Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 3 (2023). С. 430–444
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.927.2
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444
EDN: FKQFNA

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ—ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Э. И. Махмуд

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В статье решена задача неоднородного одномерного дробного дифференциального уравнения реакции—диффузии с переменными коэффициентами (1.1)-(1.2) методом разделения переменных (метод Фурье). Производная Капуто и производная Римана—Лиувилля рассматриваются во временном и пространственном направлениях соответственно. Приведено доказательство того, что найденное решение краевой задачи удовлетворяет заданным краевым условиям, и обсуждается сходимость рядов, определяющих предложенное решение.

Ключевые слова: уравнение реакции—диффузии, адвективная диффузия, краевая задача, дробная производная, производная Капуто, производная Римана—Лиувилля, метод разделения переменных, метод Фурье.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Э. И. Махмуд*. Аналитическое решение пространственно-временного дробного уравнения реакции—диффузии с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 3. С. 430–444. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444

1. Постановка задачи для уравнения дробной реакции—диффузии

В области $\Omega = [0,1] \times [0,T]$, $T < \infty$, рассмотрим следующую модель адвективной диффузии с переменными коэффициентом диффузии

$$ {}^{C}D_t^{\alpha} w(x,t) = -D_x^{\beta}(A(x)w(x,t)) + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t), \qquad 0 < \alpha, \quad \beta < 1, \tag{1.1}$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \Phi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ w(0,t) &= w(1,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь:

- $A(x) = x^{\beta}$ — пространственный непостоянный коэффициент диффузии;
- $g(x,t)$ — источник;

- $D_x^\beta w(x,t)$ — дробная производная Римана—Лиувилля, которая определяется в виде

$$D_x^\beta w(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-\nu)^{-\beta} w(\nu,t) d\nu, \quad 0 < \beta < 1; \tag{1.3}$$

- ${}^C D_t^\alpha w(x,t)$ — дробная производная Капуто, которая определяется в виде

$${}^C D_t^\alpha w(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \frac{dw(x,\xi)}{d\xi} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1.4}$$

Многие авторы исследовали уравнение адвективной диффузии дробного порядка [2, 3, 5, 8, 10, 11], которое возникает при описании физических процессов (например, стохастического переноса при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде). Мы решаем первую краевую задачу для уравнения (1.1) методом разделения переменных (метод Фурье). Производная Капуто и производная Римана—Лиувилля рассматриваются во временном и пространственном направлениях соответственно. Приведено доказательство того, что найденное решение краевой задачи удовлетворяет заданным краевым условиям.

2. Предварительные сведения

Определение 2.1 (см. [10, с. 3])**.** Для $\beta \in \mathbb{R}$ определим пространство *непрерывных функций со степенным весом*

$$C_\beta[0,\infty) = \big\{\Psi(x) : [0,\infty) \to \mathbb{C} \big| \quad \exists q > \beta : x^q \Psi(x) \in C[0,\infty)\big\},$$

с нормой

$$\|\Psi(x)\|_{C_\beta[0,\infty)} = \|x^\beta \Psi(x)\|_{C[0,\infty)} = \sup_x |x^\beta \Psi(x)|.$$

Определение 2.2 (см. [10, с. 3])**.** Говорят, что вещественнозначная функция $\Psi(x)$ *содержится в пространстве* $C_\beta^m[0,\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N} \cup 0$, если $\Psi^{(m)} \in C_\beta[0,\infty)$, т. е.

$$C_\beta^m[0,\infty) = \big\{\Psi(x) : \Psi^{(m)}(x) \in C_\beta[0,\infty)\big\}.$$

Определим пространство функций в области Ω

$$C_{\beta,\alpha}^{m,n}(\Omega) = \big\{w(x,t) : \Omega \to \mathbb{C} \big| w^{(m)}(x,\cdot) \in C_\beta[0,1], w^{(n)}(\cdot,t) \in C_\alpha[0,T]\big\}.$$

Определение 2.3 (см. [7])**.** *Функция Миттаг-Леффлера* с двумя параметрами определяется как

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \quad z, \beta \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Функция Миттаг-Леффлера является обобщением экспоненциальной, гиперболической и тригонометрической функций, поскольку $E_{1,1}(z) = e^z$, $E_{2,2}(-z^2) = \sin(z)/z$, $E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$, $E_{2,1}(z^2) = \mathrm{ch}(z)$. Для функций Миттаг-Леффлера справедливы следующие формулы [7, с. 70]:

$$\int\limits_0^t \nu^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\nu^\alpha)(t-\nu)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\mu(t-\nu)^\alpha) d\nu = \tag{2.2}$$

$$= \begin{cases} t^{\alpha+\beta-1} \dfrac{E_{\alpha,\beta}(-\mu t^\alpha) - E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)}{\lambda - \mu}, & \lambda \neq \mu, \\ t^{\alpha+\beta-1} \Big(\dfrac{1}{\alpha} E_{\alpha,\alpha+\beta-1}(-\lambda t^\alpha) + \Big(\dfrac{1-\beta}{\alpha}\Big) E_{\alpha,\alpha+\beta}(-\lambda t^\alpha)\Big) & \lambda = \mu, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^{\rho-1} \tau^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda\tau^\alpha) d\tau = \Gamma(\rho) t^{\rho+\beta-1} E_{\alpha,\beta+\rho}(\lambda t^\alpha), \tag{2.3}$$

$$ {}^C D_t^\alpha E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha), \tag{2.4} $$

$$ \frac{d}{dt} E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha). \tag{2.5} $$

Лемма 2.1 (см. [3]). *Пусть выбраны числа* α, β, θ *так, что* $\alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $\pi\alpha/2 < \theta < \min(\pi, \pi\alpha)$. *Тогда в секторе* $\theta \leqslant |\arg(z)| \leqslant \pi$ *выполнено неравенство*

$$ |E_{\alpha,\beta}(z)| \leqslant \frac{C}{1+|z|}. \tag{2.6} $$

Лемма 2.2 (см. [12, с. 278]). *Пусть для последовательности функций* $g_n, n \in \mathbb{N}$, *определенных на интервале* $[t_1+\varepsilon, t_2]$ *для каждого* $\varepsilon > 0$, *выполняются следующие условия*:

a) *для* $\alpha > 0$ *существуют дробные производные Капуто* ${}^C D_t^\alpha g_n(t)$;

b) *как ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(t)$, *так и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {}^C D_t^\alpha g_n(t)$ *равномерно сходятся.*

Тогда функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ *является* α-*дифференцируемой* (*т. е. для неё существует производная Капуто*), *и выполнено соотношение*

$$ {}^C D_t^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^C D_t^\alpha g_n(t), \quad \alpha > 0, \quad t_1 < t < t_2. \tag{2.7} $$

Лемма 2.3 (см. [12]). *Для* $f_1(t), f_2(t) \in C^1[a,b]$ *выполняется следующее соотношение*:

$$ \frac{d}{dt} \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = f_1(t) f_2(0) + \int\limits_0^t f_1(\tau) \frac{d}{dt} f_2(t-\tau) d\tau. \tag{2.8} $$

3. Основные результаты

Для решения уравнения дробной адвекции—диффузии (1.1) с условиями (1.2) мы используем метод разделения переменных (метод Фурье).

Представим функцию $w(x,t)$ в виде

$$ w(x,t) = W_1(x,t) + W_2(x,t). \tag{3.1} $$

Тогда задачу (1.1)-(1.2) можно разделить на две задачи следующим образом — первая задача:

$$ {}^C D_t^\alpha W_1(x,t) = -D_x^\beta (x^\beta W_1(x,t)) + \frac{\partial^2 W_1(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3.2} $$

с начальным и граничным условиями

$$ \begin{aligned} &W_1(x,0) = \Phi(x), && 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &W_1(0,t) = W_1(1,t) = 0, && 0 \leqslant t \leqslant T; \end{aligned} \tag{3.3} $$

и вторая:

$$ {}^C D_t^\alpha W_2(x,t) = -D_x^\beta (x^\beta W_2(x,t)) + \frac{\partial^2 W_2(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t), \tag{3.4} $$

с начальным и граничным условиями

$$ \begin{aligned} &W_2(x,0) = 0, && 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &W_2(0,t) = W_2(1,t) = 0, && 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{3.5} $$

Как принято при решении подобных задач методом Фурье, сначала рассмотрим вспомогательную задачу. Суть этой вспомогательной задачи заключается в нахождении нетривиального решения уравнения (3.2), удовлетворяющего однородным граничным условиям (3.3). Представим искомое решение $W_1(x,t)$ в виде произведения

$$ W_1(x,t) = X(x)T(t). $$

Отсюда следует

$$\frac{{}^C D_t^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - D_x^\beta(x^\beta X(x))}{X(x)} = -\lambda.$$

Из последних соотношений получим

$$X''(x) - D_x^\beta(x^\beta X(x)) = -\lambda X(x), \quad X(0) = X(1) = 0, \tag{3.6}$$

$${}^C D_t^\alpha T(t) = -\lambda T(t). \tag{3.7}$$

Таким образом, для определения функций $X(x)$ мы получили задачу Штурма—Лиувилля (задачу на собственные значения). Собственные значения и собственные функции описываются в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Собственные функции $X_n(x)$ задачи Штурма—Лиувилля* (3.6), *соответствующие собственным значениям λ_n будут равны*

$$X_n(x) = x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^{s} \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Будем доказывать эту лемму, используя определение дробного дифференцирования Римана—Лиувилля (1.3) и интегрирование уравнения (3.6). Получим

$$\int_0^x X''(x)dx + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\nu^\beta X(\nu)}{(x-\nu)^\beta} d\nu = -\lambda \int_0^x X(\nu)d\nu;$$

$$X'(x) - X'(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{\nu^\beta X(\nu)}{(x-\nu)^\beta} d\nu = -\lambda \int_0^x X(\nu)d\nu.$$

Затем снова интегрируем по x:

$$X(x) - X(0) - xX'(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \int_0^\nu \frac{\xi^\beta X(\xi)}{(\nu-\xi)^\beta} d\xi d\nu = -\lambda \int_0^x \int_0^\nu X(\xi) d\xi d\nu.$$

Повторный интеграл в левой части равенства равен

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \int_0^\nu \frac{\xi^\beta X(\xi)}{(\nu-\xi)^\beta} d\xi d\nu = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \nu^\beta X(\nu) \int_\nu^x \frac{1}{(\nu-\xi)^\beta} d\xi d\nu = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^x \nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta} X(\nu) d\nu.$$

Используя формулу Коши для повторного интегрирования, получим

$$\int_0^x \int_0^\nu X(\xi) d\xi d\nu = \int_0^x (x-\nu) X(\nu) d\nu.$$

Таким образом, в силу начальных условий (3.6) и условия $X'(0) = 1$, получаем, что задача Штурма—Лиувилля (3.6) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма

$$X(x) = x + \int_0^x \Big(\frac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu) \Big) X(\nu) d\nu. \tag{3.9}$$

С помощью метода последовательных приближений решение уравнения (3.9) представим в виде

$$X(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \overline{X}_s,$$

где

$$\overline{X}_s(x) = \int_0^x \Big(\frac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu) \Big) \overline{X}_{s-1}(\nu) d\nu, \quad s \geqslant 1.$$

Пусть $\overline{X}_0 = x$ и

$$\overline{X}_1(x) = \int\limits_0^x \Big(\frac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu)\Big)\overline{X}_0(\nu)d\nu =$$

$$= \int\limits_0^x \Big(\frac{\nu^{\beta+1} (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda\nu(x-\nu)\Big)d\nu = x^3\frac{\Gamma(2+\beta)-\lambda}{\Gamma(4)},$$

$$\overline{X}_2(x) = \int\limits_0^x \Big(\frac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu)\Big)\overline{X}_1(\nu)d\nu =$$

$$= \frac{\Gamma(2+\beta)-\lambda}{\Gamma(4)}\int\limits_0^x \Big(\frac{\nu^{\beta+3} (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda\nu^3(x-\nu)\Big)d\nu =$$

$$= x^5\Big(\frac{\Gamma(2+\beta)-\lambda}{\Gamma(4)}\Big)\Big(\frac{\Gamma(4+\beta)-\lambda\Gamma(4)}{\Gamma(6)}\Big),$$

$$\vdots$$

$$\overline{X}_s(x) = x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta)-\lambda\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}.$$

Отсюда следует, что

$$X(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\overline{X}_s = x + \sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta)-\lambda\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)},$$

тогда мы можем получить собственную функцию $X_n(x)$ задачи Штурма—Лиувилля (3.6), соответствующую собственному значению λ_n:

$$X_n(x) = x + \sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta)-\lambda_n\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}.$$

□

Лемма 3.2. *Все собственные значения λ_n задачи Штурма—Лиувилля* (3.6) *положительны при $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ и представляют собой нули следующей функции:*

$$\omega(\lambda) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta)-\lambda\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)} = 0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Используем эквивалентное интегральное уравнение (3.9) для задачи (3.6) и обозначим

$$\mathbb{K}(x,\nu) = \begin{cases} \dfrac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu), & 0 \leqslant \nu < x < 1,\\ 0, & 0 < x < \nu \leqslant 1.\end{cases}$$

Можно легко получить резольвентное ядро уравнения (3.9), задав последовательность ядер $\{\mathbb{K}_n(x,\nu)\}_{n=1}^{\infty}$ с помощью рекуррентных равенств

$$\mathbb{K}_1(x,\nu) = \mathbb{K}(x,\nu),$$

$$\mathbb{K}_{n+1}(x,\nu) = \int\limits_\nu^x \mathbb{K}_n(x,\xi)\mathbb{K}(\xi,\nu)d\xi.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\mathbb{K}_2(x,\nu) = \int\limits_\nu^x \mathbb{K}_1(x,\xi)\mathbb{K}(\xi,\nu)d\xi = \int\limits_\nu^x \Big(\frac{\xi^\beta (x-\xi)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\xi)\Big)\Big(\frac{\nu^\beta (\xi-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(\xi-\nu)\Big)d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(4-\beta)}\nu^{\beta}(x-\nu)^{3-\beta} - \lambda\Big(\frac{1-\beta}{\Gamma(4-\beta)}\nu^{\beta}(x-\nu)^{3-\beta} + \frac{(1-\beta)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(4)}(x-\nu)^3\Big) + \lambda^2\Big(\frac{1}{\Gamma(4)}(x-\nu)^3\Big).$$

Индукцией по n получаем

$$\mathbb{K}_{n+1}(x,\nu) = \mathcal{F}_{0,n+1}(x,\nu) - \lambda\mathcal{F}_{1,n+1}(x,\nu) + \lambda^2\mathcal{F}_{2,n+1}(x,\nu) - \dots + (-1)^{n+1}\lambda^{n+1}\mathcal{F}_{n+1,n+1}(x,\nu).$$

Элементарные вычисления показывают, что $\mathcal{F}_{i,n+1}(x,\nu) > 0$ для любого $i > 0$ при $x > \nu$. Отсюда для резольвенты уравнения (3.9) имеем формулу

$$R(x,\nu,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{K}_{n+1}(x,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{0,n+1}(x,\nu) - \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{1,n+1}(x,\nu) + \lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{2,n+1}(x,\nu) - \dots + (-1)^i\lambda^i\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{i,n+1}(x,\nu) + \dots .$$

Решение интегрального уравнения (3.9) представим в виде

$$X(x) = x + \int_0^x R(x,\nu,\lambda)\nu d\nu = x + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \mathcal{F}_{0,n+1}(x,\nu)\nu d\nu - \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \mathcal{F}_{1,n+1}(x,\nu)\nu d\nu + \lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \mathcal{F}_{2,n+1}(x,\nu)\nu d\nu - \dots + (-1)^i\lambda^i\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \mathcal{F}_{i,n+1}(x,\nu)\nu d\nu + \dots . \quad (3.11)$$

Получаем, что

$$X(1) = 1 + \widetilde{\mathcal{F}}_0 - \lambda\widetilde{\mathcal{F}}_1 + \lambda^2\widetilde{\mathcal{F}}_2 - \dots + (-1)^i\lambda^i\widetilde{\mathcal{F}}_i + \dots = 0, \quad (3.12)$$

где $\widetilde{\mathcal{F}}_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 \mathcal{F}_{i,n+1}(1,\nu)\nu d\nu > 0$ для $\forall i > 0$.

По правилу знака Декарта [6] количество положительных корней полинома меньше или равно количеству перемен знаков между последовательными (ненулевыми) коэффициентами. Все коэффициенты λ в (3.12) ненулевые, чередуются по знаку. Тогда (3.12) не имеет отрицательных корней. Из уравнения (3.8) и граничного условия задачи Штурма—Лиувилля (3.6) следует, что собственное значение является нулём функции

$$\omega(\lambda) = X_n(1) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}.$$

□

Лемма 3.3. *Последовательность собственных функций* $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *задачи Штурма—Лиувилля* (3.6) *сходится в пространстве* $L_2[0,1]$, *то есть удовлетворяет соотношению* $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x}|X_n(x)| \to 0$.

Доказательство. Из отношений (3.8) для $0 < x \leqslant 1$ получим

$$|X_n(x)| \leqslant \Big|x + \sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta)-\lambda_n\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}\Big| \leqslant \Big|x + \sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k)(1-\lambda_n)}{\Gamma(2k+2)}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|x + \sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{(1-\lambda_n)}{2k(2k+1)}\Big| = \Big|x + \sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\frac{(-1)^s(\lambda_n-1)^s}{\Gamma(2s+2)}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_n-1}}\Big|\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x\sqrt{\lambda_n-1})^{2s+1}}{\Gamma(2s+2)}\Big| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n-1}}\Big|\sin(x\sqrt{\lambda_n-1})\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_n-1}}.$$

Известно из (3.12), леммы 3.2, таб. 1 и [1, теорема 3.2, с. 308], что $\lim\limits_{\beta\to 0}\lambda_n(\beta) = \lambda_n(\beta)|_{\beta=0} = (2\pi n)^2 + 1$ (т. е. $\lambda_n \equiv O(n^2)$). Тогда получаем $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n-1}} \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$, что приводит к $|X_n(x)| \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$. □

Используя лемму 3.3, легко доказать следующую лемму.

Лемма 3.4. *Система собственных функций* $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *задачи Штурма—Лиувилля* (3.6) *полна в* $L_2(0,1)$.

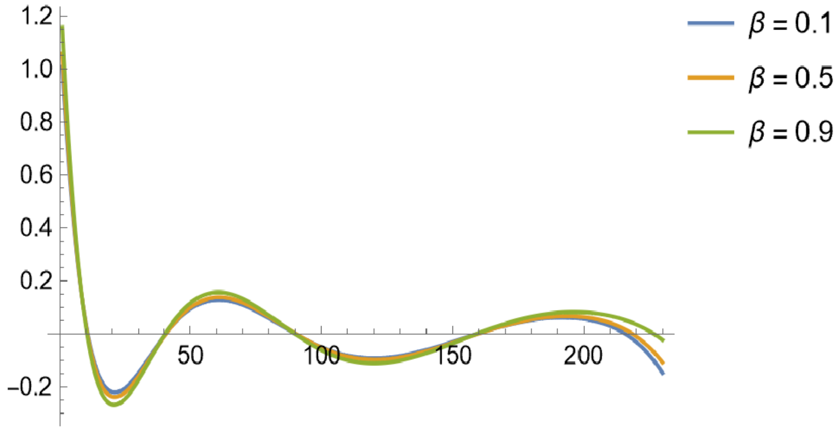


Рис. 1: График функции $\omega(\lambda)$ для $\beta = 0{,}1; 0{,}5; 0{,}9$.

Fig. 1: Graph of the function $\omega(\lambda)$ for $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
10,719	40,667	90,275	159,587	247,917	356,506

Таб. 1: Первые шесть собственных значений уравнения (3.6) при $\beta = 0{,}5$.

Tab. 1: The first six eigenvalues of the equation (3.6) for $\beta = 0.5$.

Система функций $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ является не ортогональной в $L^2(0,1)$. Таким образом, мы создаем систему, которая будет биортогональна системе (3.8).

Рассмотрим оператор

$$K(f(x)) = f''(x) - D_x^{\beta}(x^{\beta} f(x)) \tag{3.13}$$

с областью определения

$$\Omega(K) = \Big\{ f \in L_2(0,1) : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle K(f), X_n(x)\rangle|^2 < \infty \Big\}.$$

Предположим, что оператор $\widetilde{K}$ сопряжен с оператором K (см. [4]) таким образом, что

$$\langle K(f), h\rangle = \langle f, \widetilde{K}(h)\rangle, \quad \forall f, h \in \Omega(K),$$

$\langle f, h\rangle = \int\limits_0^1 f(x)h(x)dx$ — скалярное произведение и

$$\widetilde{K}(h) = h''(x) -_x D_1^{\beta}(x^{\beta} h(x)), \tag{3.14}$$

где

$${}_xD_1^{\beta}(h(x)) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^1 (\nu - x)^{-\beta} h(\nu) d\nu, \quad 0 < \beta < 1.$$

Поэтому мы рассматриваем следующую сопряженную задачу, связанную с задачей (3.6):

$$\widetilde{X}''(x) - D_{1-x}^{\beta}(x^{\beta}\widetilde{X}(x)) = -\lambda \widetilde{X}(x), \quad \widetilde{X}(0) = \widetilde{X}(1) = 0, \ 0 < \beta < 1, \tag{3.15}$$

с соответствующими собственными функциями

$$\widetilde{X}_n(x) = X_n(1-x) = (1-x) + \sum_{s=1}^{\infty}(1-x)^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta)-\lambda_n\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}. \tag{3.16}$$

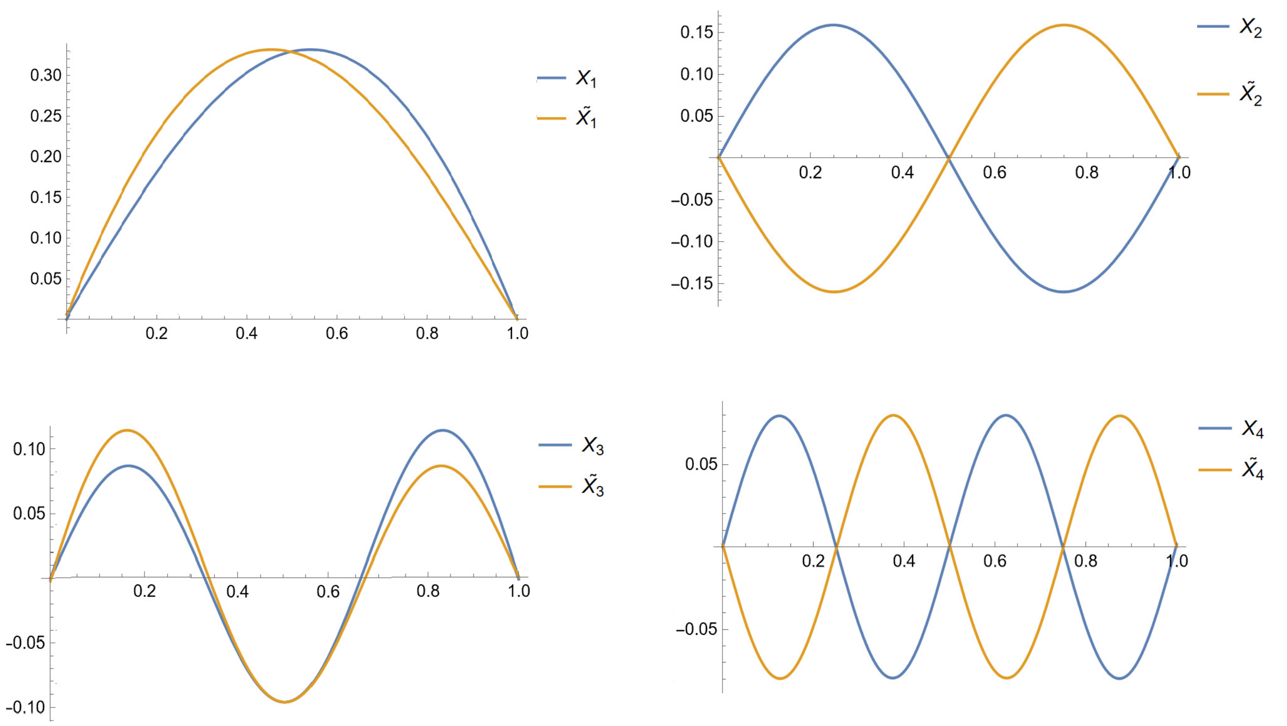


Рис. 2: Графики функций $X_n(x), \widetilde{X}_n(x)$ для $\beta = 0{,}5$.

Fig. 2: Graphs of functions $X_n(x), \widetilde{X}_n(x)$ for $\beta = 0.5$.

Уравнение (3.7) изучено в [9, 10], где показано, что собственные функции выражаются через функции Миттаг-Леффлера как $T_n = \Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})$, а коэффициенты Φ_n можно определить с помощью системы функций $\widetilde{X_n}$:

$$\Phi_n = \frac{\langle \Phi(x), \widetilde{X_n}(x)\rangle}{\langle X_n(x), \widetilde{X_n}(x)\rangle}. \tag{3.17}$$

Пусть функция $\Phi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. Отсюда следует, что $\Phi(x)$ ограничена (т. е. $|\Phi(x)| \leqslant C$). Тогда из ограниченности X_n получаем

$$|\Phi_n| \leqslant C\int_0^1 |\Phi(\nu)X_n(1-\nu)|d\nu \leqslant C^*. \tag{3.18}$$

Если вернуться к вспомогательной задаче (3.2)-(3.3), то видно, что выполнено равенство

$$W_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})\Big)\cdot\left(x + \sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\frac{\Gamma(2k+\beta)-\lambda_n\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}\right). \tag{3.19}$$

Теперь будем искать решение задачи (3.4)-(3.5). Решение этой задачи может быть найдено с использованием полного базиса собственных функций X_n в виде ряда

$$W_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x). \tag{3.20}$$

Также функция $g(x,t)$ может быть разложена с использованием полного базиса собственных функций X_n в виде

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x), \tag{3.21}$$

где коэффициенты $g_n(t)$ можно определить с помощью системы функций $\widetilde{X_n}$:

$$g_n(t) = \frac{\langle g(x,t), \widetilde{X_n}(x)\rangle}{\langle X_n(x), \widetilde{X_n}(x)\rangle}. \tag{3.22}$$

Подставив разложение (3.21) в (3.4), получим задачи

$$\begin{gathered} {}^C D_t^{\alpha} u_n(t) + \lambda_n u_n(t) = g_n(t), \quad 0 < \alpha < 1, \\ u_n(0) = 0. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Применяя преобразование Лапласа L к каждой части уравнения (3.23), мы получаем

$$L(u_n(t)) = \frac{1}{s^{\alpha} + \lambda_n} L(g_n(t)) = L(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} - (\lambda_n t^{\alpha})) L(g_n(t)).$$

Это даёт

$$u_n(t) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) g_n(t-\tau) d\tau.$$

Теперь мы получаем

$$W_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) g_n(t-\tau) d\tau \Big) \cdot \left(x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^{s} \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)} \right). \tag{3.24}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $g(x,t) \in C^{2,1}_{\beta,\alpha}(\Omega), \Phi(x) \in C^2_{\beta}[0,1]$. *Тогда решение* $w(x,t) \in C^{2,1}_{\beta,\alpha}(\Omega)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *существует и может быть представлено в виде ряда*

$$\begin{aligned} w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} &\left(\Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) g_n(t-\tau) d\tau \right) \times \\ &\times \left(x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^{s} \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)} \right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где $\Phi_n, g_n(t)$ — *коэффициенты разложения Фурье функций* $\Phi(x)$, $g(x,t)$, *соответственно, по функциям*

$$\left\{ x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^{s} \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$E_{\alpha,\beta}(z)$ — *функция Миттаг-Леффлера и* λ_n — *собственные значения задачи.*

Доказательство. Из (3.1), (3.19), (3.24) получаем (3.25). □

Теперь (3.25) определяет классическое решение задачи (1.1)-(1.2), а поточечное дифференцирование слагаемых в (3.25) дает формулы бесконечных рядов для производных, которые мы хотим оценить. Эти результаты могут быть получены при соответствующих гипотезах о данных, обеспечивающих сходимость каждого ряда $W_1(x,t), W_2(x,t)$. Подробно обсудим сходимость рядов.

Предположим, что $\Phi(x) \in C^2_{\beta}[0,1]$ и $g(x,t) \in C^{2,1}_{\beta,\alpha}(\Omega)$ для каждого $t \in [\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$, причём $|g(x,t)| \leqslant C_1$ с некоторой константой C_1, не зависящей от t. Рассмотрим сходимость ряда для $W_1(x,t)$ из (3.19). Мы учитываем тот факт, что $|X_n(x)| < C_2$ для любого n. Применяя к (3.18) лемму 2.1, получаем оценку

$$|W_1(x,t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) X_n(x)| \leqslant C C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_n t^{\alpha}} \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n t^{\alpha}} \leqslant C_4, \tag{3.26}$$

где $\lambda_n \geqslant Cn^2, t \in [\varepsilon, T], \varepsilon > 0$. Отсюда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n t^\alpha}$ в $C_\alpha[0,1]$.

Теперь оценим функцию $W_2(x,t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(t-\tau)| \leqslant \frac{1}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 |g(x,t-\tau)X_n(1-x)|dx \leqslant C_5, \quad 0 < \tau < t. \tag{3.27}$$

Пользуясь (3.24), получаем

$$|W_2(x,t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \Big(\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t-\tau)d\tau \Big) X_n(x) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant CC_2 \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Big| g_n(t-\tau) \Big| d\tau \leqslant C_3C_5 \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} d\tau \leqslant C_3C_5T^\alpha \leqslant C_6. \tag{3.28}$$

Таким образом, ряды (3.19) и (3.24) абсолютно и равномерно сходятся на Ω. Из (3.1), (3.26), (3.28), получаем $|w(x,t)| \leqslant C_4 + C_6$ при всех $x \in [0,1], t \in [\varepsilon, T]$.

Покажем, что решение (3.25) является непрерывно дифференцируемой функцией по переменной t на интервале $[\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$ с использованием (2.5) и леммы 2.1:

$$\left| \frac{\partial W_1(x,t)}{\partial t} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Phi_n \left(\frac{d}{dt} E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n t^\alpha\right) \right) X_n(x) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Phi_n \left(-\lambda_n t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_n t^\alpha\right) \right) X_n(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n t^{\alpha-1}}{1+\lambda_n t^\alpha} X_n(x) \right| \leqslant \frac{\widetilde{C}_3}{t} \sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x)| \leqslant \widetilde{C}_4, \qquad \varepsilon < t < T. \tag{3.29}$$

Из равенства (3.24), леммы 2.3, и того факта, что $\dfrac{\partial}{\partial t} g(.,t) \in C_\alpha[0,T]$, следует, что $\left| \dfrac{\partial}{\partial t} g_n(t) \right| \leqslant C$. Тогда

$$\Big| \frac{\partial W_2(x,t)}{\partial t} \Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \Big(\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t-\tau)d\tau \Big) X_n \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \Big(g_n(0) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \frac{\partial}{\partial t} g_n(t-\tau)d\tau \Big) X_n \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_5 t^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big| X_n \Big(\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \frac{\partial}{\partial t} g_n(t-\tau)d\tau \Big) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_5 t^{\alpha-1} + CC_2 \int\limits_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{\partial}{\partial t} g_n(t-\tau) \Big| d\tau \leqslant \widetilde{C}_5 t^{\alpha-1} + \widetilde{C}_6 t^\alpha \leqslant \frac{\widetilde{C}_7}{t} \leqslant C, \qquad \varepsilon < t < T. \tag{3.30}$$

Комбинируя (3.29) и (3.30), мы видим, что при каждом фиксированном $t \in [\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\partial}{\partial t} w(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно при $(x,t) \in \Omega$ для каждого $\varepsilon > 0$.

Аналогичным образом можно доказать, что частное решение (3.25) дважды дифференцируемо по пространственной переменной и

$$\Big| \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t) \Big| \leqslant M^\star, \quad M^\star = \mathrm{const}, \quad (x,t) \in \Omega. \tag{3.31}$$

Теперь обсудим α-дифференцируемость решения (3.25) по переменной t, используя результат леммы 2.2. Эти результаты могут быть получены при соответствующих гипотезах о данных, обеспечивающих сходимость каждого ряда $W_1(x,t), W_2(x,t)$.

Применим почленно дробную производную порядка α по переменной t к ряду из левой части формулы (3.19) и построим ряд производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n {}^C D_t^{\alpha} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(-\lambda_n) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) X_n(x). \tag{3.32}$$

Затем получим

$$\left|{}^C D_t^{\alpha} W_1(x,t)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|\Phi_n(-\lambda_n) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) X_n\right| \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n t^{\alpha}} X_n(x)\right| \leqslant \frac{\widetilde{C}_3}{t^{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x)| \leqslant \widetilde{C}_8, \qquad \varepsilon < t < T. \tag{3.33}$$

Из равенства (3.24), (1.4), леммы 2.3, и того факта, что ${}^C D_t^{\alpha} g(.,t) \in C_{\alpha}[0,T]$, следует, что $|{}^C D_t^{\alpha} g_n(t)| \leqslant C$. Тогда

$$ {}^C D_t^{\alpha} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) g_n(t-\tau) d\tau =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \Big(\frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) g_n(\xi-\tau) d\tau\Big) d\xi =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \Big(\xi^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \xi^{\alpha}) g_n(0) +$$
$$+ \int_0^{\xi} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) \frac{d}{d\xi} g_n(\xi-\tau) d\tau\Big) d\xi =$$
$$= \frac{-g_n(0)}{\lambda_n} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \frac{d}{d\xi} E_{\alpha,1}(-\lambda_n \xi^{\alpha}) d\xi +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \frac{d}{d\xi} g_n(\xi-\tau) d\xi d\tau =$$
$$= \frac{-g_n(0)}{\lambda_n} {}^C D_t^{\alpha} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) {}^C D_t^{\alpha} g_n(t-\tau) d\tau =$$
$$= g_n(0) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) {}^C D_t^{\alpha} g_n(t-\tau) d\tau. \tag{3.34}$$

С учетом (3.34) и леммы 2.3 для ряда (3.24) получаем:

$$\left|{}^C D_t^{\alpha} W_2(x,t)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(0) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) X_n(x)| +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left| X_n(x) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^{\alpha}) {}^C D_t^{\alpha} g_n(t-\tau) d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}_4 + C\widetilde{C} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left|{}^C D_t^{\alpha} g_n(t-\tau)\right| d\tau \leqslant \widetilde{C}_4 + C\widetilde{C} C_1 \int_0^t \tau^{\alpha-1} d\tau \leqslant \widetilde{C}_4 + C\widetilde{C} C_1 T^{\alpha} \leqslant \widetilde{C}_5. \tag{3.35}$$

Комбинируя (3.33) и (3.35), мы видим, что для каждого фиксированного t α-производная ряда (3.25) сходится абсолютно и равномерно при $(x,t) \in [0,1] \times [\varepsilon, T]$ для каждого $\varepsilon > 0$. Поэтому она равна ${}^C D_t^\alpha w(x,t)$ на Ω, и мы получаем

$$\left| {}^C D_t^\alpha w(x,t) \right| \leqslant \widetilde{C}_3 + \widetilde{C}_5 \leqslant \widetilde{M}, \quad \widetilde{M} = \text{const}, \quad (x,t) \in \Omega. \tag{3.36}$$

Доказательство теоремы 3.1 завершено.

4. Примеры

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$${}^C D_t^\alpha w(x,t) = -D_x^\beta (x^\beta w(x,t)) + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + x^{2+\beta} \sin(\pi x) t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha), \qquad 0 < \alpha, \beta < 1, \tag{4.1}$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} w(x,0) &= x^\beta (1-x), \qquad 0 < x < 1, \\ w(0,t) &= w(1,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Если в (1.1)-(1.2) подставить

$$g(x,t) = x^{2+\beta} \sin(\pi x) t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha), \quad \Phi(x) = x^\beta (1-x),$$

то мы получаем (4.1)-(4.2). Поэтому аналитическое решение уравнения (4.1) может быть получено с использованием теоремы 3.1, и

$$\begin{aligned} \langle X_n(x), \widetilde{X}_n(x) \rangle &= \int\limits_0^1 X_n(x) X_n(1-x) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(4)} + \sum_{s=1}^\infty \Big(2B(2s+2,2) \sum_{m=1}^\infty B(2s+2,2m+2) \prod_{l=1}^m \Lambda_l(\lambda_n) \Big) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $B(s,m)$ — бета-функция, $\Lambda_k(\lambda_n) = \dfrac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}$.

$$\langle \Phi(x), \widetilde{X}_n(x) \rangle = \int\limits_0^1 x(1-x) \cdot X_n(1-x) dx = B(3, \beta+1) + \sum_{s=1}^\infty \Big(B(2s+3, \beta+1) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \Big), \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} &\langle g(x,t), \widetilde{X}_n(x) \rangle = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha) \int\limits_0^1 x^{2+\beta} \sin(\pi x) \cdot X_n(1-x) dx = \\ &= t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha) \sum_{l=0}^\infty \frac{\pi^{2l+1}}{\Gamma(2l+2)} \Big(B(2, 2l+\beta+4) + \sum_{s=1}^\infty \Big(B(2s+2, 2l+\beta+4) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \Big) \Big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Из соотношений (3.17), (4.3), (4.4) получаем

$$\Phi_n = \frac{B(3,\beta+1) + \sum\limits_{s=1}^\infty \Big(B(2s+3,\beta+1) \prod\limits_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \Big)}{\frac{1}{\Gamma(4)} + \sum\limits_{s=1}^\infty \Big(2B(2s+2,2) + \sum\limits_{m=1}^\infty B(2s+2,2m+2) \prod\limits_{l=1}^m \Lambda_l(\lambda_n) \Big) \prod\limits_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n)}. \tag{4.6}$$

Обозначим

$$\widetilde{G}_n = \frac{\sum\limits_{l=0}^\infty \frac{\pi^{2l+1}}{\Gamma(2l+2)} \Big(B(2,2l+\beta+4) + \sum\limits_{s=1}^\infty \Big(B(2s+2,2l+\beta+4) \prod\limits_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \Big) \Big)}{\frac{1}{\Gamma(4)} + \sum\limits_{s=1}^\infty \Big(2B(2s+2,2) + \sum\limits_{m=1}^\infty B(2s+2,2m+2) \prod\limits_{l=1}^m \Lambda_l(\lambda_n) \Big) \prod\limits_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n)}. \tag{4.7}$$

Тогда из соотношений (3.22), (4.5), (4.7) получаем

$$g_n(t) = \widetilde{G}_n t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha). \tag{4.8}$$

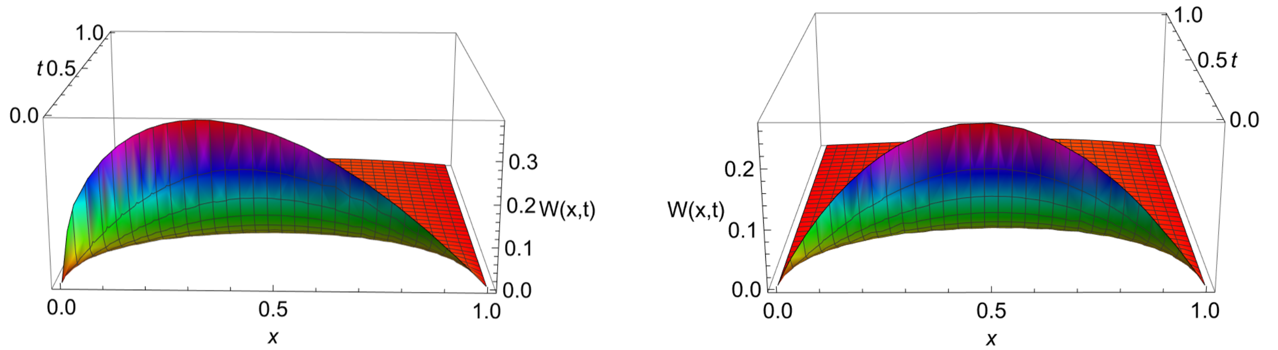
Следовательно, из (2.2), (2.3), (3.25) получаем

$$\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n\tau^{\alpha})g_n(t-\tau)d\tau = \widetilde{G}_n\int\limits_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n\tau^{\alpha})(t-\tau)^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-(t-\tau)^{\alpha})d\tau =$$

$$= \frac{\widetilde{G}_n t^{2\alpha+2}}{\lambda_n-1}\Big(E_{\alpha,\alpha+1}(-t^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^{\alpha})\Big). \quad (4.9)$$

Таким образом, из соотношений (3.25) мы получаем аналитическое решение $w(x,t)$ уравнения (4.1)-(4.2):

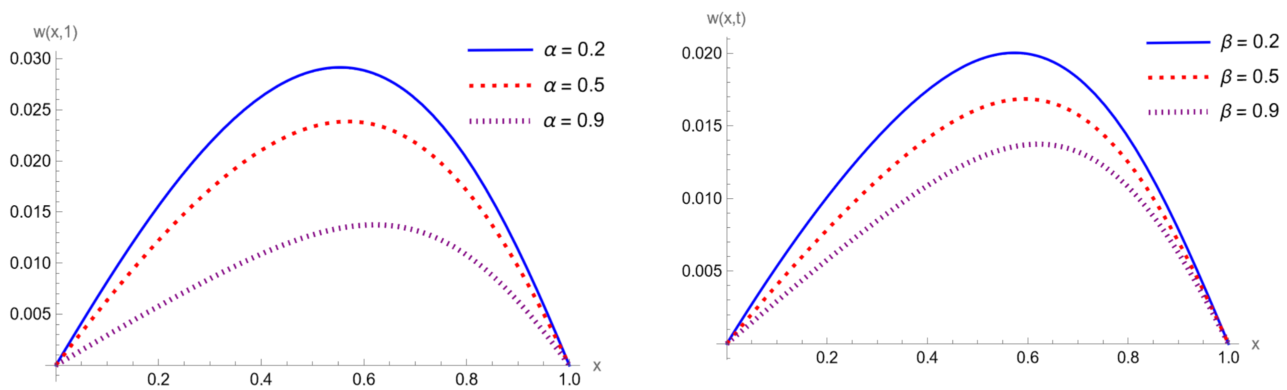
$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})+\frac{\widetilde{G}_n t^{2\alpha+2}}{\lambda_n-1}\Big(E_{\alpha,\alpha+1}(-t^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^{\alpha})\Big)\Big)\Big(x+\sum_{s=1}^{\infty}x^{2s+1}\prod_{k=1}^{s}\Lambda_k(\lambda_n)\Big). \quad (4.10)$$



(а) $\beta = 0{,}5$ (б) $\beta = 0{,}9$

Рис. 3: Решение краевой задачи (4.1)-(4.2) при различных β, $\alpha = 0{,}8$, $T = 1$.

Fig. 3: Solution of the boundary-value problem (4.1)-(4.2) for various β, $\alpha = 0.8$, $T = 1$.



(а) $\alpha = 0{,}2,\ 0{,}5,\ 0{,}9,\ \beta = 0{,}8,\ t = 1$ (б) $\beta = 0{,}1,\ 0{,}5,\ 0{,}9,\ \alpha = 0{,}8,\ t = 1$

Рис. 4: Решение краевой задачи (4.1)-(4.2) при различных β и α, $T = 1$.

Fig. 4: Solution of the boundary-value problem (4.1)-(4.2) for various β and α, $T = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алероев Т. С., Алероева Х. Т.* Об одном классе несамосопряженных операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка// Укр. мат. вісн. — 2015. — *12*, № 3. — С. 293–310.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
3. *Aleroev T. S.* Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables// Mathematics. — 2020. — *8*. — 1877.
4. *Aleroev T. S., Elsayed A. M., Mahmoud E. I.* Solving one dimensional time-space fractional vibration string equation// Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. — 2021. — *1129*. — С. 20–30.
5. *Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition// Electron. J. Differ. Equ. — 2013. — *270*. — С. 1–16.
6. *Curtiss D. R.* Recent extensions of Descartes' rule of signs// Ann. Math. — 1918. — *19*, № 4. — С. 251–278.
7. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler Functions Related Topics and Applications. — New York: Springer, 2014.
8. *Gorenflo R., Mainardi F.* Random walk models for space fractional diffusion processes// Fract. Calc. Appl. Anal. — 1998. — *1*. — С. 167–191.
9. *Hu Z., Liu W., Liu J.* Boundary value problems for fractional differential equations// Tijdschrift voor Urologie. — 2014. — *2014*, № 1. — С. 1–11.
10. *Luchko Y., Gorenflo R.* An operational method for solving fractional differential equations// Acta Math. — 1999. — *24*. — С. 207–234.
11. *Plociniczak L.* Eigenvalue asymptotics for a fractional boundary-value problem// Appl. Math. Comput. — 2014. — *241*. — С. 125–128.
12. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. — New York: Gordon and Breach, 1993.

Э. И. Махмуд
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: ei_abdelgalil@yahoo.com

UDC 517.927.2
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444
EDN: FKQFNA

Analytical solution of the space-time fractional reaction–diffusion equation with variable coefficients

E. I. Mahmoud

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we solve the problem of an inhomogeneous one-dimensional fractional differential reaction–diffusion equation with variable coefficients (1.1)-(1.2) by the method of separation of variables (the Fourier method). The Caputo derivative and the Riemann–Liouville derivative are considered in the time and space directions, respectively. We prove that the obtained solution of the boundary-value problem satisfies the given boundary conditions. We discuss the convergence of the series defining the proposed solution.

Keywords: reaction–diffusion equation, advective diffusion, boundary-value problem, fractional derivative, Caputo derivative, Riemann–Liouville derivative, separation of variables method, Fourier method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: E. I. Mahmoud, "Analytical solution of the space-time fractional reaction–diffusion equation with variable coefficients," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 3, 430–444. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444

REFERENCES

1. T. S. Aleroev and Kh. T. Aleroeva, "Ob odnom klasse nesamosopryazhennykh operatorov, soputstvuyushchikh differentsial'nym uravneniyam drobnogo poryadka" [On a class of non-self-adjoint operators accompanying differential equations of fractional order], *Ukr. mat. visn.* [Ukr. Math. Bull.], 2015, **12**, No. 3, 293–310 (in Russian).
2. A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
3. T. S. Aleroev, "Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables," *Mathematics*, 2020, **8**, 1877.
4. T. S. Aleroev, A. M. Elsayed, and E. I. Mahmoud, "Solving one dimensional time-space fractional vibration string equation," *Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, 2021, **1129**, 20–30.
5. T. S. Aleroev, M. Kirane, and S. A. Malik, "Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2013, **270**, 1–16.
6. D. R. Curtiss, "Recent extensions of Descartes' rule of signs," *Ann. Math.*, 1918, **19**, No. 4, 251–278.
7. R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions Related Topics and Applications*, Springer, New York, 2014.
8. R. Gorenflo and F. Mainardi, "Random walk models for space fractional diffusion processes," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1998, **1**, 167–191.
9. Z. Hu, W. Liu, and J. Liu, "Boundary value problems for fractional differential equations," *Tijdschrift voor Urologie*, 2014, **2014**, No. 1, 1–11.
10. Y. Luchko and R. Gorenflo, "An operational method for solving fractional differential equations," *Acta Math.*, 1999, **24**, 207–234.
11. L. Plociniczak, "Eigenvalue asymptotics for a fractional boundary-value problem," *Appl. Math. Comput.*, 2014, **241**, 125–128.
12. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, New York, 1993.

E. I. Mahmoud
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: ei_abdelgalil@yahoo.com