Поскольку разностному оператору $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$ соответствуют невырожденные матрицы R_s, то существует обратный оператор R_Q^{-1}, причем для любых $u, \xi \in \mathring{W}_p^1(Q)$

$$\langle \Delta_p R_Q u, \xi \rangle = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle J \partial_i R_Q u, \partial_i \xi \rangle = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle J \partial_i w, R_Q^{-1} \partial_i \psi \rangle,$$

где $w = R_Q u$, $\psi = R_Q \xi$. Здесь было учтена коммутативность разностного оператора R_Q и оператора дифференцирования ∂_i (см. лемму 1.5):

$$R_Q^{-1} \partial_i \psi = R_Q^{-1} \partial_i R_Q \xi = R_Q^{-1} R_Q \partial_i \xi = \partial_i \xi.$$

Покажем псевдомонотонность $\Delta_p R_Q$. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathring{W}_p^1(Q)$ и

$$\varlimsup_{m \to \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u \rangle \leqslant 0.$$

Рассмотрим последовательность $\{w_m = R_Q u_m\}$. В силу непрерывности оператора R_Q данная последовательность $w_m \rightharpoonup w = R_Q u$ слабо в $W_p^1(Q)$. Кроме того,

$$\varlimsup_{m \to \infty} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle J \partial_i w_m, R_Q^{-1} \partial_i (w_m - w) \rangle = \varlimsup_{m \to \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u \rangle \leqslant 0.$$

Поскольку R_Q^{-1} — линейный, сильно аккретивный оператор, то справедливо равенство (2.81), см. лемму 2.13:

$$\lim_{m \to \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle J \partial_i w_m, R_Q^{-1} \partial_i w_m \rangle = \langle J \partial_i w_m, R_Q^{-1} \partial_i w_m \rangle = \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle.$$

Псевдомонотонность оператора $\Delta_p R_Q$ доказана.

Покажем, что оператор $\Delta_p R_Q$ коэрцитивен. В силу коммутативности R_Q и ∂_i, а также сильной аккретивности оператора R_Q^{-1} получаем, что

$$\langle \Delta_p R_Q u, u \rangle = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle J \partial_i R_Q u, R_Q^{-1} \partial_i R_Q u \rangle \geqslant c_a \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \| \partial_i R_Q u \|_{L_p(Q)}^p,$$

см. (2.65). Осталось использовать невырожденность R_Q и оценку (1.22):

$$\langle \Delta_p R_Q u, u \rangle \geqslant c_a \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \| \partial_i R_Q u \|_{L_p(Q)}^p = c_a \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \| R_Q \partial_i u \|_{L_p(Q)}^p \geqslant$$
$$\geqslant c_5^{-p} c_a \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \| \partial_i u \|_{L_p(Q)}^p = c_5^{-p} c_a \| u \|_{\mathring{W}_p^1(Q)}^p. \quad (2.86)$$

Коэрцитивность доказана. □

Теорема 2.3. *Пусть разностному оператору* $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$ *соответствуют невырожденные матрицы* R_s, $a_h \in \mathbb{R}^1$. *Кроме того, пусть обратный оператор* R_Q^{-1} *сильно аккретивен. Тогда задача* (2.40), (2.41) *имеет непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений. Кроме того, решения задачи* (2.40), (2.41) *удовлетворяют оценке*

$$\| u \|_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant \mathrm{const} \| f \|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}. \quad (2.87)$$

Доказательство. Вследствие лемм 2.12 и 2.14 при указанных выше условиях оператор $\Delta_p R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, заданный формулой (2.43), деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Эти свойства гарантируют существование элемента $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$, удовлетворяющего тождеству (2.43), см. [33, теорема 2.7, гл. 2].

[1]Здесь R_Q^{-1} существует в силу невырожденности матриц R_s.

[2]В предыдущем разделе доказаны достаточные, но не необходимые условия сильной аккретивности.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора. Докажем это, одновременно доказывая оценку (2.87). Пусть u — обобщенное решение задачи (2.40), (2.41). Тогда из оценки коэрцитивности (2.86) и интегрального тождества (2.43) следует, что

$$c_5^{-p} c_a \|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} \leqslant \langle \Delta_p R_Q u, u\rangle = \langle f, u\rangle \leqslant \|f\|_{W_q^{-1}(Q)} \|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)},$$

что и доказывает оценку (2.87).

Покажем, что из псевдомонотонности $\Delta_p R_Q$ следует слабая замкнутость множества решений. Пусть последовательность $\{u_m\}$ принадлежит множеству решений, $\mathring{W}^1_p(Q) \ni u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathring{W}^1_p(Q)$. Поскольку

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, u_m - u\rangle = 0,$$

то в силу псевдомонотонности оператора $\Delta_p R_Q$ для любого $\xi \in \mathring{W}^1_p(Q)$

$$\langle f, u-\xi\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle f, u_m - \xi\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - \xi\rangle \geqslant \langle \Delta_p R_Q u, u - \xi\rangle.$$

Из этого следует, что u удовлетворяет интегральному тождеству (2.43). □

Пример 2.8. Пусть $Q = (0,\ 2{,}4) \times (0, 1)$ и

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) - u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 + 2, x_2).$$

Область разбивается на два класса подмножеств, см. рис. 2.1.

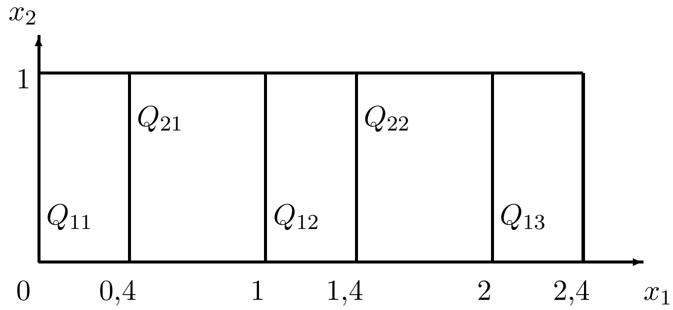

Рис. 2.1. Разбиение области $Q = (0,\ 2{,}4) \times (0, 1)$.

Fig. 2.1. Partition of the domain $Q = (0,\ 2{,}4) \times (0, 1)$.

Оператору R_Q соответствуют две матрицы R_1 и R_2:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратными к ним являются матрицы

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В примере 2.7 доказано, что матрица R_1^{-1} соответствует сильно аккретивному оператору для любого $p \in (2, \infty)$. Вторая матрица также соответствует сильно аккретивному оператору

$$2 \cdot 1 > \lambda^{-1} |1 - 0| + |1 + 0|,$$

см. лемму 2.8 и оценку (2.69). Следовательно, оператор $\Delta_p R_Q$ деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Решение задачи (2.40), (2.41) существует для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$, $1/q + 1/p = 1$, $p \in (2, \infty)$.

Глава 3

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Постановка начально-краевой задачи. Операторное уравнение

В цилиндре $\Omega_T = Q\times(0,T)$ рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение со сдвигами по пространственным переменным

$$\partial_t u(x,t) + ARu(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t)\in\Omega_T) \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (x\in Q) \tag{3.2}$$

и краевым условием

$$u(x,t) = 0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n\setminus Q,\ 0<t<T). \tag{3.3}$$

Здесь $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q=(0,d)\times G$, $G\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n\geqslant 3$, $G=(0,\widehat{d})$ при $n=2$). В случае $n=1$ мы полагаем $Q=(0,d)$. Пусть дифференциальный оператор A задан формулой

$$Au(x,t) = -\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\partial_i A_i(x,t,u,\nabla u) + A_0(x,t,u,\nabla u). \tag{3.4}$$

Все функции полагаем вещественнозначными. Определим ограниченный разностный оператор $R: L_p(\mathbb{R}^{n+1})\to L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ по формуле

$$Ru(x,t) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h,t), \tag{3.5}$$

где $a_h\in\mathbb{R}$, $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными (или соизмеримыми) координатами, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Поскольку разностный оператор R является нелокальным, сдвиги на вектора $h\in\mathcal{M}$ могут отображать точки $x\in Q$ в точки $x+h\in\mathbb{R}^n\setminus Q$. Поэтому краевые условия должны задавать значения неизвестной функции не только на границе цилиндра $\Gamma_T=\partial Q\times(0,T)$, но и на некотором множестве, лежащем в $(\mathbb{R}^n\setminus Q)\times(0,T)$. Для простоты в дальнейшем мы можем считать, что это множество совпадает с $(\mathbb{R}^n\setminus Q)\times(0,T)$. Поэтому краевые условия (3.3) задаются на всем множестве $(\mathbb{R}^n\setminus Q)\times(0,T)$.

Будем искать обобщенные решения данной задачи в соболевских пространствах. Линейные пространства

$$L_p(0,T;X) := \left\{ u:[0,T]\to X:\ \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{L_p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt\right)^{1/p}$$

являются рефлексивными банаховыми при $1<p<\infty$, если этими свойствами обладало пространство X, см., например [15]. В данной работе в качестве X рассматриваются пространства $W_p^1(Q)$ и $\mathring{W}_p^1(Q)$, обладающие данными свойствами; определения этих соболевских пространств приведены в разделе 1.1.

Пусть $1/p+1/q=1$ и

$$\mathcal{V} := L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))\cap L_2(\Omega_T).$$

Таким образом, $\mathcal{V}=L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$ при $p\in[2,\infty)$, а сопряженным к нему является пространство $\mathcal{V}^* := L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$. При $p\in(1,2)$ сопряженным к $\mathcal{V}$ является пространство

$\mathcal{V}^* := L_q(0,T;W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T)$. При этом если $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и $f_2 \in L_2(\Omega_T)$, то для любого $\xi \in \mathcal{V}$ положим

$$\langle f, \xi \rangle = \int_0^T \langle f_1(t), \xi(t) \rangle_p dt + \int_0^T (f_2(t), \xi(t)) dt,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : W_q^{-1}(Q) \times \mathring{W}_p^1(Q) \to \mathbb{R}$ — спаривание, $(\cdot, \cdot) : L_2(Q) \times L_2(Q) \to \mathbb{R}$ — скалярное произведение, норма в $\mathcal{V}^*$ определена по формуле

$$\|f\|_{\mathcal{V}^*} := \inf_{\substack{f_1 \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q)),\\ f_2 \in L_2(\Omega_T),\\ f = f_1 + f_2}} \max \left(\|f_1\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \ \|f_2\|_{L_2(\Omega_T)} \right).$$

Подробнее (и в более общей постановке) эти пространства описаны в [15, гл. IV, §1, п. 5], а также в [20, 33] и др.[1]

Также будем рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$W = \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*\} \tag{3.6}$$

с нормой $\|u\|_W = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$, где $\partial_t u$ — производная элемента $u \in \mathcal{V}$ в смысле распределений со значениями в $\mathcal{V}^*$. Как известно, пространство $W \subset C(0,T;L_2(Q))$, см. [15, теорема 1.17, гл. IV], поэтому $u|_{t=0}$ имеет смысл. Будем предполагать, что правая часть в (3.1) $f \in \mathcal{V}^*$ и начальные условия в (3.2) $\varphi \in L_2(Q)$.

Поскольку оператор R нелокальный, введем оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$, где $I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ — оператор продолжения функций из $L_p(\Omega_T)$ нулем в $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0,T)$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \to L_p(\Omega_T)$ — оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ на Ω_T. Функция $u(x,t)$, определенная на Ω_T, отображается в функцию $(I_Q u)(x,t)$, определенную на множестве $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. После действия оператора R на $I_Q u$ мы вновь получаем функцию, определенную на множестве $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Оператор P_Q вводится для того, чтобы получить сужение функции $(RI_Q u)(x,t)$ на область Ω_T. Поскольку вышесказанное справедливо для всех $p \in (1,\infty)$, то получаем, что

$$R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T) \to L_p(0,T;W_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T).$$

Задача (3.1)–(3.3) рассматривается как операторное уравнение

$$\partial_t u + A_R u = f \tag{3.7}$$

в пространстве W с начальным условием (3.3), где $A_R := AR_Q$. Ниже будут наложены стандартные условия, гарантирующие, что дифференциальный оператор A действует из пространства $L_p(0,T;W_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$ в $\mathcal{V}^*$, см. [15, 29, 72]. Таким образом,

$$A_R : \mathcal{V} = L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T) \to \mathcal{V}^*.$$

Определение 3.1. Будем называть функцию $u \in W$ *обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3), если она удовлетворяет операторному уравнению (3.7) и начальному условию (3.2).

Для определения корректной интегральной формы дифференциальные операторы должны удовлетворять условию интегрируемости: коэффициенты оператора A, заданного в (3.4), являются функциями типа Каратеодори (т. е. измеримы по $(x,t) \in \Omega_T$ и непрерывны по остальным переменным для п.в. $(x,t) \in \Omega_T$), а также удовлетворяют оценке

$$|A_i(x,t,\xi)| \leqslant g(x,t) + c_1 \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^{p-1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.8}$$

где $c_1 > 0$ и $g \in L_q(\Omega_T)$. Тогда для любого $v \in \mathcal{V}$

$$\langle A_R u, v \rangle := \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \int_{\Omega_T} A_i\left(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \ldots, \partial_n R_Q u\right) \partial_i v \, dx \, dt, \tag{3.9}$$

[1]В более общем случае $\mathcal{V} = L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \cap L_{p_0}(0,T;L_2(Q)))$, где $1 < p \leqslant p_0 < \infty$ и $1/p + 1/q = 1/p_0 + 1/q_0 = 1$. При рассмотрении в таком пространстве несколько усложнится ряд формул, но общие результаты будут аналогичны изложенным в работе.

здесь и ниже $\partial_0 u := u$.

Определение 3.2. Функция $u \in \mathcal{V}$ называется *слабым обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\Omega_T} u\,\partial_t v\,dx\,dt + \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T} A_i\left(x,t,R_Q u,\partial_1 R_Q u,\ldots,\partial_n R_Q u\right)\partial_i v\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_T} f v\,dx\,dt + \int\limits_{Q} \varphi\xi\big|_{t=0}\,dx \quad (3.10)$$

для всех $\xi \in W$ таких, что $\xi\big|_{t=T} = 0$.

3.2. Разбиение области Ω_T и свойства разностного оператора

Отметим, что рассматривается оператор со сдвигами только по пространственным переменным. Поэтому можно воспользоваться результатами эллиптической теории, см. 1.2. В этом разделе будут сформулированы свойства оператора

$$R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W_p^1(Q)).$$

Лемма 3.1. *Операторы* $I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n\times(0,T))$ *и* $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n\times(0,T)) \to L_p(\Omega_T)$, *а также* $R : L_p(\mathbb{R}^n\times(0,T)) \to L_p(\mathbb{R}^n\times(0,T))$ *и* $R_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ *ограничены,* $1<p<\infty$.

Обозначим через $L_p\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\times(0,T)\Big)$ подпространство функций из $L_p(\Omega_T)$, обращающихся в нуль при $x\notin\bigcup\limits_l Q_{sl}$ ($l=1,\ldots,N(s)$). Введем ограниченный оператор

$$P_s : L_p(\Omega_T) \to L_p\Big(\bigcup_l Q_{sl}\times(0,T)\Big)$$

по формуле

$$P_s u(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x\in\bigcup\limits_l Q_{sl},\\ 0, & x\in Q\setminus\bigcup\limits_l Q_{sl}, \end{cases} \qquad t\in(0,T).$$

Очевидно, что P_s является оператором проектирования на $L_p\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\times(0,T)\Big)$. Поскольку $\operatorname{mes}_n(\partial Q_{sl})=0$, пространства Лебега $L_p(Q)$ и $L_p(\Omega_T)$ можно рассматривать как прямые суммы соответствующих пространств над классами подобластей:

$$L_p(Q) = \dot{+}_s\, L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right); \qquad L_p(\Omega_T) = \dot{+}_s\, L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\times(0,T)\right). \quad (3.11)$$

Лемма 3.2. $L_p\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\times(0,T)\Big)$ *является инвариантным подпространством оператора* R_Q *для любого* $1<p<\infty$.

Изоморфизм рефлексивных банаховых пространств

$$U_s : L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\times(0,T)\right) \to L_p^{N(s)}\Big(Q_{s1}\times(0,T)\Big) \equiv L_p\Big(Q_{s1}\times(0,T)\Big)\times\cdots\times L_p\Big(Q_{s1}\times(0,T)\Big)$$

определяется по формуле

$$(U_s u)_l(x,t) = u(x+h_{sl},t) \qquad (x\in Q_{s1}, t\in(0,T),\ l=1,\ldots,N(s)), \quad (3.12)$$

где $h_{s1}=0$.

Лемма 3.3. *Оператор* $R_{Qs} : L_p^{N(s)}(Q_{s1} \times (0,T)) \to L_p^{N(s)}(Q_{s1} \times (0,T))$, *заданный соотношением*

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{3.13}$$

является оператором умножения на матрицу R_s *порядка* $N(s) \times N(s)$ *с элементами*

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 1.3; для $p = 2$ ср. с [106, лемма 8.9].

Из ограниченности области Q и формул (3.14) следует, что в случае постоянных коэффициентов a_h число различных матриц R_s конечно. Обозначим это число n_1, и пусть R_{s_ν} обозначают все различные матрицы R_s ($\nu = 1, \dots, n_1$).

Лемма 3.4. *Спектр оператора* R_Q

$$\sigma(R_Q) = \bigcup_{1 \leqslant \nu \leqslant n_1} \sigma(R_{s_\nu}).$$

Лемма 3.5. *Отображение* $R_Q : L_p\left(0,T; \mathring{W}_p^1(Q)\right) \to L_p\left(0,T; W_p^1(Q)\right)$ *непрерывно, причем*

$$\partial_i (R_Q u)(x,t) = R_Q \partial_i u(x,t) \qquad ((x,t) \in \Omega_T). \tag{3.15}$$

Утверждение леммы следует из равенства (3.15) для функций $u \in \dot{C}^\infty(\Omega_T)$ и плотности подпространства $\dot{C}^\infty(\Omega_T)$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$.

Лемма 3.6. *Для всех* $u \in L_p\left(0,T; W_p^1(Q)\right)$ *имеем* $R_Q u \in L_p\left(0,T; W_p^1(Q_{sl})\right)$, *более того, для любых* $s = 1, 2, \dots$, $l = 1, \dots, N(s)$

$$\|R_Q u\|_{L_p\left(0,T;W_p^1(Q_{sl})\right)} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{L_p\left(0,T;W_p^1(Q_{sj})\right)}. \tag{3.16}$$

Кроме того, если $\det R_{s_\nu} \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, n_1$), *то существует обратный оператор* $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ *и* $R_Q^{-1} w \in L_p\left(0,T; W_p^1(Q_{sl})\right)$ *для всех* $w \in L_p\left(0,T; W_p^1(Q)\right)$, *при этом для всех* $s = 1, 2, \dots$ *и* $l = 1, \dots, N(s)$

$$\partial_i (R_Q^{-1} w)(x,t) = R_Q^{-1} \partial_i w(x,t), \qquad ((x,t) \in Q_{sl} \times (0,T)). \tag{3.17}$$

Обратный оператор определен формулой

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s, \tag{3.18}$$

при этом для всех $s = 1, 2, \dots$ *и* $l = 1, \dots, N(s)$ *справедлива оценка*

$$\|R_Q^{-1} w\|_{L_p\left(0,T;W_p^1(Q_{sl})\right)} \leqslant c_3 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{L_p\left(0,T;W_p^1(Q_{sj})\right)}. \tag{3.19}$$

Здесь константы $c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* u, w, *а также от* s.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1.6.

Заметим, что свойства, указанные в леммах 3.4–3.6 справедливы для всех $p \in (1, \infty)$. Таким образом, леммы 3.4–3.6 справедливы не только для оператора $R_Q : \mathcal{V} = L_p\left(0,T; \mathring{W}_p^1(Q)\right) \to L_p\left(0,T; W_p^1(Q)\right)$ при $p \in [2, \infty)$, но и для $R_Q : \mathcal{V} = L_p\left(0,T; \mathring{W}_p^1(Q)\right) \cap L_2(\Omega_T) \to L_p\left(0,T; W_p^1(Q)\right) \cap L_2(\Omega_T)$ при $p \in (1, 2)$.

Лемма 3.7. *Пусть* $\det R_{s_\nu} \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, n_1$). *Тогда*

$$c_5^{-1} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_5 \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \tag{3.20}$$

для некоторой константы $c_5 > 0$, *причем* c_5 *не зависит от* u, *но зависит от* p.

Доказательство следует из равенства $\sigma(R_Q) = \bigcup\limits_{1 \leqslant \nu \leqslant n_1} \sigma(R_{s_\nu})$ в лемме 3.4 и дискретности спектра разностного оператора.

3.3. Квазилинейные параболические уравнения с сильно монотонным дифференциально-разностным оператором. Существование и единственность обобщенного решения

Ряд определений и конструкций, используемых в этом разделе, сформулированы в разделе 1.2.

Лемма 3.8. *Пусть разностный оператор $R_Q : \mathcal{V} \to L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$ имеет постоянные коэффициенты a_h, коэффициенты дифференциального оператора A, заданного в* (3.4)*, являются функциями типа Каратеодори и удовлетворяют оценке* (3.8)*. Тогда оператор $A_R : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ деминепрерывен и ограничен.*

Доказательство. В силу леммы 3.6 линейный оператор R_Q ограничен. Линейный ограниченный оператор непрерывен. Оператор A деминепрерывен и ограничен в силу условия (3.8), см., например, [29, гл. 1, §2]. Композиция $A_R = AR_Q$ является деминепрерывным, ограниченным оператором. ☐

Лемма 3.9. *Пусть $p \in [2,\infty)$, $\{R_s\}$ — матрицы, соответствующие оператору R_Q, $R_s = \{r^s_{ml}\}_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)}$, $R_s + R_s^* > 0$. Мы предполагаем, что оператор A, заданный формулой* (3.4)*, имеет измеримые по $(x,t) \in \Omega_T$ и дифференцируемые по $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0,1,\dots,n)$ коэффициенты $A_i(x,t,\xi)$, $\xi = (\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, причем производные $A_{ij}(x,t,\xi) = \dfrac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}$ удовлетворяют оценкам*

$$\sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} r^s_{ml} A_{ij}\left(x + h_{sm}, t, \zeta_{m\cdot}\right) \eta_{lj}\, \eta_{mi} \geqslant$$
$$\geqslant c_6 \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{mi}|^{p-2}\, |\eta_{mi}|^2 \qquad (x \in Q_{s1}, t \in (0,T)), \quad (3.21)$$

$$|A_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant g_1(x,t) + c_7 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p-2} \quad (i,j = 0,\dots,n,\ (x,t) \in \Omega_T) \qquad (3.22)$$

для любых $s = 1,2,\dots$, $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$; здесь $g_1 \in L_{p/(p-2)}(\Omega_T)$, $c_6 > 0$ и $c_7 \geqslant 0$ не зависят от x, t, ζ и η.

Тогда оператор $A_R : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, заданный формулой (3.4)*, сильно монотонен.*

Доказательство. Пусть $w = R_Q(u-y)$ и $v = R_Q y$, где $u,y \in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Согласно лемме 3.6 существует ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$. Из равенства (3.4) и леммы 3.5 следует, что

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \left(A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(t,x,R_Q y, \nabla R_Q y)\right)(\partial_i u - \partial_i y)\, dx\, dt =$$
$$= \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \left(A_i(x,t,v+w,\nabla v + \nabla w) - A_i(x,t,v,\nabla v)\right) R_Q^{-1} \partial_i w\, dx\, dt = I_1. \quad (3.23)$$

Тогда, используя формулу (3.13), имеем

$$I_1 = \sum_i \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s\big(A_i((x,t,v+w,\nabla(v+w)) - A_i((x,t,v,\nabla v)\big) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\, dx\, dt =$$
$$= \sum_{i,s} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \Big(U_s P_s \left(A_i((x,t,v+w,\nabla(v+w)) - A_i((x,t,v,\nabla v)\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\Big)\, dx\, dt,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. Используем дифференцируемость коэффициентов A_i и формулу Тейлора:

$$I_1 = \sum_{i,j,s} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x,t,v+\tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \, \partial_j w, R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx\, dt =$$
$$= \sum_{i,j,s} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} I_2 \, dx \, dt. \quad (3.24)$$

Заметим, что интегралы по Q_{s1} и $(0,T)$ существуют в силу (3.22). Пусть

$$\mathbb{A}_{ij}(v,w,\tau) := \operatorname{diag}\left\{ U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x,t,v+\tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\}$$

определяет диагональную матрицу размерности $N(s) \times N(s)$ с диагональными элементами

$$\int\limits_0^1 A_{ij}\big(x+h_{sm}, t, (v+\tau w)(x+h_{sm}), (\nabla v + \tau \nabla w)(x+h_{sm})\big) d\tau.$$

Распишем подынтегральное выражение в (3.24):

$$I_2 = \left(\mathbb{A}_{ij}(v,w,\tau) R_s R_s^{-1} \left(U_s P_s \partial_j w\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) =$$
$$= \left(\mathbb{A}_{ij}(v,w,\tau) R_s \left(U_s P_s \partial_j (u-y)\right), U_s P_s \partial_i (u-y) \right) =$$
$$= \sum_{l,m} r^s_{ml} \int\limits_0^1 A_{ij}(x+h_{sm}, t, (v+\tau w)(t, x+h_{sm}), (\nabla v + \tau \nabla w)(x+h_{sm},t)) d\tau \, \times$$
$$\times \, \partial_j (u-y)(x+h_{sl},t) \, \partial_i (u-y)(x+h_{sm},t)$$

для почти всех $t \in (0,T)$ и $x \in Q_{s1}$. Используя алгебраическое условие сильной эллиптичности (3.21) получим, что

$$\sum_{1 \leqslant l,m \leqslant N(s)} \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} r^s_{ml} \int\limits_0^1 A_{ij}(x+h_{sm}, t, (v+\tau w)(t,x+h_{sm}), (\nabla v + \tau \nabla w)(t, x+h_{sm}))\, d\tau \, \times$$
$$\times \; \partial_j (u-y)(x+h_{sl},t) \, \partial_i (u-y)(x+h_{sm},t) \geqslant$$
$$\geqslant c_6 \sum_{1 \leqslant m \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_0^1 \left| \left(\partial_i v + \tau \partial_i w\right)(x+h_{sm},t)\right|^{p-2} d\tau \, \left|\partial_i (u-y)(x+h_{sm},t)\right|^2 .$$

Согласно известной оценке $\int\limits_0^1 |a+\tau b|^{p-2}\, d\tau \geqslant c_8 |b|^{p-2}$,

$$\int\limits_0^1 \left|\left(\partial_i v + \tau \partial_i w\right)(x+h_{sm})\right|^{p-2} d\tau \geqslant c_8 \left|\partial_i w(x+h_{sm})\right|^{p-2}$$

(доказательство оценки см. в ссылке к лемме 1.10). По построению $w = R_Q(u-y)$. В силу невырожденности матрицы R_s справедлива оценка (3.20), т. е.

$$I_1 \geqslant c_5 c_8 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{s,m} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \left|\partial_i w(x+h_{sm},t)\right|^{p-2} \left|\partial_i (u-y)(x+h_{sm},t)\right|^2 \, dx\, dt =$$

$$= c_5c_8 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{s,m} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \left| \sum_k r_{mk}\partial_i(u-y)(x+h_{sk},t) \right|^{p-2} |\partial_i(u-y)(x+h_{sm},t)|^2 \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant c_9 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{s,m} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} |\partial_i(u-y)(x+h_{sm},t)|^p \, dx\, dt = c_9\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}. \quad (3.25)$$

Сильная монотонность оператора A_R доказана. □

Замечание 3.1. Аналогично доказывается, что при выполнении условий леммы 3.9

$$\langle A_Ru - A_Rv, u-v\rangle_t = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_0^t \int\limits_Q (A_i(x,\tau,R_Qu,\nabla R_Qu) - A_i(x,\tau,R_Qv,\nabla R_Qv))\, \partial_i(u-v)\, dx\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant c_9\|u-v\|^p_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))}. \quad (3.26)$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия интегрируемости* (3.8)*, дифференцируемости* (3.22) *для* $i,j = 0,1,\ldots,n$ *и сильной эллиптичности* (3.21)*,* $p \in [2,\infty)$*. Тогда для любых* $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *и* $\varphi \in L_2(Q)$*, существует единственное обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3)*, более того, справедливы следующие оценки:*

$$\|u_1-u_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} \leqslant \|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{10}\|f_1-f_2\|^{q/2}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \quad (3.27)$$

$$\|u_1-u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant c_{11}\|\varphi_1-\varphi_2\|^{2/p}_{L_2(Q)} + c_{12}\|f_1-f_2\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \quad (3.28)$$

где u_1 *и* u_2 *— обобщенные решения задачи* (3.1)–(3.3) *при правых частях* f_1 *и* f_2 *и начальных условиях* φ_1 *и* φ_2*, соответственно;* $c_{10}, c_{11}, c_{12} > 0$ *не зависят от* u_k, f_k *и* φ_k*.*

Доказательство. Согласно лемме 3.8 оператор A_R деминепрерывен и ограничен. Согласно лемме 3.9 оператор A_R сильно монотонен. Сильно монотонный оператор строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, решение операторного уравнения (3.7) с начальным условием (3.3) существует и единственно, см. [15, теорема 1.1, гл. VI, §1].

Докажем оценки (3.27) и (3.28). Пусть $u_1 \in W$ и $u_2 \in W$ — обобщенные решения задачи (3.1)–(3.3) при правых частях f_1 и f_2, а также начальных условиях φ_1 и φ_2, соответственно. Тогда для всех $t \in (0,T]$ имеем, что

$$\frac{1}{2}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_Ru_1 - A_Ru_2, u_1-u_2\rangle_t = \langle f_1-f_2, u_1-u_2\rangle_t + \frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.29)$$

Здесь использована известная оценка

$$\int\limits_{\Omega_t} \partial_t u\cdot u\, dx\, dt = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L_2(Q)}$$

(см., например, [15, замечание 1.22, гл. IV, §2]).

Пусть также $u_3 \in W$ — обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) при $\varphi = \varphi_1$ и $f = f_2$. Тогда для всех $t \in (0,T]$

$$\frac{1}{2}\|u_1(t)-u_3(t)\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_Ru_1 - A_Ru_3, u_1-u_3\rangle_t = \langle f_1-f_2, u_1-u_3\rangle_t, \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{2}\|u_3(t)-u_2(t)\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_Ru_3 - A_Ru_2, u_3-u_2\rangle_t = \frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.31)$$

Используем оценку (3.26) и неотрицательность первого слагаемого левой части равенства (3.30):

$$c_9\|u_1-u_3\|^p_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \langle A_Ru_1 - A_Ru_3, u_1-u_3\rangle_t = \langle f_1-f_2, u_1-u_3\rangle_t - \frac{1}{2}\|u_1(T)-u_3(T)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \langle f_1-f_2, u_1-u_3\rangle_t \leqslant \|f_1-f_2\|_{L_q(0,t;W_q^{-1}(Q))}\|u_1-u_3\|_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))},$$

т. е.

$$\|u_1 - u_3\|^{p-1}_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \frac{1}{c_9}\|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W^{-1}_q(Q))}. \tag{3.32}$$

Кроме того, в силу монотонности A_R из (3.30) следует, что

$$\frac{1}{2}\|u_1(t) - u_3(t)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W^{-1}_q(Q))}\|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))}.$$

Подставив оценку $\|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))}$ из (3.32), мы получим, что

$$\|u_1(t) - u_3(t)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{2}{c_9}\|f_1 - f_2\|^q_{L_q(0,t;W^{-1}_q(Q))}. \tag{3.33}$$

В то же время, из неотрицательности второго слагаемого левой части равенства (3.31) следует, что

$$\|u_3(t) - u_2(t)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.34}$$

С другой стороны, из (3.26) и (3.31) следует, что

$$c_9\|u_3 - u_2\|^p_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3 - u_2\rangle_t \leqslant \frac{1}{2}\|u_3(t) - u_2(t)\|^2_{L_2(Q)} + \\ + \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3 - u_2\rangle_t = \frac{1}{2}\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.35}$$

Используя неравенство треугольника, из (3.32)–(3.35) получаем, что

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)} \leqslant \|u_1(t) - u_3(t)\|_{L_2(Q)} + \|u_3(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)} \leqslant \\ \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{10}\|f_1 - f_2\|^{q/2}_{L_q(0,t;W^{-1}_q(Q))},$$

$$\|u_1 - u_2\|_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))} + \|u_3 - u_2\|_{L_p(0,t;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \\ \leqslant c_{11}\|\varphi_1 - \varphi_2\|^{2/p}_{L_2(Q)} + c_{12}\|f_1 - f_2\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,t;W^{-1}_q(Q))}.$$

Оценки (3.27) и (3.28) доказаны. □

3.4. Операторы с $(\mathcal{V}; W)$-полуограниченной вариацией и обладающие свойством (S_+) на W операторы. Существование обобщенного решения

В этом разделе рассмотрим ситуацию, когда алгебраическому условию сильной эллиптичности удовлетворяет только «главная часть» оператора A_R, содержащая производные только старшего порядка. Как и в эллиптическом случае, построенное в этом разделе условие сильной эллиптичности для параболического квазилинейного дифференциально-разностного оператора при отсутствии сдвигов вырождается в условие, предложенное Ю. А. Дубинским, см. [20].

Напомним, что в общем случае банахово пространство $W \subset X$ определено по формуле

$$W = \{u \in X : \partial_t u \in X^*\}.$$

Определение 3.3. Оператор $\mathcal{A} : W \to X^*$ называется *оператором с $(X; W)$-полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция C, для которой при всех $u, y \in X$ таких, что $\|u\|_X \leqslant r_1$, $\|y\|_X \leqslant r_1$, выполняется условие

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}y, u - y\rangle \geqslant -C(r_1; \|u - y\|'_W), \tag{3.36}$$

где $\tau^{-1}C(r_1, \tau r_2) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r_1, r_2 > 0$, $\|\cdot\|'_W$ — полунорма, компактная относительно $\|\cdot\|_W$ и непрерывная относительно $\|\cdot\|_X$.

При $X = L_p(0, T; \mathring{W}^1_p(Q))$ удобно рассматривать в качестве $\|\cdot\|'_W := \|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$. Как известно,

$$W = \{u \in L_p(0, T; \mathring{W}^1_p(Q)) : \partial_t u \in L_q(0, T; W^{-1}_q(Q))\}$$

вложено в $L_p(\Omega_T)$ компактно, см., например, [33, (2.16), гл. 3, п. 2] и [33, теорема 5.1, гл. 1, п. 5].

Определение 3.4. Говорят, что оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X^*$ с линейной областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *радиально непрерывен*[1], если для любых $u, y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $v \in X$ непрерывна функция $\tau \mapsto \langle \mathcal{A}(u + \tau y), v\rangle$.

Определение 3.5. Оператор $\mathcal{A} : W \to X^*$ называется *псевдомонотонным на* W, если для любой последовательности $u_m \rightharpoonup u$, сходящейся слабо в W, при выполнении оценки

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0 \tag{3.37}$$

справедливо соотношение

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - \xi\rangle \geqslant \langle \mathcal{A}u, u - \xi\rangle \qquad \forall \xi \in X. \tag{3.38}$$

Как известно, радиально непрерывный оператор с $(X; W)$-полуограниченной вариацией является псевдомонотонным на W, см. [36, предложение 4.2.2, гл. 4, §4.2].

Определение 3.6. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ слабо в W и справедлива оценка (3.37). Если при этом $u_m \to u$ в X, то $\mathcal{A} : W \to X^*$ *обладает свойством* (S_+) *на* W.

Деминепрерывный оператор, обладающий свойством (S_+) на W, псевдомонотонен на W, доказательство аналогично приведенному в [57, с. 11]. Для удобства читателей докажем это. Пусть $u_j \rightharpoonup u$ слабо в W и справедлива оценка (3.37). Тогда $u_j \to u$ в X согласно свойству (S_+) на W и $\mathcal{A}u_j \rightharpoonup \mathcal{A}u$ слабо в X в силу деминепрерывности оператора $\mathcal{A}$. Следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty} \langle \mathcal{A}u_j, u_j - \xi\rangle = \langle \mathcal{A}u, u - \xi\rangle$ для всех $\xi \in X$.

Лемма 3.10. *Пусть $p \in [2, \infty)$ и $R_s + R_s^* > 0$. Пусть также оператор A, заданный формулой* (3.4), *имеет измеримые по $(x, t) \in \Omega_T$ и непрерывные по $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ коэффициенты $A_i(x, t, \xi)$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющие оценке* (3.8). *Более того, пусть существуют непрерывные производные $A_{ij}(x, t, \xi)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие оценке* (3.22) *и алгебраическому условию сильной эллиптичности*

$$\sum_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} r^s_{ml} A_{ij}\left(x + h_{sm}, t, \zeta_{m\cdot}\right) \eta_{lj}\, \eta_{mi} \geqslant c_{13} \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{mi}|^{p-2} \, |\eta_{mi}|^2 \tag{3.39}$$

для всех s и почти всех $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$, $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$, $\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times n}$, где $c_{13} > 0$ не зависит от x, ζ и η.

Тогда $A_R : L_p(0, T; \mathring{W}^1_p(Q)) \to L_q(0, T; W^{-1}_q(Q))$ обладает свойством (S_+) на W.

Доказательство. Сначала покажем, что «главная часть» оператора A_R, содержащая слагаемые со старшими производными, сильно эллиптична. Выделим три слагаемых:

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \langle \mathcal{A}^1_R(u, u) - \mathcal{A}^1_R(u, y), u - y\rangle + \\ + \langle \mathcal{A}^1_R(u, y) - \mathcal{A}^1_R(y, y), u - y\rangle + \langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u - y\rangle, \tag{3.40}$$

где

$$\langle \mathcal{A}^0_R u, y\rangle = \int\limits_{\Omega_T} A_0(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) y \, dx \, dt,$$

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u, y), v\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q y)\, \partial_i v \, dx \, dt.$$

Заметим, что в силу условий (3.39), (3.22) оператор $\mathcal{A}^1_R(u, \cdot)$ удовлетворяет условиям леммы 3.9 (с нулевыми функциональными коэффициентами при $i = 0$). Аналогично (3.25) получаем, что

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u, u) - \mathcal{A}^1_R(u, y), u - y\rangle \geqslant c_{14} \|u - y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}. \tag{3.41}$$

Пусть $u_m \rightharpoonup u$ слабо в W и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle A_R u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0$. В силу компактности вложения $W \subset L_p(\Omega_T)$, $u_m \to u$ в $L_p(\Omega_T)$. В силу непрерывности оператора R_Q, $R_Q u_m \rightharpoonup R_Q u$ в $L_p(0, T; W^1_p(Q))$

[1]Очевидно, что при сужении деминепрерывного оператора на некую линейную область определения получаем радиально непрерывный оператор.

и $R_Q u_m \to R_Q u$ в $L_p(\Omega_T)$. Из сходимости $R_Q u_m \to R_Q u$ в $L_p(\Omega_T)$ и условия (3.8) следует, что $A_i(\cdot,\cdot,R_Q u_m,\nabla R_Q u) \to A_i(\cdot,\cdot,R_Q u,\nabla R_Q u)$ в $L_q(\Omega_T)$, см. [29, гл. 1, §2, п. 4]. Кроме того, так как $u_m \rightharpoonup u$ слабо в W, то $\lim\limits_{m\to\infty}\langle A_R u, u_m-u\rangle = 0$. Тогда

$$\varliminf_{m\to\infty}\langle A_R u_m, u_m-u\rangle = \varliminf_{m\to\infty}\langle A_R u_m - A_R u, u_m-u\rangle =$$
$$= \varliminf_{m\to\infty}\bigl\{\langle \mathcal{A}^1_R(u_m,u_m)-\mathcal{A}^1_R(u_m,u),u_m-u\rangle+\langle \mathcal{A}^1_R(u_m,u)-\mathcal{A}^1_R(u,u),u_m-u\rangle+\langle \mathcal{A}^0_R u_m-\mathcal{A}^0_R u,u_m-u\rangle\bigr\}.$$

Рассмотрим второе слагаемое под знаком предела:

$$\lim_{m\to\infty}\langle \mathcal{A}^1_R(u_m,u)-\mathcal{A}^1_R(u,u),u_m-u\rangle =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}\bigl(A_i(x,t,R_Q u_m,\nabla R_Q u)-A_i(x,t,R_Q u,\nabla R_Q u)\bigr)\,\partial_i(u_m-u)\,dx\,dt = 0,$$

так как подынтегральными функциями являются произведения, первый сомножитель которых принадлежит последовательности функций, сходящихся к нулю в пространстве $L_q(\Omega_T)$, а второй — последовательности функций, слабо сходящихся к нулю в $L_p(\Omega_T)$. Для третьего слагаемого

$$\lim_{m\to\infty}\langle \mathcal{A}^0_R u_m-\mathcal{A}^0_R u,u_m-u\rangle =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\int\limits_Q\Bigl(A_0(x,t,R_Q u_m,\nabla R_Q u_m)-A_0(x,t,R_Q u,\nabla R_Q u)\Bigr)(u_m-u)\,dx\,dt = 0,$$

поскольку подынтегральной функцией является произведение, первый сомножитель которого принадлежит ограниченной в $L_q(\Omega_T)$ последовательности, а второй — последовательности функций, сходящихся к нулю в $L_p(\Omega_T)$. То есть,

$$\varliminf_{m\to\infty}\langle A_R u_m, u_m-u\rangle = \varliminf_{m\to\infty}\langle \mathcal{A}^1_R(u_m,u_m)-\mathcal{A}^1_R(u_m,u),u_m-u\rangle.$$

Воспользуемся оценкой (3.41):

$$0 \geqslant \varliminf_{m\to\infty}\langle A_R u_m, u_m-u\rangle = \varliminf_{m\to\infty}\langle \mathcal{A}^1_R(u_m,u_m)-\mathcal{A}^1_R(u_m,u),u_m-u\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \varliminf_{m\to\infty} c_{14}\|u_m-u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \geqslant 0,$$

что доказывает сходимость $\varliminf\limits_{m\to\infty}\|u_m-u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} = 0$. Сходимость по норме последовательности $u_m \to u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))$ доказана, оператор A_R обладает свойством (S_+) на W. □

Лемма 3.11. *Пусть выполнены условия леммы* 3.10 *и*

$$|A_i(x,t,\xi_0,0,\dots,0)| \leqslant g_2(x)+c_{15}|\xi_0|^{p'-1} \qquad (i=1,\dots,n), \tag{3.42}$$
$$|A_0(x,t,\xi)| \leqslant g_2(x)+c_{15}\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^{p'-1}, \tag{3.43}$$

где $2-1/p<p'<p$, $g_2\in L_q(\Omega_T)$, $c_{15}>0$.

Тогда оператор $A_R : L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q)) \to L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))$ *коэрцитивный.*

Доказательство.

$$\langle A_R u,u\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}A_i(x,t,R_Q u,\nabla R_Q u)\,\partial_i u\,dx\,dt =$$
$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}\bigl(A_i(x,t,R_Q u,\nabla R_Q u)-A_i(x,t,R_Q u,0)\bigr)\,\partial_i u\,dx\,dt +$$
$$+ \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}A_i(x,t,R_Q u,0)\,\partial_i u\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega_T}A_0(x,t,R_Q u,\nabla R_Q u)\,u\,dx\,dt. \tag{3.44}$$

Для первого слагаемого в силу (3.39) получена оценка (3.41):

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T} \left(A_i(x,t,R_Qu,\nabla R_Qu)-A_i(x,t,R_Qu,0)\right)\,\partial_i u\,dx\,dt \geqslant c_{14}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}. \tag{3.45}$$

Оценим второе слагаемое, используя (3.42) и неравенство Гельдера:

$$\left|\int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Qu,0)\partial_i u\,dx\,dt\right| \leqslant \int\limits_{\Omega_T} |A_i(x,t,R_Qu,0)|\;|\partial_i u|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_T} \left|g_2(x,t)+c_{15}|R_Qu|^{p'-1}\right|\;|\partial_i u|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|g_2\|_{L_q(\Omega_T)}\|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{15}\left(\int\limits_{\Omega_T}|R_Qu|^{(p'-1)q}\,dx\,dt\right)^{1/q}\left(\int\limits_{\Omega_T}|\partial_i u|^p\,dx\,dt\right)^{1/p} =$$

$$= \|g_2\|_{L_q(\Omega_T)}\|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{15}\|R_Qu\|^{p'-1}_{L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)}\|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)}.$$

Заметим, что $1<(p'-1)p/(p-1)=(p'-1)q<p$ при $(2-1/p)<p'<p$. Поскольку в силу непрерывности вложения пространств Лебега $L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)\subset L_p(\Omega_T)$ и непрерывности оператора $R_Q: L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)\to L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)$

$$\|R_Qu\|^{p'-1}_{L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)} \leqslant c_{16}\|u\|^{p'-1}_{L_p(\Omega_T)},$$

то

$$\left|\int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Qu,0)\partial_i u\,dx\,dt\right| \leqslant \|g_2\|_{L_q(\Omega_T)}\|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{17}\|u\|^{p'-1}_{L_p(\Omega_T)}\|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{18}\|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_{17}\varepsilon^p}{p}\|\partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_{17}}{\varepsilon^q q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(\Omega_T)}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Qu,0)\,\partial_i u\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{18}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{c_{17}\varepsilon^p}{p}\|\partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_{17}n}{\varepsilon^q q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(\Omega_T)} =$$

$$= c_{18}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{c_{17}\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{c_{17}n}{\varepsilon^q q}c_{19}^{(p'-1)q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}, \tag{3.46}$$

где в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c_{19}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}. \tag{3.47}$$

Аналогично, для последнего слагаемого правой части (3.44) используем непрерывность вложения $L_{p'}(\Omega_T)\subset L_p(\Omega_T)$ для $1<p'<p$, а также непрерывность оператора $R_Q: L_{p'}(\Omega_T)\to L_{p'}(\Omega_T)$:

$$\left|\int\limits_{\Omega_T} A_0(x,t,R_Qu,\nabla R_Qu)u\,dx\,dt\right| \leqslant \int\limits_{\Omega_T}|A_0(x,t,R_Qu,\nabla R_Qu)|\;|u|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_T} \left| g_2(x,t) + c_{15}|R_Q u|^{p'-1} + c_{15} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i R_Q u|^{p'-1} \right| |u|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{18}\|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{15}\|u\|_{L_{p'}(\Omega_T)}\|R_Q u\|^{p'-1}_{L_{p'}(\Omega_T)} + c_{15}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i R_Q u\|^{p'-1}_{L_{p'}(\Omega_T)}\|u\|_{L_{p'}(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{18}\|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{20}\|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} + c_{21}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i u\|^{p'-1}_{L_p(\Omega_T)}\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{18}\|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{20}\|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_{21}(p'-1)}{p'}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_{21}}{p'}\|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{18}c_{19}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + c_{22}\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}, \quad (3.48)$$

где $\|u\|_{L_{p'}(Q)} \leqslant c_{23}\|u\|_{L_p(Q)}$ в силу непрерывности вложения пространств Лебега при $p' < p$ и $c_{22} = c_{19}^{p'}c_{23}^{p'}(c_{20} + c_{21}/p') + c_{21}(p'-1)/p'$; использовано также неравенство Фридрихса (3.47). Выберем ε таким образом, что $c_{17}\varepsilon^p/p = c_{14}/2$, и подставим оценки (3.45), (3.46) и (3.48) в (3.44):

$$\begin{aligned}\langle A_R u, u\rangle &\geqslant c_{14}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{18}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \frac{c_{17}\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \\ &- \frac{c_{17}n}{\varepsilon^q q}c_{19}^{(p'-1)q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{18}c_{19}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{22}\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \geqslant \\ &\geqslant \frac{c_{14}}{2}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{18}(1+c_{19})\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{23}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(\Omega_T)} - c_{21}\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}. \quad (3.49)\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.49) положительно и имеет степенной рост порядка p, а остальные (отрицательные) слагаемые имеют степенной рост порядков меньше p. Оператор A_R коэрцитивен. □

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия интегрируемости* (3.8)*, дифференцируемости* (3.22) *для* $i, j = 1, \ldots, n$*, сильной эллиптичности* (3.39) *и коэрцитивности* (3.42)-(3.43)*,* $\varphi \in L_2(Q)$*,* $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$*,* $p \in [2,\infty)$*. Тогда существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в* W *множество обобщенных решений задачи* (3.1)–(3.3).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный (см. лемму 3.9), коэрцитивный (см. лемму 3.11) оператор, обладающий свойством (S_+) на W (см. лемму 3.10), т. е. псевдомонотонный на W. Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1.4], существует обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) $u \in W$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора A_R. Докажем это. Пусть u — решение, $u \neq 0$ (иначе оценка тривиальна). Тогда

$$\langle \partial_t u + A_R u, u\rangle = \langle f, u\rangle,$$

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u, u\rangle = \langle f, u\rangle + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}, \quad (3.50)$$

$$\|u\|^{-1}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}\langle A_R u, u\rangle \leqslant \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}}{2\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}}. \quad (3.51)$$

С правой стороны неравенства (3.51) стоит ограниченное значение. Ограничение левой части (3.51) в силу коэрцитивности оператора A_R гарантирует ограниченность $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}$, причем можно определить константу, которой ограничена эта норма, так, что данная константа зависит только от $\|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}$, $\|\varphi\|_{L_2(Q)}$ и от функции, оценивающей коэрцитивность оператора A_R, но не зависит от u. В то же время из формулы (3.50) и ограниченности $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}$ следует, что ограничена $\|u(T)\|_{L_2(Q)}$. Доказана ограниченность обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3) в пространстве W.

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении обладает свойством (S_+) на W. Докажем это. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ в W, u_n принадлежат множеству решений для каждого n. При этом, по определению, $u_n \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))$ и

$\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, кроме того, $u|_{t=0} = \varphi$ в силу непрерывности вложения $W \subset C(0,T;L_2(Q))$. Поскольку u_n — решение (3.7), то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A_R u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, u_n - u\rangle - \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle \partial_t u_n, u_n - u\rangle. \tag{3.52}$$

Первое слагаемое (3.52) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f, u_n - u\rangle = 0$, так как $u_n \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Распишем второе слагаемое (3.52): $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \partial_t u_n, u\rangle = \langle \partial_t u, u\rangle$ в силу слабой сходимости $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \langle \partial_t u_n, u\rangle = \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}.$$

С другой стороны,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle \partial_t u_n, u_n\rangle = \underline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{2}\|u_n(T)\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}\right) \geqslant \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}$$

в силу свойства норм слабо сходящихся последовательностей. То есть, если $u_n \rightharpoonup u$ в W, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle \partial_t u_n, u_n - u\rangle \geqslant 0. \tag{3.53}$$

Подставив это выражение в (3.52) получим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle A_R u_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$. Согласно свойству (S_+) на W, $u_n \to u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Из деминепрерывности оператора следует, что $A_R u_n \rightharpoonup A_R u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$. Следовательно, u удовлетворяет операторному уравнению (3.7). □

Если условие дифференцируемости справедливо для всех $i,j = 0,1,\ldots,n$, то можно доказать более сильное свойство для квазилинейного дифференциально-разностного оператора.

Лемма 3.12. *Пусть $p \in [2,\infty)$, выполнены условия леммы 3.10 и существуют непрерывные производные $A_{ij}(x,t,\xi)$, удовлетворяющие оценке (3.22) для всех $i,j = 0,1,\ldots,n$. Тогда $A_R : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ — оператор с $(\mathcal{V},W)$-полуограниченной вариацией.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 3.10, разобьем оператор на три слагаемых, см. (3.40), и получим для первого слагаемого правой части (3.40) оценку (3.41).

Оценим второе слагаемое правой части (3.40). Воспользуемся дифференцируемостью коэффициентов, формулой Тейлора и теоремой о среднем:

$$\langle \mathcal{A}_R^1(u,y) - \mathcal{A}_R^1(y,y), u-y\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \big(A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q y) - A_i(x,t,R_Q y,\nabla R_Q y)\partial_i(u-y)\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \int\limits_0^1 A_{i0}(x,t,R_Q u + \tau R_Q(y-u), \nabla R_Q y) d\tau\, R_Q(u-y)\,\partial_i(u-y)\Big)\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_{i0}(x,t,R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u), \nabla R_Q y)\, R_Q(u-y)\,\partial_i(u-y)\Big)\,dx\,dt \tag{3.54}$$

для некоторого $\widehat{\tau} \in [0,1]$. Заметим, что интегралы по Ω_T существуют в силу условия (3.22). Оценим подынтегральное выражение, используя (3.22):

$$A_{i0}(x,t,R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u), \nabla R_Q y) \leqslant g_1(x,t) + c_7\,|R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |\partial_j R_Q y|^{p-2}.$$

Подставим полученное выражение в (3.54) и применим неравенство Гёльдера:

$$\big|\langle \mathcal{A}_R^1(u,y) - \mathcal{A}_R^1(y,y), u-y\rangle\big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \left(g_1(x,t) + c_7\,|R_Q u + \widehat{\tau} R_Q(y-u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |\partial_j R_Q y|^{p-2}\right) |R_Q(u-y)\,\partial_i(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(\Omega_T)} + c_7\left(\|R_Q u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + \|R_Q y\|^{p-2}_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}\right)\right) \times$$

$$\times \|R_Q(u-y)\|_{L_p(\Omega_T)}\|\partial_i(u-y)\|_{L_p(\Omega_T)};$$

здесь учтено, что $|R_Qu+\widehat{\tau}R_Q(y-u)|^{p-2}\leqslant |R_Qu|^{p-2}+|R_Qy|^{p-2}$ при $p>2$. Используем также неравенства Фридрихса (3.47) и ограниченности оператора R_Q(3.20): $\|R_Qu\|_{L_p(\Omega_T)}\leqslant c_{19}c_5\|u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}\leqslant c_{19}c_5r_1$; $\|R_Qy\|_{L_p(\Omega_T)}\leqslant c_{19}c_5\|y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\leqslant c_{19}c_5r_1$. Тогда

$$\|R_Qu\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}+\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}+\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\leqslant (c_{19}c_5)^{p-2}\|u\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}+ \\ +(c_{19}c_5)^{p-2}\|y\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}+c_5^{p-2}\|y\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\leqslant c_5^{p-2}(2c_{19}^{p-2}+1)r_1^{p-2}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\widehat{c}_1(r_1):=\|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(\Omega_T)}+2c_7c_5^{p-2}(c_{18}^{p-2}+1)r_1^{p-2}.$$

Следовательно,

$$\langle \mathcal{A}_R^1(u,y)-\mathcal{A}_R^1(y,y),u-y\rangle\leqslant \widehat{c}_1(r_1)\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|R_Q(u-y)\|_{L_p(\Omega_T)}\|\partial_i(u-y)\|_{L_p(\Omega_T)}\leqslant \\ \leqslant c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}\|u-y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}. \quad (3.55)$$

Аналогично оценим третье слагаемое правой части (3.40):

$$\langle \mathcal{A}_R^0u-\mathcal{A}_R^0y,u-y\rangle=\int\limits_{\Omega_T}A_{00}(x,t,R_Qu+\widehat{\tau}_0R_Q(y-u),\nabla R_Qu)\,R_Q(u-y)\,(u-y)\,dx\,dt+ \\ +\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\int\limits_Q A_{0j}(x,t,R_Qu,\nabla R_Qu+\widehat{\tau}_j\partial_iR_Q(y-u))\,\partial_jR_Q(u-y))\,(u-y)\,dx\,dt.$$

Поскольку

$$|A_{0j}(x,t,R_Qy,\nabla(R_Qu+\widehat{\tau}_jR_Q(y-u))|\leqslant g_1(x,t)+c_7\,|\partial_jR_Qu|^{p-2}+c_7\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_kR_Qy|^{p-2},$$

то

$$\|A_{0j}(x,R_Qy,\nabla(R_Qu+\widehat{\tau}_jR_Q(y-u))\|_{L_{p/p-2}(\Omega_T)}\leqslant \\ \leqslant \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(\Omega_T)}+c_7\|\partial_jR_Qu\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}+c_7\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}\leqslant \widehat{c}_1(r_1).$$

Следовательно,

$$\bigl|\langle \mathcal{A}_R^0u-\mathcal{A}_R^0y,u-y\rangle\bigr|\leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant n}\widehat{c}_1(r_1)\|\partial_iR_Q(u-y)\|_{L_p(\Omega_T)}\|(u-y)\|_{L_p(\Omega_T)}\leqslant \\ \leqslant c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}+c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)}. \quad (3.56)$$

Подставляя оценки (3.41), (3.55) и (3.56) в (3.40), получаем

$$\langle A_Ru-A_Ry,u-y\rangle\geqslant c_{14}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}-2c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}- \\ -c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)}\geqslant c_{14}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}-c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)}- \\ -\frac{\varepsilon^p}{p}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}-\frac{(c_5\widehat{c}_1(r_1))^q}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}.$$

Пусть $\dfrac{\varepsilon^p}{p}=\dfrac{c_{14}}{2}$. Тогда

$$\langle A_Ru-A_Ry,u-y\rangle\geqslant \frac{c_{14}}{2}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}-\frac{(c_5\widehat{c}_1(r_1))^q}{q(pc_{14}/2)^{1/(p-1)}}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}- \\ -c_5\widehat{c}_1(r_1)\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)}. \quad (3.57)$$

Два последних слагаемых правой части (3.57) удовлетворяют условиям функции $-C(r_1; \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)})$, определяющей $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченность вариации оператора A_R, см. (3.36). $\square$

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия интегрируемости* (3.8)*, дифференцируемости* (3.22) *для* $i, j = 0, 1, \dots, n$*, сильной эллиптичности* (3.39) *и коэрцитивности* (3.42)-(3.43)*,* $\varphi \in L_2(Q)$*,* $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$*,* $p \in [2, \infty)$*. Тогда существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в* W *множество обобщенных решений задачи* (3.1)–(3.3)*.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2, только вместо теоремы о существовании решения параболического уравнения с псевдомонотонным на W оператором (см. [33, теорема 1.2, гл. 3, §1]) мы можем использовать теорему о существовании решения параболического уравнения с оператором с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией (см. [20, теорема 3.2, гл. 3]).

Теорема 3.4. *Пусть* $p = 2$*, а также выполнены условия интегрируемости* (3.8)*, дифференцируемости* (3.22) *для* $i, j = 0, 1, \dots, n$*, сильной эллиптичности* (3.39) *и коэрцитивности* (3.42)-(3.43)*. Тогда для любых* $f \in L_2(\Omega_T)$ *и* $\varphi \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3)*, причем* $\partial_t u \in L_2(\Omega_T)$*.*

Доказательство. При $p = 2$ можно рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$\widetilde{W} = \{u \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(Q)) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}.$$

Как известно, $\widetilde{W} \subset L_2(\Omega_T)$ компактно, см. [33, теорема 5.1, гл. 1, §5]. Согласно оценке (3.57) оператор A_R является оператором с $(\mathcal{V}, \widetilde{W})$-полуограниченной вариацией. Оценки (3.42)-(3.43) гарантируют коэрцитивность оператора, см. лемму 3.11. Следовательно, существует решение операторного уравнения (3.7), см. [20, теорема 3.2, гл. 3] или [33, теорема 1.2, гл. 3, §1]. При этом решение $u \in \widetilde{W}$, т. е. $\partial_t u \in L_2(\Omega_T)$. $\square$

3.5. Существование периодических решений параболического дифференциально-разностного уравнения

Помимо начально-краевой задачи, полученные выше результаты позволяют доказать существование периодических по t решений параболической задачи (3.1), (3.3).

В цилиндре $Q \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$\partial_t u(x, t) + ARu(x, t) = f(x, t) \quad ((x, t) \in Q \times \mathbb{R}) \tag{3.58}$$

с краевым условием

$$u(x, t) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q),$$

если $f(x, t)$ и коэффициенты дифференциального оператора A периодичны по t с периодом T. То есть достаточно рассмотреть уравнение (3.1) с краевым условием (3.3) при условии периодичности

$$u(x, 0) = u(x, T) \qquad (x \in Q). \tag{3.59}$$

Введем рефлексивное банахово пространство

$$\widehat{W} = \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*, u|_{t=0} = u|_{t=T}\}$$

с нормой $\|u\|_{\widehat{W}} = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$, где $\partial_t u$ — производная элемента $u \in \mathcal{V}$ в смысле распределений со значениями в $\mathcal{V}^*$. Обозначим через $\widehat{A}_R$ сужение оператора A_R на пространство $\widehat{W}$:

$$\widehat{A}_R u := A_R u \qquad \forall u \in \widehat{W}.$$

Определение 3.7. Будем называть функцию $u \in \widehat{W}$ *обобщенным решением задачи* (3.58), (3.3), (3.59), если она удовлетворяет операторному уравнению

$$\partial_t u + \widehat{A}_R u = f. \tag{3.60}$$

Очевидно, что $\widehat{W} \subset W$ непрерывно. Более того, оператор $\widehat{A}_R : \widehat{W} \to \mathcal{V}^*$ наследует свойства оператора $A_R : W \to \mathcal{V}^*$. Используя это, сформулируем теоремы существования решения.

Теорема 3.5. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, $R_s + R_s^* > 0$, *коэффициенты дифференциального оператора* A *периодичны по* t *с периодом* T, *а также выполнены условия дифференцируемости* (3.22) *для* $i, j = 0, 1, \ldots, n$ *и сильной эллиптичности* (3.21), $p \in [2, \infty)$. *Тогда для любого* $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (3.58), (3.3), (3.59), *более того, справедлива следующая оценка*:

$$\|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant c_{24} \|f_1 - f_2\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \tag{3.61}$$

где u_1 *и* u_2 — *обобщенные решения задачи* (3.58), (3.3), (3.59) *при правых частях* f_1 *и* f_2; $c_{24} > 0$ *не зависит от* u_k *и* f_k.

Доказательство. В силу условия интегрируемости (3.8) оператор $\widehat{A}_R$ деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8. В силу условий дифференцируемости (3.22) и сильной эллиптичности (3.21) оператор A_R сильно монотонен, см. лемму 3.9. Сильно монотонный оператор строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, решение операторного уравнения (3.60) существует и единственно, см. [15, теорема 1.4, гл. VI, §1].

Докажем оценку (3.61). Пусть $u_1 \in \widehat{W}$ и $u_2 \in \widehat{W}$ — обобщенные решения задачи (3.58), (3.3), (3.59) при правых частях f_1 и f_2. Тогда

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle. \tag{3.62}$$

Здесь использована известная оценка для любого $u \in W$:

$$\langle \partial_t u, u \rangle = \int\limits_{\Omega_T} \partial_t u \cdot u \, dx \, dt = \frac{1}{2} \|u(T)\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2} \|u(0)\|^2_{L_2(Q)},$$

см., например, [15, замечание 1.22, гл. IV, §2]. То есть $\langle \partial_t u, u \rangle = 0$ для любого $u \in \widehat{W}$. Используем оценку сильной монотонности оператора (3.26):

$$c_9 \|u_1 - u_2\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \\ = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leqslant \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))},$$

т. е.

$$\|u_1 - u_2\|^{p-1}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \frac{1}{c_9} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}. \tag{3.63}$$

Оценка (3.61) доказана. □

Теорема 3.6. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, $R_s + R_s^* > 0$, *коэффициенты дифференциального оператора* A *периодичны по* t *с периодом* T, *а также выполнены условия интегрируемости* (3.8), *дифференцируемости* (3.22) *для* $i, j = 1, \ldots, n$, *сильной эллиптичности* (3.39) *и коэрцитивности* (3.42)-(3.43), $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$, $p \in [2, \infty)$. *Тогда существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в* $\widehat{W}$ *множество обобщенных решений задачи* (3.58), (3.3), (3.59).

Доказательство. В силу условия интегрируемости (3.8) оператор $\widehat{A}_R$ деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8. В силу условий дифференцируемости (3.22) и сильной эллиптичности (3.39) оператор $\widehat{A}_R$ обладает свойством (S_+) на $\widehat{W}$, см. лемму 3.10, т. е. псевдомонотонен на $\widehat{W}$. В силу условий (3.42)-(3.43) оператор $\widehat{A}_R$ коэрцитивен, см. лемму 3.11. Согласно [33, теорема 1.1, гл. 3, §1.3], где $L := \partial_t : \widehat{W} \to \mathcal{V}^*$, существует обобщенное решение задачи (3.58), (3.3), (3.59) $u \in \widehat{W}$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора $\widehat{A}_R$. Докажем это. Пусть u — решение, $u \neq 0$. Тогда

$$\langle \partial_t u + \widehat{A}_R u, u \rangle = \langle f, u \rangle,$$

$$\langle \widehat{A}_R u, u \rangle = \langle f, u \rangle,$$

$$\|u\|^{-1}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \langle \widehat{A}_R u, u \rangle \leqslant \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}. \tag{3.64}$$

С правой стороны неравенства (3.64) стоит ограниченное значение, причем ограничение зависит только от $\|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}$ и от функции, оценивающей коэрцитивность оператора $\widehat{A}_R$, но не зависит от u. При этом существует $t_1 \in [0,T]$ такое, что $\|u(t_1)\|^2_{L_2(Q)} < \infty$. Но тогда для любого $t_2 \neq t_1$, $t_2 \in [0,T]$,

$$\frac{1}{2}\left|\|u(t_2)\|^2_{L_2(Q)} - \|u(t_1)\|^2_{L_2(Q)}\right| = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{Q}(f - \widehat{A}_R u)\,u\,dx\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f - A_R u\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} < +\infty,$$

что доказывает ограниченность множества решений в пространстве W.

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении обладает свойством (S_+) на $\widehat{W}$. Докажем это. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ в $\widehat{W}$, u_n принадлежат множеству решений для каждого n. При этом, по определению, $u_n \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$ и $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, причем $u_{|t=0} = u_{|t=T}$. Поскольку u_n — решение операторного уравнения (3.60), то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\langle\widehat{A}_R u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f, u_n - u\rangle - \varliminf_{n\to\infty}\langle\partial_t u_n, u_n - u\rangle. \tag{3.65}$$

Первое слагаемое (3.65) $\lim\limits_{n\to\infty}\langle f, u_n - u\rangle = 0$, так как $u_n \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Распишем второе слагаемое (3.65): $\lim\limits_{n\to\infty}\langle\partial_t u_n, u\rangle = \langle\partial_t u, u\rangle$ в силу слабой сходимости $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\langle\partial_t u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\partial_t(u_n - u), u_n - u\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\|u_n(T) - u(T)\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\|u_n(0) - u(0)\|^2_{L_2(Q)} = 0. \tag{3.66}$$

Подставив это выражение в (3.65), получим, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\langle A_R u_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$. Согласно свойству (S_+) на $\widehat{W}$, $u_n \to u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Из деминепрерывности оператора следует, что $\widehat{A}_R u_n \rightharpoonup \widehat{A}_R u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$. Следовательно, u удовлетворяет операторному уравнению (3.60). $\square$

Глава 4

СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе задача (3.1)–(3.3) (см. раздел 3.1) исследуется при условии, что дифференциальный оператор может являться существенно нелинейным. Будут использованы свойства разбиения области и разностного оператора (см. раздел 3.2). Константы $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$ были определены в разделах 3.1-3.2. Нумерация остальных констант будет соответствовать этой главе, если нет ссылки на формулы из главы 3. Также будут использованы определения из главы 3.

4.1. Параболические уравнения с дифференциально-разностным оператором, обладающим свойством (S_+) на W

Предположим, что для любого класса s функции $A_i, i = 0,1,\ldots,n$, и матрицы R_s удовлетворяют следующим условиям:

(A0) Условие невырожденности: $\det R_{s_\nu} \neq 0$ $(\nu = 1,\ldots,n_1)$.

(A1) Условие интегрируемости: *A_i — функции типа Каратеодори, т.е. $A_i(x,t,\xi)$ измеримы по x и t для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывны по $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$; более того, для п.в. $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$*

$$|A_i(x,t,\xi)| \leqslant g(x,t) + c_5\sum_{0\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^{p-1}, \qquad i = 0,\ldots,n, \tag{3.8}$$

где $c_5 > 0$, $g \in L_q(\Omega_T)$.

(A2) Условие коэрцитивности: *для всех s, п.в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и любых $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$, существуют $p' \in (1,p)$, $c_6 > 0$ и $c_7, c_8 \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})\left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l \geqslant c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}|^p - c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}|^{p'} - c_8. \tag{4.1}$$

(A3) Условие эллиптичности: *для всех s, п.в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и любых $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = \zeta_{l0}$ и $\eta \neq \zeta$, справедлива оценка*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_l > 0. \tag{4.2}$$

Условие интегрируемости **(A1)** является стандартным (с небольшими вариациями) для построения интегрального представления дифференциального оператора, см. [20,29,33] и др. Благодаря этому условию для любых $v \in \mathcal{V}$

$$\langle A_R u, v\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Q u, \partial_1 R_Q u, \cdots, \partial_n R_Q u)\partial_i v\,dx\,dt, \tag{4.3}$$

здесь и ниже $\partial_0 v := v$, см. (3.9).

Заметим также, что в случае отсутствия сдвигов (т. е. при $R_Q = \mathbb{I}$) условие **(A2)** трансформируется в условие коэрцитивности для дифференциальных операторов (см. [20, 93], например), а условие **(A3)** является стандартным при исследовании псевдомонотонных на W дифференциальных операторов, см. [33] и др., а также дифференциальных операторов, обладающих свойством (S_+) на W, см. [93] и др.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* **(A0)**–**(A2)**. *Тогда оператор $A_R : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, заданный формулой* (4.3)*, коэрцитивен.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1. Для удобства читателей приведем его полностью.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{V}$, $w = R_Q u$. Вследствие условия **(A0)** разностный оператор R_Q невырожден, т. е. существует ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$, см. лемму 3.6. Следовательно,

$$\langle A_R u, u\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_0^T \int\limits_Q A_i(x,t,R_Q u, \partial_1 R_Q u, \ldots, \partial_n R_Q u)\partial_i u\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_0^T \int\limits_Q A_i(x,t,w,\partial_1 w,\ldots,\partial_n w)\partial_i R_Q^{-1} w\,dx\,dt =$$

$$= \sum_s \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_0^T \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} A_i(x,t,P_s w, P_s\nabla w)(U_s^{-1}R_s^{-1}U_s P_s \partial_i w)\,dx\,dt =$$

$$= \sum_s \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s A_i(x,t,P_s w, P_s\nabla w), R_s^{-1}U_s P_s\partial_i w\right)\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{s,l} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} A_i\left(x+h_{sl},t,(U_s P_s w)_l, \nabla(U_s P_s w)_l\right)(R_s^{-1}U_s P_s \partial_i w)_l\,dx\,dt. \tag{4.4}$$

Подставив оценку (4.1) в формулу (4.4), в силу утверждений леммы 3.6 получим, что

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_6 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} |\partial_i w|^p\,dx\,dt - c_7 \int\limits_{\Omega_T} |w|^{p'}\,dx\,dt - c_8 \mathrm{mes}(\Omega_T).$$

Воспользуемся равенством (3.15), оценкой (3.20) для оператора $R_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ и оценкой (3.16) для оператора $R_Q : L_{p'}(\Omega_T) \to L_{p'}(\Omega_T)$. Тогда

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_6 c_3^p \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} |\partial_i u|^p \, dx\, dt - c_7 c_1^{p'} \int\limits_{\Omega_T} |u|^{p'} \, dx - c_8 \mathrm{mes}(\Omega_T) \geqslant$$

$$\geqslant c_9 \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{10}\|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} - c_{11}. \quad (4.5)$$

Очевидно, $\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_{12}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}$. Отсюда и из (4.5) получим

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_9 \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{10}c_{12}\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - c_{11}, \quad (4.6)$$

где константы $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$ не зависят от u, $c_9 > 0$. И поскольку $1 < p' < p$, а $p > 1$, то для достаточно больших $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}$ полученное в правой части (4.5) выражение строго положительно и монотонно возрастает при $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \to \infty$, степень роста $p > 1$. ☐

Построим вспомогательные функции

$$H_s(x,t,\zeta,\eta) = \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}+\eta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)\right)(R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l, \quad (4.7)$$

определенные для всех $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = 0$, $l = 1,\dots,N(s)$. Введем также обозначение

$$|\zeta_{\cdot 0}| := \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}|, \qquad |\zeta| := \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant N(s),\\ 0\leqslant i\leqslant n}} |\zeta_{li}|.$$

Лемма 4.2. *Для любых* $\varkappa, C, C_1 > 0$ *существует положительная функция* $c_s(x,t)$ *такая, что для всех* $\zeta \in U(C,C_1)$, *где*

$$U(C,C_1) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)} : |\zeta_{\cdot 0}| \leqslant C,\ |\zeta| \leqslant C_1\right\}$$

и $\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ *таких, что* $\eta_{l0} = 0$, $l = 1,\dots,N(s)$, *справедлива оценка*

$$H_s(x,t,\zeta,\eta) \geqslant c_s(x,t)|\eta| \qquad \forall |\eta| \geqslant \varkappa > 0. \quad (4.8)$$

Здесь $c_s(x,t) > 0$ *определена для почти всех* $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$, *зависит только от* $\varkappa, C, C_1$ *и не зависит от* ζ *и* η.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 2.2. В лемме 2.2 рассмотрена функция H_s на ограниченном множестве $\overline{Q_{s1}}$, а в лемме 4.2 функция H_s рассматривается на ограниченном множестве $\overline{Q_{s1}} \times [0,T]$.

Лемма 4.3. *Пусть справедливы условия* **(A0)**–**(A3)**. *Тогда оператор* $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, *заданный формулой* (4.3), *обладает свойством* (S_+) *на* W.

Доказательство. Пусть $u_j \rightharpoonup u$ слабо в W и

$$\varlimsup_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle \leqslant 0. \quad (4.9)$$

1. Сначала докажем, что $\lim\limits_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle = 0$. Так как $u_j \rightharpoonup u$ слабо в W, то $u_j \to u$ в пространстве $L_p(\Omega_T)$, см., например, [33, (2.16), гл. 3, п. 2] и [33, теорема 5.1, гл. 1, п. 5]. Используя лемму 3.6, условие (**A1**) и [29, теорема 2.1, гл. 1, §2] о непрерывном отображении получим, что

$$A_i(x,t,R_Q u_j, \nabla R_Q u) \to A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q u) \quad \text{в } L_q(\Omega_T),$$

т. е. в силу слабой сходимости $\partial_i u_j \rightharpoonup \partial_i u$ в $L_p(\Omega_T)$

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Q u_j, \nabla R_Q u)\partial_i(u_j - u)\, dx\, dt = 0.$$

Кроме того, в силу условия (**A1**) и ограниченности слабо сходящейся последовательности $\{u_j\}$ множество $\{A_0(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu_j)\}$ ограничено в $L_q(\Omega_T)$, т. е.

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega_T} A_0(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu_j)\,(u_j-u)\,dx\,dt=0,$$

поскольку $u_j\to u$ в $L_p(\Omega_T)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\varliminf_{j\to\infty}\langle A_Ru_j,u_j-u\rangle = \varliminf_{j\to\infty}\biggl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu)\partial_i(u_j-u)\,dx\,dt\,+\\ +\int\limits_{\Omega_T} A_0(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu_j)\,(u_j-u)\,dx\,dt\,+\\ +\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}\Bigl(A_i(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu_j)-A_i(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu)\Bigr)\,\partial_i(u_j-u)dx\,dt\biggr)=\\ =\varliminf_{j\to\infty}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}\Bigl(A_i(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu_j)-A_i(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu)\Bigr)\,\partial_i(u_j-u)dx\,dt.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Для изучения правой части (4.10) введем вспомогательные функции $w=R_Qu$ и $w_j=R_Qu_j$. Согласно лемме 3.6 существует ограниченный обратный оператор R_Q^{-1}. Воспользуемся формулой (3.18), а также коммутативностью операторов R_Q^{-1} и ∂_i на $Q_{sl}\times(0,T)$:

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}\Bigl(A_i(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu_j)-A_i(x,t,R_Qu_j,\nabla R_Qu)\Bigr)\,\partial_i(u_j-u)dx\,dt=\\ &=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}\Bigl(A_i(x,t,w_j,\nabla w_j)-A_i(x,t,w_j,\nabla w)\Bigr)\,\partial_iR_Q^{-1}(w_j-w)dx\,dt=\\ &=\sum_s\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_0^T\int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s\Bigl(A_i(x,t,w_j,\nabla w_j)-A_i(x,t,w_j,\nabla w)\Bigr)U_s^{-1}R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w_j-w)dx\,dt=\\ &=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_s\int\limits_0^T\int\limits_{Q_{s1}}\Bigl(U_s\left(A_i(x,t,w_j,\nabla w_j)-A_i(x,t,w_j,\nabla w)\right),R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w_j-w)\Bigr)dx\,dt\;=\\ &=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{s,l}\int\limits_0^T\int\limits_{Q_{s1}}\Bigl(A_i(x+h_{sl},t,w_j(x+h_{sl},t),\nabla w_j(x+h_{sl},t))-\\ &-A_i(x+h_{sl},t,w_j(x+h_{sl},t),\nabla w(x+h_{sl},t))\Bigr)\left(R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w_j-w)\right)_l dx\,dt=\sum_s\int\limits_0^T\int\limits_{Q_{s1}} I_s^j dx\,dt.\end{aligned}$$

Введем матрицы $\zeta^j=\{\zeta^j_{li}\}$ и $\eta^j=\{\eta^j_{li}\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\zeta^j_{l0}=\eta^j_{l0}=w_j(x+h_{sl},t), && l=1,\dots,N(s),\\ &\zeta^j_{li}=\partial_iw_j(x+h_{sl},t),\quad \eta^j_{li}=\partial_iw(x+h_{sl},t), && l=1,\dots,N(s),\ i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Заметим, что при этом $\zeta^j \neq \eta^j$ для всех j. Из условия (**A3**) следует, что $I_s^j > 0$ для всех j. Подставим эту оценку в (4.10). Тогда

$$\underline{\lim}_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle = \underline{\lim}_{j\to\infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_s^j \, dx\, dt \geqslant 0.$$

Сопоставив это неравенство с неравенством (4.9), получаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \langle A_R u_j, u_j - u\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_s^j \, dx\, dt = 0. \tag{4.11}$$

2. Следующим шагом докажем, что при этом $u_j \to u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$, т. е. $\partial_i u_j \to \partial_i u$ в $L_p(\Omega_T)$. Для этого достаточно показать сходимость по мере последовательностей $\{\partial_i u_j\}$ и их равностепенную непрерывность в целом в $L_p(\Omega_T)$, см. теорему о сильной сходимости в [72, гл. 1, п. 3].

2.1. Для доказательства сходимости по мере используем функцию H_s, определенную в (4.7). Из условия (4.9) и равенства (4.11) получаем, что

$$0 = \lim_{j\to\infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_s^j \, dx\, dt \; = \; = \lim_{j\to\infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} H_s(x,t,\zeta^j, \zeta^j - \eta^j)\, dx\, dt.$$

Воспользуемся оценкой (4.8). Тогда

$$0 = \lim_{j\to\infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} H_s(x,t,\zeta^j,\zeta^j-\eta^j)\, dx\, dt \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} c_s(x,t)|\zeta^j - \eta^j|\, dx\, dt =$$

$$= \overline{\lim_{j\to\infty}} \sum_s \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int_0^T \int_{Q_{s1}} c_s(x,t)|\zeta_{li}^j - \eta_{li}^j|\, dx\, dt =$$

$$= \overline{\lim_{j\to\infty}} \sum_s \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int_0^T \int_{\bigcup_l Q_{sl}} c_s(x,t)|\partial_i R_Q u_j - \partial_i R_Q u|\, dx\, dt,$$

здесь $c_s(x+h_{sl},t) = c_s(x,t)$ для любого h_{sl}. Поскольку $c_s(x,t) > 0$, а оператор R_Q невырожден, то данное равенство возможно лишь при сходимости $\partial_i u_j \to \partial_i u$ по мере для всех $i = 1,\dots,n$.

2.2. Для доказательства равностепенной непрерывности достаточно показать, что

$$\lim_{\mathrm{mes} E\to 0} \int_E \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i u_j|^p dx\, dt = 0, \qquad E \subset \Omega_T, \tag{4.12}$$

и стремление к пределу в (4.12) равномерно относительно j.

Заметим, что

$$I_s^j = \sum_l \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}^j\right) - A_i\big(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}^j\big)\right) \left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}^j - \eta_{\cdot i}^j)\right)_l =$$

$$= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}^j) \left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}^j\right)_l - \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} A_0(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}^j)\left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot 0}^j\right)_l -$$

$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}^j) \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j\right)_l - \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} A_i\big(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}^j\big) \left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}^j - \eta_{\cdot i}^j)\right)_l . \tag{4.13}$$

Первое слагаемое правой части (4.13) оценим, исходя из условия коэрцитивности (4.1), а остальные — применяя условие **(A1)** и неравенство Гёльдера:

$$I_s^j \geqslant c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 -$$
$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left| g_0(x+h_{sl},t) + c_5 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\zeta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right| -$$
$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left| g_0(x+h_{sl},t) + c_5 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\eta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| \left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}^j \right)_l \right| -$$
$$- \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left| g_0(x+h_{sl},t) + c_5 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\eta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right|. \quad (4.14)$$

Здесь вторая и третья сумма правой части (4.13) оценены вместе в четвертом слагаемом правой части (4.14) с учетом того, что $\zeta_{l0}^j = \eta_{l0}^j$. Очевидно, что

$$\left| \left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i} \right)_l \right| \leqslant c_{13} \sum_{1\leqslant m\leqslant N(s)} |\zeta_{mi}|\,.$$

Для сокращения записи введем функцию $g_{sl}^j = g_0(x+h_{sl},t) + c_5 \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |\eta_{lk}^j|^{p-1}$. Скомпонуем слагаемые и оценим с помощью неравенства Юнга:

$$I_s^j \geqslant c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 - c_5 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} |\zeta_{lk}^j|^{p-1} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right| -$$
$$- c_{13} \sum_{1\leqslant l,m\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |g_{sl}^j| \left| \zeta_{mi}^j \right| - 2 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left| g_{sl}^j \right| \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right| \geqslant$$
$$\geqslant c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 - \frac{c_5(n+1)\varepsilon_1^q}{q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p -$$
$$- \frac{c_5 n}{\varepsilon_1^p p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right|^p - \frac{c_{13}N(s)\varepsilon_2^p}{p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p -$$
$$- \frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |g_{sl}^j|^q - \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left| g_{sl}^j \right|^q - \frac{2}{p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right|^p. \quad (4.15)$$

Выберем $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такими, что $\dfrac{c_5(n+1)\varepsilon_1^q}{q} + \dfrac{c_{13}N(s)\varepsilon_2^p}{p} \leqslant \dfrac{c_6}{2}$. Тогда

$$I_s^j \geqslant \frac{c_6}{2} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}^j|^p - \widehat{g}_s^j, \quad (4.16)$$

где $\widehat{g}_s^j \in L_1(Q_{s1}\times(0,T))$ — функция, равная сумме третьего и последних пяти слагаемых правой части (4.15):

$$\widehat{g}_s^j = \frac{c_5 n}{\varepsilon_1^p p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right|^p + \frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |g_{sl}^j|^q +$$
$$+ c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} + c_8 + \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left| g_{sl}^j \right|^q + \frac{2}{p} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \left| \left(R_s^{-1}\eta_{\cdot i}^j \right)_l \right|^p.$$

Следовательно, для любого s и любого $E \subset Q_{s1}\times(0,T)$

$$\frac{c_6}{2} \lim_{\operatorname{mes}E\to 0} \int\limits_E \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\partial_i w_j(x+h_{sl},t)|^p dx\,dt \leqslant \lim_{\operatorname{mes}E\to 0} \int\limits_E I_s^j\,dx\,dt + \lim_{\operatorname{mes}E\to 0} \int\limits_E \widehat{g}_s^j\,dx\,dt. \quad (4.17)$$

Сходимость первого интеграла в правой части (4.17) к нулю при $j \to \infty$ на любом множестве $E \subset Q_{s1} \times (0,T)$ доказана выше, см. (4.11). Сходимость второго интеграла в правой части (4.17) к нулю следует из абсолютной непрерывности интеграла и того, что множество $\{\widehat{g}_s^j\} \subset L_1(Q_{s1} \times (0,T))$ компактно, поскольку при формировании функций $\widehat{g}_s^j$ участвовали фиксированные функции и функции из компактных множеств $\{w_j\} \subset L_p(\Omega_T)$ и $\{u_j\} \subset L_p(\Omega_T)$:

$$\widehat{g}_s^j = \left(\frac{c_5 n}{\varepsilon_1^p p} + \frac{2}{p}\right) \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left(|u_j(x+h_{sl},t)|^p + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i u(x+h_{sl},t)|^p\right) + \left(\frac{c_{13} n N(s)}{\varepsilon_2^q q} + \frac{2(n+1)}{q}\right) \times$$
$$\times \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left| g_0(x+h_{sl},t) + c_5 |w_j(x+h_{sl},t)|^{p-1} + c_5 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i w(x+h_{sl},t)|^{p-1}\right|^q +$$
$$+ c_7 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |w_j(x+h_{sl},t)|^{p'} + c_8.$$

Таким образом, сходимость в (4.17) равномерна по j для всех s, множества $\{\partial_i w_j\}$ компактны в $L_p\Big(\bigcup\limits_{sl} Q_{sl} \times (0,T)\Big)$. В силу непрерывности оператора R_Q это возможно тогда и только тогда, когда множества $\{\partial_i u_j\}$ компактны в $L_p\Big(\bigcup\limits_{sl} Q_{sl} \times (0,T)\Big)$. Так как

$$\operatorname{mes}\left(\Omega_T \setminus \left(\bigcup_{sl} Q_{sl} \times (0,T)\right)\right) = 0,$$

то равенство (4.12) доказано.

Слабо сходящаяся в $\mathcal{V}$ последовательность $\{u_j\}$ принадлежат компактному множеству. Поскольку двух пределов существовать не может, то данная последовательность сходится к u в $\mathcal{V}$. Свойство (S_+) на W доказано. $\square$

Следствие 4.1. *Пусть справедливы условия* **(A0)**–**(A3)**. *Тогда оператор $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, заданный формулой* (2.40), *псевдомонотонен*[1] *на W.*

Теорема 4.1. *Пусть справедливы условия* **(A0)**–**(A3)**. *Тогда для любых $f \in \mathcal{V}^*$ и $\varphi \in L_2(Q)$ существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в W множество обобщенных решений задачи* (3.1)–(3.3).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный (см. лемму 3.8), коэрцитивный (см. лемму 4.1) оператор, обладающий свойством (S_+) на W (см. лемму 4.3), т. е. псевдомонотонный на W. Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1.4] существует обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) $u \in W$. Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора A_R, слабая замкнутость множества решений — из свойства (S_+) на W, полное доказательство приведено в теореме 3.2. $\square$

4.2. Параболические уравнения с оператором с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией

Как и в эллиптическом случае (см. разделы 2.2 и 2.3), для существенно нелинейного дифференциально-разностного оператора можно построить условие сильной эллиптичности и доказать свойство $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариации.

Лемма 4.4. *Пусть $p \in [2, \infty)$, справедливы условия* $(\mathbf{A0}), (\mathbf{A1})$, *а также*

(A4) Условие сильной эллиптичности: *для всех s, п.в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = \zeta_{l0} \neq 0$, существует $\widehat{\Upsilon} > 0$ такая, что справедлива оценка*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right) \left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_l \geqslant$$

[1] В [33] псевдомонотонность на W дифференциального оператора доказана без доказательства свойства (S_+) на W и при более сложном условии на коэрцитивность.

$$\geqslant \widehat{\Upsilon} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p. \quad (4.18)$$

(A5) Условие локальной липшицевости: *функции* $A_i(x,t,\xi)$ $(i=\overline{1,n})$ *локально липшицевы по* ξ_0, *функция* $A_0(x,t,y,\xi)$ *локально липшицева по* ξ_j $(j=\overline{0,n})$, *т. е. существует* $\varepsilon > 0$ *и функция типа Каратеодори*[1] Ψ *такие, что для любых* $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(|\delta| = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} |\delta_j| < \varepsilon)$

$$|A_i(x,t,\xi+\delta) - A_i(x,t,\xi)| \leqslant \Psi(x,t,\xi)|\delta|, \quad (4.19)$$

$$|\Psi(x,t,\xi)| \leqslant g_\Psi(x,t) + \widehat{\Psi} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p-2}, \quad (4.20)$$

где $\widehat{\Psi} > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$, $q' = p/(p-2)$ *при* $p > 2$, *и* $q' = \infty$ *при* $p = 2$.

Тогда оператор $A_R : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, *заданный в* (4.3), *обладает* $(\mathcal{V};W)$-*полуограниченной вариацией.*

Доказательство. Обозначим $w = R_Q u$ и $v = R_Q y$, $u,y \in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$, причем в силу невырожденности оператора R_Q существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$, см. лемму 3.6. По определению оператора A_R и в силу формулы (3.18)

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int_{\Omega_T} (A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x,t,R_Q y,\nabla R_Q y))\,\partial_i(u-y)dxdt =$$

$$= \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int_{\Omega_T} \big(A_i(x,t,w,\nabla w) - A_i(x,t,w,\nabla v)\big) R_Q^{-1}\partial_i(w-v)dxdt =$$

$$= \sum_s \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int_0^T \int_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s\big(A_i(x,t,w,\nabla w) - A_i(x,t,v,\nabla v)\big) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i(w-v)\,dx\,dt =$$

$$= \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \Big(U_s P_s\left(A_i(x,t,w,\nabla w) - A_i(x,t,v,\nabla v)\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i(w-v)\Big)\,dx\,dt =$$

$$= \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3})\,dx\,dt, \quad (4.21)$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. Очевидно, что при $u(x,t) = y(x,t)$ для почти всех $(x,t) \in \Omega_T$ значение данного интеграла неотрицательно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x,t) \neq y(x,t)$ для почти всех $(x,t) \in \Omega_T$. Очевидно, что при этом $w(x,t) \neq v(x,t)$ и существует $\lambda \in [0,1]$ такое, что $\lambda w(x,t) + (1-\lambda)v(x,t) \neq 0$ для почти всех $(x,t) \in \Omega_T$, возможно $\lambda = \lambda(x,t)$.

Введем матрицы порядка $N(s) \times (n+1)$

$$\zeta = (U_s P_s w, U_s P_s \partial_1 w \ldots, U_s P_s \partial_n w), \quad \eta = (U_s P_s v, U_s P_s \partial_1 v \ldots, U_s P_s \partial_n v),$$

а также матрицы $\widehat{\zeta}$ и $\widehat{\eta}$ такие, что

$$\widehat{\zeta}_{\cdot i} = \zeta_{\cdot i}, \qquad \widehat{\eta}_{\cdot i} = \eta_{\cdot i}, \qquad \forall i = 1,\ldots,n, \quad (4.22)$$

$$\widehat{\zeta}_{l0} = \widehat{\eta}_{l0} = \lambda\zeta_{l0} + (1-\lambda)\eta_{l0}, \qquad \forall l = 1,\ldots,N(s). \quad (4.23)$$

По построению $\widehat{\zeta}_{l0} = \widehat{\eta}_{l0} \neq 0$, $\lambda \in [0,1]$. В то же время $\widehat{\zeta}_{\cdot i} - \widehat{\eta}_{\cdot i} \equiv \zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}$ $\forall i = 1,\ldots,n$. Сначала оценим часть подынтегральной суммы правой части (4.21)

[1] $\Psi(x,t,\xi)$ измерима по x и t для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывна по $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$.

$$
\begin{aligned}
I_{s1}+I_{s2} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(U_sP_s\left(A_i(x,t,w,\nabla w)-A_i(x,t,v,\nabla v)\right), R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\Big)=\\
&= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l=\\
&= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\widehat{\zeta}_{\cdot i}-\widehat{\eta}_{\cdot i})\right)_l+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Первую сумму правой части (4.24) оценим с помощью (4.18):

$$
\begin{aligned}
I_{s1} &= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\widehat{\zeta}_{\cdot i}-\widehat{\eta}_{\cdot i})\right)_l\geqslant\\
&\geqslant \widehat{\Upsilon}\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\widehat{\zeta}_{li}-\widehat{\eta}_{li}|^p=\widehat{\Upsilon}\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\partial_iw(x+h_{sl},t)-\partial_iv(x+h_{sl},t)|^p. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

То есть

$$
\sum_s\int_0^T\int_{Q_{s1}} I_{s1}\,dx\,dt\geqslant\widehat{\Upsilon}\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}. \qquad (4.26)
$$

Рассмотрим вторую и третью суммы правой части (4.24):

$$
\begin{aligned}
|I_{s2}| &\leqslant\Bigg|\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\Bigg|\leqslant\\
&\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)\right|\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|+\\
&+\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right|\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right| \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Исходя из условия локальной липшицевости

$$
\left|A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)\right|\leqslant\int_0^1\Psi(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}+\tau(\zeta_{l\cdot}-\widehat{\zeta}_{l\cdot}))\,d\tau\,|\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}|.
$$

Применим оценку (4.20) и неравенство $\int_0^1|a+\tau(b-a)|^{p-2}d\tau\leqslant|a|^{p-2}+|b|^{p-2}$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\Psi(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}+\tau(\zeta_{l\cdot}-\widehat{\zeta}_{l\cdot}))\,d\tau &\leqslant\int_0^1\left(\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}+\tau(\eta_{lk}-\zeta_{lk})|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\right)d\tau\leqslant\\
&\leqslant\widehat{\Psi}\int_0^1\left|\widehat{\zeta}_{l0}+\tau(\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0})\right|^{p-2}d\tau+\widehat{\Psi}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\leqslant\\
&\leqslant\widehat{\Psi}\left|\widehat{\zeta}_{l0}\right|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t),
\end{aligned}
$$

т. е.

$$\left|A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\widehat{\Psi}\left|\widehat{\zeta}_{l0}\right|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\right)|\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}|. \quad (4.28)$$

Аналогично для второй группы слагаемых правой части (4.27) имеем

$$|A_i\left(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}\right)-A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\widehat{\Psi}\left|\widehat{\eta}_{l0}\right|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\right)|\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0}|. \quad (4.29)$$

Подставим (4.28) и (4.29) в (4.27); учитывая, что $\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0}=\lambda(\eta_{l0}-\zeta_{l0})$ и $\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}=(1-\lambda)(\zeta_{l0}-\eta_{l0})$, см. (4.23), получаем оценку

$$|I_{s2}|\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Bigg(\widehat{\Psi}\;|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^{p-2}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-2}+$$
$$+g_\Psi(x+h_{sl},t)\Bigg)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|\;\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|. \quad (4.30)$$

Заметим, что $|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^{p-2}\leqslant|\zeta_{l0}|^{p-2}+|\eta_{l0}|^{p-2}$ для всех $\lambda\in[0,1]$, а также в силу ограниченности и невырожденности матриц R_s^{-1}

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|\leqslant c_{13}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|$$

для некоторого $c_{13}>0$. Тогда

$$|I_{s2}|\leqslant c_{13}\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\Bigg(\widehat{\Psi}\;|\zeta_{l0}|^{p-2}+\widehat{\Psi}\;|\eta_{l0}|^{p-2}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+$$
$$+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\Bigg)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|. \quad (4.31)$$

Перейдем к переменным w и v:

$$\sum_s\int_0^T\int_{Q_{s1}}|I_{s2}|\,dx\,dt\leqslant c_{13}\Bigg(\widehat{\Psi}\,\|w\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}+\widehat{\Psi}\,\|v\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\|\partial_i w\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}+$$
$$+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\|\partial_i v\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)}\Bigg)\|w-v\|_{L_p(\Omega_T)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)}\leqslant$$
$$\leqslant c_{13}\left(c_{14}r^{p-2}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)}\right)\|w-v\|_{L_p(\Omega_T)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)}, \quad (4.32)$$

где $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\leqslant r_1$ и $\|y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\leqslant r_1$. В этой оценке учтено, что $\|w\|_{L_p(\Omega_T)}=\|R_Qu\|_{L_p(\Omega_T)}\leqslant c_5\|u\|_{L_p(\Omega_T)}$ (см. (3.20)) и вследствие неравенства Фридрихса $\|u\|_{L_p(\Omega_T)}\leqslant c_{16}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\leqslant c_{16}r_1$; для $v=R_Qy$ оценки аналогичны. Для сокращения записи введем функцию $\widehat{c}_1(r_1)=c_{13}\left(c_{14}r_1^{p-2}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)}\right)$. В силу неравенства Юнга из (4.32) следует, что

$$\sum_s\int_0^T\int_{Q_{s1}}|I_{s2}|\,dx\,dt\leqslant\frac{\widehat{\Upsilon}}{p}\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}+\frac{(\widehat{c}_1(r_1))^q}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|w-v\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \quad (4.33)$$

Осталось оценить слагаемое при $i=0$ в подынтегральной сумме правой части (4.21):

$$|I_{s3}| \leqslant \left|\left(U_sP_s\left(A_0(x,t,w,\nabla w) - A_0(x,t,v,\nabla v)\right), R_s^{-1}U_sP_s(w-v)\right)\right| =$$
$$= \left|\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left(A_0\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right) - A_0\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\right)_l\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \left|A_0\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right) - A_0\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right| \left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\right)_l\right|. \quad (4.34)$$

Исходя из условия локальной липшицевости **(A5)**,

$$|A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)| \leqslant \int\limits_0^1 \Psi(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}+\tau(\eta_{l\cdot}-\zeta_{l\cdot}))\,d\tau\,|\zeta_{l\cdot}-\eta_{l\cdot}|. \quad (4.35)$$

Оценим интеграл, применив оценку (4.20):

$$\int\limits_0^1 \Psi_{0j}(x,t,\zeta_{l\cdot}+\tau(\eta_{l\cdot}-\zeta_{l\cdot}))\,d\tau \leqslant \int\limits_0^1 \left(\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}+\tau(\eta_{lk}-\zeta_{lk})|^{p-2} + g_\Psi(x+h_{sl},t)\right)d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(|\zeta_{lk}|^{p-2}+|\eta_{lk}|^{p-2}\right) + g_\Psi(x+h_{sl},t). \quad (4.36)$$

Подставляя (4.35) и (4.36) в (4.34), получим, что

$$|I_{s3}| \leqslant \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\left(\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(|\zeta_{lk}|^{p-2}+|\eta_{lk}|^{p-2}\right)+g_\Psi(x+h_{sl},t)\right)\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\zeta_{lj}-\eta_{lj}|\,\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\right)_l\right|.$$

Вернемся к функциям w, v, u и y и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\sum_s \int\limits_0^T\int\limits_{Q_{s1}} |I_{s3}|\,dx\,dt \leqslant \sum_s\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\int\limits_0^T\int\limits_{Q_{s1}}\left(\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k v(x+h_{sl},t)|^{p-2}+\right.$$
$$\left.+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k w(x+h_{sl},t)|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\right)\left|\partial_j w(x+h_{sl},t)-\partial_j v(x+h_{sl},t)\right| \times$$
$$\times\left|u(x+h_{sl},t)-y(x+h_{sl},t)\right|dx\,dt =$$
$$= \sum_{0\leqslant j\leqslant n}\int\limits_{\Omega_T}\left(\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k v|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k w|^{p-2}+g_\Psi\right)\left|\partial_j w-\partial_j v\right|\,\left|u-y\right|dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant n}\left\|\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k v|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k w|^{p-2}+g_\Psi\right\|_{L_{q'}(\Omega_T)}\times\|\partial_j w-\partial_j v\|_{L_p(\Omega_T)}\,\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}.$$

Заметим, что

$$\left\|\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k v|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\partial_k w|^{p-2}+g_\Psi\right\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \leqslant$$
$$\leqslant c_{17}\left(\|v\|^{p-2}_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}+\|w\|^{p-2}_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}\right)+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \leqslant c_{18}r_1^{p-2}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)} = \widehat{c}_2(r_1).$$

Здесь, как и выше, $\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_5\|u\|_{L_p(\Omega_T)}$ (см. (3.20)) и $\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_{16}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant c_{16}r_1$ (см. неравенство Фридрихса), а также учтены аналогичные оценки для $v = R_Q y$. Осталось воспользоваться неравенством Гёльдера:

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}|\,dx\,dt \leqslant \widehat{c}_2(r_1)\ \|u-y\|_{L_p(\Omega_T)} \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(\Omega_T)} =$$
$$= \widehat{c}_2(r_1)\ \|u-y\|_{L_p(\Omega_T)} \|w-v\|_{L_p(\Omega_T)} + \widehat{c}_2(r_1)\ \|u-y\|_{L_p(\Omega_T)} \|w-v\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant$$
$$\leqslant c_5\widehat{c}_2(r_1)\ \|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} + \frac{\widehat{\Upsilon}}{p}\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + \frac{(\widehat{c}_2(r_1))^q}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \quad (4.37)$$

Подставляя (4.26), (4.33) и (4.37) в (4.23), получим

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \geqslant \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} (I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}|)\,dx\,dt \geqslant \left(\widehat{\Upsilon} - 2\frac{\widehat{\Upsilon}}{p}\right)\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} -$$
$$- \frac{\widehat{c}_1^{\,q}(r_1)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|w-v\|^q_{L_p(\Omega_T)} - c_5\widehat{c}_2(r_1)\ \|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} - \frac{\widehat{c}_2^{\,q}(r_1)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)} \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{c_5^q\widehat{c}_1^{\,q}(r_1) + \widehat{c}_2^{\,q}(r_1)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\ \|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)} - c_5\widehat{c}_2(r_1)\ \|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} =: -C(r_1;\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}), \quad (4.38)$$

поскольку $\left(1-\dfrac{2}{p}\right)\widehat{\Upsilon}(u,y) \geqslant 0$. Так как $q>1$ и $W\subset L_p(\Omega_T)$ компактно, то A_R — оператор с $(\mathcal{V};W)$-полуограниченной вариацией. □

Теорема 4.2. *Пусть $p\in[2,\infty)$ и справедливы условия* **(A0)**-**(A1)** *и* **(A4)**-**(A5)**. *Кроме того, пусть выполнено либо условие коэрцитивности* **(A2)**, *либо оценки* (3.42)-(3.43). *Тогда для любых $f\in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и $\varphi\in L_2(Q)$ существует обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3) *$u\in W$, множество решений ограничено и слабо замкнуто в W.*

Доказательство. В силу условий **(A0)-(A1)** A_R — ограниченный, деминепрерывный оператор (см. лемму 3.8), а в силу **(A4)-(A5)** A_R — оператор с $(\mathcal{V};W)$-полуограниченной вариацией (см. лемму 4.4). Кроме того, A_R коэрцитивен либо в силу условия **(A2)** (см. лемму 4.1), либо в силу выполнения оценок (3.42)-(3.43) (см. лемму 3.11). Согласно [20, теорема 3.2, гл. 3] существует обобщенное решение $u\in W$ задачи (3.1)–(3.3). Множество решений ограничено (см. доказательство в теореме 3.2) и слабо замкнуто в силу свойства $(\mathcal{V},W)$-полуограниченной вариации (см. [36, теорема 4.2.1, гл. 4, §2]). □

Замечание 4.1. Вместо условия **(A2)** в теореме 4.2 может быть использовано другое условие, гарантирующее коэрцитивность задачи. Например, если при $p\in[2,\infty)$ кроме условий (**A0**), (**A1**), (**A4**), (**A5**) справедливы более сильные оценки для слагаемых с младшими членами:

$$|A_i(x,t,\xi_0+\delta_0,\xi_1,\ldots,\xi_n) - A_i(x,t,\xi)| \leqslant \Psi_1(x,t,\xi)|\delta_0|, \quad (i=1,\ldots,n), \quad (4.39)$$
$$|\Psi_1(x,\xi)| \leqslant g_\Psi(x,t) + \widehat{\Psi}_1 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p'-2}, \quad (4.40)$$
$$|A_0(x,t,\xi)| \leqslant \widehat{g}(x,t) + \widehat{c}_1 \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p'-1}, \quad (4.41)$$

где $p'\in[2,p)$, $\widehat{\Psi}_1>0$, $g_\Psi\in L_{q'}(\Omega_T)$, $q'=p/(p-2)$, $\widehat{g}\in L_q(\Omega_T)$, $\widehat{c}_1>0$.

Теорема 4.3. *Пусть $p=2$ и справедливы условия невырожденности* **(A0)**, *интегрируемости* **(A1)**, *коэрцитивности* **(A2)**, *сильной эллиптичности* **(A4)** *и локальной липшицевости* **(A5)**. *Тогда для любых $f\in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi\in L_2(Q)$ существует обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3), *причем $\partial_t u\in L_2(\Omega_T)$.*

Доказательство. При $p=2$ можно рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$\widetilde{W} = \{u\in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) : \partial_t u\in L_2(\Omega_T)\}.$$

Как известно, $\widetilde{W} \subset L_2(\Omega_T)$ компактно, см. [33, теорема 5.1, гл. 1, §5]. Согласно оценке (4.38) оператор A_R является коэрцитивным оператором с $(\mathcal{V}, \widetilde{W})$-полуограниченной вариацией. Следовательно, существует решение операторного уравнения (3.7), см. [20, теорема 3.2, гл. 3] или [33, теорема 1.2, гл. 3, §1]. При этом решение $u \in \widetilde{W}$, т. е. $\partial_t u \in L_2(\Omega_T)$. □

Замечание 4.2. При $p = 2$ утверждения теорем 4.2 и 4.3 сохранятся, если отказаться от условий коэрцитивности **(A2)**, (3.42)-(3.43) или (4.39)–(4.41). В этом случае нужные ограничения получаем благодаря наличию в уравнении оператора ∂_t и оценке полуограниченности вариации оператора A_R (4.38) (следствие из [36, замечание 4.2.3]).

4.3. Параболическое уравнение с p-лапласианом и разностным оператором

В этом разделе рассмотрим задачу (3.1)–(3.3), когда дифференциальный оператор задан p-лапласианом. Как и в разделе 2.3, для исследования дифференциально-разностного оператора

$$\Delta_p R_Q : L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$$

будем использовать свойства оператора двойственности.

Определение 4.1. Функция $u \in W$ называется *обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) с дифференциальным оператором

$$\Delta_p R u = -\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \partial_i \left(|\partial_i u|^{p-2} \partial_i u\right), \tag{4.42}$$

если этот элемент удовлетворяет операторному уравнению

$$\partial_t u + \Delta_p R_Q u = f, \tag{4.43}$$

и $u|_{t=0} = \varphi$.

Определение 4.2. Линейный оператор $\widehat{R}_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ называется *аккретивным*, если

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle \equiv \int\limits_{\Omega_T} Ju\, \widehat{R}_Q u\, dx\, dt \geqslant 0$$

для любого $u \in L_p(Q)$. Аккретивный линейный оператор $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ *сильно аккретивен*, если

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u\rangle \equiv \int\limits_{\Omega_T} Ju\, \widehat{R}_Q u\, dx\, dt \geqslant c_a \|u\|^p_{L_p(\Omega_T)}. \tag{4.44}$$

Заметим, что оператор $J : L_p(\Omega_T) \to L_q(\Omega_T)$, действующий по формуле $Ju = |u|^{p-2}u$, обладает свойствами, аналогичными свойствам оператора $J : L_p(Q) \to L_q(Q)$, см. леммы 2.9–2.11. Очевидно также, что если оператор $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ аккретивен (сильно аккретивен), то и оператор $\widehat{R}_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ аккретивен (сильно аккретивен), поскольку в нем нет явной зависимости от t. Критерий сильной аккретивности, доказанный в лемме 2.8 для эллиптического случая, будет справедлив и при рассмотрении в цилиндре. Ниже воспользуемся результатами раздела 2.3.

Лемма 4.5. *Оператор $\Delta_p R_Q : L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ ограничен и деминепрерывен.*

Доказательство. p-Лапласиан удовлетворяет условию интегрируемости с $A_i(x, t, \xi) = |\xi_i|^{p-2}\xi_i$. Утверждение леммы 4.5 следует из леммы 3.8. □

Лемма 4.6. *Пусть $L_p(0, T; W_p^1(Q)) \ni u_m \rightharpoonup u_0 \in L_p(0, T; W_p^1(Q))$ и*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i (u_m - u_0)\rangle \leqslant 0. \tag{4.45}$$

Тогда, если $\widehat{R}_Q$ сильно аккретивен, то

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \langle J\partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \langle J\partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0\rangle. \tag{4.46}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.13.

Лемма 4.7. *Пусть разностному оператору R_Q соответствуют невырожденные матрицы R_s, $a_h \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, пусть обратный оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен с константой c_a, см.* (4.44). *Тогда оператор $\Delta_p R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ псевдомонотонен*[1] *и коэрцитивен, причем*

$$\langle \Delta_p R_Q u, u\rangle \geqslant c_5^{-p} c_a \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}. \tag{4.47}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.14.

Теорема 4.4. *Пусть оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен. Тогда для любых $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и $\varphi \in L_2(Q)$ задача* (3.1)–(3.3) *с $A = \Delta_p$ имеет непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений, причем для каждого решения справедливы оценки*:

$$\|u(T)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant c_{30}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + c_{31}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}, \tag{4.48}$$

$$\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant c_{32}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + c_{33}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}, \tag{4.49}$$

где $c_{30}, c_{31}, c_{32}, c_{33} > 0$ не зависят от u, f и φ.

Доказательство. Вследствие лемм 4.5 и 4.7 при указанных выше условиях оператор $\Delta_p R_Q$ деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Следовательно, решение операторного уравнения (4.43) существует при $\varphi = 0$, см. [33, теорема 1.1, гл. 3, §1]. Для произвольного $\varphi \in L_2(Q)$ в силу непрерывности и плотности вложений $C^1(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \cap W \subset W \subset C(0,T;L_2(Q)$ (см. [15, леммы 1.12, 1.17, гл. IV, §1]) существует элемент $v \in W$ такой, что $v|_{t=0} = \varphi$. Поскольку оператор $\Delta_p R_Q(\cdot + v)$ деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен, то существует решение уравнения

$$\partial_t(u+v) + \Delta_p R_Q(u+v) = f, \qquad u|_{t=0} = 0,$$

см. [33, теорема 1.1, гл. 3, §1]. Это доказывает существование обобщенного решения задачи (3.1)–(3.3) с $A = \Delta_p$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора. Докажем это, одновременно доказывая оценки (4.48), (4.49). Пусть u — решение операторного уравнения (4.43), $u|_{t=0} = \varphi$. Тогда

$$\langle \partial_t u, u\rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u\rangle = \langle f, u\rangle. \tag{4.50}$$

Используем оценку коэрцитивности (4.47) и распишем первое слагаемое левой части:

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\,\|\varphi\|^2_{L_2(Q)} + c_5^{-p} c_a \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \langle f, u\rangle. \tag{4.51}$$

Оценим правую часть (4.50) с помощью неравенства Гёльдера и формулы $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$:

$$\langle f, u\rangle \leqslant \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \frac{1}{q\varepsilon^q}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}.$$

Пусть $\varepsilon^p/p = c_5^{-p} c_a/2$. В силу неотрицательности нормы отбросим первое слагаемое в левой части (4.51)

$$\frac{c_5^{-p} c_a}{2}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \frac{1}{q\varepsilon^q}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{1}{2}\,\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}\,.$$

Оценка (4.49) доказана. С другой стороны, третье слагаемое в левой части (4.51) также неотрицательно, следовательно

$$\frac{1}{2}\,\|u(T)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \langle f, u\rangle + \frac{1}{2}\,\|\varphi\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{q}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{1}{p}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + \frac{1}{2}\,\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}\,.$$

Подставив в это неравенство оценку (4.49), мы получим оценку (4.48).

[1] Очевидно, что псевдомонотонный оператор является псевдомонотонным на W.

Слабая замкнутость множества решений следует из псевдомонотонности оператора $\Delta_p R_Q$. Покажем это. Пусть $\{u_m\}$ — решения, $u_m \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Заметим, что $u|_{t=0} = u_m|_{t=0} = \varphi$. Поскольку в силу слабой сходимости

$$\lim_{m\to\infty} \langle f, u_m - u\rangle = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{m\to\infty} \langle \partial_t u, u_m - u\rangle = 0,$$

то воспользуемся монотонностью оператора ∂_t на множествах с фиксированными начальными условиями:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u\rangle = \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle f - \partial_t u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0.$$

В силу псевдомонотонности $\Delta_p R_Q$ из последнего неравенства следует, что

$$\langle \Delta_p R_Q u, u - \xi\rangle \leqslant \underline{\lim_{m\to\infty}} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - \xi\rangle = \underline{\lim_{m\to\infty}} \langle f - \partial_t u_m, u_m - \xi\rangle \leqslant \leqslant \langle f - \partial_t u, u - \xi\rangle \quad (4.52)$$

для любого $\xi \in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Неравенство (4.52) означает, что u — решение операторного уравнения (4.43), причем по построению $u|_{t=0} = \varphi$. $\square$

Заметим, что в этом разделе для простоты изложения рассмотрен p-лапласиан без младших членов. Младшие члены, определяемые непрерывными функциями типа Каратеодори, составляют ограниченный, деминепрерывный и псевдомонотонный на W оператор. Обозначим его по аналогии с ранее введенными обозначениями $\mathcal{A}_R^0$. Таким образом, сумма ограниченного псевдомонотонного оператора $\Delta_p R_Q$ и ограниченного псевдомонотонного на W оператора $\mathcal{A}_R^0$ даст псевдомонотонный на W оператор. Сохранение условия коэрцитивности может потребовать дополнительных условий, например, если $\langle \mathcal{A}_R^0 u, u\rangle \geqslant 0$ или выполнено условие (3.43) из леммы 3.11.

4.4. Существование периодических решений

В этом разделе сформулируем теоремы существования периодических по t решений существенно нелинейных параболических дифференциально-разностных уравнений; квазилинейные уравнения см. в разделе 3.5.

В цилиндре $Q\times\mathbb{R}$ рассмотрим уравнение (3.58). Поскольку нас интересуют периодические по t решения с периодом T, то уравнение будем рассматривать в рефлексивном банаховом пространстве

$$\widehat{W} = \{u \in \mathcal{V} :\ \partial_t u \in \mathcal{V}^*, u|_{t=0} = u|_{t=T}\}$$

с нормой $\|u\|_{\widehat{W}} = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$. Обозначим через $\widehat{A}_R$ сужение оператора A_R на пространство $\widehat{W}$:

$$\widehat{A}_R u := A_R u \qquad \forall u \in \widehat{W}.$$

Очевидно, что $\widehat{W} \subset W$ непрерывно. Более того, оператор $\widehat{A}_R : \widehat{W} \to \mathcal{V}^*$ наследует свойства оператора $A_R : W \to \mathcal{V}^*$. Используя это, сформулируем теоремы существования решения.

Теорема 4.5. *Пусть коэффициенты дифференциального оператора A периодичны по t с периодом T, а также выполнены условия невырожденности* (**A0**), *интегрируемости* (**A1**), *коэрцитивности* (**A2**) *и эллиптичности* (**A3**). *Тогда для любого $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ множество периодических обобщенных решений задачи* (3.58), (3.3), (3.59) *непусто и слабо компактно.*

Доказательство. В силу условий теоремы оператор $\widehat{A}_R$ деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8, а также коэрцитивен (лемма 4.1) и обладает свойством (S_+) на W (лемма 4.3), т. е. псевдомонотонен на $\widehat{W}$. Следовательно, решение операторного уравнения (3.60) существует, см. [33, теорема 1.2, гл. 3, §1].

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора, слабая компактность в $\widehat{W}$ следует из свойства (S_+) на W, полное доказательство приведено в теореме 3.6. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть коэффициенты дифференциального оператора A периодичны по t с периодом T, а также выполнены условия невырожденности* (**A0**), *интегрируемости* (**A1**), *сильной эллиптичности* (**A4**), *локальной липшицевости* (**A5**) *и коэрцитивности* (3.42)-(3.43), *$p \in [2,\infty)$. Тогда множество периодических обобщенных решений задачи* (3.58), (3.3), (3.59) *непусто и слабо компактно для любого $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$.*

Доказательство. В силу условий **(A0)-(A1)** A_R — ограниченный, деминепрерывный оператор (см. лемму 3.8), в силу условий (3.42)-(3.43) — коэрцитивный (см. лемму 3.11), а в силу **(A4)-(A5)** A_R — оператор с $(\mathcal{V}; W)$-полуограниченной вариацией (см. лемму 4.4). Следовательно, $\widehat{A}_R$ — псевдомонотонный на $\widehat{W}$ оператор, см. [36, предложение 4.2.2, гл. 4, §4.2]. Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1] существует обобщенное решение задачи (3.58), (3.3) $u \in \widehat{W}$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора $\widehat{A}_R$, см. доказательство в доказательстве теоремы 3.6. Слабая компактность множества решений следует из псевдомонотонности на W оператора. Для удобства читателей приведем это доказательство полностью. Пусть $\{u_m\}$ — решения, $u_m \rightharpoonup u$ в $\widehat{W}$. Заметим, что при этом $u_m \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$, $\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u$ в $\mathcal{V}^*$, $u_m|_{t=0} = u_m|_{t=T}$ и $u|_{t=0} = u|_{t=T}$. Кроме того,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle \widehat{A}_R u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, u_n - u\rangle - \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle \partial_t u_n, u_n - u\rangle = 0,$$

так как первое слагаемое правой части стремится к нулю из-за слабой сходимости $\{u_m\}$, второе слагаемое правой части стремится к нулю вследствие монотонности оператора ∂_t, см. (3.66). В силу псевдомонотонности на W оператора $\widehat{A}_R$ из последнего неравенства следует, что

$$\langle \widehat{A}_R u, u - \xi\rangle \leqslant \underline{\lim_{m\to\infty}} \langle \widehat{A}_R u_m, u_m - \xi\rangle = \underline{\lim_{m\to\infty}} \langle f - \partial_t u_m, u_m - \xi\rangle \leqslant \langle f - \partial_t u, u - \xi\rangle \quad \forall \xi \in \mathcal{V}. \tag{4.53}$$

Неравенство (4.53) означает, что u — решение операторного уравнения (4.43), причем по построению $u|_{t=0} = u|_{t=T}$. □

Теорема 4.7. *Пусть оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен. Тогда для любого $f \in L_q(0,T; W_q^{-1}(Q))$ существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в $\widehat{W}$ множество периодических обобщенных решений задачи* (3.58), (3.3), (3.59) *с $A = \Delta_p$, $p \in (2,\infty)$, причем решения удовлетворяют оценке*

$$\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant c_{34} \|f\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \tag{4.54}$$

где $c_{34} > 0$ не зависит от u и f.

Доказательство. Вследствие лемм 4.5 и 4.7 при указанных выше условиях оператор $\Delta_p R_Q$ деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Следовательно, справедливо также свойство псевдомонотонности на $\widehat{W}$. Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1] существует обобщенное решение задачи (3.58), (3.3) $u \in \widehat{W}$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора. Докажем это, одновременно доказывая оценку (4.54). Пусть u — решение операторного уравнения (4.43), $u_{|t=0} = u_{|t=T}$. Тогда

$$\langle \partial_t u, u\rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u\rangle = \langle f, u\rangle.$$

В силу периодичности решения $\langle \partial_t u, u\rangle = 0$. Используем оценку коэрцитивности (4.47) для левой части и неравенства Гёльдера для правой:

$$c_5^{-p} c_a \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \langle \Delta_p R_Q u, u\rangle = \langle f, u\rangle \leqslant \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}. \tag{4.55}$$

Из этого неравенства непосредственно следует оценка (4.54).

Слабая компактность множества решений следует из псевдомонотонности на W оператора $\Delta_p R_Q$, см. доказательство теоремы 4.6. □

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО

В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский сформулировали новую нелокальную краевую задачу, возникающую в теории плазмы, см. [3]:

$$-\Delta w(x) = f(x) \qquad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0,2)\times(0,1)), \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &w(x_1,0) = w(x_1,1) = 0 && (0 \leqslant x_1 \leqslant 2),\\ &w(0,x_2) = \gamma_1 w(1,x_2), \quad w(2,x_2) = \gamma_2 w(1,x_2) && (0 < x_2 < 1)\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

при $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$. Разрешимость задачи в случае произвольного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами и произвольной структуры носителя нелокальных членов была сформулирована как нерешенная задача, см. [55]. В конце 80-х годов была построена общая теория линейных нелокальных эллиптических краевых задач, в рамках которой была решена указанная проблема, см. [59, 67, 68, 106]. Вопрос о нелинейных эллиптических нелокальных задачах, а также о линейных и нелинейных параболических задачах с нелокальными краевыми условиями оставался открытым. В этой главе будут рассмотрены данные задачи с использованием метода разбиения области и границы, а также теории операторов псевдомонотонного типа. Поскольку в главе будут использованы оценки, полученные в предыдущих главах, то нумерация констант в этой главе будет $k_1, k_2, \ldots$, а также будут использованы константы из предыдущих глав c_j с указанием формул, где они определены.

5.1. Разностный оператор и изоморфизм соболевских пространств

Вначале рассмотрим эллиптические задачи. Будет использовано разбиение области, см. раздел 1.2. Кроме разбиения области, необходимо рассмотреть свойства разбиения границы ∂Q, определяемое тем же множеством сдвигов $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, см. раздел 1.2. По-прежнему, M — аддитивная группа, порожденная $\mathcal{M}$.

Условие 5.1. *Пусть множество $\mathcal{K}$, заданное формулой*

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1,h_2\in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2)\setminus(\partial Q + h_1)]} \right\}, \tag{5.3}$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{mes}_{n-1}(\mathcal{K}\cap\partial Q) = 0. \tag{5.4}$$

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q\setminus\mathcal{K}$. В [106, §7] получен следующий результат:

Лемма 5.1. *Если $(\Gamma_\rho + h)\cap\overline{Q} \neq \varnothing$ для некоторого $h\in M$, то или $\Gamma_\rho + h \subset Q$, или существует $\Gamma_r \subset \partial Q\setminus\mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$.*

Согласно этому свойству множества $\left\{\Gamma_\rho + h : \Gamma_\rho + h \subset \overline{Q},\ \rho = 1,2,\ldots,\ h\in M\right\}$ могут быть разбиты на классы. Множества $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h\in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;
2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x\in\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ однонаправлены.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r — номер класса, j — номер элемента в классе ($1 \leqslant j \leqslant J = J(r)$). Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1},\ldots,\Gamma_{rJ_0}\subset Q$, $\Gamma_{r,J_0+1},\ldots,\Gamma_{rJ}\subset\partial Q$ ($0\leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)$).

Как известно (см. [106, §7]), данное разбиение обладает следующими свойствами:

Лемма 5.2 (см. [106, лемма 7.6])**.** *Для любого $\Gamma_{rj}\subset\partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj}\subset\partial Q_{sl}$. Более того, если $\Gamma_{rj}\subset\partial Q_{sl}$, то $\Gamma_{rj}\cap\partial Q_{s_1l_1} = \varnothing$ для любых пар $(s_1,l_1)\neq(s,l)$.*

Лемма 5.3 (см. [106, лемма 7.7]). *Для каждого* $r = 1, 2, \dots$ *существует единственный номер* $s = s(r)$ *такой, что* $N(s) = J(r)$ *и* $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$ (*с точностью до перенумеровки*).

Рассмотрим изоморфизм между подпространствами Соболева, порожденный разностным оператором. При этом предполагается выполненным следующее условие:

Условие 5.2. *Для каждой подобласти* Q_{sl} $(s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s))$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $G_{sl} \subset Q_{sl}$ *с границей* $\partial G_{sl} \in C^1$ *такое, что* $\operatorname{mes}_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$, $\operatorname{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

Обозначим $W^1_{p,\gamma}(Q)$ $(\gamma = \{\gamma^r_{ij}\})$ подпространство функций из $W^1_p(Q)$, удовлетворяющих *нелокальным краевым условиям*

$$\left.\begin{aligned} &w|_{\Gamma_{rl}} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma^r_{lj} w|_{\Gamma_{rj}}, \quad r \in B,\ l = J_0 + 1, \dots, J, \\ &w|_{\Gamma_{rl}} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad ,r \notin B,\ l = 1, \dots, J, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, γ^r_{lj} — вещественные числа, $B = \{r : J_0 > 0\}$.

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\widehat{\mathbf{\Lambda}} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор $R : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h), \tag{5.6}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$. Здесь $I_Q : L_p(Q) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_p(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(Q)$ — оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ на Q. Напомним, что оператору R_Q соответствуют матрицы $R_s = \{r^s_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant N(s)}$ такие, что

$$r^s_{ij} = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}, \end{cases} \tag{5.7}$$

где h_{si} определяется условием $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$. Из ограниченности области Q и формулы (5.7) следует, что множество различных матриц R_s конечно.

Согласно лемме 5.3, для каждого $r = 1, 2, \dots,$ найдется единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$ после перенумерации подобластей s-го класса. Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из R_s $(s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть e^r_j $(j = 1, \dots, J(r))$ — j-я строка матрицы размерности $J \times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J - J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 5.1. Будем говорить, что матрицы R_s *соответствуют граничным условиям* (5.5), если выполнено следующее условие:

Условие 5.3. *Существует набор* $\widehat{\mathbf{\Lambda}} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$ *такой, что для любого* $s = 1, 2, \dots$ *матрицы* R_s *невырождены, а также для всех* $r \in B$ *и* $s = s(r)$ *справедливы соотношения*:

$$e^r_l = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma^r_{lj} e^r_j \qquad (l = J_0 + 1, \dots, J). \tag{5.8}$$

Обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N - J_0$ строк и столбцов.

Пример 5.1. Рассмотрим нелокальные краевые условия задачи Бицадзе—Самарского:

$$\left.\begin{aligned} &w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 && (0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ &w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2), \quad w(2, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) && (0 < x_2 < 1). \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(0,0); (1,0); (-1,0)\}$, которые разбивают область $Q = (0,2) \times (0,1)$ на две подобласти $Q_{11} = (0,1) \times (0,1)$ и $Q_{12} = (1,2) \times (0,1)$, принадлежащих одному классу. Множество $\mathcal{K}$ состоит из 6 точек:

$$\mathcal{K} = \{(i,j) : i = 0,1,2; j = 0,1\}.$$

Множество $\{\Gamma_{rj}\}$ состоит из 8 элементов, которые принадлежат 4-м классам:

1) $\Gamma_{11} = \{1\} \times (0,1)$, $\Gamma_{12} = \{0\} \times (0,1)$;

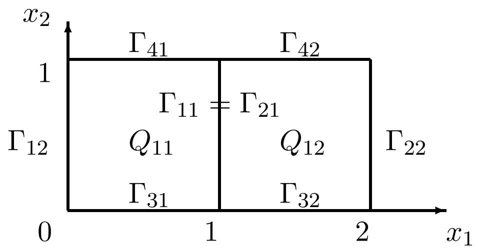

Рис. 5.1

Fig. 5.1

2) $\Gamma_{21} = \{1\} \times (0,1)$, $\Gamma_{22} = \{2\} \times (0,1)$;
3) $\Gamma_{31} = (0,1) \times \{0\}$, $\Gamma_{12} = (1,2) \times \{0\}$;
4) $\Gamma_{41} = (0,1) \times \{1\}$, $\Gamma_{12} = (1,2) \times \{1\}$.

Подчеркнем, что Γ_{11} и Γ_{21} расположены на одном подмножестве, но имеют противоположные нормали. В соответствии с множеством сдвигов разностный оператор должен иметь вид

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 + 1, x_2) + a_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

Данному оператору соответствует матрица $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$, невырожденная при $a_1 a_{-1} \neq 1$. В то же время, для любого $u \in \mathring{W}^1_p(Q)$ и $w = R_Q u$ получаем:

$$\begin{gathered} w|_{x_2=0} = w|_{x_2=1} = 0, \\ w|_{x_1=0} = a_1 u|_{x_1=1} = a_1 w|_{|x_1=1}, \\ w|_{x_1=2} = a_{-1} u|_{x_1=1} = a_{-1} w|_{x_1=1}. \end{gathered}$$

Таким образом, если $a_1 = \gamma_1$, $a_{-1} = \gamma_2$ и $u \in \mathring{W}^1_p(Q)$, то функция $w = R_Q u \in W^1_p(Q)$ и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (5.9), т. е. $R_Q(\mathring{W}^1_p(Q)) \subset W^1_{p,\gamma}(Q)$, где $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Пример 5.2. Пусть $Q = (0,3) \times (0,1)$. Рассмотрим нелокальные краевые условия при $\gamma_1 = \dfrac{39}{28}$, $\gamma_2 = -\dfrac{6}{7}$:

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1,0) = w(x_1,1) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 3), \\ w(0,x_2) = \gamma_1 w(1,x_2) + \gamma_2 w(2,x_2) & (0 < x_2 < 1), \\ w(3,x_2) = \gamma_2 w(1,x_2) + \gamma_1 w(2,x_2) & (0 < x_2 < 1). \end{array}\right\} \tag{5.10}$$

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(k,0)\}_{k=0,\pm1,\pm2}$, которые разбивают область $Q = (0,3) \times (0,1)$ на три подобласти. Разбиение области и границы показано на рис. 5.2:

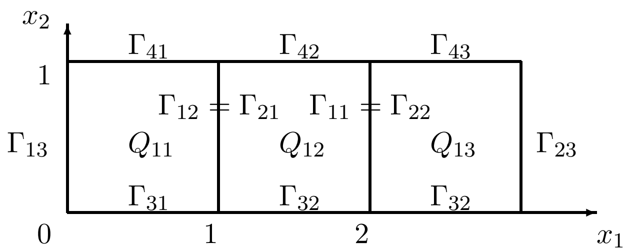

Рис. 5.2

Fig. 5.2

Разностный оператор в силу симметричности нелокальных условий также будет симметричным:

$$Ru(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x_1+1, x_2) + a_1 u(x_1-1, x_2) + a_2 u(x_1+2, x_2) + a_2 u(x_1-2, x_2).$$

Этому оператору соответствует матрица $R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$. На основании условия 5.3 вычислим значения $\{a_i\}$:

$$a_1 = \gamma_1 a_0 + \gamma_2 a_1,$$
$$a_2 = \gamma_2 a_0 + \gamma_1 a_1.$$

Для удобства вычисления определим $a_0 = 1$. Тогда $a_1 = 3/4$ и $a_2 = 3/16$. Таким образом, если $a_0 = 1$, $a_1 = 3/4$, $a_2 = 3/16$ и $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$, то функция $w = R_Q u \in W_p^1(Q)$ и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (5.10), т. е. $R_Q(\mathring{W}_p^1(Q)) \subset W_{p,\gamma}^1(Q)$.

Следующая теорема устанавливает связь между эллиптическими дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями вида (5.5) и эллиптическими дифференциально-разностными уравнениями с однородными условиями Дирихле. Это позволяет применять результаты, полученные для одной из этих задач, к исследованию другой задачи.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнены условия* 5.1–5.3, *а соответствующие матрицы* R_s $(s = 1, 2, \dots)$ *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены.*

Тогда существует множество $\gamma = \{\gamma_{lj}^r\}$ *такое, что оператор* R_Q *отображает* $\mathring{W}_p^1(Q)$ *на* $W_{p,\gamma}^1(Q)$ *непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. При $p = 2$ данная теорема доказана в [106, теорема 8.1]. Для $p \in (1, +\infty)$ доказательство содержит некоторые отличия. Поэтому для удобства читателей приведем его полностью.

1. Докажем вначале, что $R_Q(\mathring{W}_p^1(Q)) \subset W_{p,\gamma}^1(Q)$ для некоторого γ. Очевидно, $R_Q(\mathring{W}_p^1(Q)) \subset W_p^1(Q)$. Поэтому достаточно доказать, что функция $R_Q u$ удовлетворяет условиям (5.5) для $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$.

Пусть e_i^r — i-я строка матрицы, полученной из R_s путем вычеркивания последних $N(s) - J_0$ столбцов ($r \in B$, $s = s(r)$). Поскольку $\det R_{s0} \neq 0$, существуют числа γ_{lj}^r такие, что

$$e_l^r = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \qquad (l = J_0 + 1, \dots, N = N(s)). \tag{5.11}$$

Обозначим через $L_p(\cup_l Q_{sl})$ подпространство функций из $L_p(Q)$, обращающихся в нуль вне множества $\bigcup\limits_l Q_{sl}$. Пространство $L_p(\bigcup\limits_l Q_{sl})$ является инвариантным пространством R_Q, см. лемму 1.2. Определим изоморфизм $U_s : L_p(\bigcup\limits_l Q_{sl}) \to L_p^N(Q_{s1})$, где $N = N(s)$, по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \qquad (x \in Q_{s1}). \tag{5.12}$$

Пусть также $P_s : L_p(Q) \to L_p(\cup_l Q_{sl})$ — оператор проекции на $L_p(\cup_l Q_{sl})$. Тогда $(U_s P_s u)_l|_{\Gamma_{r1}} = 0$ $(l = J_0 + 1, \dots, N)$ для любого $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$. Из (5.11) следует, что

$$\begin{aligned} &(R_Q u)(x)|_{\Gamma_{rl}} = (U_s P_s R_Q u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = (R_s U_s P_s u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = \\ &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r (R_s U_s P_s u)_j(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r (R_Q u)(x - h_{sl} + h_{sj})|_{\Gamma_{rl}} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r (R_Q u)(x)|_{\Gamma_{rj}}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

где $l = J_0 + 1, \dots, N$. Таким образом, $R_Q(\mathring{W}_p^1(Q)) \subset W_{p,\gamma}^1(Q)$.

2. Теперь докажем обратное вложение. В соответствии с [106, лемма 7.6], для любого фиксированного r и соответствующего $s = s(r)$ существуют $\rho = \rho(r)$ и $m = m(r)$ такие, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{\rho m}$, $Q_{\rho m} \neq Q_{s1}$. Перенумеруем подобласти ρ-го класса так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{\rho l}$ $(l = 1, \dots, J_0)$.

Пусть $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$. Тогда $u = R_Q^{-1} w \in W_p^1(Q_{sl})$, см. лемму 1.6.

а) Покажем, что $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$. Пусть

$$\varphi_l = 0 \qquad (l = J_0 + 1, \dots, N(s)), \tag{5.14}$$
$$\varphi_l = \psi_l \qquad (l = 1, \dots, J_0), \tag{5.15}$$

где $\varphi_l = (U_s P_s u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}}$ $(l = 1, \dots, N(s))$, $\psi_l = (U_\rho P_\rho u)_l(x - h_{\rho l})|_{\Gamma_{rl}}$ $(l = 1, \dots, N(\rho))$. Введем функцию $u_j(x)$ $(x \in \bigcup\limits_{s,l} Q_{sl})$, такую что $u_j(x) := \partial_j u(x)$ при $x \in Q_{sl}$. Согласно лемме 1.6, $u_j \in L_p(Q)$. С учетом (5.14) для доказательства принадлежности $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ достаточно показать, что для любого $1 \leqslant j \leqslant n$ функция u имеет обобщенные производные $\partial_j u$ и $\partial_j u(x) = u_j(x)$ $(x \in Q)$, т. е. для любого $v \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$\int\limits_Q u_j v\, dx = -\int\limits_Q u \partial_j v\, dx. \tag{5.16}$$

Поскольку $C^\infty(\overline{Q})$ всюду плотно в $W_p^1(Q)$, для каждого $w \in W_p^1(Q)$ существует последовательность $w_m \in C^\infty(\overline{Q})$, сходящаяся по норме, т. е.

$$\lim_{m\to\infty} \|w - w_m\|^p_{W_p^1(Q)} = 0, \tag{5.17}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{r,l} \|(w - w_m)|_{\Gamma_{rl}}\|^p_{L_p(\Gamma_{rl})} = 0. \tag{5.18}$$

Полагая $u_m = R_Q^{-1} w_m$, из (5.17) и леммы 1.6 имеем, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{r,l} \|u - u_m\|^p_{W_p^1(Q_{sl})} = 0. \tag{5.19}$$

Из равенств $R_Q^{-1} = \sum\limits_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s$ и $P_s R_Q^{-1} = R_Q^{-1} P_s$ следует, что

$$(u - u_m)|_{\Gamma_{rl}} = (U_s P_s (u - u_m))_l (x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = (R_s^{-1} U_s P_s (w - w_m))_l (x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}}. \tag{5.20}$$

В силу конечности числа различных матриц R_{s_ν}, а также с учетом (5.18) и (5.20) получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{r,l} \|u - u_m\|^p_{L_p(\Gamma_{rl})} = 0. \tag{5.21}$$

Из условия 5.2 следует формула интегрирования по частям для произвольных $u_m \in C^\infty(\overline{Q}_{sl})$ и $v \in C^\infty(\overline{Q}_{sl})$:

$$\int\limits_{Q_{sl}} \partial_j u_m v\, dx = \int\limits_{\partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}} u_m v \cos(x_j, \nu_{sl})\, dx' - \int\limits_{Q_{sl}} u_m \partial_j v\, dx,$$

где ν_{sl} — единичный вектор внешней нормали к ∂Q_{sl} в точке $x' \in \partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ и суммируя по s и l, получаем (5.16). Заметим, что в данной формуле интегральные слагаемые на множестве $\partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}$ равны нулю в силу равенств (5.14), если $l = J_0 + 1, \dots, N(s)$. С другой стороны, в силу равенств (5.15) и соотношений $\nu_{rl} = -\nu_{\rho l}$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{rl}} u_m v \cos(x_j, \nu_{rl})\, dx' + \int\limits_{\Gamma_{\rho l}} u_m v \cos(x_j, \nu_{\rho l})\, dx' = 0,$$

где ν_{rl} и $\nu_{\rho l}$ — единичные вектора внешних нормалей к ∂Q_{rl} и $\partial Q_{\rho l}$ соответственно, $l = 1, \dots, J_0$.

b) Теперь докажем равенства (5.14) и (5.15). Поскольку $w \in W_p^1(Q)$, то

$$(U_s P_s R_Q u)_l (x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = (U_\rho P_\rho R_Q u)_l (x - h_{\rho l})|_{\Gamma_{rl}},$$

т. е.

$$(R_s U_s P_s u)_l (x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = (R_\rho U_\rho P_\rho u)_l (x - h_{\rho l})|_{\Gamma_{rl}} \qquad (l = 1, \dots, J_0).$$

Следовательно, функции φ_l и ψ_l удовлетворяют условиям:

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} r_{il}^s \varphi_l = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(\rho)} r_{il}^\rho \psi_l \qquad (i = 1, \dots, J_0). \tag{5.22}$$

Более того, (5.13) для функции $w = R_Q u$ можно переписать в виде

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant N(s)} r_{li}^s \varphi_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r \sum_{1 \leqslant i \leqslant N(s)} r_{ji}^s \varphi_i \qquad (l = J_0 + 1, \dots, N(s)). \tag{5.23}$$

Применим (5.11):

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant J_0} r^s_{li}\varphi_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant J_0} \gamma^r_{lj} \sum_{1\leqslant i\leqslant J_0} r^s_{ji}\varphi_i \qquad (l = J_0+1,\dots,N(s)). \tag{5.24}$$

Из соотношений (5.23) и (5.24) следует, что

$$\sum_{J_0+1\leqslant i\leqslant N(s)} \left(r^s_{li} - \sum_{1\leqslant j\leqslant J_0} \gamma^r_{lj} r^s_{ji} \right) \varphi_i = 0 \qquad (l = J_0+1,\dots,N(s)). \tag{5.25}$$

В силу (5.11) $\det R_s = \det R_{s0}\cdot\det \widetilde{R}_s$, где $\widetilde{R}_s$ — матрица порядка $(N(s)-J_0)\times(N(s)-J_0)$ системы (5.25). Поскольку $\det R_s\neq 0$, то и $\det\widetilde{R}_s\neq 0$. Следовательно, $\varphi_l = 0$ $(l = J_0+1,\dots,N(s))$. Аналогично получаем, что $\psi_l = 0$ $(l = J_0+1,\dots,N(s))$. Таким образом, система (5.21) преобразуется к виду

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant J_0} \left(r^s_{il}\varphi_l - r^\rho_{il}\psi_l \right) = 0 \qquad (i = 1,\dots,J_0). \tag{5.26}$$

По построению, $\Gamma_{rl}\subset\partial Q_{sl}\cap\partial Q_{\rho l}$ $(l=1,\dots,J_0)$. Следовательно, $h_{sl} = h_{\rho l}$ $(l=1,\dots,J_0)$ и $r^s_{il} = r^\rho_{il}$ $(i,l = 1,\dots,J_0)$, см. (5.7). В силу невырожденности матрицы R_{s0} из системы уравнений (5.26) получаем, что $\varphi_l = \psi_l$ при $l = 1,\dots,J_0$. □

5.2. Существование решения эллиптического дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$Aw(x) = -\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \partial_i A_i(x,w,\nabla w) + A_0(x,w,\nabla w) = f_0 \qquad (x\in Q) \tag{5.27}$$

с нелокальными краевыми условиями (5.5).

Определение 5.2. Пусть $f\in L_q(Q)$, $1/p+1/q=1$. Функция $w\in W^1_{p,\gamma}(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (5.27), (5.5), если для любого $\xi\in\mathring{W}^1_p(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\langle Au,\xi\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_Q A_i\left(x,w,\nabla w\right)\,\partial_i\xi\,dx = \int\limits_Q f\,\xi\,dx. \tag{5.28}$$

Существование обобщенного решения нелокальной задачи связано с существованием решения эквивалентной дифференциально-разностной задачи Дирихле. Напомним, что согласно условию 5.3, граничным условиям (5.5) ставится в соответствие разностный оператор R_Q, определяемый набором матриц R_s. Поэтому, используя результаты разделов 1.2–2.3, сформулируем теоремы существования решений дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского.

Сначала рассмотрим квазилинейные эллиптические дифференциальные уравнения с нелокальными граничными условиями.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3, *где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами* R_s $(s = 1,2,\dots)$ *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r\in B)$, *причем* $R^*_s + R_s > 0$. *Пусть, кроме того, коэффициенты* A_i, $i = 0,1,\dots,n$ *дифференцируемы и удовлетворяют условиям сильной эллиптичности* (1.25)-(1.26). *Тогда для любого* $f\in W^{-1}_q(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (5.27), (5.5). *Более того, если* w_1 *и* w_2 — *обобщенные решения задачи* (5.27), (5.5) *при правых частях* f_1 *и* f_2 *соответственно, то справедлива оценка*

$$\|w_1-w_2\|_{W^1_p(Q)} \leqslant k_1\|f_1-f_2\|^{1/(p-1)}_{W^{-1}_q(Q)}. \tag{5.29}$$

Здесь $k_1 > 0$ *не зависит от* w_j *и* f_j.

Доказательство. В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы R_s $(s = 1, 2, \dots)$ и R_{s0} $(s = s(r),$ $r \in B)$ невырождены, то $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_{p,\gamma}^1(Q)$ является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$ существует $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ такое, что $w = R_Q u$. Подставив эту замену переменных в (5.28), мы получим интегральное тождество (1.8). Очевидно, что $w = R_Q u$ является решением интегрального тождества (5.28) тогда и только тогда, когда u является решением интегрального тождества (1.8).

Согласно лемме 1.9 оператор $A_R := AR_Q$ деминепрерывен и ограничен. Деминепрерывный, сильно монотонный оператор $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ является гомеоморфизмом, см. [20, следствие 1.1.1]. Существование и единственность решения (1.8) доказана. В силу того, что R_Q — изоморфизм, это доказывает существование и единственность решения (5.28).

Докажем оценку (5.29). Пусть $w_1, w_2 \in W_{p,\gamma}^1(Q)$ и — обобщенные решения задачи (5.27), (5.5) при правых частях $f_1, f_2 \in W_q^{-1}(Q)$, соответственно. Тогда существуют $u_1, u_2 \in \mathring{W}_p^1(Q)$ — решения (1.8) при правых частях $f_1, f_2 \in W_q^{-1}(Q)$, причем

$$\langle Aw_1 - Aw_2, u_1 - u_2\rangle = \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle.$$

Используем оценку сильной эллиптичности (1.29):

$$c_9\|u_1 - u_2\|^p_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle \leqslant \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}\|u_1 - u_2\|_{\mathring{W}_p^1(Q)},$$

т. е.

$$\|u_1 - u_2\|^{p-1}_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant \frac{1}{c_9}\|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}.$$

Вернемся к переменным w_j, используя оценку (1.22):

$$\|w_1 - w_2\|_{W_p^1(Q)} = \|R_Q u_1 - R_Q u_2\|_{W_p^1(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant c_5\left(\|u_1 - u_2\|_{L_p(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}\right) \leqslant k_1\|f_1 - f_2\|^{1/(p-1)}_{W_q^{-1}(Q)}.$$

Теорема доказана. □

Пример 5.3. Пусть $p = 2$, $Q = (0, 2) \times (0, 1)$, $f \in L_2(Q)$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$Aw(x) = -\sum_{i,j=1,2} \partial_i\left(A_{ij}(x, w)\partial_j w\right) = f \qquad (x \in Q) \tag{5.30}$$

с краевыми условиями Бицадзе—Самарского:

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2) & (0 < x_2 < 1), \\ w(2, x_2) = \gamma_{-1} w(1, x_2) & (0 < x_2 < 1). \end{array}\right\} \tag{5.31}$$

Здесь

$$|A_{ij}(x, y)| \leqslant g_4(x), \qquad g_4 \in L_\infty(Q). \tag{5.32}$$

В работе [3] был рассмотрен оператор $A = -\Delta$ и доказана разрешимость задачи при $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_{-1} = 1$. Существование и единственность обобщенного решения в пространстве $W_2^1(Q)$ для произвольного линейного сильно эллиптического оператора A, заданного 1-периодическими функциями $A_{ij}(x, w) = A_{ij}(x)$, при $|\gamma_1 + \gamma_{-1}| < 2$ была доказана в [106]. Там же была установлена взаимосвязь задачи (5.30), (5.31) и эллиптического функционально-дифференциального уравнения

$$A_R u(x) \equiv AR_Q u(x) = f \quad (x \in Q) \tag{5.33}$$

с краевым условием

$$u = 0 \quad (x \in \partial Q), \tag{5.34}$$

где оператор $R_Q = I_Q R P_Q$ таков, что

$$Ru(x) = u(x) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

А именно, было доказано, что если $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$, то оператор $R_Q : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_{2,\gamma}^1(Q)$ является изоморфизмом. Здесь

$$W_{2,\gamma}^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u \,\text{удовлетворяют (5.31)}\}.$$

Таким образом, функция $w \in W_2^1(Q)$ тогда и только тогда является обобщенным решением (5.30), (5.31), когда существует обобщенное решение $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$ задачи (5.33), (5.34), причем $w = R_Q u$.

В рассматриваемой квазилинейной задаче нельзя наложить условие 1-периодичности функций A_{ij}, поскольку имеется явная зависимость A_{ij} от w. Используем теорему 5.2 для проверки сильной монотонности оператора A_R. Заметим, что оператору R_Q соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_{-1} & \gamma_0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_0 := 1$. Матрица R_1 невырождена при $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$. Матрица $R_{10} = 1$ также невырождена. Согласно лемме 1.10 оператор A_R сильно монотонен, если $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$, а непрерывные функции A_{ij} удовлетворяют неравенству

$$\sum_{l,m=1,2}\sum_{i,j=1,2} \gamma_{l-m} A_{ij}(x,\xi_m)\eta_{lj}\eta_{mi} \geqslant k_2 \sum_{m,i=1,2} |\eta_{mi}|^2,$$

где $k_2 > 0$ не зависит от $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $\eta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. В этом случае нелокальная эллиптическая задача (5.30), (5.31) имеет единственное обобщенное решение $w \in W_{2,\gamma}^1(Q)$ для любого $f \in W_2^{-1}(Q)$, см. теорему 5.2.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3*, где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами* R_s $(s = 1,2,\dots)$ *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$*, причем* $R_s^* + R_s > 0$*. Пусть, кроме того, выполнены условия интегрируемости* (1.6)*, дифференцируемости* (1.26) *для* $i,j = 1,\dots,n$*, сильной эллиптичности* (1.35) *и коэрцитивности* (1.38)-(1.39)*,* $p \in [2,\infty)$.

Тогда для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи* (5.27)*,* (5.5).

Доказательство. В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы R_s $(s = 1,2,\dots)$ и R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ невырождены, то $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_{p,\gamma}^1(Q)$ является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$ существует $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ такое, что $w = R_Q u$. Подставив эту замену переменных в (5.28), мы получим интегральное тождество (1.8). Очевидно, что $w = R_Q u$ является решением интегрального тождества (5.28) тогда и только тогда, когда u является решением интегрального тождества (1.8).

Если $R_s^* + R_s > 0$, а также выполнены условия интегрируемости (1.6), дифференцируемости (1.26) для $i,j = 1,\dots,n$, сильной эллиптичности (1.35) и коэрцитивности (1.38)-(1.39), $p \in [2,\infty)$, то множество решений интегрального тождества (1.8) непусто, принадлежит $\mathring{W}_p^1(Q)$, ограничено и слабо замкнуто, см. теорему 1.2.

В силу ограниченности и непрерывности оператора $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_{p,\gamma}^1(Q)$, а также взаимно-однозначного соответствия $w = R_Q u$ множество решений интегрального тождества (5.28) непусто, принадлежит $W_{p,\gamma}^1(Q)$, ограничено и слабо замкнуто. □

Перейдем к рассмотрению нелинейных дифференциальных уравнений.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3*, где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами* R_s $(s = 1,2,\dots)$ *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$*. Пусть также оператор* A*, заданный формулой* (1.3)*, имеет измеримые по* $x \in Q$ *и непрерывные по* $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0,1,\dots,n)$ *коэффициенты* $A_i(x,\xi)$*,* $\xi = (\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$*, удовлетворяющие оценке интегрируемости* (1.6)*, условию эллиптичности* (2.1) *и условию коэрцитивности* (2.2)*,* $p \in (1,\infty)$.

Тогда для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи* (5.27)*,* (5.5).

Доказательство. В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы R_s $(s = 1, 2, \dots)$ и R_{s0} $(s = s(r)$, $r \in B)$ невырождены, то $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_{p,\gamma}^1(Q)$ является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$ существует $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ такое, что $w = R_Q u$. Подставив эту замену переменных в (5.28), мы получим интегральное тождество (1.8). Очевидно, что $w = R_Q u$ является решением интегрального тождества (5.28) тогда и только тогда, когда u является решением интегрального тождества (1.8).

В силу остальных условий теоремы 5.4 существует непустое, принадлежащее $\mathring{W}_p^1(Q)$, ограниченное и слабо замкнутое множество решений интегрального тождества (1.8), см. теорему 2.1.

В силу ограниченности и непрерывности оператора $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_{p,\gamma}^1(Q)$, а также взаимнооднозначного соответствия $w = R_Q u$ множество решений интегрального тождества (5.28) непусто, принадлежит $W_{p,\gamma}^1(Q)$, ограничено и слабо замкнуто. □

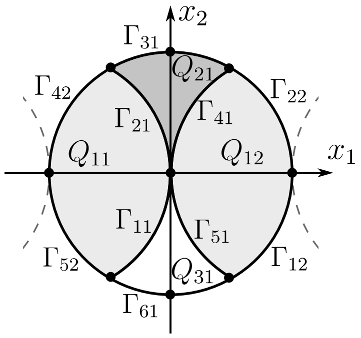

Рис. 5.3

Fig. 5.3

Пример 5.4. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1\}$, разбиение области и границы задано сдвигами $\mathcal{M} = \{(0,0); (1,0); (-1,0)\}$, см. рис. 5.3.

Нелокальные краевые условия имеют следующий вид:

$$\left.\begin{array}{ll} w|_{\Gamma_{j2}} = \gamma_{-1} w|_{\Gamma_{j1}}, & j = 1, 2, \\ w|_{\Gamma_{j2}} = \gamma_1 w|_{\Gamma_{j1}}, & j = 4, 5, \\ w|_{\Gamma_{j1}} = 0, & j = 3, 6. \end{array}\right\} \tag{5.35}$$

Область Q разбивается на четыре подобласти, принадлежащих трем классам. Множество $\mathcal{K}$ состоит из 7 точек (выделены на рис. 5.3). Граничным условиям соответствует разностный оператор

$$Ru(x) = u(x) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

Этому оператору соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_{-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = 1, \qquad R_3 = 1.$$

$R_{10} = 1$, R_2 и R_3 невырождены. Задача (5.27), (5.35) будет иметь решение, если, например, выполнены следующие четыре условия:

1) условие невырожденности: $\gamma_1 \gamma_{-1} \neq 1$;
2) условие интегрируемости: A_i — функции типа Каратеодори, удовлетворяющие (1.6);
3) условие эллиптичности:

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant 2} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2} \left(A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \eta_{l\cdot})\right) \left(R_1^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_l > 0 \qquad (x \in \overline{Q_{11}}),$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant 2} \left(A_i(x, \xi) - A_i(x, \mu)\right)(\xi_i - \mu_i) > 0 \qquad (x \in \overline{Q_{21}} \cup \overline{Q_{31}});$$

4) условие коэрцитивности:

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant 2}\sum_{0\leqslant i\leqslant 2} A_i(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot})\left(R_1^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l \geqslant c_6 \sum_{1\leqslant l\leqslant 2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2}|\zeta_{li}|^p - c_7\sum_{1\leqslant l\leqslant 2}|\zeta_{l0}|^{p'} - c_8 \qquad \text{для п.в. } x\in\overline{Q_{11}},$$

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant 2} A_i(x,\xi)\xi_i \geqslant c_6\sum_{1\leqslant i\leqslant 2}|\xi_i|^p - c_7|\xi_0|^{\widehat{p}} - c_8 \qquad \text{для п.в. } x\in\overline{Q_{21}}\cup\overline{Q_{31}},$$

где $R_1^{-1} = \dfrac{1}{1-\gamma_1\gamma_{-1}}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_{-1} & 1\end{pmatrix}$.

Заметим, что условия в точках $x \in Q_{21}\cup Q_{31}$ совпадают с условиями, накладываемыми на дифференциальный оператор при исследовании эллиптических нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Теорема 5.5. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3*, где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами* R_s $(s = 1, 2, \dots)$ *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$*, причем* R_Q^{-1} *сильно аккретивен. Тогда для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений уравнения*

$$\Delta_p w(x) = -\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\partial_i\left(|\partial_i w(x)|^{p-2}\partial_i w(x)\right) = f(x) \qquad (x\in Q) \tag{5.36}$$

с нелокальными граничными условиями (5.5)*, причем для всех решений справедлива оценка*

$$\|w\|_{W_p^1(Q)} \leqslant k_2\|f\|^{1/(p-1)}_{W_q^{-1}(Q)}, \tag{5.37}$$

где $k_2 > 0$ *не зависит от* w *и* f.

Доказательство. Очевидно, обобщенное решение задачи (5.36), (5.5) должно удовлетворять для всех $\xi\in \mathring{W}_p^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int_Q |\partial_i u(x)|^{p-2}\partial_i u(x)\partial_i\xi(x)\,dx = \langle f,\xi\rangle. \tag{5.38}$$

В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы R_s $(s = 1, 2, \dots)$ и R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ невырождены, то $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W^1_{p,\gamma}(Q)$ является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого $w \in W^1_{p,\gamma}(Q)$ существует $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ такое, что $w = R_Q u$. Подставив эту замену переменных в (5.38), мы получим интегральное тождество (2.43). Очевидно, что $w = R_Q u$ является решением интегрального тождества (5.38) тогда и только тогда, когда u является решением интегрального тождества (2.43). Поскольку R_Q невырожден, а R_Q^{-1} сильно аккретивен, то тождество (2.43) имеет непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений, удовлетворяющих оценке

$$\|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant k_3\|f\|^{1/(p-1)}_{W_q^{-1}(Q)}, \tag{5.39}$$

см. теорему 2.3. В силу ограниченности и непрерывности оператора $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W^1_{p,\gamma}(Q)$, а также взаимно-однозначного соответствия $w = R_Q u$ множество решений интегрального тождества (5.28) непусто, принадлежит $W^1_{p,\gamma}(Q)$, ограничено и слабо замкнуто. И поскольку

$$\|w\|_{W_p^1(Q)} = \|R_Q u\|_{W_p^1(Q)} = \|R_Q u\|_{L_p(Q)} + \|R_Q u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant c_5\left(\|u\|_{L_p(Q)} + \|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}\right) \leqslant c_5(c_{18}+1)\|u\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}$$

(см. (1.22) и неравенство Фридрихса (1.43)), то из (5.39) следует оценка (5.37). ☐

Пример 5.5. Рассмотрим уравнение

$$\Delta_p w(x) = f \qquad (x \in Q = (0,2)\times(0,1)), \tag{5.40}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} &w(x_1,0) = w(x_1,1) = 0 && (0\leqslant x_1\leqslant 2),\\ &w(0,x_2) = \gamma w(1,x_2),\quad w(2,x_2) = \gamma w(1,x_2) && (0 < x_2 < 1).\end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

Как показано в примере 5.1, краевым условиям данной задачи соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратной к этой матрице будет матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы R_1 и $R_{10} = 1$ невырождены если $|\gamma| < 1$. Матрица R_1^{-1} соответствует сильно аккретивному оператору также если $|\gamma| < 1$, см. условие (2.69) в лемме 2.8. То есть, при $|\gamma| < 1$ задача (5.40)-(5.41) имеет решение для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$, см. теорему 5.5.

Пример 5.6. Рассмотрим задачу

$$\Delta_p w(x) = f \qquad (x \in Q = (0,3) \times (0,1)) \tag{5.42}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1,0) = w(x_1,1) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 3), \\ w(0,x_2) = \gamma_1 w(1,x_2) + \gamma_2 w(2,x_2) & (0 < x_2 < 1), \\ w(3,x_2) = \gamma_2 w(1,x_2) + \gamma_1 w(2,x_2) & (0 < x_2 < 1), \end{array}\right\} \tag{5.43}$$

где $\gamma_1 = \dfrac{39}{28}$, $\gamma_2 = -\dfrac{6}{7}$.

Как показано в примере 5.2, граничным условиям данной задачи соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/16 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/16 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица симметрична и положительно определена, т. е. невырождена. R_{10} также невырождена как главный минор положительно определенной матрицы. С точностью до 3-го знака после запятой выпишем обратную матрицу:

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 8{,}615 & -12 & 7{,}385 \\ -12 & 19 & -12 \\ 7{,}385 & -12 & 8{,}615 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что условие (2.69) в лемме 2.8 не выполнено:

$$8{,}615 < |-12| + 7{,}385 \qquad \text{и} \qquad 19 < |-12| + |-12|,$$

оператор R_Q^{-1} может не быть сильно аккретивным. Мы не можем гарантировать существование решения задачи (5.42)-(5.43).

При $p = 2$ линейная задача (5.42)-(5.43) рассматривалась в [106, пример 13.5, гл. 2], было доказано существование единственного решения для любого $f \in L_2(Q)$.

Пример 5.7. Рассмотрим уравнение (5.42) с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1,0) = w(x_1,1) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ w(0,x_2) = -w(1,x_2) & (0 < x_2 < 1), \\ w(3,x_2) = 0 & (0 < x_2 < 1). \end{array}\right\} \tag{5.44}$$

Подставив параметры нелокальных краевых условий (5.44) в уравнение (5.8) (условие 5.3), получим, что этим условиям соответствует оператор R_Q с матрицей

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $Ru(x) = u(x) - u(x_1+1, x_2) + u(x_1+2, x_2)$. Матрицы R_1 и $R_{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ невырождены, $R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответствует сильно аккретивному оператору (см. доказательство в примере 2.8). Задача (5.42), (5.44) имеет решение для любого $f \in L_q(Q)$ и $p \in (2, \infty)$, см. теорему 5.5.

Проиллюстрируем возможность однозначной и неоднозначной разрешимости уравнения с p-лапласианом и нелокальными граничными условиями на простых примерах. Для этого рассмотрим задачу (5.42)-(5.43) в одномерном случае с различными правыми частями. Напомним, что при $p = 2$ задача (5.42)-(5.43) имеет единственное решение для любого $f \in L_2(Q)$.

Пример 5.8. Пусть $p \in (2, \infty)$. Рассмотрим уравнение

$$-(|w'|^{p-2}w')' = 0 \qquad (x \in Q = (0,3)) \tag{5.45}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= \frac{39}{28}w(1) - \frac{6}{7}w(2), \\ w(3) &= -\frac{6}{7}w(1) + \frac{39}{28}w(2). \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

Общее решение уравнения (5.44) имеет вид

$$w(x) = \widetilde{c}_1 x + \widetilde{c}_2.$$

Подставим общее решение в нелокальные краевые условия (5.46):

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{c}_2 &= \gamma_1(\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2) + \gamma_2(2\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2), \\ 3\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 &= \gamma_2(\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2) + \gamma_1(2\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2). \end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} (\gamma_1 + 2\gamma_2)\widetilde{c}_1 + (\gamma_1 + \gamma_2 - 1)\widetilde{c}_2 &= 0, \\ (2\gamma_1 + \gamma_2 - 3)\widetilde{c}_1 + (\gamma_1 + \gamma_2 - 1)\widetilde{c}_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

Вычитая из второго уравнения системы (5.47) первое, получим, что $(\gamma_1 - \gamma_2 - 3)\widetilde{c}_1 = 0$. Поскольку $\gamma_1 - \gamma_2 - 3 = \dfrac{9}{4} - 3 \neq 0$, то $\widetilde{c}_1 = 0$. Подставив это значение в одно из равенств системы (5.47), получим, что $(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)\widetilde{c}_2 = 0$. То есть $\widetilde{c}_2 = 0$. Система (5.47) имеет единственное решение $\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_2 = 0$. Следовательно, задача (5.45), (5.43) имеет единственное решение $w = 0$ при любом $p > 2$.

Пример 5.9. Рассмотрим уравнение

$$-(|w'|^{p-2}w')' = \frac{64}{27} \qquad (x \in Q = (0,3)) \tag{5.48}$$

с нелокальными краевыми условиями (5.46), $p = 4$.

Общее решение уравнения (5.48) имеет вид

$$w(x) = \widetilde{c}_1 - |x - \widetilde{c}_2|^{4/3}. \tag{5.49}$$

Подставим (5.49) в нелокальные краевые условия:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{c}_1 - |\widetilde{c}_2|^{4/3} &= \gamma_1(\widetilde{c}_1 - |1 - \widetilde{c}_2|^{4/3}) + \gamma_2(\widetilde{c}_1 - |2 - \widetilde{c}_2|^{4/3}), \\ \widetilde{c}_1 - |3 - \widetilde{c}_2|^{4/3} &= \gamma_2(\widetilde{c}_1 - |1 - \widetilde{c}_2|^{4/3}) + \gamma_1(\widetilde{c}_1 - |2 - \widetilde{c}_2|^{4/3}). \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

Из системы (5.50) легко выписать уравнение для $\widetilde{c}_2$:

$$|\widetilde{c}_2|^{4/3} - |3 - \widetilde{c}_2|^{4/3} - (\gamma_1 - \gamma_2)\left(|1 - \widetilde{c}_2|^{4/3} - |2 - \widetilde{c}_2|^{4/3}\right) = 0. \tag{5.51}$$

Очевидно, что $\widetilde{c}_2 = 1.5$ является решением (5.51). Численные методы дают дополнительные решения: $\widetilde{c}_2 \approx 0{,}514$ и $\widetilde{c}_2 \approx 2{,}486$ (приведены с точностью до 3-го знака после запятой). Докажем, что на интервалах $(0,1)$ и $(2,3)$ действительно существуют решения уравнения (5.51). Подставим значения: $\gamma_1 - \gamma_2 = \dfrac{9}{4}$. Введем функцию

$$\widetilde{g}(\widetilde{c}_2) = |\widetilde{c}_2|^{4/3} - |3 - \widetilde{c}_2|^{4/3} - \frac{9}{4}\left(|1 - \widetilde{c}_2|^{4/3} - |2 - \widetilde{c}_2|^{4/3}\right).$$

Функция $\widetilde{g}$ непрерывна. Поскольку

$$\widetilde{g}(0) = -3^{4/3} - \frac{9}{4}\left(1 - 2^{4/3}\right) < 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{g}(1) = 1 - 2^{4/3} + \frac{9}{4} > 0,$$

то $\widetilde{g}$ имеет нуль на интервале $(0,1)$. То есть уравнение (5.51) имеет решение на этом интервале. Аналогично, поскольку

$$\widetilde{g}(2) = 2^{4/3} - 1 - \frac{9}{4} < 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{g}(3) = 3^{4/3} - \frac{9}{4}\left(2^{4/3} - 1\right) > 0,$$

то на интервале $(2,3)$ функция $\widetilde{g}$ также имеет нуль. То есть уравнение (5.51) имеет решение на этом интервале. Так как уравнение (5.51) имеет не менее трех решений, то задача (5.48), (5.47) также имеет не менее трех решений.

5.3. Существование решения начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского

Исследование линейных эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями широко проводилось ранее, см. [59, 67, 67, 106] и библиографию. Эволюционные дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями ранее не исследовались. В этом разделе будут рассмотрены параболические дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями, причем для рассмотрения как линейных, так и нелинейных задач будут использованы свойства максимально монотонных операторов, а не теория полугрупп.

Определение 5.3. Оператор $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset X \to X^*$ называется *монотонным*, если

$$\langle \Lambda(u) - \Lambda(y), u - y \rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, u, y \in \mathcal{D}(\Lambda).$$

Монотонный оператор называется *максимально монотонным*, если не существует нетривиального расширения оператора, сохраняющего свойство монотонности.

5.3.1. Постановка задачи. Будем использовать разбиение области Q и построение множества $\{\Gamma_{rj}\}$, подробно изложенное в разделе 5.1. Обозначим теперь $\Gamma_{rl}^T := \Gamma_{rl} \times (0,T)$. Также будут использованы условия 5.1, 5.2 и 5.3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_t u(x,t) + Au(x,t) = f(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{5.52}$$

где дифференциальный оператор A задан формулой (3.4):

$$Au(x,t) = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \partial_i A_i(x,t,u,\nabla u) + A_0(x,t,u,\nabla u),$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \psi \qquad x \in Q \tag{5.53}$$

и нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} w|_{\Gamma_{rl}^T} &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r w|_{\Gamma_{rj}^T} && (r \in B,\ l = J_0 + 1, \dots, J), \\ w|_{\Gamma_{rl}^T} &= 0 && (r \notin B,\ l = 1, \dots, J), \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, γ_{lj}^r — вещественные числа, $B = \{r : J_0 > 0\}$. Через $L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q))$ ($\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$) обозначим подпространство функций из $L_p(0,T;W_p^1(Q))$, удовлетворяющих *нелокальным краевым условиям* (5.54).

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\widehat{\mathbf{\Lambda}} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор $R : L_p(0,T;\mathbb{R}^n) \to L_p(0,T;\mathbb{R}^n)$:

$$Ru(x,t) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h,t), \tag{5.55}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$. Напомним, что свойства оператора R_Q исследуются с помощью матриц $R_s = \{r^s_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant N(s)}$ таких, что

$$r^s_{ij} = \begin{cases} a_h & (h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}), \end{cases}$$

где h_{si} определяется условием $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$. Если выполнены условия 5.1–5.3, то нашему набору $\{\gamma_{lj}\}$ соответствует набор $\widehat{\mathbf{\Lambda}} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$ и разностный оператор R.

Согласно лемме 5.3, для каждого $r = 1, 2, \ldots$ найдется единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl} \times (0,T)$ $(l = 1,\ldots,N)$ после перенумерации подобластей s-го класса (как и в эллиптическом случае). Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из R_s $(s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов.

Проиллюстрируем разбиение области и построение разностного оператора, соответствующего краевым условиям, на простом примере.

Пример 5.10. В качестве модельного примера рассмотрим параболическую задачу с лапласианом в прямоугольном параллелепипеде $\Omega_T = (0,2) \times (0,1) \times (0,T)$:

$$\partial_t w(x,t) - \Delta w(x,t) = f(t,x) \qquad ((x,t) \in \Omega_T), \tag{5.56}$$

$$u(x,0) = \psi(x) \qquad (x = (x_1,x_2) \in Q = (0,2) \times (0,1)), \tag{5.57}$$

где $f \in L_2(\Omega_T)$, $\psi \in L_2(Q)$, с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1,0,t) = w(x_1,1,t) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ t \in (0,T)), \\ w(0,x_2,t) = \gamma_1 w(1,x_2,t) & (0 < x_2 < 1,\ t \in (0,T)), \\ w(2,x_2,t) = \gamma_2 w(1,x_2,t) & (0 < x_2 < 1,\ t \in (0,T)). \end{array}\right\} \tag{5.58}$$

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(0,0);(1,0);(-1,0)\}$, порожденная этими сдвигами группа разбивает область $Q = (0,2) \times (0,1)$ на две подобласти $Q_{11} = (0,1) \times (0,1)$ и $Q_{12} = (1,2) \times (0,1)$ из одного класса. Множество $\mathcal{K}$ состоит из 6 точек: $\mathcal{K} = \{(i,j) : i = 0,1,2; j = 0,1\}$. Множество $\{\Gamma^T_{rj}\}$ состоит из 8 элементов, которые принадлежат 4-м классам, см. рис. 5.4:

1) $\Gamma^T_{11} = \{1\} \times (0,1)(0,T) \times (0,T)$, $\Gamma^T_{12} = \{0\} \times (0,1) \times (0,T)$;
2) $\Gamma^T_{21} = \{1\} \times (0,1) \times (0,T)$, $\Gamma^T_{22} = \{2\} \times (0,1) \times (0,T)$;
3) $\Gamma^T_{31} = (0,1) \times \{0\} \times (0,T)$, $\Gamma^T_{32} = (1,2) \times \{0\} \times (0,T)$;
4) $\Gamma^T_{41} = (0,1) \times \{1\} \times (0,T)$, $\Gamma^T_{42} = (1,2) \times \{1\} \times (0,T)$.

Заметим, что в полученном параллелепипеде есть еще 4 части граней, не входящих в множество $\{\Gamma^T_{ij}\}$ $(i = 1,\ldots,4; j = 1,2)$. В частности, на гранях $\{0\} \times Q_{11}$ и $\{0\} \times Q_{12}$ заданы начальные условия, на гранях $\{T\} \times Q_{11}$ и $\{T\} \times Q_{12}$ мы получим терминальные значения искомой функции.

Теорема 5.6. *Предположим, что выполнены условия* 5.1–5.3*, а соответствующие матрицы* R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены. Тогда существует множество* $\gamma = \{\gamma^r_{lj}\}$ *такое, что оператор* $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q)) \to L_p(0,T;W^1_{p,\gamma}(Q))$ *— изоморфизм.*

Доказательство. Заметим, что оператор R_Q не зависит от t. В силу невырожденности матриц R_s и R_{s0} оператор $R_Q(\cdot,t) : \mathring{W}^1_p(Q) \to W^1_{p,\gamma}(Q)$ отображает $\mathring{W}^1_p(Q)$ на $W^1_{p,\gamma}(Q)$ непрерывно и взаимно однозначно, см. теорему 5.1 для $p \in (1,\infty)$, для $p = 2$ см. [106, теорема 8.1] или [69, теорема 2.1]. Следовательно, R_Q отображает $L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))$ на $L_p(0,T;W^1_{p,\gamma}(Q))$ непрерывно и взаимно однозначно. $\square$

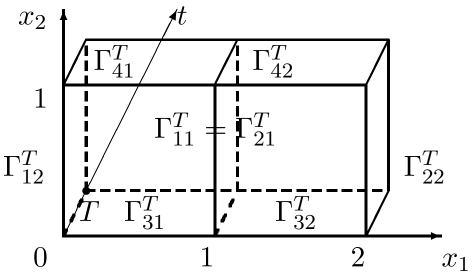

Рис. 5.4

Fig. 5.4

Обозначим $\mathcal{V}_\gamma = L_p(0,T;W^1_{p,\gamma}(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$. Мы рассматриваем оператор ∂_t как неограниченный оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \subset \mathcal{V}_\gamma \to \mathcal{V}^*$. Поскольку $\mathcal{D}(\partial_t) \subset C(0,T;L_2(Q))$, то начальные условия определены корректно. Введем пространство

$$W_\gamma := \{w \in \mathcal{V}_\gamma : \partial_t w \in \mathcal{V}^*\}.$$

Тогда задача (5.52)–(5.54) может быть рассмотрена как операторное уравнение

$$\partial_t w + Aw = f, \qquad w \in W_\gamma \tag{5.59}$$

с начальными условиями (5.53).

Определение 5.4. Будем называть функцию $w \in W_\gamma$ *обобщенным решением задачи* (5.52)–(5.54), если она удовлетворяет операторному уравнению (5.59) и начальным условием (5.53).

Теорема 5.7. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3, *причем матрицы R_s и R_{s0} невырождены. Элемент $u \in W$ является решением операторного уравнения*

$$\partial_t R_Q u + AR_Q u = f, \qquad u \in W \tag{5.60}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x) = R_Q^{-1}\psi \tag{5.61}$$

тогда и только тогда, когда $R_Q u = w \in W_\gamma$ является решением операторного уравнения (5.59), (5.53).

Доказательство. Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q)) \to L_p(0,T;W^1_{p,\gamma}(Q))$, являющийся изоморфизмом, см. теорему 5.6. Кроме того, $R_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ невырожденный, т. е. $R_Q : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_\gamma$ также изоморфизм. Таким образом, для каждого $w \in W_\gamma$ существует единственный элемент $u \in \mathcal{V}$ такой, что $w = R_Q u$, $u = R_Q^{-1} w$. Кроме того, $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u$.

Покажем сначала, что если $u \in L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))$, $\partial_t u \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, то $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$. Линейный оператор $R_Q : L_q(\Omega_T) \to L_q(\Omega_T)$ ограничен, см. лемму 3.1. Для любого $u \in L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))$ такого, что $\partial_t u \in L_q(\Omega_T)$, имеем, что $R_Q \partial_t u \in L_q(\Omega_T)$. Очевидно, что $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in L_q(\Omega_T)$. В силу непрерывности вложения пространств $L_q(\Omega_T) \subset L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ для любого $u \in W$, существует последовательность $\{u_n\} \subset W$ такая, что $L_q(\Omega_T) \ni \partial_t u_n \to \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$. Кроме того, $R_Q \partial_t u = \lim\limits_{n\to\infty} R_Q \partial_t u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \partial_t R_Q u_n = \partial_t R_Q u$ в силу замкнутости графика линейного ограниченного оператора R_Q. Поскольку $R_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ невырожденный, то это доказывает, что

$$R_Q \partial_t u = \partial_t w \in \mathcal{V}^* = L_q(0,T;W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T).$$

Поскольку $R_Q : C(0,T;L_2(Q)) \to C(0,T;L_2(Q))$ также невырожден, то значение функции $\varphi(x) := u(x,0) = R_Q^{-1} w(x,0) = R_Q^{-1}\psi(x)$ определено взаимно однозначно. □

Пример 5.11. Продолжим рассмотрение примера 5.10. Согласно краевым условиям (5.58), мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(0,0);(1,0);(-1,0)\}$. В соответствии с $\mathcal{M}$ разностный оператор должен иметь вид $Ru(x,t) = u(x,t) + a_1 u(x_1+1,x_2,t) + a_{-1} u(x_1-1,x_2,t)$. Данному оператору соответствует матрица $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$, невырожденная при $a_1 a_{-1} \neq 1$. В то же время, для любого $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ и $w = R_Q u$ получаем:

$$\begin{gathered} w(x_1,0,t) = w(x_1,1,t) = 0, \\ a_1 u(1,x_2,t) = w(0,x_2,t) = \gamma_1 w(1,x_2,t) = \gamma_1 u(1,x_2,t), \\ a_{-1} u(1,x_2,t) = w(2,x_2,t) = \gamma_2 w(1,x_2,t) = \gamma_2 u(1,x_2,t). \end{gathered}$$

В последних двух формулах первое и третье равенства получены из определения разностного оператора, а второе — из краевых условий (5.58). Таким образом, если $a_1 = \gamma_1$, $a_{-1} = \gamma_2$ и $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$, то функция $w = R_Q u$ принадлежит $L_2(0,T;W_2^1(Q))$ и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (5.58), т. е. $R_Q(L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))) \subset L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$, где $\gamma = \{\gamma_1,\gamma_2\}$. При этом $R_{10} = 1$.

Поскольку условия 5.1–5.3 выполнены, то задаче (5.56)–(5.58) соответствует задача

$$\begin{aligned} &\partial_t R_Q u(x,t) + \Delta R_Q u(x,t) = f(x,t) && ((x,t) \in \Omega_T), \\ &u(x,0) = \varphi(x) = R_Q^{-1}\psi(x) && (x \in Q), \\ &u(x,t) = 0 && ((x,t) \in \partial Q \times (0,T)). \end{aligned}$$

5.3.2. Максимальная монотонность оператора $\partial_t R_Q$. Пусть R_Q^* — сопряженный к R_Q оператор. Обозначим симметрическую и кососимметрическую части оператора R_Q через

$$R_Q^{sym} := \frac{1}{2}\left(R_Q + R_Q^*\right), \qquad R_Q^{sk} := \frac{1}{2}\left(R_Q - R_Q^*\right). \tag{5.62}$$

Очевидно, что

$$\partial_i(R_Q^* u) = R_Q^*(\partial_i u), \qquad \partial_i(R_Q^{sym} u) = R_Q^{sym}(\partial_i u), \qquad \partial_i(R_Q^{sk} u) = R_Q^{sk}(\partial_i u), \tag{5.63}$$

а операторы $R_{Qs}^* : L_p^{N(s)}(\Omega_T) \to L_p^{N(s)}(\Omega_T)$, $R_{Qs}^{sym} : L_p^{N(s)}(\Omega_T) \to L_p^{N(s)}(\Omega_T)$ и $R_{Qs}^{sk} : L_p^{N(s)}(\Omega_T) \to L_p^{N(s)}(\Omega_T)$, определенные соотношениями

$$R_{Qs}^* = U_s R_Q^* U_s^{-1}, \qquad R_{Qs}^{sym} = U_s R_Q^{sym} U_s^{-1}, \qquad R_{Qs}^{sk} = U_s R_Q^{sk} U_s^{-1}, \tag{5.64}$$

являются операторами умножения на матрицы R_s^*, $R_s^{sym} = \dfrac{1}{2}\left(R_s + R_s^*\right)$ и $R_s^{sk} = \dfrac{1}{2}\left(R_s - R_s^*\right)$, соответственно.

Определение 5.5. Оператор $R_Q + R_Q^*$ *положительно определен*, если

$$\left((R_Q + R_Q^*)u, u\right)_{L_2(\Omega_T)} \geqslant k_4 \|u\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \qquad \forall u \in L_2(\Omega_T).$$

Замечание 5.1. R_Q и R_Q^{sym} положительно определены тогда и только тогда, когда $R_s^{sym} > 0$ для всех s, см. [106, лемма 8.8] или [69, лемма 2.8]. Более того, если $R_s^{sym} > 0$, то R_s и R_{s0} невырождены.

Как известно, оператор $\partial_t : W \to \mathcal{V}^*$ при фиксированных начальных условиях является максимально монотонным. Для $\varphi = 0$ этот факт подробно рассмотрен в [33, гл. 3, §2]. Переход к произвольным начальным данным из $L_2(Q)$ подробно описан в [34]. Докажем условия, при которых оператор $\partial_t R_Q : W \to \mathcal{V}^*$ является максимально монотонным.

Сначала докажем вспомогательную оценку.

Лемма 5.4. *Если $R_s^{sym} > 0$ для всех s, то*

$$\begin{aligned} (R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = \left(R_Q^{sym} u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} = \sum_s \left\| \sqrt{R_{Qs}^{sym}}\, U_s P_s u(t) \right\|_{L_2^N(Q_{s1})}^2 = \\ = \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}\, u(t) \right\|_{L_2(Q)}^2 \geqslant k_5 \|u(t)\|_{L_2(Q)}^2 \qquad \forall u(t) \in L_2(Q), \end{aligned} \tag{5.65}$$

где $k_5 > 0$ не зависит от u.

Доказательство. Вычислим первое равенство в (5.65):

$$(R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = \big(u(t), R_Q^* u(t)\big)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\big((R_Q + R_Q^*)u(t), u(t)\big)_{L_2(Q)} = \Big(R_Q^{sym} u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)}.$$

Поскольку $R_s^{sym} > 0$, то существует квадратный корень $\sqrt{R_s^{sym}} > 0$. Из формул (3.13) и (5.64) получаем

$$\Big(R_Q^{sym} u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)} = \sum_s (R_s^{sym} U_s P_s u(t), U_s P_s u(t))_{L_2^N(Q_{s1})} =$$
$$= \sum_s \Big(\sqrt{R_s^{sym}} U_s P_s u(t), \sqrt{R_s^{sym}} U_s P_s u(t)\Big)_{L_2^N(Q_{s1})} = \sum_s \Big\|\sqrt{R_{Qs}^{sym}}\, U_s P_s u(t)\Big\|^2_{L_2^N(Q_{s1})}.$$

Из положительной определенности матриц R_s^{sym} следует положительная определенность оператора R_Q^{sym} и оценка (5.65). □

Следствие 5.1. *Если $R_s^{sym} > 0$ для всех s, то*

$$(R_Q u, u)_{L_2(\Omega_T)} = \Big(R_Q^{sym} u, u\Big)_{L_2(\Omega_T)} = \sum_s \Big\|\sqrt{R_{Qs}^{sym}}\, U_s P_s u\Big\|^2_{L_2^N(Q_{s1}\times(0,T))} =$$
$$= \Big\|\sqrt{R_Q^{sym}} u\Big\|^2_{L_2(\Omega_T)} \geqslant k_5 \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} \qquad \forall u \in L_2(\Omega_T), \quad (5.66)$$

где $k_5 > 0$ не зависит от u.

Следствие 5.2. $\Big(R_Q^{sk} u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)} = 0$ *для любого t,*

$$\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u\rangle = \frac{1}{2}\Big(R_Q^{sk} u(T), u(T)\Big)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\Big(R_Q^{sk} u(0), u(0)\Big)_{L_2(Q)} = 0.$$

Как известно, в рефлексивных строго выпуклых со своим сопряженным пространствах максимальная монотонность оператора Λ эквивалентна следующему свойству:

$$\langle \Lambda u, u\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Lambda), \qquad \langle \Lambda^* v, v\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Lambda^*), \quad (5.67)$$

см. [33, лемма 1.1, гл. 3]. В частности, см. [33, гл. 3], этим свойством обладает оператор $\Lambda = \partial_t$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \{u \in \mathcal{V} : \Lambda u \in \mathcal{V}^*,\ u|_{t=0} = 0\}, \quad (5.68)$$

причем $\partial_t^* = -\partial_t$ и $\mathcal{D}(\partial_t^*) = \{v \in \mathcal{V} : \partial_t v \in \mathcal{V}^*,\ v|_{t=T} = 0\}$.

Лемма 5.5. *Пусть $R_s^{sym} > 0$ для всех s. Тогда оператор $\Lambda = \partial_t R_Q$ с областью определения, заданной в* (5.68)*, максимально монотонен.*

Доказательство. Согласно правилам дифференцирования и в силу коммутативности $\partial_t R_Q = R_Q \partial_t$ и $\partial_t R_Q^* = R_Q^* \partial_t$

$$\partial_t (R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = (\partial_t R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} + (R_Q u(t), \partial_t u(t))_{L_2(Q)} =$$
$$= (R_Q \partial_t u(t), u(t))_{L_2(Q)} + \big(u(t), R_Q^* \partial_t u(t)\big)_{L_2(Q)} = 2\Big(\partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)}$$

для всех $u \in W$. Поскольку $\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u\rangle = 0$, см. следствие 5.2, то

$$\langle \partial_t R_Q u, u\rangle = \langle \partial_t R_Q^{sym} u, u\rangle = \int\limits_0^T \Big(\partial_t R_Q^{sym} u(\tau), u(\tau)\Big)_{L_2(Q)} d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(R_Q^{sym} u(T), u(T)\Big)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\Big(R_Q^{sym} u(0), u(0)\Big)_{L_2(Q)} \qquad \forall u \in W. \quad (5.69)$$

Так как $u \in \mathcal{D}(\Lambda)$, используем оценку (5.65):

$$\langle \partial_t R_Q u, u\rangle = \frac{1}{2}\Big(R_Q^{sym} u(T), u(T)\Big)_{L_2(Q)} \geqslant \frac{k_5}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(Q)}.$$

С другой стороны, $\Lambda^* = -\partial_t R_Q^*$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\Lambda^*) = \{v \in \mathcal{V} : \partial_t R_Q^* v \in \mathcal{V}^*,\, v|_{t=T} = 0\},$$

т. е. используя оценку (5.65) и равенство (5.69), мы получим, что

$$\langle (\partial_t R_Q)^* v, v\rangle = -\langle \partial_t R_Q^* v, v\rangle = -\langle \partial_t R_Q^{sym} v, v\rangle \geqslant \frac{k_5}{2}\|v(0)\|^2_{L_2(Q)} \geqslant 0$$

для всех $v \in \mathcal{D}(\Lambda^*)$. Свойство (5.67) доказано, оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, см. [33, лемма 1.1, гл.3]. □

5.3.3. Линейная параболическая задача. Рассмотрим линейное параболическое уравнение

$$\partial_t u(x,t) - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \partial_i\left(A_{ij}(x,t)\partial_j u(x,t)\right) + A_{00}(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{5.70}$$

на Ω_T с начальными условиями (5.53) и нелокальными граничными условиями (5.54), $p = 2$.

Определение 5.6. Линейный оператор $\mathcal{A} : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ назовем *сильно эллиптичным*, если

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle \geqslant k_6\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - k_7\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}$$

для любых $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_1^2(Q))$, $k_6 > 0$ и $k_7 \in \mathbb{R}$ не зависят от u.

Лемма 5.6. *Пусть* $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(x,t) = A_{ji}(x,t)$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$, *причем функции* A_{ij} M*-периодичны для* $i,j = 1,\ldots,n$, (*т. е.* $A_{ij}(x+h,t) = A_{ij}(x,t)$ *для всех* $h \in M$) *и*

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant k_8 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^2, \tag{5.71}$$

$k_8 > 0$. *Кроме того, пусть оператор* $R_Q + R_Q^*$ *положительно определен. Тогда линейный оператор* $A_R := AR_Q : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ *ограничен и сильно эллиптичен.*

Доказательство. Ограниченность оператора A_R следует из того, что $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а оператор R_Q ограничен, см. лемму 3.1. Заметим, что это означает также деминепрерывность оператора A_R.

Сильная эллиптичность оператора $A_R(\cdot,t) : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ доказана в [69, 106]. Для удобства читателей покажем справедливость этого утверждения для $A_R : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$.

Поскольку $R_Q = \sum\limits_s R_{Qs}$, число различных матриц R_s конечно, а функции A_{ij} M-периодичны для $i,j = 1,\ldots,n$, воспользуемся формулами (3.13) и (3.15):

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_{ij}(x,t)\,\partial_j R_Q u\,\partial_i u\,dx\,dt = \sum_s \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \left(A_{ij}(x,t)\,R_s\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = I_1.$$

Так как

$$\begin{aligned}
&\sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(A_{ij}(x,t)\,R_s\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\
&\qquad = \sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\partial_j(U_sP_su), A_{ij}(x,t)\,R_s^*\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\
&\qquad = \sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\partial_j(U_sP_su), A_{ji}(x,t)\,R_s^*\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(A_{ij}(x,t)\,(R_s + R_s^*)\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})},
\end{aligned}$$

воспользуемся положительной определенностью оператора $R_Q + R_Q^*$, т. е. положительной определенностью матриц $R_s + R_s^*$, а также оценкой (5.71):

$$I_1 = \frac{1}{2}\sum_s \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(A_{ij}(x,t)\,(R_s + R_s^*)\partial_j(U_sP_su), \partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_s \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \Big(A_{ij}(x,t) \sqrt{R_s + R_s^*} \partial_j (U_s P_s u), \sqrt{R_s + R_s^*} \partial_i (U_s P_s u) \Big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k_8}{2} \sum_s \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big(\sqrt{R_s + R_s^*} \partial_i (U_s P_s u), \sqrt{R_s + R_s^*} \partial_i (U_s P_s u) \Big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} =$$

$$= \frac{k_8}{2} \big((R_Q + R_Q^*) u, u \big) \geqslant \frac{k_8 k_4}{2} \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}. \quad (5.72)$$

Оценим оставшееся слагаемое оператора. При этом мы учтем, что по определению $|A_{ij}(x,t)| \leqslant k_9$ ($A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$), а $\|R_Q u\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant k_{10} \|u\|_{L_2(\Omega_T)}$ (см. лемму 3.6):

$$I_2 = \left| \int\limits_{\Omega_T} A_{00}(x,t) \, R_Q u \, u \, dx \, dt \right| \leqslant k_9 k_{10} \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \quad (5.73)$$

Таким образом,

$$\langle A_R u, u \rangle \geqslant I_1 - I_2 \geqslant \frac{k_8 k_4}{2} \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - k_9 k_{10} \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \quad (5.74)$$

Лемма доказана. □

Замечание 5.2. Утверждение леммы 5.6 справедливо также, если дифференциально-разностный оператор имеет слагаемые с младшими производными, поскольку, если $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$I_3 = \left| \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_{0j}(x,t) \, \partial_j R_Q u \, u \, dx \, dt \right| \leqslant k_9 k_{10} \|u\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} \|u\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon k_9 k_{10}}{2} |u\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} + \frac{k_9 k_{10}}{2\varepsilon} \|u\|_{L_2(\Omega_T)},$$

$$I_4 = \left| \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_{i0}(x,t) \, R_Q u \, \partial_i u \, dx \, dt \right| \leqslant k_9 k_{10} \|u\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} \|u\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon k_9 k_{10}}{2} |u\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} + \frac{k_9 k_{10}}{2\varepsilon} \|u\|_{L_2(\Omega_T)}.$$

Можно взять $\varepsilon = \dfrac{k_8 k_4}{4 k_9 k_{10}}$. Тогда

$$\langle A_R u, u \rangle \geqslant I_1 - I_2 - I_3 - I_4 \geqslant \frac{k_8 k_4}{4} \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - k_9 k_{10} \left(1 + \frac{4 k_9 k_{10}}{k_8 k_4} \right) \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}.$$

Теорема 5.8. *Пусть $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(x,t) = A_{ij}(x,t)$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$, причем A_{ij} M-периодичны для $i,j = 1,\ldots,n$ и справедлива оценка* (5.71). *Кроме того, пусть оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен. Тогда для любых $f \in L_2(0,T;W^{-1}(Q))$ и $\varphi \in L_2(Q)$ существует единственное решение задачи* (5.59), (5.53). *Более того, при некоторых $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14} > 0$, не зависящих от u_i, f_i и φ_2 $(i = 1,2)$, справедливы оценки*

$$\|u_1 - u_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} \leqslant k_{11} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + k_{12} \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}, \quad (5.75)$$

$$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} \leqslant k_{13} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + k_{14} \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}, \quad (5.76)$$

где u_1 и u_2 — решения задачи (5.59), (5.53) *при правых частях f_1 и f_2 и начальных условиях φ_1 и φ_2, соответственно.*

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу при $\varphi = 0$. Тогда согласно лемме 5.5 оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, а согласно лемме 5.6 оператор A_R ограничен, деминепрерывен и сильно эллиптичен. Пусть в оценке сильной эллиптичности $k_7 = 0$. Тогда A_R монотонен и коэрцитивен. Кроме того, так как $R_s + R_s^* > 0$, то $\partial_t R_Q$ является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Следовательно, выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1]. Решение задачи (5.59), (5.53) существует. Единственность данного решения следует из монотонности операторов.

Если $k_7>0$, то заменой функции $u(x,t)=e^{\lambda t}v(x,t)$ получим эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v+(A_R+\lambda R_Q)v=e^{-\lambda t}f,\qquad 0<t<T, \tag{5.77}$$

$$v(0)=0. \tag{5.78}$$

В силу оценки (5.66), если $k_5\lambda>k_7$, то оператор $A_R+\lambda R_Q$ монотонен и коэрцитивен, т. е. решение задачи (5.77), (5.78) существует и единственно, см. выше. Следовательно, существует и единственно решение задачи (5.59), (5.53).

Осталось рассмотреть задачу при $\varphi\neq 0$. Воспользуемся линейностью операторов. Так как $W\subset C(0,T;L_2(Q))$ непрерывно и плотно, то для любого $\varphi\in L_2(Q)$ существует функция $y\in W$ такая, что $y(x,0)=\varphi(x)$ $(x\in Q)$. Тогда заменой функции $u(x,t)=v(x,t)+y(x,t)$ можно получить эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v+A_R v=f-\partial_t y-A_R y:=\widehat{f},\qquad 0<t<T, \tag{5.79}$$

$$v(0)=0. \tag{5.80}$$

Как доказано выше, задача (5.79), (5.80) имеет единственное решение. Следовательно, существует и единственно решение задачи (5.59), (5.53).

Покажем зависимость решения от начальных условий и правой части. Используем сильную эллиптичность оператора A_R. Как показано выше, вследствие оценки (5.74) существует $\lambda\geqslant 0$ такое, что

$$\langle A_R u+\lambda R_Q,u\rangle\equiv\langle\widehat{A}_R u,u\rangle\geqslant k_6\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}.$$

Пусть $u_1,u_2\in W$ — решения задачи

$$\partial_t R_Q u+(A_R+\lambda R_Q)u=e^{-\lambda t}f,\qquad u(0)=\varphi. \tag{5.81}$$

при начальных условиях $\varphi_1,\varphi_2\in L_2(Q)$, а также при правых частях $\widehat{f}_1=e^{-\lambda t}f_1\in L_2(\Omega_T)$ и $\widehat{f}_2=e^{-\lambda t}f_2\in L_2(\Omega_T)$, соответственно. Пусть $\Omega_t:=Q\times(0,t)$ и $\langle f,u\rangle_t:=\int\limits_{\Omega_t} f\,u\,dx\,d\tau$. Аналогично формуле (5.69),

$$\langle\partial_t R_Q u,u\rangle_t=\int\limits_0^t\left(\partial_t R_Q u(\tau),u(\tau)\right)_{L_2(Q)}\,d\tau=\frac12(R_Q^{sym}u(t),u(t))_{L_2(Q)}-\frac12(R_Q^{sym}u(0),u(0))_{L_2(Q)}; \tag{5.82}$$

$\left(R_Q^{sym}u(t),u(t)\right)_{L_2(Q)}=\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}u(t)\right\|^2_{L_2(Q)}$, см. (5.66). Из формул (5.82) и (5.66) следует, что

$$\langle\partial_t R_Q(u_1-u_2),(u_1-u_2)\rangle_t=\frac12\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_1-u_2)(t)\right\|^2_{L_2(Q)}-\frac12\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}.$$

Тогда для любого $t\in(0,T]$

$$\frac12\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t)-u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)}+\langle\widehat{A}_R u_1-\widehat{A}_R u_2,u_1-u_2\rangle_t=$$
$$=\langle\widehat{f}_1-\widehat{f}_2,u_1-u_2\rangle_t+\frac12\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}. \tag{5.83}$$

Здесь

$$\langle\widehat{A}_R u,u\rangle_t:=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\int\limits_{\Omega_t}A_{ij}(\tau,x)\,\partial_j R_Q u\,\partial_i u\,dx\,d\tau+\lambda\int\limits_{\Omega_t}R_Q u\,u\,dx\,d\tau.$$

Рассмотрим также функцию $u_3\in W$, являющуюся решением задачи (5.81) при начальных условиях φ_1 и правой части $\widehat{f}_2$. Тогда для любого $t\in(0,T]$

$$\frac12\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}+\langle\widehat{A}_R u_1-\widehat{A}_R u_3,u_1-u_3\rangle_t=\langle\widehat{f}_1-\widehat{f}_2,u_1-u_3\rangle_t, \tag{5.84}$$

$$\frac12\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(t)-u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)}+\langle\widehat{A}_R u_3-\widehat{A}_R u_2,u_3-u_2\rangle_t=\frac12\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}. \tag{5.85}$$

В силу аддитивности интеграла Лебега,

$$\langle \widehat{A}_R u, u\rangle_t \geqslant k_6 \|u\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}^1_2(Q))}. \tag{5.86}$$

Используя оценку (5.86) и неотрицательность первого слагаемого левой части (5.83), имеем, что

$$k_6\|u_1-u_3\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant \langle \widehat{A}_R u_1 - \widehat{A}_R u_3, u_1-u_3\rangle_t = \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1-u_3\rangle_t -$$
$$-\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1-u_3\rangle_t \leqslant \|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_{L_2(0,t;W_2^{-1}(Q))}\|u_1-u_3\|_{L_2(0,t;\mathring{W}^1_2(Q))},$$

откуда

$$\|u_1-u_3\|_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant k_6^{-1/2}\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_{L_2(0,t;W_2^{-1}(Q))}. \tag{5.87}$$

С другой стороны, второе слагаемое левой части (5.84) также неотрицательно, т. е.

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1-u_3\rangle_t \leqslant$$
$$\leqslant \|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_{L_2(0,t;W_2^{-1}(Q))}\|u_1-u_3\|_{L_2(0,t;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant k_6^{-1}\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|^2_{L_2(0,t;W_2^{-1}(Q))}.$$

Опять применим оценку из (5.65):

$$\|u_1(t)-u_3(t)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant k_5^{-2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant 2k_5^{-2}k_6^{-1}\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|^2_{L_2(0,t;W_2^{-1}(Q))}. \tag{5.88}$$

Из (5.85) в силу неотрицательности второго слагаемого левой части следует, что

$$\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(t)-u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)},$$

и благодаря невырожденности R_Q^{sym} имеем, что

$$\|u_3(t)-u_2(t)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant k_{11}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}, \tag{5.89}$$

а также

$$k_6\|u_3-u_2\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant \langle \widehat{A}_R u_3 - \widehat{A}_R u_2, u_3-u_2\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant k_{12}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}. \tag{5.90}$$

Здесь мы воспользовались ограниченностью оператора $R_Q^{sym} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, см. [106, лемма 8.15]. Используем неравенство треугольника для норм. Тогда из (5.87)–(5.90) следует, что

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)} \leqslant \|u_1(t)-u_3(t)\|_{L_2(Q)} + \|u_3(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{k_{11}}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)} + \sqrt{2k_5^{-2}k_6^{-1}}\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}, \tag{5.91}$$

$$\|u_1-u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant \|u_1-u_3\|_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} + \|u_3-u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{k_{12}k_6^{-1}}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)} + \sqrt{k_6^{-1}}\|\widehat{f}_1-\widehat{f}_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}. \tag{5.92}$$

По построению $e^{\lambda t}u_1(x,t)$ и $e^{\lambda t}u_2(x,t)$ являются решениями задачи (5.59), (5.53). Подставив эти выражения (а также значения $\widehat{f}_1 = e^{-\lambda t}f_1$ и $\widehat{f}_2 = e^{-\lambda t}f_2$) в (5.91), (5.92) мы получим оценки (5.75), (5.76). □

Следующая теорема является следствием теорем 5.7 и 5.8.

Теорема 5.9. *Пусть выполнены условия* 5.1, 5.2 *и* 5.3. *Пусть матрицы* R_s *и* R_{s0}, *заданные в условии* 5.3, *невырождены, причем* $R_s + R_s^* > 0$ $(s = s(r), r \in B)$. *Пусть также* $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(x,t) = A_{ij}(x,t)$ $(i,j = 0,1,\dots,n)$, *причем* A_{ij} M*-периодичны для* $i,j = 1,\dots,n$ *и справедлива оценка* (5.71). *Тогда для любых* $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ *и* $\psi \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (5.52)–(5.54). *Более того, для некоторых* $k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{15} > 0$, *не зависящих от* w_i, f_i *и* ψ_i $(i = 1,2)$,

$$\|w_1-w_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} \leqslant k_{12}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{13}\|f_1-f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}, \tag{5.93}$$

$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))} \leqslant k_{14}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{15}\|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}, \tag{5.94}$$

где w_1, w_2 — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) *с линейным оператором A при правых частях f_1, f_2 и начальных условиях ψ_1, ψ_2, соответственно.*

Замечание 5.3. Если выполнены условия теоремы 5.9 и $f \in L_2(\Omega_T)$, то обобщенное решение задачи (5.52)–(5.54) таково, что $\partial_t w \in L_2(\Omega_T)$. Кроме того, если w_1, w_2 — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) с линейным оператором A при правых частях f_1, f_2 и начальных условиях ψ_1, ψ_2, соответственно, то справедливы оценки

$$\|w_1 - w_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} \leqslant k_{12}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{13}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)},$$
$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))} \leqslant k_{14}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{15}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)},$$

Доказательство аналогично предыдущему, если рассматривать

$$\mathcal{D}(\partial_t) = \widetilde{W}_{2,\gamma} := \{w \in L_2(0,T;W^1_{2,\gamma}(Q)) : \partial_t w \in L_2(\Omega_T)\}.$$

При этом используется компактность вложения $\widetilde{W}_{2,\gamma} \subset L_2(\Omega_T)$.

Пример 5.12. Теперь можно закончить рассмотрение примера 5.10. Нелокальным краевым условиям соответствует разностный оператор $Ru(t,x) = u(t,x) + \gamma_1 u(t, x_1+1, x_2) + \gamma_2 u(t, x_1-1, x_2)$. Данному оператору соответствует матрица $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$, невырожденная при $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$. При $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$ оператор R_Q положительно определен, условия леммы 5.5 и теоремы 5.8 выполнены. В силу теоремы 5.9 для любых $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ и $\psi \in L_2(Q)$ при $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$ задача (5.56)–(5.58) имеет единственное обобщенное решение

$$w \in W_{2,\gamma} := \{w \in L_2(0,T;W^1_{2,\gamma}(Q)) : \partial_t w \in L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))\}.$$

Если при этом $f \in L_2(\Omega_T)$, то $\partial_t w \in L_2(\Omega_T)$.

5.3.4. Квазилинейные параболические уравнения. Сформулируем теоремы существования решения нелокальных задач для нелинейного параболического уравнения с дифференциальным оператором с дифференцируемыми коэффициентами, $p \in [2, \infty)$.

Теорема 5.10. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3. *Пусть матрицы R_s и R_{s0}, заданные в условии* 5.3, *невырождены, причем $R_s + R_s^* > 0$ ($s = s(r)$, $r \in B$). Предположим, что дифференциальный оператор A задан функциями $A_i(x,t,\xi)$, измеримыми по $(x,t) \in \Omega_T$, непрерывными по ξ для п.в. $(x,t) \in \Omega_T$, для которых выполнены условия интегрируемости* (3.8), *дифференцируемости* (3.22) *для $i,j = 0,1,\ldots,n$ и сильной эллиптичности* (3.21), $p \in [2,\infty)$. *Тогда для любых $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и $\psi \in L_2(Q)$, существует единственное обобщенное решение задачи* (5.52)–(5.54), *причем*

$$\|w_1(T) - w_2(T)\|_{L_2(Q)} \leqslant k_{16}\|f_1 - f_2\|^{q/2}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + k_{17}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}, \tag{5.95}$$

$$\|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leqslant k_{18}\|f_1 - f_2\|^{q/p}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + k_{19}\|\psi_1 - \psi_2\|^{2/p}_{L_2(Q)}, \tag{5.96}$$

где w_1, w_2 — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) *при правых частях f_1, f_2 и начальных условиях ψ_1, ψ_2, соответственно.*

Доказательство. Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W^1_{p,\gamma}(Q))$, являющийся изоморфизмом (см. теорему 5.6). Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)-(5.61). В силу оценки интегрируемости (3.8) оператор A_R деминепрерывен и ограничен (см. лемму 3.8), а в силу условий (3.21)-(3.22) — сильно монотонен (см. лемму 3.9), причем

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle \geqslant c_9\|u - y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}, \tag{5.97}$$

см. (3.25). Если $\psi = 0$, то $\varphi = 0$ и $\partial_t R_Q$ является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Следовательно, существует решение $u \in W$ операторного уравнения (5.60), см. [33, теорема 1.1, гл. III, §1]. Более того, в силу монотонности A_R данное решение единственно.

Если $\psi \neq 0$, т. е. $\varphi = R_Q^{-1}\psi \neq 0$, то существует фиксированный элемент $\widehat{u} \in W \subset C(0,T;L_2(Q))$ такой, что $\widehat{u}|_{t=0} = \varphi$. Существование такого элемента обусловлено тем, что $C^1(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \cap W$ плотно вложено в W, см. [15, лемма 1.12, Ch. IV], а W непрерывно вложено в $C(0,T;L_2(Q))$, см. [15, теорема 1.17, Ch. IV]. Подставив $u(x,t) = v(x,t) + \widehat{u}(x,t)$, получим эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + A_R(v + \widehat{u}) = f - \partial_t R_Q \widehat{u} := \widehat{f}, \tag{5.98}$$

$$v|_{t=0} = 0. \tag{5.99}$$

Очевидно, что $\widehat{f} \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$. По построению оператор $A_R(\cdot + \widehat{u})$ удовлетворяет оценкам (3.8), (3.21) и (3.22), т. е. является ограниченным, деминепрерывным и сильно эллиптичным. Применяя [33, теорема 1.1, гл. III, §1] получаем существование решения задачи (5.98)-(5.99). Следовательно, существует решение $u \in W$ операторного уравнения (5.60) с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi$.

Так как существует единственное решение $u \in W$ операторного уравнения (5.60), (5.61), то $w = R_Q u \in W_\gamma$ является единственным обобщенным решением задачи (5.52)–(5.54).

Докажем оценки (5.95), (5.96). Пусть $w_1, w_2 \in W_\gamma$ — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) при правых частях f_1, f_2 и начальных условиях ψ_1, ψ_2, соответственно. Пусть $u_i = R_Q^{-1} w_i$ и $\varphi_i = R_Q^{-1}\psi_i$. Поскольку u_i — решения уравнения (5.60), то

$$\langle \partial_t R_Q u_1 - \partial_t R_Q u_2, u_1 - u_2\rangle + \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle,$$

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\,(u_1(T) - u_2(T))\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \\ = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}, \tag{5.100}$$

мы использовали оценки (5.66) и (5.69). Пусть также $u_3 \in W$ — решение уравнения (5.60), (5.61) при начальном условии $\varphi = \varphi_1$ и правой части $f = f_2$. Тогда

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\,(u_1(T) - u_3(T))\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3\rangle, \tag{5.101}$$

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\,(u_3(T) - u_2(T))\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3 - u_2\rangle = \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}(\psi_1 - \psi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}. \tag{5.102}$$

В силу оценки (5.97) и равенства (5.101),

$$c_9\|u_1 - u_3\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3\rangle = -\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\,(u_1(T) - u_3(T))\right\|^2_{L_2(Q)} + \\ + \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3\rangle \leqslant \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3\rangle \leqslant \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}\|u_1 - u_3\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon^q q}\|f_1 - f_2\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{\varepsilon^p}{p}\|u_1 - u_3\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}, \tag{5.103}$$

т.е. для $\dfrac{\varepsilon^p}{p} \leqslant \dfrac{c_9}{2}$ получаем, что

$$\|u_1 - u_3\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant k_{20}\|f_1 - f_2\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \tag{5.104}$$

$$\langle f_1 - f_2, u_1 - u_3\rangle \leqslant k_{21}\|f_1 - f_2\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}. \tag{5.105}$$

С другой стороны, второе слагаемое левой части (5.101) неотрицательно в силу монотонности A_R. Подставляя оценку (5.105), получим

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\,(u_1(T) - u_3(T))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3\rangle \leqslant k_{21}\|f_1 - f_2\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))},$$

т. е.

$$k_5\,\|u_1(T) - u_3(T)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\,(u_1(T) - u_3(T))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant 2k_{21}\|f_1 - f_2\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}. \tag{5.106}$$

Неотрицательность второго слагаемого правой части (5.102) влечет оценку

$$\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(T)-u_2(T))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}.$$

Опять воспользуемся оценкой (5.66) и ограниченностью оператора $\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}$:

$$k_5\|u_3(T)-u_2(T)\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(T)-u_2(T))\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)} = \\ = \left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}(\psi_1-\psi_2)\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant k_{22}\|\psi_1-\psi_2\|^2_{L_2(Q)}. \quad (5.107)$$

Осталось применить неравенство треугольника

$$\|u_1(T)-u_2(T)\|_{L_2(Q)} \leqslant \|u_1(T)-u_3(T)\|_{L_2(Q)} + \|u_3(T)-u_2(T)\|_{L_2(Q)} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\frac{2k_{21}}{k_5}}\|f_1-f_2\|^{q/2}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \sqrt{\frac{k_{22}}{k_5}}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(Q)}.$$

и воспользоваться ограниченностью оператора $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$:

$$\|w_1(T)-w_2(T)\|_{L_2(Q)} = \|R_Q(u_1(T)-u_2(T))\|_{L_2(Q)} \leqslant k_{23}\|u_1(T)-u_2(T)\|_{L_2(Q)} \leqslant \\ \leqslant k_{23}\left(\sqrt{\frac{2k_{21}}{k_5}}\|f_1-f_2\|^{q/2}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \sqrt{\frac{k_{22}}{k_5}}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(Q)}\right).$$

Оценка (5.95) доказана.

В то же время из оценок (5.97), (5.102) и (5.107) следует, что

$$c_9\|u_3-u_2\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3-u_2\rangle \leqslant \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(T)-u_2(T))\right\|^2_{L_2(Q)} + \\ + \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3-u_2\rangle = \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}(\psi_1-\psi_2)\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{k_{22}}{2}\|\psi_1-\psi_2\|^2_{L_2(Q)}, \quad (5.108)$$

т. е. $\|u_3-u_2\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \dfrac{k_{22}}{2c_9}\|\psi_1-\psi_2\|^2_{L_2(Q)}$. Воспользуемся неравенствами (5.104) и (5.108), а также неравенством треугольника

$$\|u_1-u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \|u_1-u_3\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + \|u_3-u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \\ \leqslant k_{21}^{1/p}\|f_1-f_2\|^{q/p}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \left(\frac{k_{22}}{2c_9}\right)^{1/p}\|\psi_1-\psi_2\|^{2/p}_{L_2(Q)}.$$

Из этого неравенства в силу ограниченности оператора $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W_p^1(Q))$ следует, что

$$\|w_1-w_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} = \|R_Q(u_1-u_2)\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leqslant k_{24}\|u_1-u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \\ \leqslant k_{24}\left(k_{21}^{1/p}\|f_1-f_2\|^{q/p}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \left(\frac{k_{22}}{2c_9}\right)^{1/p}\|\psi_1-\psi_2\|^{2/p}_{L_2(Q)}\right).$$

Оценка (5.96) доказана. □

Теорема 5.11. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3. *Пусть матрицы* R_s *и* R_{s0}, *заданные в условии* 5.3, *невырождены, причем* $R_s + R_s^* > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$. *Предположим, что дифференциальный оператор* A *задан функциями* $A_i(x,t,\xi)$, *измеримыми по* $(x,t) \in \Omega_T$, *непрерывными по* ξ *для п.в.* $(x,t) \in \Omega_T$, *для которых выполнены условия интегрируемости* (3.8), *дифференцируемости* (3.22) *для* $i,j = 1,\ldots,n$, *сильной эллиптичности* (3.39) *и коэрцитивности* (3.42)-(3.43), $p \in [2,\infty)$. *Тогда для любых* $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *и* $\psi \in L_2(Q)$, *существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в* W_γ *множество обобщенных решений задачи* (5.52)–(5.54).

Доказательство. Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q))$, являющийся изоморфизмом (см. теорему 5.6). Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)-(5.61). Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный (см. лемму 3.9), коэрцитивный (см. лемму 3.11) оператор, обладающий свойством (S_+) на W (см. лемму 3.10), т. е. псевдомонотонный на W. Если $\psi = 0$, то $\varphi = 0$ и $\partial_t R_Q$ является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1.4] существует решение задачи (5.60)-(5.61) $u \in W$. Иначе мы, аналогично предыдущей теореме, можем рассмотреть фиксированный элемент $\widehat{u} \in W \subset C(0,T;L_2(Q))$ такой, что $\widehat{u}|_{t=0} = \varphi$, и эквивалентное уравнение (5.98)-(5.99). По построению оператор $A_R(\cdot + \widehat{u})$ удовлетворяет оценкам (3.8), (3.21) и (3.22), т. е. является ограниченным, деминепрерывным, коэрцитивным и обладает свойством (S_+) на W. Применяя [33, теорема 1.1, гл. III, §1] получаем существование решения задачи (5.98)-(5.99). Следовательно, существует решение $u \in W$ операторного уравнения (5.60) с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора A_R. Докажем это. Пусть u — решение, $u \neq 0$. Тогда

$$\langle \partial_t R_Q u + A_R u, u\rangle = \langle f, u\rangle,$$

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}u(T)\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u, u\rangle = \langle f, u\rangle + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}\psi\right\|^2_{L_2(Q)}, \tag{5.109}$$

$$\langle A_R u, u\rangle \leqslant \langle f, u\rangle + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}\psi\right\|^2_{L_2(Q)},$$

$$\|u\|^{-1}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}\langle A_R u, u\rangle \leqslant \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}\psi\right\|^2_{L_2(Q)}}{2\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}}. \tag{5.110}$$

С правой стороны неравенства (5.110) стоит ограниченное значение. Ограничение левой части (5.110) в силу коэрцитивности оператора A_R гарантирует ограниченность $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}$, причем можно определить константу, которой ограничена эта норма так, что данная константа будет зависеть только от $\|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}$, от $\|\varphi\|_{L_2(Q)}$ и от функции, оценивающей коэрцитивность оператора A_R, но не зависеть от u. В то же время из равенства (5.109), ограниченности $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}$ и ограниченности оператора $\sqrt{R_Q^{sym}}$ следует, что ограничено $\|u(T)\|_{L_2(Q)}$. Доказана ограниченность решений задачи (5.60)-(5.61) в пространстве W. А поскольку R_Q ограничен и $w = R_Q u$ является решением (5.59), (5.53) тогда и только тогда, когда u — решение (5.60)-(5.61), то множество решений (5.59), (5.53) ограничено в W_γ.

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор A_R является псевдомонотонным на W. Докажем это. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ в W, u_n принадлежат множеству решений для каждого n. При этом по определению $u_n \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$ и $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, кроме того, $u(0) = \varphi$ в силу непрерывности вложения $W \subset C(0,T;L_2(Q))$. Поскольку u_n — решение (5.60), то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\langle A_R u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f, u_n - u\rangle - \varliminf_{n\to\infty}\langle \partial_t u_n, u_n - u\rangle. \tag{5.111}$$

Первое слагаемое (5.111) $\lim\limits_{n\to\infty}\langle f, u_n - u\rangle = 0$, так как $u_n \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$. Распишем второе слагаемое (5.111): $\lim\limits_{n\to\infty}\langle \partial_t R_Q u_n, u\rangle = \langle \partial_t R_Q u, u\rangle$ в силу слабой сходимости $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и непрерывности оператора R_Q. В лемме 5.5 доказано, что $\partial_t R_Q$ — монотонный оператор при нулевых начальных условиях. В силу линейности оператора $\partial_t R_Q$ это свойство сохраняется для любых фиксированных начальных условий, т. е. $\langle \partial_t R_Q u_n - \partial_t R_Q u, u_n - u\rangle \geqslant 0$. Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty}\langle \partial_t R_Q u_n, u_n - u\rangle \geqslant \lim_{n\to\infty}\langle \partial_t R_Q u, u_n - u\rangle = 0 \tag{5.112}$$

в силу слабой сходимости $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ в $L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и непрерывности оператора R_Q. Подставив это выражение в (5.111), получим, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\langle A_R u_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$. В силу условия псевдомонотонности на W оператора A_R и монотонности оператора $\partial_t R_Q$

$$\begin{aligned}\langle A_R u, u-v\rangle \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\langle A_R u_n, u_n - v\rangle = \varliminf_{n\to\infty}\langle f - \partial_t R_Q u_n, u_n - v\rangle \leqslant \lim_{n\to\infty}\langle f, u_n - v\rangle - \\ - \varlimsup_{n\to\infty}\langle \partial_t R_Q u_n, u_n - u\rangle \leqslant \langle f, u-v\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle \partial_t R_Q u, u_n - u\rangle = \langle f - \partial_t R_Q u, u - v\rangle.\end{aligned}$$

Поскольку данное неравенство справедливо для всех $v \in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$, то u удовлетворяет операторному уравнению (5.60). Доказана слабая компактность в W решений уравнения (5.60) с начальными условиями (5.61). А поскольку R_Q непрерывен и $w = R_Q u$ является решением (5.59), (5.53) тогда и только тогда, когда u — решение (5.60)-(5.61), то множество решений задачи (5.59), (5.53) слабо компактно в W_γ. □

5.3.5. Нелинейные нелокальные задачи.

Теорема 5.12. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3. *Пусть матрицы* R_s *и* R_{s0}, *заданные в условии* 5.3, *невырождены, причем* $R_s + R_s^* > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$. *Предположим, что дифференциальный оператор* A *задан функциями* $A_i(x,t,\xi)$, *измеримыми по* $(x,t) \in \Omega_T$, *непрерывными по* ξ *для п.в.* $(x,t) \in \Omega_T$, *для которых выполнены условия интегрируемости* (3.8), *а также один из следующих наборов*:

1) *условия коэрцитивности* **(A2)** (*см.* (4.1)) *и эллиптичности* **(A3)** (*см.* (4.2)), $p \in (1,\infty)$;
2) *условия сильной эллиптичности* **(A4)** (*см.* (4.18)) *и локальной липшицевости* **(A5)** (*см.* (4.19)-(4.20)), *а также одно из условий коэрцитивности* **(A2)**, (3.42)-(3.43) *или* (4.39)–(4.41), $p \in [2,\infty)$.

Тогда для любых $f \in \mathcal{V}^*$ *и* $\psi \in L_2(Q)$, *существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в* W_γ *множество обобщенных решений задачи* (5.52)–(5.54).

Доказательство. Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q))$, являющийся изоморфизмом, см. теорему 5.6. Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)-(5.61). В силу условия интегрируемости (3.8) оператор A_R деминепрерывный и ограниченный, см. лемму 3.9. Остальные условия гарантируют коэрцитивность и псевдомонотонность на W оператора A_R. В случае 1) мы имеем коэрцитивный оператор, обладающий свойством (S_+) на W, см. леммы 4.1 и 4.3. В случае 2) мы имеем коэрцитивный оператор, обладающий свойством $(\mathcal{V};W)$-полуограниченной вариации, см. лемму 4.4 и замечание 4.1. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 5.11. □

Теорема 5.13. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3. *Пусть матрицы* R_s *и* R_{s0}, *заданные в условии* 5.3, *невырождены, причем* $R_s + R_s^* > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$, *а обратный оператор* R_q^{-1} *сильно аккретивен. Предположим, что дифференциальный оператор* $A = \Delta_p$, $p \in (2,\infty)$. *Тогда для любых* $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *и* $\psi \in L_2(Q)$ *существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в* W_γ *множество обобщенных решений задачи* (5.52)–(5.54), *причем решения удовлетворяют оценкам*

$$\|w\|^2_{C(0,T;L_2(Q))} \leqslant k_{25}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + k_{26}\|\psi\|^2_{L_2(Q)}, \tag{5.113}$$

$$\|w\|^p_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leqslant k_{27}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + k_{28}\|\psi\|^2_{L_2(Q)}, \tag{5.114}$$

где $k_{25}, k_{26}, k_{27}, k_{28} > 0$ *не зависят от* w, f *и* ψ.

Доказательство. Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор $R_Q : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q))$, являющийся изоморфизмом, см. теорему 5.6. Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)-(5.61). В силу сильной аккретивности оператора R_Q^{-1} оператор $\Delta_p R_Q$ деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен, см. леммы 4.5 и 4.7. Если $\psi = 0$, то $\varphi = 0$ и $\partial_t R_Q$ является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Согласно [33, теорема 1.1, гл. 3, §1.4] существует решение $u \in W$ задачи (5.60)-(5.61). Иначе мы, аналогично доказательству теоремы 5.10, можем рассмотреть фиксированный элемент $\widehat{u} \in W \subset C(0,T;L_2(Q))$ такой, что $\widehat{u}_{|t=0} = \varphi$, и эквивалентное уравнение (5.98)-(5.99). По построению оператор $\Delta_p R_Q(\cdot + \widehat{u})$ деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Применяя [33, теорема 1.1, гл. III, §1], доказываем существование решения задачи (5.98)-(5.99). Следовательно, существует решение $u \in W$ операторного уравнения (5.60) с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi$.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора $\Delta_p R_Q$ и ограниченности оператора R_Q, слабая компактность множества решений следует из псевдомонотонности оператора $\Delta_p R_Q$ и непрерывности оператора R_Q (подробнее см. доказательство теоремы 5.11).

Для доказательства оценок (5.113), (5.114) докажем аналогичные оценки для решений u задачи (5.98)-(5.99) с оператором $\Delta_p R_Q$. Для них справедливо равенство

$$\langle \partial_t R_Q u, u\rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u\rangle = \langle f, u\rangle. \tag{5.115}$$

Используем равенство (5.69) для первого слагаемого левой части (5.115) и оценку (4.47) для второго слагаемого левой части (5.115), а правую часть (5.115) распишем с помощью неравенства Гёльдера. Тогда

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}u(T)\right\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\varphi\right\|^2_{L_2(Q)} + c_5^{-p}c_a\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \langle \partial_t R_Q u, u\rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \frac{1}{q\varepsilon^q}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{\varepsilon^p}{p}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}. \tag{5.116}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon^p/p = c_5^{-p}c_a/2$. Первое слагаемое левой части (5.116) неотрицательно, $\varphi = R_Q\psi$, следовательно

$$\frac{c_5^{-p}c_a}{2}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \frac{1}{q\varepsilon^q}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q\psi\right\|^2_{L_2(Q)},$$

т. е. в силу ограниченности оператора $\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q$

$$\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant k_{29}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + k_{30}\,\|\psi\|^2_{L_2(Q)}. \tag{5.117}$$

Так как $w = R_Q u$, а оператор R_Q ограничен и справедлива оценка (3.20), то из (5.117) следует (5.114).

С другой стороны, в силу неотрицательности $\langle \Delta_p R_Q u, u\rangle$,

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}\,u(T)\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \langle f, u\rangle + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q\psi\right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{q}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} +$$
$$+\frac{1}{p}\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + k_{31}\,\|\psi\|^2_{L_2(Q)} \leqslant k_{32}\|f\|^q_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} + k_{31}\,\|\psi\|^2_{L_2(Q)}. \tag{5.118}$$

Так как $w = R_Q u$, а оператор R_Q ограничен и справедлива оценка (1.22), то из (5.118) следует (5.113). □

Пример 5.13. Рассмотрим задачу Бицадзе—Самарского (5.56)–(5.58) с p-лапласианом (продолжим рассмотрение задачи из примеров 5.10–5.12). Будем искать w, удовлетворяющее уравнению

$$\partial_t w + \Delta_p w = f, \qquad w|_{t=0} = \psi \tag{5.119}$$

с нелокальными краевыми условиями (5.58). В примере 5.11 доказано, что краевым условиям (5.58) соответствует разностный оператор

$$Ru(x,t) = u(x_1, x_2, t) + \gamma_1 u(x_1+1, x_2, t) + \gamma_2 u(x_1 - 1, x_2, t)$$

с матрицей $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица R_1 невырождена при $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$. При $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$ оператор R_Q положительно определен, условия леммы 5.5 выполнены. Кроме того, обратному оператору R_Q^{-1} соответствует матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть, если

$$2 > \lambda|\gamma_1 - \gamma_2| + |\gamma_1 + \gamma_2|, \tag{5.120}$$

где $\dfrac{\lambda^p}{\lambda+1} \leqslant \dfrac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$, то оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен, см. лемму 2.8. Следовательно, при выполнении оценки (5.120) выполнены условия теоремы 5.13, задача (5.56)–(5.58) имеет обобщенное решение.

Пример 5.14. На параллелепипеде $\Omega_T = (0,3)\times(0,1)\times(0,T)$ рассмотрим уравнение (5.119) с нелокальными условиями

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1,0,t) = w(x_1,1,t) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2;\ 0<t<T), \\ w(0,x_2,t) = 0{,}5\,w(1,x_2,t) & (0<x_2<1;\ 0<t<T), \\ w(3,x_2,t) = 0{,}5\,w(2,x_2,t) & (0<x_2<1;\ 0<t<T). \end{array}\right\} \qquad (5.121)$$

В соответствии со сдвигами, имеющимися в краевых условиях, разностный оператор должен иметь вид $Ru(x) = \sum\limits_{-2\leqslant k\leqslant 2} a_k u(x_1+k,x_2,t)$. В силу симметричности краевых условий этому оператору соответствует симметрическая матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

причем согласно условию 5.3 R_Q соответствует краевым условиям, если

$$a_1 = 0{,}5a_0, \qquad a_2 = 0{,}5a_1.$$

То есть

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad R_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что матрицы R_1 и R_{10} положительно определены. Обратная матрица

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет критерию сильной аккретивности из леммы 2.8: $4/3 > 2/3$; $5/3 > 2/3 + 2/3$. Следовательно, задача (5.119), (5.57), (5.121) имеет обобщенное решение для любых $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и $\psi \in L_2(Q)$, см. теорему 5.13.

5.4. Существование периодических по t решений параболических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского

Как и выше, будем использовать разбиение области Q и построение множества $\{\Gamma_{rj}\}$, подробно изложенное в разделе 5.1, $\Gamma_{rl}^T := \Gamma_{rl}(0,T)\times(0,T)$, а также условия 5.1–5.3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (5.52), где дифференциальный оператор A задан формулой (3.4), с нелокальными краевыми условиями (5.54). Будем искать периодические по t решения задачи (5.52), (5.54) с периодом T, т. е.

$$w(x,0) = w(x,T) \qquad (x\in Q). \qquad (5.122)$$

Определение 5.7. Будем называть функцию $w \in W_\gamma$ *обобщенным решением задачи* (5.52)*,* (5.54)*,* (5.122), если она удовлетворяет операторному уравнению (5.59) и условию периодичности (5.122).

Теорема 5.14. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3*, причем матрицы R_s и R_{s0} невырождены. Элемент $u\in W$ является решением операторного уравнения* (5.60) *и удовлетворяет условию периодичности*

$$u(x,0) = u(x,T) \qquad (5.123)$$

тогда и только тогда, когда $R_Q u = w \in W_\gamma$ является решением операторного уравнения (5.58) *и удовлетворяет условию периодичности* (5.122).

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 5.7. Надо только отметить, что поскольку оператор $R_Q : C(0,T;L_2(Q)) \to C(0,T;L_2(Q))$ невырожден, то

$$u(x,0) = R_Q^{-1} w(x,0) = R_Q^{-1} w(x,T) = u(x,T).$$

Как известно, оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \to \mathcal{V}^*$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\partial_t) := \{u\in\mathcal{V} :\ \partial_t u \in \mathcal{V}^*,\ u(x,0) = u(x,T)\}. \qquad (5.124)$$

является максимально монотонным, см., например, [33, гл. 3, §2]. Докажем это свойство для $\partial_t R_Q : W \to \mathcal{V}^*$.

Лемма 5.7. *Пусть оператор* R_Q *невырожденный*[1]*. Тогда оператор* $\partial_t R_Q$ *с областью определения*

$$\mathcal{D}(\partial_t R_Q) := \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*, \, u(x,0) = u(x,T)\}.$$

максимально монотонен.

Доказательство. По построению $\mathcal{D}(\partial_t R_Q) \subset W$. Кроме того, $(\partial_t R_Q)^* = R_Q^* \partial_t^* = \partial_t^* R_Q^* = -\partial_t R_Q^*$. То есть $\mathcal{D}(\partial_t R_Q)^* \subset W$. Заметим, что

$$(R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = \big(u(t), R_Q^* u(t)\big)_{L_2(Q)} = \left(R_Q^{sym} u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)}.$$

Более того, согласно правилам дифференцирования,

$$\partial_t \left(R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} = \left(\partial_t R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} + \left(R_Q u(t), \partial_t u(t)\right)_{L_2(Q)} =$$
$$= \left(R_Q \partial_t u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} + \big(u(t), R_Q^* \partial_t u(t)\big)_{L_2(Q)} = 2\left(\partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)}.$$

Поскольку $\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u\rangle = 0$ и $u(x,T) = u(x,0)$, получаем, что

$$\langle \partial_t R_Q u, u\rangle = \langle \partial_t R_Q^{sym} u, u\rangle = \int\limits_0^T \left(\partial_t R_Q^{sym} u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\left(R_Q^{sym} u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left(R_Q^{sym} u(0), u(0)\right)_{L_2(Q)} = 0.$$

С другой стороны, в силу невырожденности оператора,

$$\langle (\partial_t R_Q)^* u, u\rangle = -\langle \partial_t R_Q^* u, u\rangle = -\langle \partial_t R_Q^{sym} u, u\rangle = 0.$$

Условие (5.67) для оператора $\Lambda = \partial_t R_Q$ выполнено, оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, см. [33, лемма 1.1, гл. 3]. $\square$

Сформулируем теоремы существования решений.

Теорема 5.15. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3*. Пусть* $R_s + R_s^* > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$*. Пусть линейный дифференциальный оператор* A*, заданный в* (5.70)*, таков, что* $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$*,* $A_{ij}(x,t) = A_{ij}(x,t)$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$*, причем* A_{ij} M*-периодичны для* $i,j = 1,\ldots,n$ *(т. е.* $A_{ij}(x+h,t) = A_{ij}(x,t)$ *для всех* $h \in M$*) и справедлива оценка* (5.71)*. Тогда для любого* $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (5.52)*,* (5.54)*,* (5.122)*, причем справедливы оценки*

$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))} \leqslant k_{33}\|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}, \tag{5.125}$$

где w_1 *и* w_2 *— решения задачи* (5.52)*,* (5.54)*,* (5.122) *при правых частях* f_1 *и* f_2*,* $k_{33} > 0$ *не зависит от* w_i *и* f_i*.*

Доказательство. В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным краевым условиям. Поскольку $R_s^{sym} > 0$, то матрицы R_s и R_{s0} невырождены, т. е. соответствующий оператор R_Q является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, см. лемму 5.7. Также условие $R_s^{sym} > 0$, M-периодичность коэффициентов и оценка (5.71) гарантируют, что оператор $A_R = AR_Q$ деминепрерывен, ограничен и сильно эллиптичен, см. лемму 5.6. То есть выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1], операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.123) имеет решение $u \in W$. Монотонность оператора A_R гарантирует единственность решения. Согласно этому результату и теореме 5.14, $w = R_Q u$ — обобщенное решение задачи (5.52), (5.54), (5.122).

[1]Напомним, что оператор R_Q невырожден тогда и только тогда, когда для всех s матрицы R_s невырождены.

Оценка (5.125) следует из сильной эллиптичности оператора A_R. Не нарушая общности, будем считать, что $k_7 = 0$, иначе перейдем к вспомогательным функциям, как в теореме 5.8, т. е.

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant k_6 \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))}.$$

Пусть $u_1 = R_Q^{-1} w_1$ и $u_2 = R_Q^{-1} w_2$. Тогда

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle.$$

Воспользуемся сильной эллиптичностью:

$$k_6 \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle \leqslant \\ \leqslant \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))} \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))}.$$

Тогда

$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W^1_2(Q))} = \|R_Q u_1 - R_Q u_2\|_{L_2(0,T;W^1_2(Q))} \leqslant \\ \leqslant c_5(c_{18}+1)\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}^1_2(Q))} \leqslant \frac{c_5}{k_6}(c_{18}+1)\|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))},$$

где константа c_5 из оценки (3.20), а c_{18} — из неравенства Фридрихса, что доказывает оценку (5.125). ☐

Пример 5.15. Рассмотрим параболическую задачу с лапласианом:

$$\partial_t w(x,t) - \Delta w(x,t) = f(t,x) \qquad (x \in Q), \tag{5.126}$$

где $f \in L_2(\Omega_T)$, с нелокальными краевыми условиями Бицадзе—Самарского

$$\left.\begin{aligned} &w(x_1,0,t) = w(x_1,1,t) = 0 && (0 \leqslant x_1 \leqslant 2,\ t \in (0,T)),\\ &w(0,x_2,t) = \gamma_1 w(1,x_2,t) && (0 < x_2 < 1,\ t \in (0,T)),\\ &w(2,x_2,t) = \gamma_2 w(1,x_2,t) && (0 < x_2 < 1,\ t \in (0,T)). \end{aligned}\right\} \tag{5.127}$$

Как показано в примерах 5.10–5.12, этим краевым условиям соответствует разностный оператор $Ru(t,x) = u(t,x) + \gamma_1 u(t,x_1+1,x_2) + \gamma_2 u(t,x_1-1,x_2)$ с матрицей $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица R_1 невырождена при $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$. При $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$ оператор R_Q положительно определен, условия леммы 5.7 и теоремы 5.15 выполнены. В силу теоремы 5.15 задача (5.126)-(5.127) имеет единственное периодическое по t с периодом T решение для любого $f \in L_2(\Omega_T)$ при $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$.

Теорема 5.16. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3, $R_s + R_s^* > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$. *Предположим, что дифференциальный оператор A задан функциями $A_i(x,t,\xi)$, измеримыми по $(x,t) \in \Omega_T$, непрерывными по ξ для п.в. $(x,t) \in \Omega_T$, для которых выполнены условия интегрируемости* (3.8), *дифференцируемости* (3.22) *для $i,j = 0,1,\dots,n$ и сильной эллиптичности* (3.21), $p \in [2,\infty)$. *Тогда для любого $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ существует единственное обобщенное решение задачи* (5.52), (5.54), (5.122), *причем справедливы оценки*

$$\|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} \leqslant k_{34} \|f_1 - f_2\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \tag{5.128}$$

где w_1 и w_2 — решения задачи (5.52), (5.54), (5.122) *при правых частях f_1 и f_2, $k_{34} > 0$ не зависит от w_i и f_i.*

Доказательство. В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным краевым условиям. Поскольку $R_s^{sym} > 0$, то матрицы R_s и R_{s0} невырождены, т. е. соответствующий оператор R_Q является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, см. лемму 5.7. В силу оценки интегрируемости (3.8) оператор A_R деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8, а в силу условий (3.21)-(3.22) — сильно эллиптичен (сильно монотонен), см. лемму 3.9. То есть выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1], операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.123) имеет решение $u \in W$. Монотонность оператора A_R гарантирует единственность решения. Согласно этому результату и теореме 5.14, $w = R_Q u$ — обобщенное решение задачи (5.52), (5.54), (5.122).

Оценка (5.125) следует из сильной монотонности оператора A_R, т. е.

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle \geqslant c_9 \|u_1 - u_2\|^2_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}.$$

Пусть $u_1 = R_Q^{-1} w_1$ и $u_2 = R_Q^{-1} w_2$. Тогда

$$c_9 \|u_1 - u_2\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))},$$

следовательно,

$$\|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} = \|R_Q u_1 - R_Q u_2\|_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} \leqslant c_5(c_{18}+1)\|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant$$
$$\leqslant c_5(c_{18}+1) c_9^{1/(p-1)} \|f_1 - f_2\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))},$$

где константа c_5 из оценки (3.20), а c_{18} — из неравенства Фридрихса, что доказывает оценку (5.128). □

Теорема 5.17. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3*;* $R_s^{sym} > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$; *дифференциальный оператор* A *задан функциями* $A_i(x,t,\xi)$, *измеримыми по* $(x,t) \in \Omega_T$, *непрерывными по* ξ *для п.в.* $(x,t) \in \Omega_T$, *для которых справедливо условия интегрируемости* (3.8)*, дифференцируемости* (3.22) *для* $i,j = 1,\dots,n$, *сильной эллиптичности* (3.39) *и коэрцитивности* (3.42)-(3.43), $p \in [2,\infty)$.

Тогда для любого $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *существует ограниченное и слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи* (5.52)*,* (5.54)*,* (5.122)*.*

Доказательство. В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным краевым условиям, причем R_Q является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, см. лемму 5.7. В силу оценки интегрируемости (3.8) оператор A_R деминепрерывен и ограничен. Кроме того, A_R коэрцитивен и обладает свойством (S_+) на W, см. леммы 3.11 и 3.10. Условия теоремы 1.2 из [33, гл. III, §1] выполнены, операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.122) имеет решение $u \in W$. Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора A_R, а слабая замкнутость — из псевдомонотонности на W оператора A_R. Согласно этому результату и теореме 5.14 множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122) непусто, ограничено, слабо замкнуто и состоит из элементов $w = R_Q u$, где $u \in W$ — решение уравнения (5.60) с условием периодичности (5.123). □

Теорема 5.18. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3*;* R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены; дифференциальный оператор* A *задан функциями* $A_i(x,t,\xi)$, *измеримыми по* $(x,t) \in \Omega_T$, *непрерывными по* ξ *для п.в.* $(x,t) \in \Omega_T$, *кроме того, справедливы условия* **(A1)**–**(A3)** *из главы* 4. *Тогда для любого* $f \in \mathcal{V}^*$ *существует ограниченное и слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи* (5.52)*,* (5.54)*,* (5.122)*.*

Доказательство. В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным краевым условиям, причем R_Q является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, см. лемму 5.7. В силу условия интегрируемости **(A1)** оператор A_R деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.9. Из оценки **(A2)** следует коэрцитивность оператора A_R, см. лемму 4.1. При выполнении условий эллиптичности **(A3)** и коэрцитивности **(A2)** оператор A_R обладает свойством (S_+) на W и псевдомонотонен на W, см. лемму 4.3. Условия теоремы 1.2 из [33, гл. III, §1] выполнены, операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.122) имеет решение $u \in W$. Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора A_R, а слабая замкнутость — из псевдомонотонности на W оператора A_R. Согласно этому результату и теореме 5.14 множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122) непусто, ограничено, слабо замкнуто и состоит из элементов $w = R_Q u$, где $u \in W$ — решение уравнения (5.60) с условием периодичности (5.123). □

Теорема 5.19. *Пусть выполнены условия* 5.1–5.3; R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены*; *обратный оператор* R_Q^{-1} *сильно аккретивен. Тогда для любого* $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ *существует* *ограниченное и слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи* (5.52), (5.54), (5.122) *с дифференциальным оператором* $A = \Delta_p$, *причем для каждого решения справедлива оценка*

$$\|w\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leqslant k_{35}\|f\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}, \tag{5.129}$$

где $c_{35} > 0$.

Доказательство. В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор R_Q, соответствующий нелокальным краевым условиям. Поскольку матрицы R_s и R_{s0} невырождены, т. е. соответствующий оператор R_Q является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, см. лемму 5.7. Сильная аккретивность оператора R_Q^{-1} гарантирует, что оператор $\Delta_p R_Q$ деминепрерывен, ограничен и псевдомонотонен, см. леммы 4.5 и 4.7. То есть выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1], операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.123) имеет решение $u \in W$. Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора $\Delta_p R_Q$, а слабая замкнутость — из псевдомонотонности оператора $\Delta_p R_Q$. Согласно этому результату и теореме 5.14 множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122) непусто, ограничено, слабо замкнуто и состоит из элементов $w = R_Q u$, где $u \in W$ — решение уравнения (5.60) с условием периодичности (5.123). Оценка (5.129) следует из условия коэрцитивности оператора $\Delta_p R_Q$:

$$c_a\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant \langle A_R u, u\rangle = \langle f, u\rangle - \langle \partial_t R_Q u, u\rangle \leqslant \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))},$$

поскольку $\langle \partial_t R_Q u, u\rangle = 0$. Тогда

$$\|w\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} = \|R_Q u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leqslant c_5(c_{18}+1)\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant$$
$$\leqslant c_5(c_{18}+1)c_a^{1/(p-1)}\|f\|^{1/(p-1)}_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))},$$

где константа c_5 из оценки (3.20), а c_{18} — из неравенства Фридрихса, что доказывает оценку (5.129). □

Пример 5.16. Рассмотрим уравнение

$$\partial_t w + \Delta_p w = f, \qquad w_{|t=0} = \psi, \tag{5.130}$$

с нелокальным краевым условиям (5.127). В примере 5.11 доказано, что данным краевым условиям соответствует разностный оператор

$$Ru(t,x) = u(t,x) + \gamma_1 u(t, x_1+1, x_2) + \gamma_2 u(t, x_1-1, x_2)$$

с матрицей $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица R_1 невырождена при $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$. Кроме того, обратному оператору R_Q^{-1} соответствует матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть, если

$$2 > \lambda^{-1}|\gamma_1 - \gamma_2| + |\gamma_1 + \gamma_2|, \tag{5.131}$$

где $\dfrac{\lambda^p}{\lambda+1} \leqslant \dfrac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$, то оператор R_Q^{-1} сильно аккретивен, см. лемму 2.8. Следовательно, при выполнении оценки (5.131) выполнены условия теоремы 5.19, задача (5.130), (5.127) имеет периодическое по t решение с периодом T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Задача Бицадзе—Самарского для параболической системы на плоскости// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 517–519.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

4. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972.
5. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов// Теор. вер. и ее примен. — 1959. — *4*, № 2. — С. 172–185.
6. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений// Тр. Моск. мат. об-ва — 1952. — *1*. — С. 187–264.
7. *Вишик М. И.* О разрешимости первой краевой задачи для нелинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1960. — *134*, № 4. — С. 749–752.
8. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков// Мат. сб. — 1962. — *59*. — С. 289–325.
9. *Вишик М. И., Ладыженская О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*, № 6. — С. 41–97.
10. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Об асимптотических свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — *15*. — С. 112–125.
11. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30*. — С. 3–173.
12. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
13. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 36–65.
14. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 43–61.
15. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
17. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *38*. — С. 3–173.
18. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка// Мат. сб. — 1994. — *185*, № 4. — С. 121–160.
19. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 1. — С. 45–90.
20. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1976. — *9*. — С. 5–130.
21. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Нелокальные граничные задачи для эллиптических уравнений// Мат. иссл. — 1971. — *6*, № 2. — С. 63–73.
22. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма—Лиувилля// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 8. — С. 1422–1431.
23. *Иванова Е. П.* Методы исследования дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2022. — *204*. — С. 44–52.
24. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наукова думка, 1988.
25. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
26. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Харьков: ХНУ, 2004.
27. *Качуровский Р. И.* О монотонных операторах и выпуклых функционалах// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 4. — С. 213–215.
28. *Кишкис К. Ю.* К теории нелокальных задач для уравнения Лапласа// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 59–64.
29. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
30. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1973.
31. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
32. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 5. — С. 693–716.
33. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.

34. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
35. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. — М.: ГИТТЛ, 1951.
36. *Мельник В. С., Згуровский М. З.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наукова думка, 1999.
37. *Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций одной нелокальной краевой задачи// Дифф. уравн. — 1994. — *30*, № 12. — С. 2082–2093.
38. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решений некоторых параболических уравнений с нелокальными старшими членами// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2006. — *25.* — С. 143–183.
39. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства задачи Коши// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *52.* — С. 3–143.
40. *Муравник А. Б.* О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *60.* — С. 102–113.
41. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом// Усп. мат. наук. — 1977. — *32*, № 2. — С. 173–202.
42. *Мышкис А. Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2003. — *4.* — С. 5–120.
43. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения со смещенными аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Совет. прикл. мех. — 1979. — *15.* — С. 391–397.
44. *Панеях Б. П.* О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 1984. — *35*, № 3. — С. 425–434.
45. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов// Дифф. уравн. — 1999. — *35*, № 6. — С. 793–800.
46. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36.* — С. 125–142.
47. *Похожаев С. И.* О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами// Функц. анализ и его прилож. — 1967. — *1*, № 3. — С. 66–73.
48. *Похожаев С. И., Дубинский Ю. А.* Об одном классе операторов и разрешимости квазилинейных дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1967. — *72*, № 2. — С. 226–236.
49. *Рабинович В. С.* О дифференциально-разностных уравнениях в полупространстве// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 11. — С. 2030–2038.
50. *Рабинович В. С.* О задаче Коши для параболических дифференциально-разностных операторов с переменными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1983. — *19*, № 6. — С. 1032–1038.
51. *Разгулин А. В., Романенко Т. Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2013. — *53*, № 11. — С. 1804–1821.
52. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем// Сиб. мат. ж. — 1972. — *13*, № 1. — С. 165–181.
53. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54.* — С. 3–138.
54. *Россовский Л. Е., Ханалыев А. Р.* Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62.* — С. 140–151.
55. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 1. — С. 1925–1935.
56. *Селицкий А. М.* Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21.* — С. 114–132.
57. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.
58. *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1983. — *34*, № 1. — С. 105–112.
59. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы// Мат. сб. — 1986. — *129*, № 2. — С. 279–302.
60. *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. АН СССР. — 1989. — *307*, № 2. — С. 287–291.
61. *Скубачевский А. Л.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 127–136.
62. *Скубачевский А. Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах// Дифф. уравн. — 1990. — *26*, № 1. — С. 120–131.

63. *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 128–139.
64. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами// Докл. АН СССР. — 1992. — *324*, № 6. — С. 1155–1158.
65. *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 1. — С. 169–170.
66. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1998. — *34*, № 10. — С. 1394–1401.
67. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
68. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
69. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
70. *Скубачевский А. Л., Селицкий А. М.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 1. — С. 207–208.
71. *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 1. — С. 145–153.
72. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
73. *Солдатов А. П.* Задача Бицадзе—Самарского для функций, аналитических по Дуглису// Дифф. уравн. — 2005. — *41*, № 3. — С. 396–407.
74. *Солонуха О. В.* О нелинейной параболической задаче с препятствием// Усп. мат. наук. — 2004. — *59*, № 3. — С. 181-182.
75. *Солонуха О. В.* О существовании решений нелинейных параболических вариационных неравенств с односторонними ограничениями// Мат. заметки. — 2005. — *77*, № 3. — С. 460–476.
76. *Солонуха О. В.* Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 226–244.
77. *Солонуха О. В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — *57*, № 3. — С. 60–72.
78. *Солонуха О. В.* Об одном эллиптическом дифференциально-разностном уравнении с несимметричным оператором сдвигов// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 4. — С. 604–620.
79. *Солонуха О. В.* Обобщенные решения квазилинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2020. — *60*, № 12. — С. 2085–2097.
80. *Солонуха О. В.* О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 2. — С. 349–362.
81. *Солонуха О. В.* О периодических решениях параболических квазилинейных уравнений с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского// Докл. РАН. — 2022. — *503*. — С. 83–86.
82. *Солонуха О. В.* О разрешимости нелинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами по пространственным переменным// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 5. — С. 757–773.
83. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Расширение алгебры псевдодифференциальных операторов и некоторые нелокальные эллиптические задачи// Мат. сб. — 1994. — *185*, № 3. — С. 117–160.
84. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
85. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
86. *Bade W. G., Freeman R. S.* Closed extensions of the Laplace operator determined by a general class of boundary conditions// Pacific J. Math. — 1962. — *12*, № 2. — С. 395–410.
87. *Beals R.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Bull. Am. Math. Soc. — 1964. — *70*, № 5. — С. 693–696.
88. *Brézis H.* Équations et inéqutions non linéares dans les espaces vectoriels en dualité// Ann. Inst. Fourier. — 1968. — *18*. — С. 115–175.
89. *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems// Am. J Math. — 1964. — *86*, № 4. — С. 735–750.
90. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces// J. Funct. Anal. — 1972. — *11*, № 2. — С. 251–294.
91. *Hartman P., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–310.

92. *Grubb G.* A characterization of the non-local boundary value problems assosiated with elliptic operator// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1968. — *22*, № 3. — С. 425–513.
93. *Guan Z., Kartsatos A. G., Skrypnik I. V.* Ranges of densely defined generalized psuedomonotone pertubations of maximal monotone operators// J. Differ. Equ. — 2003. — *188*. — С. 332–351.
94. *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations// Ann. Math. — 1952. — *55*. — С. 468–519.
95. *Feller W.* Diffusion processes in one dimension// Trans. Am. Math. Soc. — 1954. — *77*. — С. 1–30.
96. *Kartsatos A. G., Skrypnik I. V.* On the eigenvalue problems for pertubed nonlinear maximal monotone operators in reflexive Banach spaces// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — *358*, № 9. — С. 3851–3881.
97. *Minty G. J.* Monotone (non-linear) operator in Hilbert space// Duke Math. J. — 1962. — *29*. — С. 341–346.
98. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — С. 192–207.
99. *Picone M.* I teoremi d'esistenza per gl' integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni// Rom. Acc. L. Rend. — 1908. — *17*, № 1. — С. 340–347.
100. *Picone M.* Equazione integrale traducente il piu generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. — 1932. — *15*. — С. 942–948.
101. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical systems with 2-D feedback// В сб.: «Chaos in Optics. Proceedings SPIE». — 1993. — *2039*. — С. 342–352.
102. *Sato K., Ueno T.* Multi-dimentional diffusion and the Markov process on the boundary// J. Math. Kyoto Univ. — 1965. — *4*. — С. 295–298.
103. *Schechter M.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1966. — *20*, № 2. — С. 421–441.
104. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*. — С. 332–361.
105. *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems// J. Math. Anal. Appl. — 1991. — *160*, № 2. — С. 323–341.
106. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
107. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*. — С. 261–278.
108. *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional differential equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — *9*, № 3. — С. 847–868.
109. *Solonukha O. V.* The criteria of accretivity of differential operators described by the 2×2 matrices and its applications// В сб.: «XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017). Сборник материалов международной конференции». — Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. — С. 124–128.
110. *Solonukha O. V.* The first Boundary Value Problem for Quasilinear Parabolic Differential-Difference Equations// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 1067–1077.
111. *Solonukha O. V.* On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions// Тавр. вестн. инф. и мат. — 2021. — *51*, № 2. — С. 7–11.
112. *Solonukha O. V.* On nonlinear nonlocal parabolic problem// Russ. J. Math. Phys. — 2022. — *29*, № 1. — С. 121–140.
113. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen// В сб.: «Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). III». — Roma: Reale Accad. Lincei, 1909. — С. 116–124.
114. *Taira K.* Diffusion Processes and Partial Differential Equations. — New York–London: Academic Press, 1988.

О. В. Солонуха
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: `solonukha@yandex.ru`

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563
EDN: EANPTD

Nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic type and their applications to nonlocal problems

O. V. Solonukha

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this survey, we study boundary-value problems for nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic types, as well as related nonlinear equations with nonlocal boundary conditions. The main feature of the equations under consideration is that the difference operator is located in the principal part of the nonlinear operator containing higher-order derivatives.

Keywords: nonlinear differential-difference equations, nonlocal boundary conditions, shift in spatial variables, elliptic equation, parabolic equation, initial-boundary value problem, periodic solutions, pseudomonotone operator, operator with semi-bounded variation, ellipticity condition, strong ellipticity condition.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115) in Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University).

For citation: O. V. Solonukha, "Nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic type and their applications to nonlocal problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 3, 445–563. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563

REFERENCES

1. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Zadacha Bitsadze—Samarskogo dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti" [Bitsadze–Samarsky problem for a parabolic system on a plane], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2016, **471**, No. 5, 517–519 (in Russian).
2. R. Bellman and K. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Theory of Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh zadach" [On some simple generalizations of linear elliptic problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
4. M. M. Vaynberg, *Variatsionnyy metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineynykh uravneniy* [Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
5. A. D. Venttsel', "O granichnykh usloviyakh dlya mnogomernykh diffuzionnykh protsessov" [On boundary conditions for multidimensional diffusion processes], *Teor. ver. i ee primen.* [Theory Probab. Appl.], 1959, **4**, No. 2, 172–185 (in Russian).
6. M. I. Vishik, "Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy" [On general boundary-value problems for elliptic differential equations], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1952, **1**, 187–264 (in Russian).
7. M. I. Vishik, "O razreshimosti pervoy kraevoy zadachi dlya nelineynykh ellipticheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy" [On the solvability of the first boundary-value problem for nonlinear elliptic systems of differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1960, **134**, No. 4, 749–752 (in Russian).

8. M. I. Vishik, “O razreshimosti kraevykh zadach dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy vysshikh poryadkov” [On the solvability of boundary-value problems for higher-order quasilinear parabolic equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **59**, 289–325 (in Russian).
9. M. I. Vishik and O. A. Ladyzhenskaya, “Kraevye zadachi dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh i nekotorykh klassov operatornykh uravneniy” [Boundary value problems for partial differential equations and some classes of operator equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1956, **11**, No. 6, 41–97 (in Russian).
10. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, “Ob asimptoticheskikh svoystvakh resheniy funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy neytral’nogo tipa” [On asymptotic properties of solutions of functional differential equations of neutral type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **15**, 112–125 (in Russian).
11. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, “Funktsional’no-differentsial’nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral’noy teorii” [Functional-differential equations in Sobolev spaces and related problems of spectral theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **30**, 3–173 (in Russian).
12. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Cpektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
13. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Spektral’nyy analiz i korrektnaya razreshimost’ abstraktnykh integrodifferentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65 (in Russian).
14. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Issledovanie operatornykh modeley, voznikayushchikh v zadachakh nasledstvennoy mekhaniki” [Analysis of operator models arising in problems of hereditary mechanics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 43–61 (in Russian).
15. H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias, *Nelineynye operatornye uravneniya i operatorno-differentsial’nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator-Differential Equations], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
16. F. R. Gantmacher, *Teoriya matrits* [Matrix Theory], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
17. P. L. Gurevich, “Ellipticheskie zadachi s nelokal’nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera” [Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173 (in Russian).
18. A. K. Gushchin and V. P. Mikhaylov, “O razreshimosti nelokal’nykh zadach dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka” [On the solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 4, 121–160 (in Russian).
19. Yu. A. Dubinskii, “Kvazilineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya lyubogo poryadka” [Quasilinear elliptic and parabolic equations of any order], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1968, **23**, No. 1, 45–90 (in Russian).
20. Yu. A. Dubinskii, “Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya” [Nonlinear elliptic and parabolic equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1976, **9**, 5–130 (in Russian).
21. N. V. Zhitarashu and S. D. Eidelman, “Nelokal’nye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy” [Nonlocal boundary-value problems for elliptic equations], *Mat. issl.* [Math. Stud.], 1971, **6**, No. 2, 63–73 (in Russian).
22. V. A. Il’in and E. I. Moiseev, “Nelokal’naya kraevaya zadacha vtorogo roda dlya operatora Shturma—Liuvillya” [Nonlocal boundary-value problem of the second kind for the Sturm–Liouville operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 8, 1422–1431 (in Russian).
23. E. P. Ivanova, “Metody issledovaniya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami argumentov” [Methods for studying differential-difference equations with incommensurate shifts of arguments], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 44–52 (in Russian).
24. V. I. Ivanenko and V. S. Mel’nik, *Variatsionnye metody v zadachakh upravleniya dlya sistem s raspredelennymi parametrami* [Variational Methods in Control Problems for Systems with Distributed Parameters], Naukova dumka, Kiev, 1988 (in Russian).
25. K. Yoshida, *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
26. V. M. Kadets, *Kurs funktsional’nogo analiza* [Functional Analysis Course], KhNU, Khar’kov, 2004 (in Russian).

27. R. I. Kachurovskii, “O monotonnykh operatorakh m vypuklykh funktsionalakh” [On monotone operators and convex functionals], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1960, **15**, No. 4, 213–215 (in Russian).
28. K. Yu. Kishkis, “K teorii nelokal’nykh zadach dlya uravneniya Laplasa” [To the theory of nonlocal problems for the Laplace equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 59–64 (in Russian).
29. M. A. Krasnosel’skii, *Topologicheskie metody v teorii nelineynykh integral’nykh uravneniy* [Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
30. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
31. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural’tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
32. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, “Smeshannye zadachi dlya sil’no ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy v tsilindre” [Mixed problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 693–716 (in Russian).
33. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Nonlinear Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
34. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
35. L. A. Lyusternik and V. I. Sobolev, *Elementy funktsional’nogo analiza* [Elements of Functional Analysis], GITTL, Moscow, 1951 (in Russian).
36. V. S. Mel’nik and M. Z. Zgupovskii, *Nelineynyy analiz i uppavlenie beskonechnomepnymi sistemami* [Nonlinear Analysis and Control of Infinite-Dimensional Systems], Naukova dumka, Kiev, 1999 (in Russian).
37. E. I. Moiseev, “Ob otsutstvii svoystva bazisnosti u sistemy kornevykh funktsiy odnoy nelokal’noy kraevoy zadachi” [On the absence of the basis property in a system of root functions of one nonlocal boundary-value problem], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1994, **30**, No. 12, 2082–2093 (in Russian).
38. A. B. Muravnik, “Ob asimptotike resheniy nekotorykh parabolicheskikh uravneniy s nelokal’nymi starshimi chlenami” [On the asymptotics of solutions of some parabolic equations with nonlocal higher-order terms], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2006, **25**, 143–183 (in Russian).
39. A. B. Muravnik, “Funktsional’no-differentsial’nye parabolicheskie uravneniya: integral’nye predstavleniya i kachestvennye svoystva zadachi Koshi” [Functional-differential parabolic equations: integral representations and qualitative properties of the Cauchy problem], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–143 (in Russian).
40. A. B. Muravnik, “O zadache Dirikhle v poluploskosti dlya differentsial’no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy” [On the Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations in a half-plane], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **60**, 102–113 (in Russian).
41. A. D. Myshkis, “O nekotorykh problemakh teorii differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom” [On some problems in the theory of differential equations with deviating argument], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1977, **32**, No. 2, 173–202 (in Russian).
42. A. D. Myshkis, “Smeshannye funktsional’no-differentsial’nye uravneniya” [Mixed functional differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2003, **4**, 5–120 (in Russian).
43. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Differentsial’nye uravneniya so smeshchennymi argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruemogo tela” [Differential equations with shifted arguments in stationary problems of mechanics of a deformable body], *Sovet. prikl. mekh.* [Soviet. Appl. Mech.], 1979, **15**, 391–397 (in Russian).
44. B. P. Paneah, “O nekotorykh nelokal’nykh kraevykh zadachakh dlya lineynykh differentsial’nykh operatorov” [On some nonlocal boundary-value problems for linear differential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1984, **35**, No. 3, 425–434 (in Russian).
45. V. V. Pod"yapol’skii and A. L. Skubachevskii, “Spektral’naya asimptotika sil’no ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov” [Spectral asymptotics of strongly elliptic differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 6, 793–800 (in Russian).
46. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, “Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem” [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142 (in Russian).
47. S. I. Pohozaev, “O razreshimosti nelineynykh uravneniy s nechetnymi operatorami” [On the solvability of nonlinear equations with odd operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1967, **1**, No. 3, 66–73 (in Russian).

48. S. I. Pohozaev and Yu. A. Dubinskii, “Ob odnom klasse operatorov i razreshimosti kvazilineynykh differentsial’nykh uravneniy” [On one class of operators and solvability of quasilinear differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1967, **72**, No. 2, 226–236 (in Russian).
49. V. S. Rabinovich, “O differentsial’no-raznostnykh uravneniyakh v poluprostranstve” [On differential-difference equations in half-space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 11, 2030–2038 (in Russian).
50. V. S. Rabinovich, “O zadache Koshi dlya parabolicheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov s peremennymi koeffitsientami” [On the Cauchy problem for parabolic differential-difference operators with variable coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1983, **19**, No. 6, 1032–1038 (in Russian).
51. A. V. Razgulin and T. E. Romanenko, “Vrashchayushchiesya volny v parabolicheskom funktsional’no-differentsial’nom uravnenii s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniem” [Rotating waves in a parabolic functional differential equation with rotation of the spatial argument and delay], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2013, **53**, No. 11, 1804–1821 (in Russian).
52. Ya. A. Roitberg and Z. G. Sheftel, “Nelokal’nye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy i sistem” [Nonlocal problems for elliptic equations and systems], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1972, **13**, No. 1, 165–181 (in Russian).
53. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
54. L. E. Rossovskii and A. R. Hanalyev, “Koertsitivnaya razreshimost’ nelokal’nykh kraevykh zadach dlya parabolicheskikh uravneniy” [Coercive solvability of nonlocal boundary-value problems for parabolic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 140–151 (in Russian).
55. A. A. Samarskii, “O nekotorykh problemakh teorii differentsial’nykh uravneniy” [On some problems of the theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 1, 1925–1935 (in Russian).
56. A. M. Selitskii, “Tret’ya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The third boundary-value problem for parabolic differential-difference equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 114–132 (in Russian).
57. I. V. Skrypnik, *Metody issledovaniya nelineynykh ellipticheskikh granichnykh zadach* [Methods for Studying Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).
58. A. L. Skubachevskii, “Gladkost’ obobshchennykh resheniy pervoy kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [Smoothness of generalized solutions of the first boundary-value problem for an elliptic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **34**, No. 1, 105–112 (in Russian).
59. A. L. Skubachevskii, “Ellipticheskie zadachi s nelokal’nymi usloviyami vblizi granitsy” [Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1986, **129**, No. 2, 279–302 (in Russian).
60. A. L. Skubachevskii, “O nekotorykh zadachakh dlya mnogomernykh diffuzionnykh protsessov” [On some problems for multidimensional diffusion processes], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **307**, No. 2, 287–291 (in Russian).
61. A. L. Skubachevskii, “O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh nelokal’nykh kraevykh zadach” [On eigenvalues and eigenfunctions of some nonlocal boundary value problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 127–136 (in Russian).
62. A. L. Skubachevskii, “Model’nye nelokal’nye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v dvugrannykh uglakh” [Model nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 1, 120–131 (in Russian).
63. A. L. Skubachevskii, “O metode srezayushchikh funktsiy v teorii nelokal’nykh zadach” [On the method of cut-off functions in the theory of nonlocal problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 1, 128–139 (in Russian).
64. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami” [Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurate shifts], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1992, **324**, No. 6, 1155–1158 (in Russian).
65. A. L. Skubachevskii, “O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy” [On some properties of elliptic and parabolic functional differential equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1996, **51**, No. 1, 169–170 (in Russian).
66. A. L. Skubachevskii, “O bifurkatsii Khopfa dlya kvazilineynogo parabolicheskogo funktsional’no-differentsial’nogo uravneniya” [On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional differential equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 10, 1394–1401 (in Russian).

67. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
68. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. II” [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
69. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
70. A. L. Skubachevskii and A. M. Selitskii, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The second boundary-value problem for a parabolic differential-difference equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2007, **62**, No. 1, 207–208 (in Russian).
71. A. L. Skubachevskii and R. V. Shamin, “Pervaya smeshannaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The first mixed problem for a parabolic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 1, 145–153 (in Russian).
72. S. L. Sobolev, *Nekotorye primeneniya funktsional’nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
73. A. P. Soldatov, “Zadacha Bitsadze—Samarskogo dlya funktsiy, analiticheskikh po Duglisu” [Bitsadze–Samarsky problem for functions analytic in the sense of Douglis], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 3, 396–407 (in Russian).
74. O. V. Solonukha, “O nelineynoy parabolicheskoy zadache s prepyatstviem” [On a nonlinear parabolic problem with an obstacle], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2004, **59**, No. 3, 181-182 (in Russian).
75. O. V. Solonukha, “O sushchestvovanii resheniy nelineynykh parabolicheskikh variatsionnykh neravenstv s odnostoronnimi ogranicheniyami” [On the existence of solutions to nonlinear parabolic variational inequalities with one-sided restrictions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **77**, No. 3, 460–476 (in Russian).
76. O. V. Solonukha, “Ob odnom klasse sushchestvenno nelineynykh ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [On one class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 226–244 (in Russian).
77. O. V. Solonukha, “Ob odnoy nelineynoy nelokal’noy zadache ellipticheskogo tipa” [On one nonlinear nonlocal problem of elliptic type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 60–72 (in Russian).
78. O. V. Solonukha, “Ob odnom ellipticheskom differentsial’no-raznostnom uravnenii s nesimmetrichnym operatorom sdvigov” [On an elliptic differential-difference equation with an asymmetric shift operator], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **104**, No. 4, 604–620 (in Russian).
79. O. V. Solonukha, “Obobshchennye resheniya kvazilineynykh ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [Generalized solutions of quasilinear elliptic differential-difference equations], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2020, **60**, No. 12, 2085–2097 (in Russian).
80. O. V. Solonukha, “O razreshimosti lineynoy parabolicheskoy zadachi s nelokal’nymi kraevymi usloviyami” [On solvability of a linear parabolic problem with nonlocal boundary conditions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 2, 349–362 (in Russian).
81. O. V. Solonukha, “O periodicheskikh resheniyakh parabolicheskikh kvazilineynykh uravneniy s kraevymi usloviyami tipa Bitsadze—Samarskogo” [On periodic solutions of parabolic quasilinear equations with boundary conditions of Bitsadze–Samarsky type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2022, **503**, 83–86 (in Russian).
82. O. V. Solonukha, “O razreshimosti nelineynykh parabolicheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy so sdvigami po prostranstvennym peremennym” [On the solvability of nonlinear parabolic functional differential equations with shifts in spatial variables], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 5, 757–773 (in Russian).
83. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Rasshirenie algebry psevdodifferentsial’nykh operatorov i nekotorye nelokal’nye ellipticheskie zadachi” [Extension of the algebra of pseudodifferential operators and some nonlocal elliptic problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 3, 117–160 (in Russian).
84. Ya. D. Tamarkin, *O nekotorykh obshchikh zadachakh teorii obyknovennykh lineynykh differentsial’nykh uravneniy i o razlozhenii proizvol’nykh funktsiy v ryady* [On Some General Problems in the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and on the Series Expansion of Arbitrary Functions], M. P. Frolova typography, Petrograd, 1917 (in Russian).
85. J. Hale, *Teoriya funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
86. W. G. Bade and R. S. Freeman, “Closed extensions of the Laplace operator determined by a general class of boundary conditions,” *Pacific J. Math.*, 1962, **12**, No. 2, 395–410.
87. R. Beals, “Nonlocal elliptic boundary value problems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1964, **70**, No. 5, 693–696.

88. H. Brézis, “Équations et inéqutions non linéares dans les espaces vectoriels en dualité,” *Ann. Inst. Fourier*, 1968, **18**, 115–175.
89. F. Browder, “Non-local elliptic boundary value problems,” *Am. J Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
90. F. E. Browder and P. Hess, “Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces,” *J. Funct. Anal.*, 1972, **11**, No. 2, 251–294.
91. P. Hartman and G. Stampacchia, “On some nonlinear elliptic differential functional equations,” *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–310.
92. G. Grubb, “A characterization of the non-local boundary value problems assosiated with elliptic operator,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1968, **22**, No. 3, 425–513.
93. Z. Guan, A. G. Kartsatos, and I. V. Skrypnik, “Ranges of densely defined generalized psuedomonotone pertubations of maximal monotone operators,” *J. Differ. Equ.*, 2003, **188**, 332–351.
94. W. Feller, “The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations,” *Ann. Math.*, 1952, **55**, 468–519.
95. W. Feller, “Diffusion processes in one dimension,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1954, **77**, 1–30.
96. A. G. Kartsatos and I. V. Skrypnik, “On the eigenvalue problems for pertubed nonlinear maximal monotone operators in reflexive Banach spaces,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2006, **358**, No. 9, 3851–3881.
97. G. J. Minty, “Monotone (non-linear) operator in Hilbert space,” *Duke Math. J.*, 1962, **29**, 341–346.
98. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
99. M. Picone, “I teoremi d’esistenza per gl’ integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni,” *Rom. Acc. L. Rend.*, 1908, **17**, No. 1, 340–347.
100. M. Picone, “Equazione integrale traducente il piu generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine,” *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend.*, 1932, **15**, 942–948.
101. A. V. Razgulin, “Rotational multi-petal waves in optical systems with 2-D feedback,” *Chaos in Optics. Proceedings SPIE*, 1993, **2039**, 342–352.
102. K. Sato and T. Ueno, “Multi-dimentional diffusion and the Markov process on the boundary,” *J. Math. Kyoto Univ.*, 1965, **4**, 295–298.
103. M. Schechter, “Nonlocal elliptic boundary value problems,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1966, **20**, No. 2, 421–441.
104. A. L. Skubachevskii, “The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations,” *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, 332–361.
105. A. L. Skubachevskii, “On the stability of index of nonlocal elliptic problems,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, **160**, No. 2, 323–341.
106. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
107. A. L. Skubachevskii, “Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics,” *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, 261–278.
108. O. V. Solonukha, “On nonlinear and quasilinear elliptic functional differential equations,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, No. 3, 847–868.
109. O. V. Solonukha, “The criteria of accretivity of differential operators described by the 2×2 matrices and its applications,” In: *XXVIII Cremean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolution Problems (KROMSh-2017). Abstracts*, DIAYPI, Simferopol, 2017, pp. 124–128.
110. O. V. Solonukha, “The first Boundary Value Problem for Quasilinear Parabolic Differential-Difference Equations,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1067–1077.
111. O. V. Solonukha, “On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions,” *Тавр. вестн. инф. и мат.*, 2021, **51**, No. 2, 7–11.
112. O. V. Solonukha, “On nonlinear nonlocal parabolic problem,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2022, **29**, No. 1, 121–140.
113. A. Sommerfeld, “Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen,” In: *Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). III*, Reale Accad. Lincei, Roma, 1909, pp. 116–124.
114. K. Taira, *Diffusion Processes and Partial Differential Equations*, Academic Press, N.Y.–London, 1988.

O. V. Solonukha
Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: `solonukha@yandex.ru`