Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 3 (2023). С. 399–417
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417
EDN: DXHBXR

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н. О. Иванов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается краевая задача со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностного уравнения второго порядка на интервале конечной длины $(0, d)$. Доказано существование обобщенного решения задачи, а также исследованы условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциально-разностные уравнения, обобщенные решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115). Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и внимание к работе, а также благодарность рецензенту за ряд предложений, позволивших улучшить статью. Автор также выражает благодарность В. В. Малыгиной за замечание к моему докладу на международной конференции The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2022), которое привлекло мое внимание к постановке краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями.

Для цитирования: *Н. О. Иванов*. Гладкость обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения второго порядка со смешанными граничными условиями// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 3. С. 399–417. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417

Введение

Функционально-дифференциальные уравнения играют важную роль во многих приложениях, например, в теории систем управления с последействием [1, 2, 6, 7, 12, 13], в теории многомерных пластин и оболочек [11, 17–19], в теории диффузионных процессов [19].

Впервые вопросы существования и гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале рассматривались в работах [3, 4]. Было показано, что гладкость обобщенных решений таких задач может нарушаться на сдвигах концов интервала внутрь интервала даже в случае бесконечно дифференцируемой правой части уравнения и сохраняться лишь на подынтервалах, образующихся выбрасыванием орбит концов этого интервала, порожденных группой целочисленных сдвигов разностного оператора. Условие гладкости обобщенных решений на всем интервале в виде ортогональности правой части уравнения конечному числу линейно независимых функций в пространстве $L_2(0,d)$ в случае первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами получено в работах [5,19]. Аналогичные условия в случае второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале были получены в работах [14,15]. В работах [10,16] исследовались условия на коэффициенты разностного оператора, при которых гладкость обобщенных решений первой и второй краевых задач для дифференциально-разностного уравнения сохраняется при любой правой части. Смешанные задачи для дифференциально-разностных уравнений в цилиндрической области изучались в работах [8,9]. Вопрос о гладкости обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями на конечном интервале в случае переменных коэффициентов ранее не рассматривался.

В настоящей работе исследуется краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с условием первого рода на левом конце интервала $(0,d)$ и условием второго рода на правом, а именно, рассматривается уравнение в дивергентном виде

$$-\left(R_Q u'\right)' = f(t), \quad t \in (0,d), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

$$(R_Q u')(d) = 0, \tag{3}$$

где $f \in L_2(0,d)$, $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$. Оператор R_Q определен по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d),$$

где $I_Q : L_2(0,d) \to L_2(\mathbb{R})$ — оператор продолжения нулем функции из $L_2(0,d)$ в $\mathbb{R} \setminus (0,d)$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,d)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на интервал $(0,d)$, а $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — разностный оператор, определенный по формуле

$$(Ru)(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k(t) u(t+k),$$

где $a_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — комплекснозначные функции. Доказательства свойств оператора R_Q, сформулированных в разделе 1 в виде лемм, можно найти в [19, гл. 1].

В разделе 1 рассматриваются разностные операторы R_Q на интервале $(0,d)$. Раздел 2 посвящен вопросу существования обобщенного решения задачи (1)–(3). В разделах 3, 4 и 5 исследуется гладкость обобщенных решений рассматриваемой задачи на интервалах целой и нецелой длины.

1. Разностные операторы на интервале $(0,d)$

Рассмотрим разбиение интервала $(0,d)$ на подынтервалы, которые образуются выбрасыванием орбит концов интервала $(0,d)$, порождаемых группой целочисленных сдвигов на k, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\theta = 1$, то мы получим один класс непересекающихся подынтервалов

$$Q_{1k} = (k-1, k), \qquad k = 1, \dots, N+1.$$

Если же $0 < \theta < 1$, то мы получим два класса непересекающихся подынтервалов

$$Q_{1k} = (k-1, k-1+\theta), \qquad k = 1, \dots, N+1,$$
$$Q_{2k} = (k-1+\theta, k), \qquad k = 1, \dots, N.$$

Всюду в дальнейшем будем обозначать $N(s) = N+1$ при $s = 1$ и $N(s) = N$ при $s = 2$, где s — номер класса подынтервалов.

Пример 1.1. Пусть $d = \dfrac{11}{5}$. Тогда $N = 2$, $\theta = \dfrac{1}{5}$, а интервал $\left(0, \dfrac{11}{5}\right)$ разбивается на два класса подынтервалов: $Q_{11} = \left(0, \dfrac{1}{5}\right)$, $Q_{12} = \left(1, \dfrac{6}{5}\right)$, $Q_{13} = \left(2, \dfrac{11}{5}\right)$ и $Q_{21} = \left(\dfrac{1}{5}, 1\right)$, $Q_{22} = \left(\dfrac{6}{5}, 2\right)$.

Пример 1.2. Пусть $d = 3$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, при этом $Q_{11} = (0,1)$, $Q_{12} = (1,2)$, $Q_{13} = (2,3)$.

Через $P_s : L_2\,(0,d) \to L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$, $k = 1,\dots,N(s)$, обозначим оператор ортогонального проектирования функций на $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ в пространстве $L_2(0,d)$, где $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$ есть подпространство функций из $L_2(0,d)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_k Q_{sk}$, $k = 1,\dots,N(s)$, $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$.

Очевидно,

$$L_2\,(0,d) = \bigoplus_s L_2\Big(\bigcup_k Q_{sk}\Big).$$

Лемма 1.1. *Операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ и $R_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ ограниченные, при этом*

$$(R^*u)(t) = \sum_{k=-N}^{N} \overline{a_k(t-k)}u(t-k), \quad R^*_Q = P_Q R^* I_Q.$$

Лемма 1.2. *Пространство функций $L_2\Big(\bigcup\limits_k Q_{sk}\Big)$, $k = 1,\dots,N(s)$, есть инвариантное подпространство оператора R_Q, где $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$.*

Рассмотрим изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s : L_2\Big(\bigcup_k Q_{sk}\Big) \to L_2^{N(s)}\left(Q_{s1}\right),$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(t)$ по формуле

$$(U_s u)_k(t) = u(t + k - 1), \quad t \in Q_{sk}, \quad k = 1,\dots,N(s); \tag{1.1}$$

$$L_2^{N(s)}\left(Q_{s1}\right) = \prod_{k=1}^{N(s)} L_2\left(Q_{s1}\right).$$

Через $R_s = R_s(t)$, $t \in \overline{Q}_{s1}$, обозначим матрицу порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r^s_{ij}(t) = a_{j-i}(t + i - 1), \quad t \in \mathbb{R}; \quad i, j = 1,\dots,N(s). \tag{1.2}$$

Другими словами,

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_N(t) \\ a_{-1}(1+t) & a_0(1+t) & \dots & a_{N-1}(1+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-N}(N+t) & a_{-N+1}(N+t) & \dots & a_0(N+t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$R_2(t) = \begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{N-1}(t) \\ a_{-1}(1+t) & a_0(1+t) & \dots & a_{N-2}(1+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-N+1}(N+t-1) & a_{-N+2}(N+t-1) & \dots & a_0(N+t-1) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1.3. *Оператор $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^{N(s)}\left(Q_{s1}\right) \to L_2^{N(s)}\left(Q_{s1}\right)$ является оператором умножения на квадратную матрицу $R_s(t)$, где $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$.*

Лемма 1.4. *Оператор $R_Q + R^*_Q : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрицы $R_s(t) + R^*_s(t)$ положительно определены для всех $t \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $R^*_s(t)$ — эрмитово сопряженные матрицы.*

Определение 1.1. Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение (1) удовлетворяет *условию сильной эллиптичности*, если матрицы $R_s(t) + R^*_s(t)$ положительно определены для всех $t \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$.

Замечание 1.1. Условие сильной эллиптичности для уравнения (1) эквивалентно выполнению неравенства

$$\operatorname{Re}(R_s(t)Y, Y)_{\mathbb{C}^{N(s)}} \geqslant k_0 \|Y\|^2_{\mathbb{C}^{N(s)}} \tag{1.3}$$

для всех $t \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $k_0 > 0$ не зависит от t и Y.

Далее будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Обозначим через $W_2^k(0, d)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(0, d)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(0, d)$. Скалярное произведение для $u, v \in W_2^k(0, d)$ определено по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(0,d)} = \sum_{i=0}^{k} \int_0^d u^{(i)} \overline{v}^{(i)} dt.$$

Лемма 1.5. *Пусть* $\det R_s(t) \neq 0$ *при* $t \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1, 2$, *если* $0 < \theta < 1$. *Тогда оператор* $R_Q : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$ *имеет ограниченный обратный. Пусть, кроме того,* $u \in W_2^k(Q_{si})$, $s = 1, 2$, $i = 1, \dots, N(s)$. *Тогда* $R_Q^{-1} u \in W_2^k(Q_{sj})$, $j = 1, \dots, N(s)$, $s = 1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1, 2$, *если* $0 < \theta < 1$; *при этом*

$$\|R_Q^{-1} u\|_{W_2^k(Q_{sj})} \leqslant k_1 \sum_{i=1}^{N(s)} \|u\|_{W_2^k(Q_{si})},$$

где $k_1 > 0$ *не зависит от* u.

2. Обобщенные решения краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями

Через $W_{2,0}^1(0, d)$ обозначим пространство функций $u \in W_2^1(0, d)$ таких, что $u(0) = 0$. Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(0, d) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(0, d)$ с областью определения

$$D(\mathcal{A}_R) = \left\{ u \in W_{2,0}^1(0, d) : R_Q u' \in W_2^1(0, d) \right\},$$

действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = -(R_Q u')', \qquad u \in D(\mathcal{A}_R).$$

Определение 2.1. Функцию $u \in D(\mathcal{A}_R)$ будем называть *обобщенным решением* задачи (1)–(3), если она удовлетворяет операторному уравнению

$$\mathcal{A}_R u = f. \tag{2.1}$$

Дадим эквивалентное определение.

Определение 2.2. Функцию $u \in W_{2,0}^1(0, d)$ будем называть *обобщенным решением* задачи (1)–(3), если для всех $v \in W_{2,0}^1(0, d)$ выполнено интегральное тождество

$$\left(R_Q u', v' \right)_{L_2(0,d)} = (f, v)_{L_2(0,d)}. \tag{2.2}$$

Определяя эквивалентное скалярное произведение в пространстве $W_{2,0}^1(0, d)$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть выполняется условие* (1.3). *Тогда для любой функции* $f \in L_2(0, d)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in W_{2,0}^1(0, d)$ *задачи* (1)–(3), *при этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^1(0,d)} \leqslant k_2 \|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{2.3}$$

где k_2 — *постоянная, не зависящая от* f.

Следствие 2.1. *Пусть уравнение* (1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда оператор* $\mathcal{A}_R$ *фредгольмов,* $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$ *и* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 0$.

3. Гладкость обобщенных решений на подынтервалах

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (1.3)*. Если* $u \in W_{2,0}^1(0,d)$ *— обобщенное решение задачи* (1)–(3)*, тогда* $u \in W_2^2(Q_{sk})$*, где* $k = 1, \dots, N(s)$*,* $s = 1$*, если* $\theta = 1$*, и* $s = 1, 2$*, если* $0 < \theta < 1$*; при этом*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leqslant k_3 \|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{3.1}$$

где $k_3 > 0$ *не зависит от* f*.*

Доказательство. Зафиксируем число s. Предположим в интегральном тождестве (2.2), что $v \in C_0^\infty(\bigcup\limits_k Q_{sk})$, а также $v(t) = 0$ при $t \notin \bigcup\limits_k Q_{sk}$, если $0 < \theta < 1$. Из (1.1) и леммы 1.3 вытекает, что

$$\int\limits_{Q_{s1}} \left(R_s U_s P_s u', U_s v' \right) dt = \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s P_s f, U_s v \right) dt,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{N(s)}$, а $C_0^\infty(\bigcup\limits_k Q_{sk}) = \{v \in C^\infty(0,d) : v(t) = 0$ при $t \in (0,d) \setminus \bigcup\limits_k Q_{sk}\}$. Тогда вектор-функция

$$U_s P_s u \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1}) = \prod_{j=1}^{N(s)} W_2^1(Q_{s1})$$

является обобщенным решением системы $N(s)$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\left(R_s U_s P_s u' \right)'(t) = \left(U_s P_s f \right)(t), \quad t \in Q_{s1}.$$

Поскольку $U_s P_s f \in L_2^{N(s)}(Q_{s1})$, то $R_s U_s P_s u' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$. По условию элементы матрицы $R_s(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции, а $\det R_s(t) \neq 0$, $t \in \overline{Q}_{s1}$, в силу (1.3). Таким образом, $U_s P_s u' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$ и $U_s P_s u \in W_2^{2,N(s)}(Q_{s1})$, т. е. $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $k = 1, \dots, N(s)$. □

Следствие 3.1. *Пусть выполняется неравенство* (1.3)*, а* $u \in W_{2,0}^1(0,d)$ *— обобщенное решение задачи* (1)–(3)*, где* $f \in L_2(0,d)$*. Тогда уравнение* (1) *удовлетворяется почти всюду на* $(0,d)$*, при этом выполняется краевое условие* (3)*.*

Доказательство.

1. Возьмем произвольную функцию $v \in C_0^\infty(0,d)$ в интегральном тождестве (2.2). Используя определение обобщенной производной в пространстве распределений $D'(0,d)$, получим

$$\left\langle -(R_Q u')', v \right\rangle = (f, v)_{L_2(0,d)}.$$

Так как $f \in L_2(0,d)$, то в силу произвольности выбора $v \in C_0^\infty(0,d)$ имеем

$$-(R_Q u')'(t) = f(t) \tag{3.2}$$

почти всюду на $(0,d)$ и $R_Q u' \in W_2^1(0,d)$.

2. Возьмем теперь произвольную функцию $v \in W_{2,0}^1(0,d)$ в (2.2). Проинтегрировав по частям левую часть тождества (2.2), в силу равенства $v(0) = 0$ получим

$$-\int\limits_0^d (R_Q u')' \overline{v} dt + (R_Q u')(d) \overline{v}(d) = \int\limits_0^d f \overline{v} dt.$$

Тогда из (3.2) следует, что

$$(R_Q u')(d) \overline{v}(d) = 0.$$

В силу произвольности выбора $v \in W_{2,0}^1(0,d)$ из последнего вытекает равенство

$$(R_Q u')(d) = 0.$$

□

Замечание 3.1. Из теоремы 3.1 и следствия 3.1 следует, что

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_R) = \{ & u \in W_{2,0}^1(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(d) = 0, u \in W_2^2(Q_{sk}), \\ & k = 1, \dots, N(s), s = 1, \text{ если } \theta = 1, \text{ и } s = 1, 2, \text{ если } 0 < \theta < 1 \}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

4. Гладкость обобщенных решений на интервале целой длины

Для формулировки основных результатов о гладкости обобщенных решений задачи (1)–(3) на интервале целой длины введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные результаты.

Рассмотрим блочную матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(N+1) \times (2N+2)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2 \right),$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ — матрицы порядка $(N+1) \times (N+1)$, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-2}(1) & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-3}(2) & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_{-1}(N) & a_0(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}_2 = R_1(1).$$

Другими словами,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_N(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-1}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_1(N) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+1) & \dots & a_0(N+1) \end{pmatrix}.$$

Через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) обозначим матрицу порядка $(N+1) \times (2N+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрицу порядка $(N+1) \times 2N$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов. Введенные матрицы понадобятся для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (1), чтобы обеспечить гладкость обобщенных решений на всем интервале при $\theta = 1$.

Замечание 4.1. Первые $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0, 1, \dots, N$, а последние $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1, 2, \dots, N+1$. Последняя строка матрицы $\mathbf{R}_1$ задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $1, 2, \dots, N+1$, соответствующую краевому условию (3). Строки матрицы $\mathbf{R}_1$ с номерами $1, \dots, N$ задают равенства $(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0)$, $k = 1, \dots, N$, вытекающие из уравнения (1) и условия $f \in L_2(0,d)$, см. (4.6).

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (1.3)*. Тогда*

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^1 = N+1, \qquad \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^2 \geqslant N.$$

Доказательство.

1. Так как последние $N+1$ столбцов матриц $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_1^1$ формируют невырожденную матрицу $R_1(1)$ (см. (1.3)), то мы заключаем, что $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = N+1$.

2. Докажем теперь, что $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 \geqslant N$. Рассмотрим матрицы $\mathbf{R}_1^0$ и $\mathbf{R}_1^2$.

2a. Если найдется такое k, $1 \leqslant k \leqslant N$, что $a_{-k}(N+1) \neq 0$, то $(N+1)$-я строка матрицы порядка $(N+1) \times N$, полученной из матрицы $R_1(1)$ вычеркиванием последнего столбца, равна нетривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$ порядка $N \times N$. С другой стороны, $(N+1)$-я строка матрицы порядка $(N+1) \times N$, полученная из матрицы $\widetilde{R}_1$ вычеркиванием первого столбца равна тривиальной линейной комбинации строк матрицы $R_2(1)$. Таким образом, $(N+1)$-я строка матрицы $\mathbf{R}_1^0$ не может быть равна линейной комбинации 1-й, 2-й, …, N-й строк этой матрицы. Таким образом, $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = N+1$.

2b. Если $a_{-k}(N+1)=0$, $k=1,\dots,N$, то последняя строка матрицы $\mathbf{R}_1^0$ является нулевой. С другой стороны, матрица $\mathbf{R}_1^0$ содержит в себе невырожденную матрицу $R_2(1)$ порядка $N\times N$. Следовательно, в этом случае $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0=N$.

2c. Матрица $\mathbf{R}_1^0$ получается из матрицы $\mathbf{R}_1^2$ вычеркиванием ее первого столбца. Поэтому из $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0\geqslant N$ следует $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^0=\operatorname{rank}\mathbf{R}_1^2\geqslant N$. $\square$

Рассмотрим ограниченный оператор $A_R^0: W_2^2(0,d)\supset D(A_R^0)\to L_2(0,d)$ с областью определения

$$D(A_R^0)=\left\{u\in W_2^2(0,d): R_Qu'\in W_2^1(0,d), u(0)=(R_Qu')(d)=0\right\},$$

действующий по формуле $A_R^0u=\mathcal{A}_Ru$ при $u\in D(A_R^0)$.

Из (3.3) следует, что

$$D(A_R^0)=D(\mathcal{A}_R)\cap W_2^2(0,d). \tag{4.1}$$

В силу теоремы 2.1 операторное уравнение (2.1) имеет единственное решение u_f при любой правой части $f\in L_2(0,d)$. Из (4.1) следует, что $u_f\in D(A_R^0)$ в том и только том случае, когда

$$u_f\in W_2^2(0,d). \tag{4.2}$$

Обозначим через $G_j^1=G_j^1(t)$ $(G_j^2=G_j^2(t))$, $j=1,\dots,N+1$, j-й столбец матрицы порядка $N\times(N+1)$, полученной из матрицы $R_1(t)$ вычеркиванием первой (последней) строки.

Предположим, что выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{N}|a_{-k}(k)|\neq 0 \quad\text{или}\quad \sum_{k=1}^{N}|a_k(N+1-k)|\neq 0. \tag{4.3}$$

Лемма 4.2. *Пусть $\theta=1$, и пусть выполнены условия* (1.3) *и* (4.3).

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то обобщенное решение u задачи (1)–(3) *принадлежит пространству $W_2^2(0,d)$ тогда и только тогда, когда $u'(0+0)=u'(N+1-0)=0$.*

Если же существуют такие $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, что $\alpha_1G_1^1(0)+\alpha_2G_{N+1}^2(1)=0$, т. е. столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, то $u\in W_2^2(0,d)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_2u'(0+0)+\alpha_1u'(N+1-0)=0$.

Доказательство.

1. Пусть столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. Из теоремы 3.1 и вложения $W_2^2(Q_{1k})\subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k=1,\dots N+1$, следует, что значения $u'(t)$ определены на концах подынтервалов Q_{1k}. Таким образом, условие $u\in W_2^2(0,d)$ можно представить в виде

$$u'(k+0)=u'(k-0),\quad k=1,\dots,N. \tag{4.4}$$

С другой стороны, поскольку $u\in D(\mathcal{A}_R)$, то из (3.3) следует

$$(R_Qu')(k+0)=(R_Qu')(k-0),\quad k=1,\dots,N. \tag{4.5}$$

Введем обозначения

$$\varphi_j=(U_1u')_{j+1}(0+0),\qquad j=0,\dots,N,$$
$$\psi_j=(U_1u')_j(1-0),\qquad j=1,\dots,N+1.$$

В силу (1.1), (1.2) и леммы 1.3 равенства (4.5) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1}r_{i+1,j}^1(0)\varphi_{j-1}=\sum_{j=1}^{N+1}r_{i,j}^1(1)\psi_j,\quad i=1,\dots,N. \tag{4.6}$$

Из (1.2) вытекают равенства $r_{i,j}^1(1)=r_{i+1,j+1}^1(0)$, $i,j=1,\dots,N$. Следовательно, систему (4.6) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{N}r_{i,j}^1(1)(\varphi_j-\psi_j)=-r_{i+1,1}^1(0)\varphi_0+r_{i,N+1}^1(1)\psi_{N+1},\quad i=1,\dots,N. \tag{4.7}$$

Так как $\det R_2(1)\neq 0$ (см. (1.3)), то при выполнении (4.4) система (4.7) имеет единственное решение $\varphi_j-\psi_j=0$, $j=1,\dots,N$, если

$$\varphi_0G_1^1(0)-\psi_{N+1}G_{N+1}^2(1)=0. \tag{4.8}$$

Так как по условию столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то (4.8) справедливо при

$$\varphi_0 = u'(0+0) = 0, \tag{4.9}$$

$$\psi_{N+1} = u'(N+1-0) = 0. \tag{4.10}$$

Следовательно, из условия $u \in W_2^2(0,d)$ вытекают равенства (4.9) и (4.10). Обратно, из (4.7), (4.9), (4.10) и невырожденности матрицы $R_2(1)$ вытекают равенства (4.4).

2. Пусть теперь столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы. В этом случае существуют $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, такие, что $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$. В силу (4.3), не ограничивая общности, предположим, что $G_1^1(0) \neq 0$. Следовательно, $\alpha_2 \neq 0$ и

$$G_{N+1}^2(1) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} G_1^1(0).$$

Таким образом, из (4.8) вытекает

$$\Big(\varphi_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi_{N+1}\Big) G_1^1(0) = 0,$$

т. е.

$$\alpha_2\varphi_0 + \alpha_1\psi_{N+1} = \alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = 0. \tag{4.11}$$

□

Далее мы покажем, что обобщенное решение $u(t)$ задачи (1)–(3) принадлежит пространству $W_2^2(0,d)$ при условии ортогональности правой части уравнения (1) конечному числу линейно независимых функций в $L_2(0,d)$. Соответствующие результаты о гладкости обобщенного решения задачи (1)–(3) будут обобщены на случай $0<\theta<1$ в разделе 5.

Теорема 4.1. *Пусть $\theta = 1$, и пусть выполнены условия* (1.3) *и* (4.3).

1. *Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$. Если к тому же $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2 = N+1$, то $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$; если же $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2 = N$, то $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.*
2. *Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ и при этом $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2$, т. е. $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.*
3. *Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ и при этом либо $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ и $G_1^1(0) = 0$ или $G_{N+1}^2(1) = 0$, либо $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2 = N$ и $G_{N+1}^2(1) = 0$, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.*
4. *Если $G_1^1(0) = 0$ и $\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^0 = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_1^2 = N$, то оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 0$.*

Доказательство.

1. В силу следствия 2.1 $\dim\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 0$. Поскольку $D(A_R^0) \subset D(\mathcal{A}_R)$, то $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$.
2. Перепишем равенство $(R_Q u')(d) = 0$ в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r_{N+1,j}^1(1)\psi_j = 0. \tag{4.12}$$

В силу (3.3) функция $u \in W_{2,0}^1(0,d)$ такая, что $u \in W_2^2(Q_{1k})$, $k = 1,\dots,N+1$, принадлежит $D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (4.6) и (4.12), которые можно переписать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{R}_1\Phi = 0, \tag{4.13}$$

где $\Phi := (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, -\psi_2, \dots, -\psi_{N+1})^T$.

3. Рассмотрим случай, когда столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. В силу леммы 4.2 решение u_f операторного уравнения (2.1) принадлежит $D(A_R^0)$ в том и только том случае, когда справедливы равенства (4.9) и (4.10). Из вложения $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1, N+1$, и неравенства (3.1) следует, что $u_f'(0+0)$ и $u_f'(N+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами в $L_2(0,d)$. Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом

пространстве существуют определенные единственным образом функции $h_1, h_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$u'_f(0+0) = (f, h_1)_{L_2(0,d)},$$
$$u'_f(N+1-0) = (f, h_2)_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, равенства (4.9) и (4.10) можно представить в виде

$$(f, h_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Исследуем условия, при которых функции h_1 и h_2 линейно независимы, а также условия, при которых эти функции линейно зависимы, но $|h_1(t)| + |h_2(t)| \neq 0$ на множестве положительной меры.

3a. Рассмотрим случай $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N+1$. Для доказательства линейной независимости функций h_1 и h_2 достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j, h_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Не ограничивая общности, докажем, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$(f_2, h_1)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad (f_2, h_2)_{L_2(0,d)} = 1,$$

т. е.

$$u'_{f_2}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 0, \qquad u'_{f_2}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 1. \tag{4.14}$$

Подставляя $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = 0$ и $\psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 1$ в систему уравнений (4.13), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = H_2, \tag{4.15}$$

где $\Phi^0 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, \ldots, -\psi_N)^T$ — $2N$-мерный вектор с неизвестными координатами, $H_2 = (a_N(1), a_{N-1}(2), \ldots, a_1(N), a_0(N+1))^T$. Из условия $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1$ и теоремы Кронекера—Капелли следует, что система уравнений (4.15) разрешима. Обозначим решение этой системы через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_N)^T$.

Докажем, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что решение u_{f_2} операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.14) и $u'_{f_2}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u'_{f_2}(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, N$.

Введем функцию

$$v(t) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} (t-j)\widetilde{\varphi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} \Big(j, j+\dfrac{1}{2}\Big), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1} (t-j)\widetilde{\psi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{N+1} \Big(j-\dfrac{1}{2}, j\Big), \end{cases}$$

где $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция, $0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1$, $\eta(t) = 1$, $t \in [-1/8, 1/8]$, $\operatorname{supp}\ \eta \subset [-1/4, 1/4]$, $\widetilde{\varphi}_0 = 0$, $\widetilde{\psi}_{N+1} = 1$, числа $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N, \widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (4.15).

По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := \mathcal{A}_R v$. Следовательно, полагая $u_{f_2} := v$, получим равенства (4.14).

Используя условие $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$, аналогичным образом можно доказать существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = 1, \quad u'_{f_1}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 0.$$

Таким образом, в случае $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N+1$ оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

3b. В силу леммы 4.1 кроме случая $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N+1$, описанного в пункте 3a, возможен лишь случай $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N$. Рассмотрим этот случай. В силу теоремы Кронекера—Капелли система линейных алгебраических уравнений (4.13) несовместна, если для некоторого $f_2 \in L_2(0,d)$ справедливы равенства $u'_{f_2}(N+1-0) = (f_2, h_2) \neq 0$, т. е. для указанной функции f_2 операторное уравнение (2.1) не имеет решения $u_{f_2} \in D(\mathcal{A}_R)$ такого, что $u'_{f_2}(N+1-0) \neq 0$. Следовательно, для всех $f \in L_2(0,d)$ мы имеем

$$(f, h_2)_{L_2(0,d)} = u'_f(N+1-0) = 0,$$

т. е. $h_2 = 0$.

С другой стороны, по предположению $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N$. Поэтому в силу теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (4.13) совместна для любых $f \in L_2(0,d)$. Аналогично части 3а доказательства можно построить такую функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, что

$$(f_1, h_1)_{L_2(0,d)} = u'_{f_1}(0+0) = 1,$$

т. е. $h_1 \neq 0$.

Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Пусть теперь столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы. Тогда существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, что

$$\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0.$$

В силу леммы 4.2 решение u_f операторного уравнения (2.1) принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда справедливо (4.11). Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $h \in L_2(0,d)$ такая, что

$$\alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = \alpha_2 (f, h_1)_{L_2(0,d)} + \alpha_1 (f, h_2)_{L_2(0,d)} = (f, h)_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, равенство (4.11) можно переписать в виде

$$(f, h)_{L_2(0,d)} = 0.$$

Покажем, что существует такая функция $f_0 \in L_2(0,d)$, что выполнено равенство

$$(f_0, h)_{L_2(0,d)} = 1. \tag{4.16}$$

4а. Предположим вначале, что $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2$, при этом либо $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = N+1$, либо $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$. Докажем, что $h \neq 0$. В силу (4.16) достаточно показать, что существует такая функция $f_1 \in L_2(0,d)$, что $(f_1, h_1)_{L_2(0,d)} = \dfrac{1}{\alpha_2}$ и $(f_1, h_2)_{L_2(0,d)} = 0$, т. е. $(f_1, h)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, достаточно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad u'_{f_1}(N+1-0) := \widetilde{\psi}_{N+1} = 0. \tag{4.17}$$

Полагая в (4.13) $\varphi_0 = \widetilde{\varphi}_0 = \dfrac{1}{\alpha_2}$ и $\psi_{N+1} = \widetilde{\psi}_{N+1} = 0$, получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -H_1', \tag{4.18}$$

где $\Phi^0 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, \ldots, -\psi_N)^T$ — $2N$-мерный вектор с неизвестными координатами и $H_1' = \Big(\dfrac{a_{-1}(1)}{\alpha_2}, \ldots, \dfrac{a_{-N}(N)}{\alpha_2}, 0\Big)^T$.

В силу леммы 4.1 $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2$. Отсюда и из теоремы Кронекера—Капелли следует, что система уравнений (4.18) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_N)^T$ решение этой системы.

Докажем существование функции $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой решение u_{f_1} операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.17) и $u'_{f_1}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u'_{f_1}(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, N$.

Введем функцию

$$v(t) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} (t-j)\widetilde{\varphi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{N} \Big(j, j+\dfrac{1}{2}\Big), \\ \sum\limits_{j=1}^{N+1} (t-j)\widetilde{\psi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{N+1} \Big(j-\dfrac{1}{2}, j\Big), \end{cases}$$

где $\widetilde{\varphi}_0 = \dfrac{1}{\alpha_2}$, $\widetilde{\psi}_{N+1} = 0$, а числа $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N$, $\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (4.18).

По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_1 := \mathcal{A}_R v$. Полагая $u_{f_1} := v$, получим равенства (4.17). Следовательно, $h = \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 \neq 0$. Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4b. Пусть теперь $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = N+1$, при этом либо $\alpha_1 = 0$, либо $\alpha_2 = 0$. Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда $G_1^1(0) = 0$. Для доказательства того, что $h = \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 = \alpha_1 h_2 \neq 0$, построим функцию $f_2 \in L_2(0,d)$ такую, что $(f_2, h_2)_{L_2(0,d)} = \dfrac{1}{\alpha_1}$, т. е. $(f_2, h)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, требуется построить такую функцию $f_2 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_2}(N+1-0) = \frac{1}{\alpha_1}. \tag{4.19}$$

Учитывая, что $G_1^1(0) = 0$, и подставляя $\widetilde{\psi}_{N+1} := u'_{f_2}(N+1-0) = \dfrac{1}{\alpha_1}$ в систему уравнений (4.13), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = H_2', \tag{4.20}$$

где $\Phi^0 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N, -\psi_1, \ldots, -\psi_N)^T$ — $2N$-мерный вектор с неизвестными координатами и $H_2' = \left(\dfrac{a_N(1)}{\alpha_1}, \dfrac{a_{N-1}(2)}{\alpha_1}, \ldots, \dfrac{a_1(N)}{\alpha_1}, \dfrac{a_0(N+1)}{\alpha_1}\right)^T$. В силу условия $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = N+1$ и теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (4.20) разрешима. Обозначим решение системы (4.20) через $\widetilde{\Phi}^0 := (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_N, -\widetilde{\psi}_1, \ldots, -\widetilde{\psi}_N)^T$.

Аналогично пункту 3a можно доказать существование такой функции $f_2 \in L_2(0,d)$, что при $f = f_2$ решение u_{f_2} операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.19) и $u'_{f_2}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u'_{f_2}(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, N$. Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4c. Пусть $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$. В пункте 3b доказано, что из условия $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N$ следует равенство $h_2 = 0$. Поэтому для доказательства того, что $h \neq 0$ достаточно построить такую функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, что $(f_1, h_1)_{L_2(0,d)} = \dfrac{1}{\alpha_2}$, т. е. $(f_1, h)_{L_2(0,d)} = 1$. Другими словами, функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такова, что

$$u'_{f_1}(0+0) = \frac{1}{\alpha_2}. \tag{4.21}$$

Учитывая, что $h_2 = 0$, т. е. $u'_f(N+1-0) = 0$ для всех $f \in L_2(0,d)$, и подставляя $\widetilde{\varphi}_0 := u'_{f_1}(0+0) = \dfrac{1}{\alpha_2}$ в систему уравнений (4.13), получим систему (4.18).

Аналогично пункту 3a можно доказать существование такой функции $f_1 \in L_2(0,d)$, что при $f = f_1$ решение u_{f_1} операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.21) и $u'_{f_1}(j+0) = \widetilde{\varphi}_j$, $u'_{f_1}(j-0) = \widetilde{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, N$. Таким образом, если $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(1) = 0$ при $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N$, то оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4d. Остается рассмотреть случай, когда $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N$ и $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$. Из пункта 3b и условия $\alpha_2 = 0$ следует, что $h = \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 = 0$. Таким образом, при $G_1^1(0) = 0$ и $G_{N+1}^2(1) \neq 0$ оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, а $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 0$, если $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = N$. $\square$

Пример 4.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$,

$$(Ru)(t) = 20u(t) + e^t u(t+1) + e^t u(t-1).$$

Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(t)$ принимает вид

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} 20 & e^t & 0 \\ e^{t+1} & 20 & e^{t+1} \\ 0 & e^{t+2} & 20 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Матрица $\mathbf{R}_1$ имеет вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} e & 20 & e & 20 & e & 0 \\ 0 & e^2 & 20 & e^2 & 20 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица $R_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяет условию (1.3), условие (4.3) выполнено, а столбцы $G_1^1(0) = (e, 0)^T$ и $G_3^2(1) = (0, e^2)^T$ линейно независимы.

Выпишем матрицу $\mathbf{R}_1^0$

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} 20 & e & 20 & e \\ e^2 & 20 & e^2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{-1}(3) = e^3 \neq 0$, то $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = 3$. Таким образом, в силу части 1 теоремы 4.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,3)$ фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Пример 4.2. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0,3) \to L_2(0,3)$, где $Q = (0,3)$,

$$(Ru)(t) = 2u(t) + (1 - e^{t-2})u(t+1) + (1 - e^{t-3})u(t-1) + (1 - e^{t-3})u(t+2).$$

Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(t)$ имеет вид

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 - e^{t-2} & 1 - e^{t-3} \\ 1 - e^{t-2} & 2 & 1 - e^{t-1} \\ 0 & 1 - e^{t-1} & 2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Матрица $\mathbf{R}_1$ принимает вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 1 - e^{-2} \\ 0 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $R_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяет условию (1.3), условие (4.3), очевидно, выполнено, а столбцы $G_1^1(0) = (1 - e^{-2}, 0)^T$ и $G_3^2(1) = (1 - e^{-2}, 0)^T$ линейно зависимы, при этом $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$.

Матрицы $\mathbf{R}_1^0$ и $\mathbf{R}_1^2$ имеют вид

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} \\ 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1^0 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^2 = 2$. Следовательно, в силу части 2 теоремы 4.1 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,3)$ фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

5. Гладкость обобщенных решений на интервале нецелой длины

Рассмотрим матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $N \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_0(N) \end{pmatrix}$$

и матрицу $\mathbf{R}_2$ порядка $(N+1) \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} a_0(\theta) & \dots & a_{N-1}(\theta) & a_0(\theta) & \dots & a_N(\theta) \\ a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-2}(1+\theta) & a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-1}(1+\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_0(N-1+\theta) & a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_1(N-1+\theta) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+\theta) & \dots & a_0(N+\theta) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1$ матрицу порядка $N \times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, а через $\mathbf{R}_2^2$ матрицу порядка $(N+1) \times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_2$ вычеркиванием последнего столбца.

Замечание 5.1. Первые $N+1$ столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $0, 1, \dots, N$, а последние N столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $1, 2, \dots, N$. В случае матрицы $\mathbf{R}_2$ первые N столбцов необходимы для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках $k-1+\theta$, $k = 1, \dots, N$, а последние $N+1$ столбцов — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках $k-1+\theta$, $k = 1, \dots, N+1$. Последняя строка матрицы $\mathbf{R}_2$ задает линейную комбинацию значений левых производных в точках $k-1+\theta$, $k = 1, \dots, N+1$, соответствующую краевому условию (3). Вытекающие из уравнения (1) и условия $f \in L_2(0,d)$ равенства $(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0)$, $k = 1, \dots, N$ (см. (5.4)), задаются $1, \dots, N$ строками матрицы $\mathbf{R}_1$, а равенства $(R_Q u')(k-1+\theta+0) = (R_Q u')(k-1+\theta-0)$, $k = 1, \dots, N$ (см. (5.5)), задаются строками матрицы $\mathbf{R}_2$ с номерами $1, \dots, N$.

Лемма 5.1. *Пусть выполнено условие* (1.3). *Тогда* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_1^1 = N$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_2 = N+1$ *и* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_2^2 \geqslant N$.

Доказательство. Справедливость $\operatorname{rank} \mathbf{R}_1 = \operatorname{rank} \mathbf{R}_1^1 = N$ и $\operatorname{rank} \mathbf{R}_2^2 \geqslant N$ очевидна. Равенство $\operatorname{rank} \mathbf{R}_2 = N+1$ вытекает из $\operatorname{Re} a_0(t) > 0$, что следует из условия (1.3). □

Как и в разделе 4, обозначим через $G_j^1 = G_j^1(t)$ ($G_j^2 = G_j^2(t)$), $j = 1, \dots, N+1$, j-й столбец матрицы порядка $N \times (N+1)$, полученной из матрицы $R_1(t)$ вычеркиванием первой (последней) строки.

Предположим, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N-k+\theta)| \neq 0. \tag{5.1}$$

Лемма 5.2. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (1.3) *и* (5.1).

Если $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, *то обобщенное решение и задачи* (1)–(3) *принадлежит пространству* $W_2^2(0,d)$ *тогда и только тогда, когда* $u'(0+0) = u'(N+\theta-0) = 0$.

Если $G_1^1(0) = 0$ *или* $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, *то обобщенное решение и задачи* (1)–(3) *принадлежит пространству* $W_2^2(0,d)$ *тогда и только тогда, когда* $u'(0+0) = 0$ *в случае* $G_1^1(0) \neq 0$ *и* $u'(N+\theta-0) = 0$ *в случае* $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

Доказательство. В силу определения $D(\mathcal{A}_R)$ (см. (3.3)), теоремы 3.1 и вложения $W_2^2(Q_{sk}) \subset C^1(\overline{Q}_{sk})$, $k = 1, \dots N(s)$, $s = 1, 2$, значения $u'(t)$ определены на концах подынтервалов Q_{sk}. Таким образом, условие $u \in W_2^2(0,d)$ можно переписать в виде

$$u'(k+0) = u'(k-0), \quad k = 1, \dots, N, \tag{5.2}$$

$$u'(k-1+\theta+0) = u'(k-1+\theta-0), \quad k = 1, \dots, N. \tag{5.3}$$

С другой стороны, $u \in D(\mathcal{A}_R)$, следовательно,

$$(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0), \quad k = 1, \dots, N, \tag{5.4}$$

$$(R_Q u')(k-1+\theta+0) = (R_Q u')(k-1+\theta-0), \quad k = 1, \dots, N. \tag{5.5}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,j} &= (U_1 P_1 u')_{j+1}(0+0), && j = 0, \dots, N, \\
\psi_{1,j} &= (U_2 P_2 u')_j(1-0), && j = 1, \dots, N, \\
\varphi_{2,j} &= (U_2 P_2 u')_j(\theta+0), && j = 1, \dots, N, \\
\psi_{2,j} &= (U_1 P_1 u')_j(\theta-0), && j = 1, \dots, N+1.
\end{aligned}$$

Не ограничивая общности, рассмотрим соотношения (5.4). В силу (1.1), (1.2) и леммы 1.3 равенства (5.4) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{N}(r^1_{i+1,j+1}(0)\varphi_{1,j} - r^2_{i,j}(1)\psi_{1,j}) = \sum_{j=1}^{N} r^2_{i,j}(1)(\varphi_{1,j} - \psi_{1,j}) = -r^1_{i+1,1}(0)\varphi_{1,0}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{5.6}$$

Так как $\det R_2(1) \neq 0$ (см. (1.3)), то при условии выполнения равенств (5.2) система (5.6) имеет единственное решение $\varphi_{1,j} - \psi_{1,j} = 0$, $j = 1, \dots, N$, если

$$\varphi_{1,0}G^1_1(0) = 0.$$

Пусть, например, выполнено первое из условий (5.1). Тогда $G^1_1(0) \neq 0$. Следовательно,

$$\varphi_{1,0} = u'(0+0) = 0. \tag{5.7}$$

Аналогичным образом можно показать, что при условии выполнения (5.3) вытекающая из равенств (5.5) система

$$\sum_{j=1}^{N} r^2_{i,j}(\theta)(\varphi_{2,j} - \psi_{2,j}) = r^1_{i,N+1}(\theta)\psi_{2,N+1}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{5.8}$$

имеет единственное решение $\varphi_{2,j} - \psi_{2,j} = 0$, $j = 1, \dots, N$, если $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$ и

$$\psi_{2,N+1} = u'(N+\theta-0) = 0. \tag{5.9}$$

□

Теорема 5.1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (1.3) *и* (5.1).

1. *Если* $G^1_1(0) \neq 0$, $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$ *и* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}^2_2 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $\dim \mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A^0_R) = 2$.
2. *Если* $G^1_1(0) \neq 0$, $G^2_{N+1}(\theta) \neq 0$ *и* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}^2_2 = N$, *то оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $\dim \mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A^0_R) = 1$.
3. *Если* $G^2_{N+1}(\theta) = 0$ *или* $G^1_1(0) = 0$ *и* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}^2_2 = \operatorname{rank} \boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $\dim \mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A^0_R) = 1$.
4. *Если* $G^1_1(0) = 0$ *и* $\operatorname{rank} \boldsymbol{R}^2_2 = N$, *то оператор* $A^0_R : W^2_2(0,d) \supset D(A^0_R) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $\dim \mathcal{N}(A^0_R) = 0$ *и* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A^0_R) = 0$.

Доказательство.

1. Согласно части 1 доказательства теоремы 4.1 заключаем, что $\dim \mathcal{N}(A^0_R) = 0$.

2. В силу леммы 5.2 решение u_f операторного уравнения (2.1) принадлежит пространству $W^2_2(0,d)$ в том и только том случае, когда справедливы равенства (5.7) и (5.9). Из неравенства (3.1) и вложения $W^2_2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$, $k = 1, N+1$, вытекает, что $u'_f(0+0)$ и $u'_f(N+\theta-0)$ являются линейными ограниченными функционалами в $L_2(0,d)$. Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют определенные единственным образом функции $h_1, h_2 \in L_2(0,d)$ такие, что

$$u'_f(0+0) = (f, h_1)_{L_2(0,d)},$$
$$u'_f(N+\theta-0) = (f, h_2)_{L_2(0,d)}.$$

Следовательно, равенства (5.7) и (5.9) можно представить в виде

$$(f, h_i)_{L_2(0,d)} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Перепишем равенство $(R_Q u')(d) = 0$ в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r^1_{N+1,j}(\theta)\psi_{2,j} = 0. \tag{5.10}$$

В силу (3.3) функция $u \in W^1_{2,0}(0,d)$ такая, что $u \in W^2_2(Q_{sk})$, $s=1,2$, $k=1,\dots,N(s)$, принадлежит $D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (5.6), (5.8) и (5.10), которые можно представить в виде матричных уравнений

$$\mathbf{R}_1\Phi_1 = 0, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{R}_2\Phi_2 = 0, \tag{5.12}$$

где $\Phi_1 := (\varphi_{1,0},\dots,\varphi_{1,N},-\psi_{1,1},\dots,-\psi_{1,N})^T$, $\Phi_2 := (\varphi_{2,1},\dots,\varphi_{2,N},-\psi_{2,1},\dots,-\psi_{2,N+1})^T$.

3. Предположим вначале, что $G^1_1(0)\neq 0$ и $G^2_{N+1}(\theta)\neq 0$.

3а. Рассмотрим случай $\operatorname{rank}\mathbf{R}^2_2 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_2 = N+1$. Для доказательства линейной независимости функций h_1 и h_2 достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(0,d)$, обладающие свойством

$$(f_j,h_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \qquad i,j=1,2,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Докажем, например, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что

$$(f_2,h_1)_{L_2(0,d)} = 0,$$
$$(f_2,h_2)_{L_2(0,d)} = 1,$$

т. е. необходимо построить функцию f_2, для которой

$$u'_{f_2}(0+0) := \widetilde{\varphi}_{1,0} = 0, \quad u'_{f_2}(N+\theta-0) := \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1. \tag{5.13}$$

Подставляя $\varphi_{1,0} = \widetilde{\varphi}_{1,0} = 0$ и $\psi_{2,N+1} = \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 1$ в системы уравнений (5.11) и (5.12) соответственно, получим

$$\mathbf{R}^1_1\Phi^0_1 = 0, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{R}^2_2\Phi^0_2 = H_2, \tag{5.15}$$

где $H_2 = (a_N(\theta), a_{N-1}(1+\theta),\dots,a_0(N+\theta))^T$, $\Phi^0_1 := (\varphi_{1,1},\dots,\varphi_{1,N},-\psi_{1,1},\dots,-\psi_{1,N})^T$, $\Phi^0_2 := (\varphi_{2,1},\dots,\varphi_{2,N},-\psi_{2,1},\dots,-\psi_{2,N})^T$. В силу $\operatorname{rank}\mathbf{R}_2 = \operatorname{rank}\mathbf{R}^2_2$ и теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (5.15) разрешима. Обозначим через $\widetilde{\Phi}^0_2 := (\widetilde{\varphi}_{2,1},\dots,\widetilde{\varphi}_{2,N},-\widetilde{\psi}_{2,1},\dots,-\widetilde{\psi}_{2,N})^T$ решение системы (5.15), а через $\widetilde{\Phi}^0_1$ — тривиальное решение системы (5.14).

Докажем, что существует функция $f_2 \in L_2(0,d)$ такая, что решение u_{f_2} операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (5.13) и $u'_{f_2}(j-1+\theta+0) = \widetilde{\varphi}_{2,j}$, $u'_{f_2}(j-1+\theta-0) = \widetilde{\psi}_{2,j}$, $u'_{f_2}(j+0)=0$, $u'_{f_2}(j-0)=0$, $j=1,\dots,N$.

Введем функцию

$$v(t) := \begin{cases} 0, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{N}\Big(j, j+\dfrac{\theta_0}{2}\Big), \\ 0, & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{N}\Big(j-\dfrac{\theta_0}{2}, j\Big), \\ \sum\limits_{j=1}^{N}(t-(\theta-1+j))\widetilde{\varphi}_{2,j}\xi(t-(\theta-1+j)), & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{N}\Big(j-1+\theta, j-1+\theta+\dfrac{\theta_0}{2}\Big), \\ \sum\limits_{j=0}^{N}(t-(\theta-1+j))\widetilde{\psi}_{2,j}\xi(t-(\theta-1+j)), & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{N}\Big(j+\theta-\dfrac{\theta_0}{2}, j+\theta\Big), \end{cases}$$

где $\theta_0 = \min\{\theta, 1-\theta\}$, $\xi \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ — вещественнозначная функция, $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1$, $\xi(t)=1$, $t \in [-\theta_0/8,\ \theta_0/8]$, $\operatorname{supp}\xi \subset [-\theta_0/4,\ \theta_0/4]$, $\widetilde{\varphi}_{1,0}=0$, $\widetilde{\psi}_{2,N+1}=1$, числа $\widetilde{\varphi}_{1,1}=0,\dots,\widetilde{\varphi}_{1,N}=0$, $\widetilde{\psi}_{1,1}=0,\dots,\widetilde{\psi}_{1,N}=0$ и $\widetilde{\varphi}_{2,1},\dots,\widetilde{\varphi}_{2,N},\widetilde{\psi}_{2,1},\dots,\widetilde{\psi}_{2,N}$ удовлетворяют системам линейных алгебраических уравнений (5.14) и (5.15) соответственно. По построению $v \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := \mathcal{A}_R v$. Тогда, полагая $u_{f_2} := v$, получим равенства (5.13).

Аналогично, используя очевидное равенство $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}^1_1$, можно построить функцию $f_1 \in L_2(0,d)$, для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \widetilde{\varphi}_{1,0} = 1, \quad u'_{f_1}(N+\theta-0) := \widetilde{\psi}_{2,N+1} = 0. \tag{5.16}$$

Следовательно, оператор A^0_R фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A^0_R)=0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A^0_R)=2$.

3b. Пусть теперь $\operatorname{rank}\mathbf{R}_2^2 = N$. Тогда в силу теоремы Кронекера—Капелли система линейных алгебраических уравнений (5.12) несовместна, если для некоторого $f_2 \in L_2(0,d)$ справедливо $u'_{f_2}(N+\theta-0) \neq 0$, $u_{f_2} \in D(\mathcal{A}_R)$. Следовательно, для всех $f \in L_2(0,d)$ мы имеем $(f,h_2)_{L_2(0,d)} = u'_f(N+\theta-0) = 0$, т. е. $h_2 = 0$. С другой стороны, в силу теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (5.11) совместна для любых $f \in L_2(0,d)$, так как $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_1^1$. Аналогично части 2a доказательства можно показать, что существует функция $f_1 \in L_2(0,d)$ такая, что $(f_1,h_1)_{L_2(0,d)} = u'_{f_1}(0+0) = 1$, т. е. $h_1 \neq 0$. Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Предположим теперь, что $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) = 0$. В этом случае, исследуя только систему уравнений (5.11), аналогично части 3a можно показать, что оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

5. Наконец, предположим, что $G_1^1(0) = 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

Если $\operatorname{rank}\mathbf{R}_2^2 = \operatorname{rank}\mathbf{R}_2 = N+1$. Тогда, исследуя только систему уравнений (5.12), аналогично части 3a доказываем, что оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Если же $\operatorname{rank}\mathbf{R}_2^2 = N$, мы также исследуем только систему уравнений (5.12). Однако в пункте 3b показано, что из условия $\operatorname{rank}\mathbf{R}_2^2 = N$ следует равенство $h_2 = 0$. Таким образом, $h = h_2 = 0$ и мы заключаем, что оператор A_R^0 фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 0$. $\square$

Пример 5.1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2\Big(0, \dfrac{11}{5}\Big) \to L_2\Big(0, \dfrac{11}{5}\Big)$, где $Q = \Big(0, \dfrac{11}{5}\Big)$,

$$(Ru)(t) = 10u(t) + (1+e^t)u(t+1) + e^{t-1}u(t-1).$$

Тогда $N = 2$, $\theta = \dfrac{1}{5}$, а матрицы $R_1(t)$ и $R_2(t)$ принимают вид

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} 10 & 1+e^t & 0 \\ e^t & 10 & 1+e^{t+1} \\ 0 & e^{t+1} & 10 \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{5}, \qquad R_2(t) = \begin{pmatrix} 10 & 1+e^t \\ e^t & 10 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{5} \leqslant t \leqslant 1.$$

Матрицы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1+e & 10 & 1+e \\ 0 & e & 10 & e & 10 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 1+e^{\frac{1}{5}} & 10 & 1+e^{\frac{1}{5}} & 0 \\ e^{\frac{1}{5}} & 10 & e^{\frac{1}{5}} & 10 & 1+e^{\frac{6}{5}} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{6}{5}} & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $R_1(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{5}$ и $R_2(t)$ при $\dfrac{1}{5} \leqslant t \leqslant 1$ удовлетворяют условию (1.3), при этом $G_1^1(0) = (1,0)^T$ и $G_3^2(\theta) = (0, 1+e^{6/5})^T$, а условие (5.1), очевидно, выполнено.

Таким образом, в силу части 1 теоремы 5.1 оператор $A_R^0 : W_2^2\Big(0, \dfrac{11}{5}\Big) \supset D(A_R^0) \to L_2\Big(0, \dfrac{11}{5}\Big)$ фредгольмов, $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 547–556.
2. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа// Докл. РАН. Сер. Мат. Информ. Проц. Упр. — 2020. — *490*. — С. 81–84.
3. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *12*, № 5. — С. 815–824.
4. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Дифф. уравн. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.
5. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа// Укр. мат. ж. — 1985. — *37*, № 5. — С. 581–585.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
7. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6.— С. 883–890.

8. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 635–654.
9. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 5. — С. 693–716.
10. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 702–719.
11. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.
12. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
13. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
14. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 3. — С. 576–595.
15. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 6. — С. 873–886.
16. *Neverova D. A.* Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations// Funct. Differ. Equ. — 2014. — *21*. — С. 47–65.
17. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — С. 192–207.
18. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — С. 491–500.
19. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.

Н. О. Иванов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: noivanov1@gmail.com

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417
EDN: DXHBXR

Smoothness of generalized solutions of a boundary-value problem for a second-order differential-difference equation with mixed boundary conditions

N. O. Ivanov

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. We consider a boundary-value problem with mixed boundary conditions for a second-order differential-difference equation on a finite interval $(0, d)$. We prove existence of a generalized solution of the problem and study the conditions on the right-hand side of the differential-difference equation ensuring the smoothness of the generalized solution over the entire interval.

Keywords: boundary-value problem, differential-difference equations, generalized solutions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115). The author expresses gratitude to his scientific supervisor A. L. Skubachevskii for setting the problem and attention to the work, as well as gratitude to the reviewer for a number of suggestions that made it possible to improve the article. The author also expresses gratitude to Prof. V. V. Malygina for her comment on my report at the 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2022) that drew my attention to the formulation of the boundary-value problem for the differential-difference equation with mixed boundary conditions.

For citation: N. O. Ivanov, "Smoothness of generalized solutions of a boundary-value problem for a second-order differential-difference equation with mixed boundary conditions," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 3, 399–417. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417`

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem" [On one damping problem for a nonstationary control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral'nogo tipa" [On the damping of a control system with aftereffect of a neutral type], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inform. Prots. Upr.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inform. Control Sys.], 2020, **490**, 81–84 (in Russian).
3. A. G. Kamenskii, "Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal'no simmetrichnymi differentsial'no-raznostnymi operatorami" [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, No. 5, 815–824 (in Russian).
4. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol'kimi starshimi chlenami" [On the formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating argument and several higher-order terms], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
5. G. A. Kamenskii, A. D. Myshkis, and A. L. Skubachevskii, "O gladkikh resheniyakh kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnogo uravneniya neytral'nogo tipa" [On smooth solutions of a boundary value problem for a differential-difference equation of neutral type], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1985, **37**, No. 5, 581–585 (in Russian).
6. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynye sistemy* [Theory of Motion Control. Linear Systems], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
7. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, "O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh" [About positional modeling in dynamic systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
8. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, "Sil'no ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya so smeshannymi kraevymi usloviyami v tsilindricheskoy oblasti" [Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a cylindrical domain], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 635–654 (in Russian).
9. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, "Smeshannye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy v tsilindre" [Mixed problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 693–716 (in Russian).
10. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, "O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
11. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruemogo tela" [Differential equations with deviating arguments in stationary problems of mechanics of a deformable body], *Prikl. mekh.* [Appl. Mech.], 1979, **15**, No. 5, 39–47 (in Russian).
12. Yu. S. Osipov, "O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem" [On stabilization of controllable systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).

13. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
14. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
15. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami na intervale netseloy dliny” [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients on an interval of noninteger length], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 6, 873–886 (in Russian).
16. D. A. Neverova, “Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
17. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
18. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, “On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
19. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

N. O. Ivanov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: noivanov1@gmail.com