Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 3 (2023). С. 383–398
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398
EDN: FITUOA

О ГЛОБАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА—ПУАССОНА С ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Ю. О. Беляева, А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова—Пуассона с заданным внешним магнитным полем в ограниченной области. Эта задача описывает кинетику высокотемпературной плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза и рассматривается относительно неизвестных функций — потенциала электрического поля, функций распределения положительно заряженных ионов и электронов. Дополнительно предполагается, что функции распределения заряженных частиц удовлетворяют условию зеркального отражения от границы рассматриваемой области. В работе доказано существование глобальных слабых решений такой задачи.

Ключевые слова: уравнения Власова, слабые решения, внешнее магнитное поле.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00392.

Для цитирования: *Ю. О. Беляева, А. Л. Скубачевский.* О глобальных слабых решениях уравнений Власова—Пуассона с внешним магнитным полем// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 3. С. 383–398. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398

1. Введение

Идея использования термоядерного синтеза в качестве потенциальной основы энергетики будущего получила развитие еще в начале 50-х годов прошлого столетия и на сегодняшний день представляет собой важнейшее научное направление [3]. Физическая реализация этого процесса осуществляется в установках, принципом действия которых является удержание высокотемпературной плазмы строго внутри ректора за счет действия магнитных и электрических полей специальной конфигурации. Примерами таких установок являются токамаки, пробочные ловушки и др. Подробное описание принципов работы подобных установок можно найти в [3].

Математически, в зависимости от степени детализации, плазму можно описывать различными уравнениями. Для описания кинетики высокотемпературной плазмы используют систему уравнений Власова—Пуассона. Для каждого типа частиц (положительно заряженных ионов и электронов) рассматривается функция распределения, которая описывает число частиц в элементе объема пространства координат и скоростей (фазового пространства). Как в физике, так и в математике уравнениям Власова посвящено большое количество работ (см. [1–8, 10, 12–14]).

Основываясь на физическом смысле исследуемой задачи, важно учитывать следующие факторы. Высокотемпературная плазма обладает свойством квазинейтральности, поэтому естественно рассматривать двукомпонентную модель плазмы. В действующих установках, осуществляющих управляемый термоядерный синтез (пробочные ловушки, токамаки), удержание высокотемпературной плазмы строго внутри реактора достигается за счет действия магнитных полей особой конфигурации. Поэтому важно полагать их нетривиальными. Отметим, что *высокотемпературной* называют полностью ионизированную плазму с температурой миллион градусов Цельсия и выше. В отличие от работ других авторов, в данной работе учитываются перечисленные физические факторы.

Классические решения смешанных задач для уравнений Власова—Пуассона для двукомпонентной плазмы с внешним магнитным полем и носителями функций распределения заряженных частиц, лежащими на расстоянии от границ рассматриваемых областей, в случае полупространства и бесконечного цилиндра впервые рассматривались в работах [4–6]. В общей постановке существование классических решений такой задачи является нерешенной проблемой.

Данная работа посвящена доказательству существования глобальных слабых решений первой смешанной задачи для системы уравнений Власова—Пуассона с условиями зеркального отражения на функции распределения заряженных частиц.

Слабые решения для однокомпонентной плазмы без учета действия магнитного поля рассматривались в работах [1,13,14]. В отличие от работ [13,14], в данной работе рассматривается модель двукомпонентной плазмы под действием заданного нетривиального внешнего магнитного поля. В отличие от [1], в работе дополнительно рассматриваются граничные условия вида (2.7).

2. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$. Рассмотрим систему уравнений Власова—Пуассона:

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^\beta(x,v,t)\,dv, \qquad x \in Q,\ 0 < t < T,\ \beta = \pm 1, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \left\langle v, \nabla_x f^\beta \right\rangle + \frac{\beta e}{m_\beta}\left\langle -\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}[v,B], \nabla_v f^\beta \right\rangle = 0, \qquad x \in Q,\ v \in \mathbb{R}^3,\ 0 < t < T,\ \beta = \pm 1, \tag{2.2}$$

где $\varphi(x,t)$ и $f^\beta(x,v,t)$ $(\beta = \pm 1)$ — неизвестные функции. Здесь $\varphi = \varphi(x,t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; $f^\beta = f^\beta(x,v,t)$ — функции распределения частиц: положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона соответственно; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Пусть $n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке x. Введем множества Γ_+, Γ_-, Γ_0 следующим образом:

$$\Gamma_+ = \{(x,v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle > 0\}, \tag{2.3}$$

$$\Gamma_- = \{(x,v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle < 0\}, \tag{2.4}$$

$$\Gamma_0 = \{(x,v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle = 0\}, \tag{2.5}$$

и рассмотрим биективное отображение $\mathcal{R}(x,v,t) : \Gamma_+ \times (0,T) \to \Gamma_- \times (0,T)$, действующее по формулам

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x,v,t) := (x, R(x,v), t), \\ R(x,v) := (x, v - 2\langle v, n(x)\rangle\, n(x)). \end{cases} \tag{2.6}$$

Отображение $\mathcal{R}(x,v,t)$ называется *оператором зеркального отражения.*

Вместе с уравнениями (2.1)-(2.2) будем рассматривать следующие условия на функции распределения заряженных частиц f^β:

$$f^\beta(x,v,t) = f^\beta(x,R(x,v),t) \qquad (x \in \partial Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T:\ \langle n(x), v\rangle > 0,\ \beta = \pm 1), \tag{2.7}$$

$$f^\beta(x,v,t)\big|_{t=0} = \mathring{f}^\beta(x,v) \qquad (x \in \bar{Q},\ v \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm 1), \tag{2.8}$$

где $\mathring{f}^\beta(x,v)$, $\beta=\pm1$, — заданные начальные функции распределения заряженных частиц. Кроме того, рассмотрим условия Дирихле для потенциала самосогласованного электрического поля:

$$\varphi(x,t)=0 \qquad (x\in\partial Q,\ 0\leqslant t<T). \tag{2.9}$$

В работе используются следующие функциональные пространства. Пространство $C(Q\times\mathbb{R}^3)$ состоит из непрерывных на $Q\times\mathbb{R}^3$ функций. Обозначим через $\mathring{C}^k(Q\times\mathbb{R}^3)$ множество k раз непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в $Q\times\mathbb{R}^3$, а множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным в $\mathbb{R}^3$ носителем будем обозначать $\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Пусть E — измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^3$. Для $p\geqslant1$ введем банахово пространство $L_p(E)$ всех классов измеримых функций $f:E\to\mathbb{R}$, совпадающих почти всюду, таких, что $|f|^p\in L_1(E)$, с нормой, определенной по формуле $\|f\|_p=\Big(\int\limits_E|f(x)|^pdx\Big)^{\frac1p}$. Будем рассматривать также банахово пространство $L_\infty(E)$ классов измеримых функций, ограниченных почти всюду. Норма в этом пространстве определяется по формуле: $\|f\|=\operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in E}|f(x)|$.

Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$ и $1\leqslant p'\leqslant\infty$ такие, что $\dfrac1p+\dfrac1{p'}=1$. Для $1\leqslant p<\infty$ обозначим через $\sigma(p,p')$ слабую топологию в $L_p(Q\times\mathbb{R}^3)$ (или в $L_p(\Omega)$), а через $\sigma(\infty,1)$ слабую-* топологию в $L_\infty(Q\times\mathbb{R}^3)$.

3. Характеристики уравнений Власова

Уравнения характеристик для уравнений (2.2) с фиксированным потенциалом φ имеют вид:

$$\frac{dX^\beta_\varphi}{d\tau}=V^\beta_\varphi, \qquad 0<\tau<T,\ \beta=\pm1, \tag{3.1}$$

$$\frac{dV^\beta_\varphi}{d\tau}=-\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi\big(X^\beta_\varphi,\tau\big)+\frac{\beta e}{m_\beta c}\big[V^\beta_\varphi,B(X^\beta_\varphi)\big], \qquad 0<\tau<T,\ \beta=\pm1. \tag{3.2}$$

Будем предполагать, что функции $E(x,t):=-\nabla_x\varphi(x,t)$ и $B(x)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 3.1. *Пусть вектор-функция $E(x,t)$ непрерывна по x, t, и непрерывно дифференцируема по x в $\bar Q\times[0,T)$, а вектор-функция $B(x)$ непрерывно дифференцируема в $\bar Q$. При этом $E(x,t)$ и $B(x)$ могут быть продолжены до непрерывной и непрерывно дифференцируемой по x функции в $Q_1\times[0,T)$ и в Q_1 соответственно, где $Q_1\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $\bar Q\subset Q_1$.*

Мы хотим построить решения системы характеристик (3.1)-(3.2), которые будут учитывать действие оператора зеркального отражения $\mathcal{R}(x,v,t)$. Такие решения будут называться *порождающими характеристиками*, их подробное построение мы приводим ниже.

Рассмотрим систему (3.1)-(3.2) с начальными условиями вида

$$X^\beta_\varphi|_{\tau=t}=x,\ V^\beta_\varphi|_{\tau=t}=v, \tag{3.3}$$

где $(x,v)\in(Q\times\mathbb{R}^3)\cup\Gamma_-$, $t\in[0,T)$ (см. (2.4)).

Обозначим $\Omega:=Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T)$ и $A_\pm:=\Gamma_\pm\times(0,T)$.

Условие 3.1 гарантирует, что для любых $p=(x,v,t)\in\Omega\cup A_-\cup(Q\times\mathbb{R}^3\times\{0\})$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (3.1)-(3.3) на некотором полуинтервале $[t,t^\beta_1(p))$. Обозначим это решение через $S^\beta_\varphi(\tau,p):=(X^\beta_\varphi(\tau,p),V^\beta_\varphi(\tau,p))$.

Очевидно, существует предел

$$(x^\beta_1,v^\beta_1):=\lim_{\tau\to t^\beta_1-0}(X^\beta_\varphi(\tau,p),V^\beta_\varphi(\tau,p))\in\bar Q\times\mathbb{R}^3.$$

В силу [13, лемма 1.4] возможны следующие случаи:

a) $t^\beta_1=t^\beta_1(p)=T$;
b) $t^\beta_1<T$ и $(x^\beta_1,v^\beta_1)\in\Gamma_+=\{(x,v)\in\partial Q\times\mathbb{R}^3:\langle v,n(x)\rangle>0\}$;
c) $t^\beta_1<T$ и $(x^\beta_1,v^\beta_1)\in\Gamma_0=\{(x,v)\in\partial Q\times\mathbb{R}^3:\langle v,n(x)\rangle=0\}$.

В случае a) мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t, T)$. В случае b) мы рассмотрим задачу (3.1)-(3.2) с начальными условиями (3.3), в которых в соответствии с формулой (2.6), описывающей зеркальное отражение, положим

$$(x, v) = (x_1^\beta, R(x_1^\beta, v_1^\beta)) \in \Gamma_- = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle < 0\}.$$

Поскольку вектор $R(x_1^\beta, v_1^\beta)$ направлен внутрь области Ω, в силу условия 3.1 на некотором полуинтервале $[t_1^\beta, t_2^\beta)$ существует единственное непродолжаемое решение системы (3.1)-(3.2) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = x_1^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = R(x_1^\beta, v_1^\beta). \tag{3.4}$$

Обозначим это решение по-прежнему через $S_\varphi^\beta(\tau, p)$. Очевидно, $S_\varphi^\beta(\tau, p) \subset Q \times \mathbb{R}^3$, $t \in (t_1^\beta, t_2^\beta)$.

Для t_2^β также возможны случаи a)-c). В случае $t_2^\beta = T$ мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t_1^\beta, T)$. Функция $S_\varphi^\beta(\tau, p)$, рассматриваемая на полуинтервале $[t, T)$, имеет разрывы первого рода в точках t_1^β и t_2^β и удовлетворяет системе уравнений (3.1)-(3.2) на интервалах (t, t_1^β) и (t_1^β, t_2^β).

В случае $t_2^\beta < T$ и

$$(x_2^\beta, v_2^\beta) := \lim_{\tau\to t_2^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_+$$

мы опять рассмотрим систему (3.1)-(3.2) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = x_2^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = R(x_2^\beta, v_2^\beta). \tag{3.5}$$

Существует единственное непродолжаемое решение задачи (3.1), (3.2), (3.5) $S_\varphi^\beta(\tau, p)$ на некотором полуинтервале $[t_2^\beta, t_3^\beta)$, и т. д.

Если $0 < t$, то аналогичные построения мы можем провести для $0 < \tau < t$, последовательно находя непродолжаемые решения $S_\varphi^\beta(\tau, p)$ системы (3.1), (3.2) с начальными условиями (3.3) на некотором интервале $(t_{-1}^\beta, t]$ с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_{-1}^\beta} = x_{-1}^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_{-1}^\beta} = R^{-1}(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta), \tag{3.6}$$

где $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) := \lim\limits_{\tau\to t_{-1}^\beta + 0} S_\varphi^\beta(\tau, p)$, и т. д.

Точки $t_1^\beta, t_2^\beta, \ldots, t_{-1}^\beta, t_{-2}^\beta, \ldots$ мы назовем *моментами отражения.*

Обозначим через S множество точек $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$, для которых существует $t < t_k^\beta < T,\ k \in \mathbb{N}$, такое, что

$$(x_k^\beta, v_k^\beta) = \lim_{\tau\to t_k^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \tag{3.7}$$

или $0 < t_{-j}^\beta < t$, $j \in \mathbb{N}$, такое, что

$$(x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) = \lim_{\tau\to t_{-j}^\beta + 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \tag{3.8}$$

или число моментов отражения бесконечно.

Положим $D = (\Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})) \setminus S$. Очевидно, множество D состоит из всех точек $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ в начальных условиях (3.3), при которых построенные кусочно непрерывные $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, p)$ существуют на всем интервале $(0, T)$, имеют конечное число моментов отражения, и множество моментов отражения t_k^β $(0 < t_k^\beta < T,\ k = \pm1, \pm2, \ldots)$ таких, что $(x_k^\beta, v_k^\beta) \in \Gamma_0$, является пустым.

Обозначим через $\mu_n(\cdot)$ n-мерную меру Лебега. Пусть $\mathcal{B}(A_\pm)$ — σ-алгебра борелевских множеств на множестве $A_\pm := \Gamma_\pm \times (0, T)$ с мерой $\nu_\pm$, определенной по формуле

$$\nu_\pm(B) := \int\limits_{A_\pm} \chi_B(x, v, t) |\langle n(x), v\rangle| d\sigma(x) dv dt,\ B \in \mathcal{B}(A_\pm), \tag{3.9}$$

где $\chi_B(x,v,t)$ — характеристическая функция множества B.

Решения $\hat{S}^\beta_\varphi(\tau,x,v,t)$, $0 \leqslant t < T$, при $(x,v,t) \in D$ мы назовем *порождающими характеристиками.* Заметим, что при $t \leqslant \tau < T$ порождающие характеристики $\hat{S}^\beta_\varphi(\tau,x,v,t)$ непрерывны по τ справа, а при $0 < \tau \leqslant t$ $\hat{S}^\beta_\varphi(\tau,x,v,t)$ непрерывны по τ слева.

Положим $S_1 = S \cap \Omega$, $D_1 = D \cap \Omega$, $S_2 = S \cap A_-$, $D_2 = D \cap A_-$, $S_3 = S \cap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$, $D_3 = D \cap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$.

Из [13, лемма 1.34] следует

Теорема 3.1. $\mu_7(S_1) = 0$, *множество* D_1 *открыто в* $\mathbb{R}^7$, $\nu_-(S_2) = 0$, $\mu_6(S_3) = 0$.

Обозначим $\Gamma_t = \{(x,v,\tau) \in D_1 : \tau = t\}$.

Замечание 3.1. Введем векторное поле $\Psi^\beta : \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T] \to \mathbb{R}^7$ по формуле

$$\Psi^\beta(x,v,t) := \Big(v, -\frac{\beta e}{m_\beta}E(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)], 1\Big).$$

Очевидно, $\operatorname{div}_v \Big(-\dfrac{\beta e}{m_\beta}E(x,t) + \dfrac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)]\Big) = 0$, $(x,v,t) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T]$.

Из замечания 3.1 следует

Лемма 3.1. *Для* $0 \leqslant s,t < T$ *отображение* $\hat{S}^\beta_\varphi(s,\ldots,t) : \Gamma_t \to \Gamma_s$ *биективно и сохраняет меру Лебега* $\mu_6(\cdot)$.

Подробное доказательство см. в [13, предложение 3, с. 52].

4. Структура сильных решений уравнений Власова

Пусть $w_\pm : A_\pm \to \mathbb{R}$ — измеримые по Борелю функции. Введем оператор $\mathcal{K}$, действующий по формуле

$$\mathcal{K}w_+(x,v,t) := w_+(\mathcal{R}^{-1}(x,v,t)) \text{ для п. в. } (x,v,t) \in A_-. \tag{4.1}$$

Обозначим далее $Vf^\beta := \dfrac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta\rangle + \Big\langle -\dfrac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi + \dfrac{\beta e}{m_\beta c}\big[v,B(x)\big], \nabla_v f^\beta\Big\rangle$ и рассмотрим следующую задачу:

$$Vf^\beta = 0, \quad x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, t \in (0,T),\ \beta = \pm 1, \tag{4.2}$$

$$f^\beta(x,v,0) = \mathring{f}^\beta(x,v), \quad x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm 1, \tag{4.3}$$

$$f^\beta_-(x,v,t) = \mathcal{K}f^\beta_+(x,v,t) \quad (x,v,t) \in A_-,\ \beta = \pm 1. \tag{4.4}$$

Здесь $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}(Q \times \mathbb{R}^3)$ — непрерывные функции с компактным носителем в $Q \times \mathbb{R}^3$, $\mathring{f}^\beta \geqslant 0$, а функции $f^\beta_\pm$, $\beta = \pm 1$ задаются по формулам

$$f^\beta_+(x,v,t) := \lim_{\tau \to t-0} f^\beta\left(S^\beta_\varphi(\tau,x,v,t),\tau\right),\ (x,v,t) \in A_+, \tag{4.5}$$

$$f^\beta_-(x,v,t) := \lim_{\tau \to t+0} f^\beta\left(S^\beta_\varphi(\tau,x,v,t),\tau\right),\ (x,v,t) \in A_-. \tag{4.6}$$

Существование пределов (4.5)-(4.6) вытекает из результатов предыдущего раздела.

Определение 4.1. Функции $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, мы будем называть *сильным решением* задачи (4.2)–(4.4), если функции $f^\beta(x,v,t)$ п. в. в Ω являются константами вдоль порождающих характеристик, удовлетворяют начальному условию (4.3) для п.в. $x \in \bar{Q}$ и $v \in \mathbb{R}^3$, а также краевому условию (4.4) для п.в. $(x,v,t) \in A_-$.

Теорема 4.1. *Существует сильное решение задачи* (4.2)–(4.4), *которое задается по формуле*

$$f^\beta(x,v,t) = \mathring{f}^\beta\left(\hat{S}^\beta_\varphi(0,x,v,t)\right),\ (x,v,t) \in D_1, \tag{4.7}$$

и является единственным с точностью до множества меры нуль.

Доказательство. Используя групповое свойство порождающих характеристик при подстановке в формулу (4.7), а именно, равенство $\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(s,y,w,\tau)=\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(s,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau),t)$, мы получим выражение, не зависящее от t, т. е. константу. Далее, в силу непрерывности порождающих характеристик справа в точке 0 мы получаем $f^{\beta}(x,v,0)=\mathring{f}^{\beta}\big(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,x,v,0)\big)=\mathring{f}^{\beta}(x,v)$, т. е. условия (4.3) выполняются. Условие (4.4) выполняется в силу определения порождающих характеристик. Единственность очевидна. $\square$

Следствие 4.1. *Пусть* $\mathring{f}^{\beta}\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$. *Тогда сильное решение задачи* (4.2)–(4.4) *непрерывно дифференцируемо в* D_1.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathring{f}^{\beta}\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, $\psi\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$ *и* $I:=[0,T)$, *а* $\{f^{\beta}\}$, $\beta=\pm1$, — *сильное решение задачи* (4.2)–(4.4). *Тогда*

$$\left(t\longmapsto\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi(x,v)f^{\beta}(x,v,t)dxdv\right)\in C^1(I)$$

и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi(x,v)f^{\beta}(x,v,t)dxdv=$$

$$=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\left(\langle v,\nabla_x\psi(x,v)\rangle+\left\langle-\frac{\beta e}{m_{\beta}}\varphi_x(x,t)+\frac{\beta e}{m_{\beta}c}\big[v,B(x)\big],\nabla_v\psi(x,v)\right\rangle\right)\times f^{\beta}(x,v,t)dxdv. \qquad (4.8)$$

Доказательство аналогично доказательству [14, лемма 3.3].

Обозначим $A_T:=Q\times\mathbb{R}^3\times\{T\}$ и $A_0:=Q\times\mathbb{R}^3\times\{0\}$.

Лемма 4.2. *Пусть* $\{f^{\beta}\}$, $\beta=\pm1$, — *сильное решение задачи* (4.2)–(4.4), *и пусть* $\psi\in\mathring{C}^1(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T])$. *Тогда*

$$\left\langle f^{\beta},V\psi\right\rangle=\int\limits_{A_+}\psi f^{\beta}_{+}d\nu_{+}+\int\limits_{A_T}\psi(x,v,T)f^{\beta}(x,v,T)dxdv-\int\limits_{A_-}\psi f^{\beta}_{-}d\nu_{-}-\int\limits_{A_0}\psi(x,v,0)f^{\beta}(x,v,0)dxdv, \qquad (4.9)$$

см. (4.2).

Доказательство аналогично доказательству [13, лемма 2.5, с. 68] и использует лемму 3.1.

5. Сильные решения уравнений со сглаживающим множителем

Рассмотрим теперь вопрос о существовании сильных решений для уравнений

$$\frac{\partial f^{\beta}_{\delta}}{\partial t}+\left\langle v,\nabla_x f^{\beta}_{\delta}\right\rangle+\left\langle\frac{\beta e}{m_{\beta}}E_{\delta}+\frac{\beta e}{m_{\beta}c}\big[v,B(x)\big],\nabla_v f^{\beta}_{\delta}\right\rangle=0, \qquad (5.1)$$
$$x\in Q,\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad t\in(0,T),\quad \beta=\pm1,$$

где f^{β}_{δ} — неизвестные функции, а функция E_{δ} определяется из соотношений

$$E_{\delta}(x,t)=-\nabla_x\varphi_{\delta}(x,t),\quad \varphi_{\delta}=\int\limits_{Q}G_{\delta}(x,y)\rho_{\delta}(y,t)dy, \qquad (5.2)$$

$$G_{\delta}(x,y)=\int\limits_{Q}G(x,\xi)\omega_{\delta}(y-\xi)d\xi, \qquad (5.3)$$

$$\rho_{\delta}(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(f^{+1}_{\delta}(x,v,t)-f^{-1}_{\delta}(x,v,t))dv. \qquad (5.4)$$

Здесь $G = G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в Q, а $\omega_\delta(x)$ — ядро усреднения, определенное по формуле $\omega_\delta(x) := \dfrac{1}{\delta^3}\omega\left(\dfrac{|x|}{\delta}\right)$, где

$$\omega(t) := \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases} \tag{5.5}$$

а постоянная $c > 0$ определяется из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega(|x|)dx = 1. \tag{5.6}$$

Замечание 5.1. Поскольку рассматриваемая нами область Q ограничена и имеет гладкую границу, функция Грина такой задачи существует, а ее единственность следует из [9, теорема 2.4]. Результаты, посвященные функции Грина, подробно изложены в [9].

Замечание 5.2. Так как $\omega \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, supp $\omega = \overline{B_1(0)}$, то $\omega_\delta \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ и supp $\omega_\delta = \overline{B_\delta(0)}$, при этом в силу (5.5)-(5.6)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_\delta(x)dx = 1. \tag{5.7}$$

Вместе с уравнениями (5.1) будем рассматривать начальные условия

$$f_\delta^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v), \qquad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \tag{5.8}$$

и краевые условия вида

$$f_{\delta,-}^\beta(x, v, t) = \mathcal{K} f_{\delta,+}^\beta, \qquad x \in A_-, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T), \quad \beta = \pm 1. \tag{5.9}$$

Здесь $\mathring{f}^\beta(x, v) \in \mathring{C}(Q \times \mathbb{R}^3)$, а функции $f_{\delta,+}^\beta$ и $f_{\delta,-}^\beta$ определены по формулам

$$f_{\delta,+}^\beta = \lim_{\tau \to t-0} f_\delta^\beta\left(S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau\right), \quad (x, v, t) \in A_+, \tag{5.10}$$

$$f_{\delta,-}^\beta = \lim_{\tau \to t+0} f_\delta^\beta\left(S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau\right), \quad (x, v, t) \in A_-. \tag{5.11}$$

Для $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$ обозначим через $\tilde{f}$ продолжение f нулем на $\mathbb{R}^n$. Тогда в уравнении (5.1) при определении $E_\delta(x, t)$ плотность заряда $\rho_\delta(x, t)$ мы заменим на сглаженную плотность, $\sigma_\delta = (\omega_\delta * \tilde{\rho}_\delta)(x, t)$, и в силу (5.3) получим выражение

$$\varphi_\delta(x, t) = \int\limits_Q G(x, y)(\omega_\delta * \tilde{\rho}_\delta)(y, t)dy,$$

где $(\omega_\delta * \tilde{\rho}_\delta)(y, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \omega_\delta(y - \xi)\tilde{\rho}_\delta(\xi, t)d\xi$.

Для фиксированных $\delta > 0$ построим последовательность сильных решений уравнений Власова $f_{\delta,n}^\beta$ по формуле

$$f_{\delta,n}^\beta(x, v, t) := \mathring{f}^\beta\left((\hat{S}_{\varphi_{\delta,n-1}}^\beta(0, x, v, t))_{\delta,n}\right), \quad n \geqslant 1, \tag{5.12}$$

где $(\hat{S}_{\varphi_{\delta,n-1}}^\beta(0, x, v, t))_{\delta,n}$ — порождающие характеристики уравнений (5.1) с функциями $E_{\delta,n-1}$, заданными по формуле $E_{\delta,n-1}(x, t) := -\nabla_x \varphi_{\delta,n-1}(x, t)$. Здесь функции $\varphi_{\delta,n-1}(x, t)$ определяются как единственные классические решения задач

$$\Delta\varphi_{\delta,n-1}(x, t) = -4\pi e \sigma_{\delta,n-1}(x, t),$$
$$\varphi_{\delta,n-1}|_{\partial Q} = 0,$$

где

$$\rho_{\delta,n-1}(x, t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} (f_{\delta,n-1}^{+1} - f_{\delta,n-1}^{-1})dv, \quad \sigma_{\delta,n-1}(x, t) = \tilde{\rho}_{\delta,n-1} * \omega_\delta, \quad n \geqslant 1.$$

Функции $f^{\beta}_{\delta,0}$ и $\rho_{\delta,0}$ определяются по формулам

$$f^{\beta}_{\delta,0}(x,v) := \mathring{f}^{\beta}(x,v), \quad \rho_{\delta,0}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} (f^{+1}_{\delta,0} - f^{-1}_{\delta,0})dv.$$

Замечание 5.3. По построению $\sigma_{\delta,n-1}(\cdot,t)$ принадлежат пространству $\mathring{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ для всех $t \in [0,T]$, а также являются непрерывными по (x,t) в $\bar{Q} \times [0,T]$. Существование порождающих характеристик $(\hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\delta,n-1}}(0,x,v,t))_{\delta,n}$ на каждом шаге гарантировано тем, что функции $\varphi_{\delta,n-1}(x,t)$ и $B(x)$ в уравнении (5.1) удовлетворяет условию 3.1. Отсюда и из теоремы 3.1 мы также получаем, что множества $(D_1)_{\delta,n-1} \subset \Omega$ являются открытыми и $\mu_7(\Omega \setminus (D_1)_{\delta,n-1}) = 0$.

Из теоремы 4.2 (теорема Данфорда—Петтиса) и леммы 4.5 в [10], а также из предложения 5 в [13] вытекает, что существуют подпоследовательность $f^{\beta}_{\delta,n_k} \subset f^{\beta}_{\delta,n}$ и функция $f^{\beta}_{\delta} : I \to L_1(Q\times\mathbb{R}^3)$ такие, что для всех $g \in L_{\infty}(\mathbb{R}^6)$ выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in I} \left| \int (\tilde{f}^{\beta}_{\delta,n_k}(x,v,t) - \tilde{f}^{\beta}_{\delta}(x,v,t))g(x,v)dxdv \right| = 0, \tag{5.13}$$

а также отображение $\tilde{f}^{\beta}_{\delta} : I \to L_1(\mathbb{R}^6)$ непрерывно в слабой топологии на $L_1(\mathbb{R}^6)$. Переобозначим подпоследовательность f^{β}_{δ,n_k} снова как $f^{\beta}_{\delta,n}$. Положим теперь

$$\tilde{\rho}_{\delta}(y,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\tilde{f}^{+1}_{\delta}(y,v,t) - \tilde{f}^{-1}_{\delta}(y,v,t))dv, \quad \sigma_{\delta}(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_{\delta}(y,t)\omega_{\delta}(x-y)dy,$$

$$\varphi_{\delta}(x,t) := \int\limits_{Q} G(x,\xi)\sigma_{\delta}(\xi,t)d\xi, \quad E_{\delta}(x,t) := -\nabla_x\varphi_{\delta}(x,t), \quad x \in \bar{Q},\ t \in I.$$

Далее, аналогично 3 и 4 шагу доказательства теоремы 4 из [14], справедливы следующие утверждения.

Замечание 5.4.

a) Отображения $I \ni t \to \sigma_{\delta}(\cdot,t) \in L_1(Q) \cap L_{\infty}(Q)$ непрерывны, а также справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{t\in K} \|\sigma_{\delta,n}(\cdot,t) - \sigma_{\delta}(\cdot,t)\|_1 = 0$, где $K = [0,a] \subset I$.

b) Вектор-функции $E_{\delta,n}$ и E_{δ} удовлетворяют условиям леммы 2.1 в [14], отображение $I \ni t \to E_{\delta}(\cdot,t) \in C(\bar{Q})$ непрерывно, а также выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in K} \|E_{\delta,n}(\cdot,t) - E_{\delta}(\cdot,t)\| = 0. \tag{5.14}$$

Замечание 5.5. Существует число $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $(x,v,t) \in D_1$, $s \neq t^{\beta}_k(x,v,t)$ $(k \in \mathbb{Z})$ и $n \geqslant N$ мы имеем $(x,v,t) \in D_{1n}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \hat{S}^{\beta}_{\delta,n}(s,x,v,t) = \hat{S}^{\beta}_{\delta}(s,x,v,t), \tag{5.15}$$

где $D_{1n} \subset \Omega$ — открытое множество, $\mu_7(\Omega \setminus D_{1n}) = 0$.

Далее, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4 из [14], а именно, переходя к рассмотрению предела слабо сходящейся подпоследовательности сильных решений уравнений Власова $f^{\beta}_{\delta,n}$, мы получим, что функции $g^{\beta}_{\delta}(x,v,t) := \mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\delta}(0,x,v,t))$ являются сильным решением задачи (5.1), (5.8), (5.9), где

$$\varphi_{\delta}(x,t) := \int\limits_{Q} G(x,\xi)\sigma_{\delta}(\xi,t)d\xi,\ E_{\delta}(x,t) := -\nabla_x\varphi_{\delta}(x,t),$$

$$\tilde{\rho}_{\delta}(y,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\tilde{f}^{+1}_{\delta}(y,v,t) - \tilde{f}^{-1}_{\delta}(y,v,t))dv,\ \sigma_{\delta}(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_{\delta}(y,t)\omega_{\delta}(x-y)dy, \quad x,y \in \bar{Q},\ t \in I.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathring{f}^{\beta} \in \mathring{C}(Q \times \mathbb{R}^3)$, $\mathring{f}^{\beta} \geqslant 0$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует сильное решение уравнений* (5.1) *с условиями* (5.8), (5.9).

6. Теорема о существовании глобальных слабых решений смешанной задачи для системы уравнений Власова—Пуассона с внешним магнитным полем

Пусть $f^\beta \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega := Q \times \mathbb{R}^3 \times (0,T)$, а функция $E = E(x,t)$ такова, что $f^\beta E$ локально интегрируема на Ω.

Перепишем задачу (2.1)-(2.2), (2.7)–(2.9) следующим образом:

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \Big\langle v, \nabla_x f^\beta \Big\rangle + \frac{\beta e}{m_\beta} \Big\langle E + \frac{1}{c}\big[v, B\big], \nabla_v f^\beta \Big\rangle = 0, \tag{6.1}$$

$$x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, t \in (0,T), \beta = \pm 1,$$

$$E(x,t) = -\int\limits_Q \nabla_x G(x,\xi)\rho(\xi,t)d\xi, \;\; \rho(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x,v,t)dv, \tag{6.2}$$

$$x \in \bar{Q}, t \in [0,T),$$

$$f^\beta(x,v,0) = \mathring{f}^\beta(x,v), \;\; x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \tag{6.3}$$

$$f^\beta_-(x,v,t) = \mathcal{K} f^\beta_+(x,v,t), \quad (x,v,t) \in A_-, \;\; \beta = \pm 1. \tag{6.4}$$

Определение 6.1. Функции f^β назовем *слабо дифференцируемыми по направлению*

$$l^\beta := \left(v, \frac{\beta e}{m_\beta} E + \frac{\beta e}{m_\beta c}\big[v, B(x)\big], 1\right) \tag{6.5}$$

если существуют функции $h^\beta \in L_p(\Omega)$ такие, что для всех $g^\beta \in \mathring{C}^1(\Omega)$

$$\Big\langle h^\beta, g^\beta \Big\rangle = -\Big\langle f^\beta, L^\beta g^\beta \Big\rangle := -\int\limits_\Omega f^\beta L^\beta g^\beta dx dv dt, \tag{6.6}$$

где

$$L^\beta g^\beta := \Big\langle v, \nabla_x g^\beta \Big\rangle + \Big\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E + \frac{\beta e}{m_\beta c}\big[v, B(x)\big], \nabla_v g^\beta \Big\rangle + \frac{\partial g^\beta}{\partial t}. \tag{6.7}$$

Замечание 6.1. В силу определения 4.1 и лемм 4.1, 4.2 любое сильное решение $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, задачи (2.1)-(2.2), (2.7)–(2.9) с начальными функциями $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ слабо дифференцируемо по направлению l^β, при этом $L^\beta f^\beta = 0$, следы f^β на $A_\pm$ существуют и задаются формулами (4.5), (4.6).

Функции $h^\beta \in L_p(\Omega)$ определены единственным образом и обозначаются через $L^\beta f^\beta$.

Определение 6.2. Пусть функции $f^\beta \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ слабо дифференцируемы по направлению l^β. Функции $f^\beta_\pm \in L_{p,loc}(A_\pm)$ будем называть *следами* f^β на $A_\pm$, если

$$\Big\langle L^\beta f^\beta, \psi^\beta \Big\rangle + \Big\langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \Big\rangle = \int\limits_{A_+} f^\beta_+ \psi^\beta d\nu_+ - \int\limits_{A_-} f^\beta_- \psi^\beta d\nu_- \tag{6.8}$$

для любых $\psi^\beta \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0,T))$.

Определение 6.3. Функции $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, будем называть *слабым решением* системы уравнений (6.1)–(6.4), если выполняются следующие условия:

6.3.1. Отображения $f^\beta : I \to (L_1(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(1,\infty)) \cap (L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(\infty,1))$ непрерывны, $\beta = \pm 1$.
6.3.2. $f^\beta(x,v,0) = \mathring{f}^\beta(x,v)$ для $x \in \bar{Q}$, $v \in \mathbb{R}^3$, $\beta = \pm 1$.
6.3.3. Для почти всех $(x,t) \in Q \times [0,T)$ и $\rho(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum\limits_\beta \beta f^\beta(x,v,t)dv$ положим $E(x,t) := -\int\limits_Q \nabla_x G(x,\xi)\rho(\xi,t)d\xi$; функции $f^\beta E$ локально интегрируемы на Ω.

6.3.4. Для всех $\psi^\beta \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, $\beta=\pm1$, мы имеем

$$\left(t \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi^\beta(x,v) f^\beta(x,v,t)dxdv\right) \in C^1(I),$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi^\beta(x,v) f^\beta(x,v,t)dxdv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\psi^\beta)(x,v,t) f^\beta(x,v,t)dxdv,$$

где

$$(X^\beta\psi^\beta)(x,v,t) := \left\langle v, \nabla_x\psi^\beta(x,v)\right\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta}E(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}\big[v, B(x)\big], \nabla_v\psi^\beta(x,v)\right\rangle.$$

6.3.5. Следы f^β на $A_\pm$ существуют и $f^\beta_- = \mathcal{K} f^\beta_+$ на A_-, $\beta=\pm1$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, $\mathring{f}^\beta \geqslant 0$. *Тогда существует слабое решение* $\{f^\beta\}$, $\beta=\pm1$, *задачи* (6.1)–(6.4).

Доказательство теоремы 6.1 опирается на следующие вспомогательные результаты.

Лемма 6.1. *Пусть* $1\leqslant r<3$, $r\leqslant q<\dfrac{3r}{3-r}$, *и пусть* $K\subset\mathbb{R}^3$ *— область такая, что* $K\subset Q$. *Тогда оператор* $A_G : L_r(Q)\to L^3_q(Q)$, *определенный по формуле*

$$(A_G\sigma)(x) = \chi_K(x)\int\limits_Q \nabla_x G(x,y)\sigma(y)dy,$$

является компактным.

Доказательство см. в [13, лемма 4.3].

Лемма 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1, *и пусть* $\{f^\beta_\delta\}$, $\delta>0$, *— сильное решение задачи* (5.1), (5.8)-(5.9). *Тогда для любой последовательности* $\{\delta_n\}$, $\delta_n\to0$ *при* $n\to\infty$, $\delta_n>0$, *существуют подпоследовательность* $\{\delta_{n_k}\}$ *и функции* $f^\beta \in C(I,(L_p(Q\times\mathbb{R}^3), \sigma(p,p')))$ *такие, что для любых* $p,p'\in[1,\infty]$, $\dfrac1p+\dfrac1{p'}=1$, *справедливы утверждения*:

a) $f^\beta_{\delta_{n_k}} \rightharpoonup f^\beta$ *в* $(L_p(Q\times\mathbb{R}^3),\sigma(p,p'))$ *равномерно по* $t\in I$ *при* $k\to\infty$;

b) $f^\beta_{\delta_{n_k}} \rightharpoonup f^\beta$ *в* $(L_p(\Omega),\sigma(p,p'))$ *при* $k\to\infty$;

c) *существуют* $g^\beta_\pm \in L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$ *такие, что* $f^\beta_{\delta_{n_k},\pm} \rightharpoonup^* g^\beta_\pm$ *в* $L_\infty(A_\pm,d\nu_\pm)$ *при* $k\to\infty$.

Доказательство см. в [13, лемма 4.5].
В дальнейшем для простоты будем обозначать подпоследовательность $\{\delta_{n_k}\}$ через δ_n.

Лемма 6.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1.

a) *Пусть, кроме того,* $1\leqslant p\leqslant\dfrac53$, *а функции* $\rho^\beta_{\delta_n} : I\to L_p(Q)$ *определены по формуле* $\rho^\beta_{\delta_n}(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\delta_n}(x,v,t)dv$. *Тогда* $\rho^\beta_{\delta_n}(x,t) \rightharpoonup \rho^\beta(x,t)$ *при* $n\to\infty$ *в* $(L_p(Q),\sigma(p,p'))$ *равномерно по* $t\in I$.

b) *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\psi^\beta\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$. *Тогда* $\int\limits_{\mathbb{R}^3}\psi^\beta(\cdot,v) f^\beta_{\delta_n}(\cdot,v,t)dv \rightharpoonup \int\limits_{\mathbb{R}^3}\psi^\beta(\cdot,v)f^\beta(\cdot,v,t)dv$ *в* $(L_p(Q),\sigma(p,p'))$ *при* $n\to\infty$ *равномерно по* $t\in I$.

Доказательство см. в [13, лемма 4.7].
Далее будет приведено доказательство теоремы 6.1.

Доказательство теоремы 6.1. Из леммы 4.1 следует, что любое сильное решение уравнений Власова также будет и слабым решением. Рассмотрим функции $f^\beta, g^\beta_\pm$, $\beta=\pm1$, из леммы 6.2. Покажем, что $\{f^\beta\}$, $\beta=\pm1$, — слабое решение задачи (6.1)–(6.4).

Нам нужно убедиться, что выполняются условия 6.3.1–6.3.5 в определении слабого решения 6.3. Выполнение условий 6.3.1–6.3.3 для функций $\{f^\beta\}$ следует из леммы 6.2, равенства (5.8), а также соотношений (6.2) и (5.14). Для того, чтобы проверить выполнение пунктов 6.3.4 и 6.3.5, покажем сначала, что для любых $\psi^\beta \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\left|A^\beta_{\delta_n}-A^\beta\right|dxdv=0, \tag{6.9}$$

где

$$A^\beta_{\delta_n}:=\Big\langle v,\nabla_x\psi^\beta\Big\rangle f^\beta_{\delta_n}+\Big\langle\frac{\beta e}{m_\beta}E_{\delta_n}+\frac{\beta e}{m_\beta c}\big[v,B(x)\big],\nabla_v\psi^\beta\Big\rangle f^\beta_{\delta_n},$$
$$A^\beta:=\Big\langle v,\nabla_x\psi^\beta\Big\rangle f^\beta+\Big\langle\frac{\beta e}{m_\beta}E+\frac{\beta e}{m_\beta c}\big[v,B(x)\big],\nabla_v\psi^\beta\Big\rangle f^\beta.$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\left|A^\beta_{\delta_n}-A^\beta\right|dxdv\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}(I_1+I_2+I_3),$$

где

$$I_1=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\left|\Big\langle v,\nabla_x\psi^\beta\Big\rangle(f^\beta_{\delta_n}-f^\beta)\right|dxdv,$$
$$I_2=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\left|\Big\langle\frac{\beta e}{m_\beta c}\big[v,B(x)\big],\nabla_v\psi^\beta\Big\rangle(f^\beta_{\delta_n}-f^\beta)\right|dxdv,$$
$$I_3=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\left|\Big\langle\frac{\beta e}{m_\beta}E_{\delta_n},\nabla_v\psi^\beta\Big\rangle f^\beta_{\delta_n}-\Big\langle\frac{\beta e}{m_\beta}E(t),\nabla_v\psi^\beta\Big\rangle f^\beta\right|dxdv.$$

Поскольку $\big\langle v,\nabla_x\psi^\beta\big\rangle\in L_\infty(Q\times\mathbb{R}^3)\cap L_1(Q\times\mathbb{R}^3)$, из леммы 6.2 а) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\in I}I_1=0$. Аналогично, $\Big\langle\dfrac{\beta e}{m_\beta c}\big[v,B(x)\big],\nabla_v\psi^\beta\Big\rangle\in L_\infty(Q\times\mathbb{R}^3)\cap L_1(Q\times\mathbb{R}^3)$, поэтому из леммы 6.2 а) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\in I}I_2=0$. Применяя оценки (4.9)-(4.10) из [13] и леммы 6.1-6.2, получим выполнение равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\in I}I_3=0$.

Обозначим $(X^\beta_{\delta_n}\psi^\beta)(x,v,t):=\big\langle v,\nabla_x\psi^\beta(x,v)\big\rangle+\Big\langle\dfrac{\beta e}{m_\beta}E_{\delta_n}(x,t)+\dfrac{\beta e}{m_\beta c}\big[v,B(x)\big],\nabla_v\psi^\beta(x,v)\Big\rangle$, тогда из (6.9) мы получим

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}(X^\beta_{\delta_n}\psi^\beta)(x,v,t)f^\beta_{\delta_n}(x,v,t)dxdv\to\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}(X^\beta\psi^\beta)(x,v,t)f^\beta(x,v,t)dxdv \tag{6.10}$$

при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I$. С другой стороны, в силу леммы 6.2 а) имеем

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi^\beta(x,v)f^\beta_{\delta_n}(x,v,t)dxdv\to\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi^\beta(x,v)f^\beta(x,v,t)dxdv \tag{6.11}$$

при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I$, при этом из леммы 4.1 следует, что

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi^\beta(x,v)f^\beta_{\delta_n}(x,v,t)dxdv\in C^1(I), \tag{6.12}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi^\beta(x,v)f^\beta_{\delta_n}(x,v,t)dxdv=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}(X^\beta_{\delta_n}\psi^\beta)(x,v,t)f^\beta_{\delta_n}(x,v,t)dxdv. \tag{6.13}$$

Из (6.10)–(6.13) и единственности предела мы заключаем, что последовательность

$$\left\{\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi^\beta(x,v)f^\beta_{\delta_n}(x,v,t)dxdv\right\}$$

при $n\to\infty$ сходится к

$$\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi^\beta(x,v)f^\beta(x,v,t)dxdv\biggr)\in C^1(I)$$

равномерно по $t\in I$, при этом выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi^\beta(x,v)f^\beta(x,v,t)dxdv\biggr)=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}(X^\beta\psi^\beta)(x,v,t)f^\beta(x,v,t)dxdv$$

при $t\in I$.

Убедимся, что выполняется пункт 6.3.5 определения слабого решения. Для этого нужно показать, что функции f^β слабо дифференцируемы, при этом $L^\beta f^\beta=0$ и

$$\Bigl\langle f^\beta,L^\beta\psi^\beta\Bigr\rangle=\int\limits_{A_+}g^\beta_+\psi^\beta d\nu_+-\int\limits_{A_-}g^\beta_-\psi^\beta d\nu_-= \tag{6.14}$$

$$=\int\limits_{A_+}g^\beta_+\psi^\beta d\nu_+-\int\limits_{A_-}\mathcal{K}g^\beta_+\psi^\beta d\nu_-. \tag{6.15}$$

Тогда $g^\beta_\pm=f^\beta_\pm$ и будет выполнено условие $f^\beta_-=\mathcal{K}f^\beta_+$.

Рассмотрим сначала функции ψ^β следующего вида:

$$\psi^\beta(x,v,t)=\psi^\beta_1(x,v)\psi^\beta_2(t),\quad \psi^\beta_1\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3),\quad \psi^\beta_2\in\mathring{C}^1(0,T). \tag{6.16}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl|\Bigl\langle f^\beta_{\delta_n},L^\beta_{\delta_n}\psi^\beta\Bigr\rangle-\Bigl\langle f^\beta,L^\beta\psi^\beta\Bigr\rangle\Bigr|=0, \tag{6.17}$$

где $L^\beta_{\delta_n}\psi^\beta:=\bigl\langle v,\nabla_x\psi^\beta\bigr\rangle+\Bigl\langle\dfrac{\beta e}{m_\beta}E_{\delta_n}+\dfrac{\beta e}{m_\beta c}\bigl[v,B(x)\bigr],\nabla_v\psi^\beta\Bigr\rangle+\dfrac{\partial\psi^\beta}{\partial t}$. Действительно, это следует из леммы 6.2 и равенства

$$\Bigl\langle f^\beta_{\delta_n},L^\beta_{\delta_n}\psi^\beta\Bigr\rangle-\Bigl\langle f^\beta,L^\beta\psi^\beta\Bigr\rangle=\int\limits_0^T\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}(f^\beta_{\delta_n}-f^\beta)\frac{\partial\psi^\beta}{\partial t}dxdvdt+\int\limits_0^T\psi^\beta_2\Bigl(\Bigl\langle f^\beta_{\delta_n},X^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1\Bigr\rangle-\Bigl\langle f^\beta,X^\beta\psi^\beta_1\Bigr\rangle\Bigr)dt.$$

Из леммы 4.2 вытекает равенство

$$\Bigl\langle f^\beta_{\delta_n},L^\beta_{\delta_n}\psi^\beta\Bigr\rangle=\int\limits_{A_+}f^\beta_{\delta_n,+}\psi^\beta d\nu_+-\int\limits_{A_-}f^\beta_{\delta_n,-}\psi^\beta d\nu_-.$$

Далее, поскольку $\psi^\beta_1\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, получаем $\Bigl\langle f^\beta_{\delta_n},L^\beta_{\delta_n}\psi^\beta\Bigr\rangle=0$ для любых $n\in\mathbb{N}$. Действительно,

$$\Bigl\langle f^\beta_{\delta_n},L^\beta_{\delta_n}\psi^\beta\Bigr\rangle=\int\limits_0^T\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}f^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1\frac{\partial\psi^\beta_2}{\partial t}dxdvdt+\int\limits_0^T\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi_2 f^\beta_{\delta_n}X^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1dxdvdt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}f^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1\frac{\partial\psi^\beta_2}{\partial t}dxdvdt+\int\limits_0^T\psi^\beta_2\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}f^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1dxdv\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}f^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1\frac{\partial\psi^\beta_2}{\partial t}dxdvdt+\Bigl(\psi^\beta_2(0)-\psi^\beta_2(T)\Bigr)\left(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}f^\beta_{\delta_n}X^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1dxdv\right)\Bigg|_0^T-$$

$$-\int\limits_0^T \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta_{\delta_n}\psi^\beta_1 \frac{\partial \psi^\beta_2}{\partial t} dxdvdt = 0.$$

Тогда из (6.17) следует, что $\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle = 0$. Кроме того,

$$\left|\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle - \int\limits_{A_+} g^\beta_+\psi^\beta d\nu_+ + \int\limits_{A_-} g^\beta_-\psi^\beta d\nu_-\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle - \left\langle f^\beta_{\delta_n}, L^\beta_{\delta_n}\psi^\beta\right\rangle\right| + \left|\int\limits_{A_+} f^\beta_{\delta_n,+}\psi^\beta d\nu_+ - \int\limits_{A_+} g^\beta_+\psi^\beta d\nu_+\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{A_-} f^\beta_{\delta_n,-}\psi^\beta d\nu_- - \int\limits_{A_-} g^\beta_-\psi^\beta d\nu_-\right| \to 0, \quad n\to\infty,$$

это доказывает (6.14) для функций ψ^β с разделенными переменными.

Пусть теперь $\psi^\beta \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T))$. По теореме о продолжении найдутся функции $\xi^\beta \in \mathring{C}^1(G)$ (где $G\subset(\mathbb{R}^6\times(0,T))$ — открытое множество такое, что $(Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T))\subset G$) такие, что

$$\xi^\beta\big|_{(Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T))} = \psi^\beta.$$

Из [11, предложение 1, с. 369] следует, что существуют функции $\xi^\beta_k \in \mathring{C}^1(G)$ вида

$$\xi^\beta_k(x,v,t) = \sum_{i=1}^{j_k} c_{k,i}\xi^{\beta,1}_{k,i}(x,v)\xi^{\beta,2}_{k,i}(t),$$

такие, что $\xi^\beta_k \to \xi^\beta$ при $k\to\infty$ в $C^1(G)$ (здесь коэффициенты $c_{k,i}\in\mathbb{R}$). Положим

$$\psi^\beta_k := \xi^\beta_k\big|_{Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T)},$$

таким образом, ψ^β_k являются линейными комбинациями произведений функций с разделенными переменными и принадлежат классу $\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T))$. Это верно для всех $k\in\mathbb{N}$, тогда для любых $\psi^\beta_k \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T))$ будет выполняться $\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta_k\right\rangle = 0$. Далее, для всех $k\in\mathbb{N}$ будем считать, что $\operatorname{supp}\psi^\beta_k \subset B_R(0)$, тогда

$$\left|\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta_k\right\rangle - \left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle\right| \leqslant \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T)} |f^\beta||L^\beta\psi^\beta_k - L^\beta\psi^\beta| dxdvdt.$$

Так как $|f^\beta||L^\beta\psi^\beta_k - L^\beta\psi^\beta| \in L_1(Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T))$ (см. [13, с. 104]), из поточечной сходимости $L^\beta\psi^\beta_k \to L^\beta\psi^\beta$ при $k\to\infty$ в $Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T)$, а также по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получим, что

$$\left|\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta_k\right\rangle - \left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle\right| \to 0, \quad k\to\infty. \tag{6.18}$$

Поскольку для любых $k\in\mathbb{N}$ выполняется равенство $\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta_k\right\rangle = 0$, то и $\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle = 0$. В силу неравенства

$$\left|\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle - \int\limits_{A_+} g^\beta_+\psi^\beta d\nu_+ + \int\limits_{A_-} g^\beta_-\psi^\beta d\nu_-\right| \leqslant \left|\left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta\right\rangle - \left\langle f^\beta, L^\beta\psi^\beta_k\right\rangle\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{A_+} g_+^\beta \psi^\beta d\nu_+ - \int\limits_{A_+} g_+^\beta \psi_k^\beta d\nu_+\right| + \left|\int\limits_{A_-} g_-^\beta \psi^\beta d\nu_- - \int\limits_{A_-} g_-^\beta \psi_k^\beta d\nu_-\right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

мы получаем, что $L^\beta f^\beta$ существует и $L^\beta f^\beta = 0$, а также выполняется (6.14). Для завершения доказательства нужно показать выполнение равенства (6.15). Это равенство следует из доказательства предложения 6 в [13, с. 102–106]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсеньев А. А.* О существовании обобщенных и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области// Дифф. уравн. — 1979. — *15*, № 7. — С. 1253–1266.
2. *Беляева Ю. О., Скубачевский А. Л.* Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — *477*. — С. 12–34.
3. *Ильгисонис В. В.* Классические задачи физики горячей плазмы. — М.: МЭИ, 2016.
4. *Скубачевский А. Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова—Пуассона в полупространстве// Докл. РАН. — 2012. — *443*, № 4. — С. 431–434.
5. *Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова—Пуассона в полупространстве// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 204–232.
6. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова—Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле// Усп. мат. наук. — 2014. — *69*, № 2. — С. 107–148.
7. *Batt J.* Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics// J. Differ. Equ. — 1977. — *25*, № 3. — С. 342–364.
8. *Belyaeva Yu. O., Gebhard B., Skubachevskii A. L.* A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations// Kinet. Relat. Models. — 2021. — *14*, № 2. — С. 257–282.
9. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1977.
10. *Horst E., Hunze R.* Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlassov equation// Math. Methods Appl. Sci. — 1984. — *6*. — С. 262–279.
11. *Horvath J.* Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. 1. — Reading, etc.: Addison-Wesley, 1966.
12. *Knopf P.* Confined steady states of a Vlasov–Poisson plasma in an infitely long cylinder// Math. Methods Appl. Sci. — 2019. — *42*. — С. 6369–6384.
13. *Weckler J.* Zum Anfangs-Randwertproblem des Vlasov–Poisson-Systems// Dissertation. — Universität München, 1994.
14. *Weckler J.* On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1995. — *130*, № 2. — С. 145–161.

Ю. О. Беляева
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `belyaeva-yuo@rudn.ru`

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `skublector@gmail.com`

UDC 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398
EDN: FITUOA

On global weak solutions of the Vlasov–Poisson equations with external magnetic field

Yu. O. Belyaeva and A. L. Skubachevskii

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. We consider the first mixed problem for the system of Vlasov–Poisson equations with a given external magnetic field in a bounded domain. This problem describes the kinetics of high-temperature plasma in controlled thermonuclear fusion plants and is considered with respect to unknown functions: electric field potential, distribution functions of positively charged ions and electrons. Additionally, we assumed that the distribution functions of charged particles satisfy the condition of mirror reflection from the boundary of the domain under consideration. We prove the existence of global weak solutions of such a problem.

Keywords: Vlasov equations, weak solutions, external magnetic field.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by the grant No. 22-21-00392 from the Russian Science Foundation.

For citation: Yu. O. Belyaeva, A. L. Skubachevskii, "On global weak solutions of the Vlasov–Poisson equations with external magnetic field," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 3, 383–398. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398

REFERENCES

1. A. A. Arsen'ev, "O sushchestvovanii obobshchennykh i statsionarnykh statisticheskikh resheniy sistemy uravneniy Vlasova v ogranichennoy oblasti" [On the existence of generalized and stationary statistical solutions of the Vlasov system of equations in a bounded domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, No. 7, 1253–1266 (in Russian).
2. Yu. O. Belyaeva and A. L. Skubachevskii, "Ob odnoznachnoy razreshimosti pervoy smeshannoy zadachi dlya sistemy uravneniy Vlasova—Puassona v beskonechnom tsilindre" [On the unique solvability of the first mixed problem for the system of Vlasov–Poisson equations in an infinite cylinder], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 12–34 (in Russian).
3. V. V. Il'gisonis, *Klassicheskie zadachi fiziki goryachey plazmy* [Classical Problems of Hot Plasma Physics], MEI, Moscow, 2016 (in Russian).
4. A. L. Skubachevskii, "Ob odnoznachnoy razreshimosti smeshannykh zadach dlya sistemy uravneniy Vlasova—Puassona v poluprostranstve" [On the unique solvability of mixed problems for the system of Vlasov–Poisson equations in a half-space], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2012, **443**, No. 4, 431–434 (in Russian).
5. A. L. Skubachevskii, "Smeshannye zadachi dlya uravneniy Vlasova—Puassona v poluprostranstve" [Mixed problems for the Vlasov—Poisson equations in a half-space], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 204–232 (in Russian).
6. A. L. Skubachevskii, "Uravneniya Vlasova—Puassona dlya dvukomponentnoy plazmy v odnorodnom magnitnom pole" [Vlasov–Poisson equations for two-component plasma in a uniform magnetic field], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2014, **69**, No. 2, 107–148 (in Russian).

7. J. Batt, "Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics," *J. Differ. Equ.*, 1977, **25**, No. 3, 342–364.
8. Yu. O. Belyaeva, B. Gebhard, and A. L. Skubachevskii, "A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations," *Kinet. Relat. Models*, 2021, **14**, No. 2, 257–282.
9. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
10. E. Horst and R. Hunze, "Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlassov equation," *Math. Methods Appl. Sci.*, 1984, **6**, 262–279.
11. J. Horvath, *Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. 1*, Addison-Wesley, Reading, etc., 1966.
12. P. Knopf, "Confined steady states of a Vlasov–Poisson plasma in an infitely long cylinder," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2019, **42**, 6369–6384.
13. J. Weckler, "Zum Anfangs-Randwertproblem des Vlasov–Poisson-Systems," *Dissertation*, Universität München, 1994.
14. J. Weckler, "On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1995, **130**, No. 2, 145–161.

Yu. O. Belyaeva
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `belyaeva-yuo@rudn.ru`

A. L. Skubachevskii
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `skublector@gmail.com`