

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382

EDN: VCEYZY

ЗАДАЧА УБЕГАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ

Л. П. Югай

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта, Чирчик, Узбекистан

Аннотация. Рассмотрена задача убегания в постановке Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко для линейных дискретных игр, зависящих от параметра. Получены достаточные условия и области значений параметров, обеспечивающие разрешимость задачи убегания. Полученные результаты применены к решению задачи убегания для известной в теории дифференциальных игр задачи «Изотропные ракеты»—«Мальчик и крокодил» в дискретном варианте.

Ключевые слова: дифференциальная игра, дискретная игра, убегание, преследователь, убегающий игрок, управление, параметр, терминальное множество.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. П. Югай. Задача убегания в линейных параметрических дискретных играх // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 375–382. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382>

1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретные игры занимают важное место в теории игр. В фундаментальной монографии основателя теории дифференциальных игр Р. Айзекса указана важность исследования дискретных игр с точки зрения их практических приложений [13, с. 65]. Источником дискретных игр являются непрерывные (континуальные) дифференциальные игры или самостоятельно возникающие в различных прикладных областях дискретные конфликтно управляемые процессы и их модели. Основные постановки задач в дифференциальных и дискретных играх изложены в [6, 13, 14]. Дискретные дифференциальные игры начали интенсивно развиваться в работах [2, 7, 10–12]. Нелинейным дискретным играм посвящены работы [1, 7, 8]. Различные стороны, особенности и приложения дискретных конфликтно управляемых процессов (игр) исследованы в [3–5, 9, 15].

В данной работе рассмотрены линейные дискретные игры с входящим в уравнения параметром, для которых получены достаточные условия убегания из любых допустимых начальных позиций. Для известной в теории дифференциальных игр задачи «Изотропные ракеты»—«Мальчик и крокодил» [6, 13] получен новый дискретный аналог, к которому применены основные результаты работы по решению задачи убегания.

2. ПОСТАНОВКА ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ УБЕГАНИЯ

2.1. Основные определения и формулировка игровых задач. В пространстве \mathbb{R}^n рассматривается движение вектора $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, которое описывается линейным дискретным

уравнением:

$$z((k+1)\tau) = A(\tau)z(k\tau) + B(\tau)u + D(\tau)v, \quad (2.1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $\tau \geq 0$; u и v — параметры, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$; P и Q — компакты, содержащие в себе начала несущих пространств ($0_p \in P$, $0_q \in Q$); $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $D(\tau)$ — матрицы размерностей $n \times n$, $n \times p$ и $n \times q$ соответственно, зависящие от параметра. Терминальное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — непустое и замкнутое.

Уравнение (2.1) носит описательный характер и приобретает конкретный смысл, если будут указаны правила выбора параметров. Параметр $\tau \geq 0$ после выбора фиксируется. Параметры u и v выбираются двумя сторонами, их традиционно называют *игроками* — *преследователем* и *убегающим*. Цели игроков в общем случае являются не совпадающими. Игра начинается из начальной позиции $z_0 \notin M$. Убегающий игрок стремится уклонить бесконечно долго от терминального множества M дискретную траекторию $z(k\tau)$, $k = 1, 2, \dots$, при любом возможном поведении преследователя. Цель преследователя — добиться включения $z(k\tau) \in M$ при некотором $k \geq 1$.

2.2. Пошаговый процесс убегания. Опишем более детально процесс игры. Дискретная игра убегания (2.1) проходит пошагово. На шаге 1 полагают $k = 0$ и фиксируется некоторое значение параметра $\tau > 0$. Считаем, что начальная позиция z_0 задана, известна обоим игрокам и $z_0 \notin M$. Полагаем $z(k=0) = z_0$, и пусть преследующий игрок выбирает в соответствии с (2.1) произвольно свое управление $u_1 = u((0+1)\tau) = u(\tau) \in P$, которое по правилам игры становится известным убегающему игроку. Убегающий игрок на основе известных ему z_0 и $u_1 = u(\tau)$ так строит на шаге 1 свое управление $\bar{v}_1 = v((0+1)\tau) = v(\tau) \in Q$, чтобы соответствующее выбранным управлениям и начальной позиции решение уравнения

$$z = A(\tau)z(0) + B(\tau)u_1 + D(\tau)\bar{v}_1 \quad (2.2)$$

не принадлежало терминальному множеству M .

Заметим, что уравнение (2.2) может иметь несколько решений z , тогда выберем из них по какому-нибудь правилу одно, например, лексикографическим способом [5, с. 217]. Обозначим найденное решение через $z(\tau)$, тогда, обозначив $z(\tau) = z_1$, получим, что

$$z_1 = z(\tau) = A(\tau)z(0) + B(\tau)u_1 + D(\tau)\bar{v}_1. \quad (2.3)$$

Таким образом, в результате первого шага, точка z_0 под действием выбранных игроками управлений u_1 и \bar{v}_1 перейдет согласно (2.2) в положение $z(\tau)$, удовлетворяющее (2.3). Заметим, что на самом деле $\bar{v}_1 = \bar{v}_1(\tau, z_0, u_1)$, т. е. убегающий игрок строит свое управление на основе знания управления преследователя, выбранного им на данном шаге, и позиции z_0 (ср. [1, 2, 7, 8, 10, 11]).

На шаге 2 полагают $k = 1$, и убегающему игроку становятся доступными позиция $z(0+\tau) = z(\tau) = z_1 \notin M$, полученная на шаге 1, и выбранное преследователем на этом, втором шаге, управление $u_2 = u(2\tau) \in P$. На их основе убегающий игрок строит свое управление $\bar{v}_2 = \bar{v}_2(2\tau, z_1, u_2) \in Q$ так, чтобы $z(2\tau) \notin M$, где $z_2 = z(2\tau)$ выбрано (однозначным способом) из решений уравнения

$$z = A(\tau)z(\tau) + B(\tau)u_2 + D(\tau)\bar{v}_2. \quad (2.4)$$

Продолжая этот процесс индуктивно, получаем, что на n -м шаге, $n \geq 1$, убегающий игрок строит свое управление $\bar{v}_n = v_n(n\tau, z_{n-1}, u_n)$ так, чтобы $z_{n-1} = z((n-1)\tau)$ переходило в состояние (единственное)

$$z_n = z(n\tau) = A(\tau)z((n-1)\tau) + B(\tau)u_n + D(\tau)\bar{v}_n \quad (2.5)$$

и выполнялось $z_n = z(n\tau) \notin M$, $n \geq 1$ ($z_0 = z(0) \notin M$).

В результате изложенного описания пошагового хода игры, начинающейся из начальной позиции $z_0 = z(0) \notin M$, получаем, что z_0 и (2.5) порождают последовательность точек z_0, z_1, z_2, \dots , не принадлежащих терминальному множеству. Для каждой точки выбирается управление, обеспечивающее переход из рассматриваемой точки в следующую (по номеру шага) точку, которая не попадает на терминальное множество. Это управление для каждой точки строится по информации о ней (полное знание позиции) и текущему управлению в рассматриваемый момент времени (шаг).

Другими словами, выбор управления убегающего игрока на каждом шаге зависит от позиции системы (2.1), сложившейся на предыдущем шаге, и управления преследователя, выбираемого

им на рассматриваемом шаге. В результате дискретная система (2.1) переходит из состояния z_k в состояние z_{k+1} , $k \geq 0$.

Перейдем к более точным формулировкам задач игроков. Будем говорить, что убегающий игрок решил задачу убегаения из заданной начальной точки $z_0 \notin M$ при значении параметра $\tau > 0$, если для каждой последовательности управлений $\{u_n \in P, n \geq 1\}$ можно построить такую последовательность управлений $\{v_n \in Q, n \geq 1\}$, что соответствующие решения z_n уравнения (2.5) не попадают на M при всех $n \geq 1$. При $n = 0$ $z_0 \notin M$ по условиям убегаения (нулевой или начальный шаг выполняется автоматически).

Если уклонение возможно из любой точки $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$, то будем говорить, что в дискретной параметрической игре (2.1) возможно убегаение при заданном значении параметра.

Далее, нужно определить достаточные условия, при которых пошаговый процесс (метод) убегаения в игре (2.1) может быть реализован.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть терминальное множество задано в виде:

$$M = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle n_i, z \rangle \leq \alpha_i\}, \tag{3.1}$$

где n_i — заданные единичные векторы, α_i — действительные числа, $i = 1, 2, \dots, m$. Обозначим

$$F(\tau, z, u, v) = A(\tau)z + B(\tau)u + D(\tau)v, \\ E(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n : \min_u \max_v \max_i [\langle n_i, F(\tau, z, u, v) \rangle - \alpha_i] \leq 0\}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1 (об убегаении). Пусть для заданного значения параметра $\tau > 0$ множество

$$E(\tau) \subset M. \tag{3.3}$$

Тогда в дискретной игре (2.1) из любой начальной позиции $z_0 \notin M$ возможно убегаение пошаговым способом. При этом на каждом шаге $n = 1, 2, 3, \dots$ убегающий игрок использует информацию о состоянии позиции на предыдущем шаге $z_{n-1} = z((n-1)\tau)$ и управлении $u(n\tau) \in P$, которое преследователь принимает на том же n -м шаге. В результате система (2.1) переходит из позиции $z_{n-1} \notin M$ в положение $z_n = z(n\tau) \notin M$ и, тем самым, возможно убегаение из любой начальной позиции (точки) $z_0 \notin M$.

Доказательство. Из условия $E(\tau) \subset M$ следует, что если $z \notin M$, то $z \notin E(\tau)$, значит,

$$\min_u \max_v \max_i [\langle n_i, F(\tau, z, u, v) \rangle - \alpha_i] > 0. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что для каждого $z \notin M$, $u \in P$ и фиксированного $\tau > 0$ найдется единственный вектор $\bar{v}(\tau, z, u) \in Q$ такой, что хотя бы для одного номера $i = 1, 2, \dots, m$ будет выполняться неравенство:

$$\langle n_i, F(\tau, z, u, \bar{v}(\tau, z, u)) \rangle - \alpha_i > 0. \tag{3.5}$$

Как и выше, вектор $\bar{v}(t, z, u)$ можно выбрать однозначным (лексикографическим) способом [5].

Неравенство (3.5) будет играть основную роль при выборе управления убегаения в пошаговом процессе убегаения от терминального множества M , заданного в виде (3.1).

Пусть на первом шаге игра начинается из начальной позиции $z_0 = z(0) \notin M$ и преследователь выбрал $u_1 = u(\tau) \in P$. Тогда убегающему игроку предлагается выбрать управление $\bar{v}_1 = v_1(\tau, z_0, u_1) \in Q$ таким образом, чтобы оно удовлетворяло (3.5) при каком-либо $i = 1, 2, \dots, m$, т. е.:

$$\langle n_i, F(\tau, z_0, u_1, \bar{v}_1) \rangle - \alpha_i > 0. \tag{3.6}$$

Отсюда будет следовать, что $z_1 = z_1(\tau) \notin M$, где

$$z_1(\tau) = F(\tau, z_0, u_1, \bar{v}_1) = A(\tau)z(0) + B(\tau)u_1 + D(\tau)\bar{v}_1. \tag{3.7}$$

Продолжая индуктивно (пошагово) процесс, получим следующее: на n -м шаге, $n \geq 1$, процесс убегаения начинается из точки $z_{n-1} = z((n-1)\tau) \notin M$, и пусть преследователь на этом шаге выбрал управление $u_n = u(n\tau)$. Убегающий игрок на основе знания z_{n-1} и управления $u_n = u(n\tau)$ строит свое управление $\bar{v}_n = \bar{v}_n(n\tau, z_{n-1}, u_n)$ таким образом, чтобы выполнялось (3.6):

$$\langle n_i, F(\tau, z_{n-1}, u_n, \bar{v}_n) \rangle - \alpha_i > 0, \tag{3.8}$$

откуда следует, что для точки

$$z_n(n\tau) = F(\tau, z_{n-1}, u_n, \bar{v}_n) = A(\tau)z_{n-1} + B(\tau)u_n + D(\tau)\bar{v}_n \quad (3.9)$$

не выполняются условия включения в терминальное множество M .

Из (3.8) и (3.9) получается, что при изложенном способе построения управления убегания на основе (3.5) точка $z_n(n\tau) \notin M$ при всех $n = 1, 2, 3, \dots$, т. е. из начальной точки z_0 в дискретной игре (2.1) возможно убегание. Поскольку начальная позиция $z_0 \notin M$ была произвольной, то убегание в дискретной игре (2.1) при заданном фиксированном параметре $\tau > 0$ возможно. Теорема доказана. \square

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ИГРЫ «ИЗОТРОПНЫЕ РАКЕТЫ»—«МАЛЬЧИК И КРОКОДИЛ» [6, 13]

4.1. «Мальчик и крокодил» (непрерывный случай). В теории дифференциальных и дискретных игр многие игры имеют свои «персональные экзотические имена», например: «Изотропные ракеты», «Мальчик и крокодил», «Лев и человек», «Контрольный пример Понтрягина», «Полицейский автомобиль», «Дама в озере», «Волки и олень», «Успокоение—раскачка маятника» и многие другие [1, 6, 8, 13, 14]. Заметим, что не все названные игры исследованы достаточно полно в дискретном варианте [1, 8]. Возможными причинами этого являются преимущество математических методов анализа дифференциальных игр как непрерывных систем, а также недостаточно эффективный перенос результатов дифференциальных игр на соответствующие дискретные игры. Сформулируем дифференциальную игру «Мальчик и крокодил» [6], которая в книге Р. Айзекса [13] носит название «Изотропные ракеты». Пусть движение убегающего игрока («мальчик») происходит под действием ограниченной скорости, величина и направление которой могут меняться мгновенно. Движение преследователя происходит под действием ограниченной силы, направлением и величиной которой управляет преследователь. Ввиду инерционности движения преследователя, его называют «крокодилом» [6]. Математически движения игроков (x — преследователь, y — убегающий игрок) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u, & |u| &\leq \rho; \\ \dot{y} &= v, & |v| &\leq \sigma, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где x, y, u, v — векторы из \mathbb{R}^m , $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, точки в (3.8) означают производные по времени.

Преследование считается завершенным, если в некоторый конечный момент времени будет $x = y$. В противном случае будем говорить, что осуществлено убегание. Замена переменных $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, переводит (4.1) в систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - v, \\ \dot{z}_2 = u. \end{cases} \quad (4.2)$$

Терминальное множество (множество точек окончания игры) определяется в виде:

$$M = \left\{ z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} : z_1 = 0 \right\}. \quad (4.3)$$

Задачей преследователя является попадание точки $z(t)$ — решения (4.2) с помощью допустимых управлений (измеримых функций) в некоторый конечный момент времени на терминальное множество (4.3) при любом допустимом противодействии убегающего игрока, цель которого — противоположная. В такой постановке дифференциальная (непрерывная) игра (4.2)-(4.3) называется в литературе «Мальчик и крокодил», она исследовалась многими авторами [4, 6, 9, 11, 13, 14]. В теории дифференциальных игр эта игра является важным тестовым показателем эффективности применения новых методов решения задач преследования и убегания. В игре (4.2)-(4.3) «Мальчик и крокодил» активную роль будем предоставлять убегающему игроку, задачей которого является построение такого допустимого управления (измеримой функции), которое обеспечивает уклонение (убегание) от M из заданной допустимой начальной позиции на бесконечном интервале времени.

4.2. «Мальчик и крокодил» (дискретная игра с параметром). Перейдем от дифференциальной игры «Мальчик и крокодил» к ее дискретному аналогу. Этот переход, называемый в [13, с. 65] «квантизацией», можно осуществлять разными способами, некоторые из них изложены в [1]. Нами предлагается следующий способ квантизации непрерывной дифференциальной игры (4.2)-(4.3), отличный от ранее применявшихся. В начале запишем (4.2) в матричном виде:

$$\dot{z}(t) = Cz(t) + \bar{u}(t) + \bar{v}(t), \quad (4.4)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} O & I \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} 0_m \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{v}(t) = \begin{bmatrix} -v(t) \\ 0_m \end{bmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

O и I — нулевая и единичная матрицы порядка m , соответственно; 0_m — начало \mathbb{R}^m .

Введем последовательность $\{t_k, k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $t_{k+1} - t_k = \tau > 0, t_0 = 0$.

При подстановке в уравнение (4.2) $t = t_k > 0, k = 1, 2, 3, \dots$ оно примет вид

$$\dot{z}(t_k) = Cz(t_k) + \bar{u}(t_k) + \bar{v}(t_k). \quad (4.6)$$

Теперь заменим в (4.6) производную ее приближенным значением:

$$\dot{z}(t_k) \approx \frac{z(t_k) - z(t_k - \tau)}{\tau}. \quad (4.7)$$

Замена (4.7), на наш взгляд, предпочтительнее в силу того, что в дифференциальных играх в каждый момент времени t известны, обычно, значения $z(s)$ при $s \leq t$, которые в будущие моменты $s > t$ не известны, так как позиция формируются двумя противоборствующими сторонами. Замена (4.7) учитывает этот факт.

Подставляя правую часть (4.7) в уравнение (4.6), получаем дискретное уравнение с параметром типа (2.1) (ср. [1, 8, 10, 13]):

$$z((k+1)\tau) = \bar{A}(\tau)z(k\tau) + \bar{B}(\tau)[\bar{u}((k+1)\tau) + \bar{v}((k+1)\tau)], \quad (4.8)$$

где

$$\bar{A}(\tau) = (I - \tau C)^{-1}, \quad \bar{B}(\tau) = \tau(I - \tau C)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

а $\bar{u}((k+1)\tau)$ и $\bar{v}((k+1)\tau)$ задаются на основе (4.5).

Терминальное множество зададим в виде [8]:

$$M = \{z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^{2m} : \langle n_i^\pm, z \rangle \leq l, \quad z_2 \in \mathbb{R}^m\} \notin \emptyset, \quad (4.10)$$

где $l \geq 0$; $n_i^{pm} \in \mathbb{R}^{2m}$ — векторы, у которых только i -я координата равна $\pm 1, 1 \leq i \leq m$, остальные координаты равны нулю; \langle, \rangle — символ скалярного произведения. Терминальное множество M ограничено по первым m координатам $2m$ гиперплоскостями (с нормальными n_i^\pm), по остальным m координатам ограничений не имеет.

Дискретную игру (4.8)-(4.9) с терминальным множеством (4.10) будем называть дискретной игрой «Мальчик и крокодил», соответствующей (или ассоциированной) непрерывной дифференциальной игре (4.2)-(4.3).

Напомним, что убегающий игрок стремится не попасть на каждом конечном шаге на M , т. е. на каждом шаге убегания хотя бы одна из координат точки z_1 не должна удовлетворять неравенствам из (4.10). Для этой игры убегание будет означать непопадание на терминальное множество (4.10) на каждом шаге, и для этого достаточно невыполнения на каждом шаге одного из неравенств в (4.10).

Проверим выполнимость условий теоремы 3.1 об убегании для задачи «Мальчик и крокодил» в дискретном варианте.

Несложные вычисления показывают, что в (4.9) будет:

$$\bar{A}(\tau)z = \begin{bmatrix} I & \tau I \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + \tau z_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau I & \tau^2 I \\ O & \tau I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\tau)\bar{u} = \begin{bmatrix} \tau^2 u \\ \tau u \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\tau)\bar{v} = \begin{bmatrix} -\tau v \\ 0_m \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\bar{F}(\tau, z, u, v) = \bar{A}(\tau)z + \bar{B}(\tau)(\bar{u} + \bar{v}) = \begin{bmatrix} z_1 + \tau z_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau^2 u \\ \tau u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tau v \\ 0_m \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Вычислим теперь множество $E(\tau)$ (формула (3.2)), которое для игры (4.8)–(4.10) будет выглядеть следующим образом:

$$E(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^{2m} : \min_u \max_v \max_i [< n_i^\pm, \bar{F}(\tau, z, u, v) > -l] \leq 0 \}. \quad (4.13)$$

Далее, используя линейность уравнений дискретной игры (4.8), а также (4.11)–(4.12), нетрудно вычислить, что

$$E(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^{2m} : |(z_1 + \tau z_2)_i| + \sigma\tau - \rho\tau^2 - l \leq 0 \}, \quad (4.14)$$

где индекс i означает номер координаты, дающей максимум в $E(\tau)$, $1 \leq i \leq m$. Из вида вычисленного множества $E(\tau)$ получаем, что

$$|(z_1 + \tau z_2)_i| \leq l - \sigma\tau + \rho\tau^2. \quad (4.15)$$

Очевидно, что если выполнено квадратное неравенство $\rho\tau^2 - \sigma\tau + l < 0$, то из (4.13) следует, что $E(\tau) = \emptyset$, и выполняется соотношение $E(\tau) = \emptyset \subset M \neq \emptyset$. Поэтому если параметры рассматриваемой игры l, τ, σ, ρ удовлетворяют неравенствам

$$l + \tau(\rho\tau - \sigma) < 0, \quad \sigma^2 \geq 4\rho l, \quad (4.16)$$

то выполняются все условия теоремы 3.1 об убегании, а значит, в дискретной игре «Мальчик и крокодил» возможно убегание, реализуемое на основе пошагового метода убегания.

Из (4.14) нетрудно получить различные соотношения между параметрами дискретной игры «Мальчик и крокодил», обеспечивающие возможность убегания от терминального множества M вида (4.10). Например, при фиксированных значениях параметров l, σ и ρ задача убегания в игре «Мальчик и крокодил» разрешима, если параметр $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\sigma^2 \geq 4\rho l$, где

$$\tau_1 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\rho l}}{2\rho}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4\rho l}}{2\rho}. \quad (4.17)$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отметим некоторые отличия в дискретных играх на примере «Мальчик и крокодил» в дискретном варианте.

1. Квантизация непрерывной игры «Мальчик и крокодил» приводит к двум разным уравнениям, одним из них является полученное выше уравнение (4.8) с пояснениями (4.9), которое запишется в виде:

$$z((k+1)\tau) = (I - \tau C)^{-1} \{ z(k\tau) + \tau(\bar{u}((k+1)\tau) + \bar{v}((k+1)\tau)) \}. \quad (5.1)$$

2. Другое дискретное уравнение для задачи «Мальчик и крокодил» получено квантизацией в [1, с. 116] и имеет в наших обозначениях вид:

$$z((k+1)\tau) = (I + \tau C)z(k\tau) + B(\tau)\bar{u}(k\tau) + D(\tau)\bar{v}(k\tau). \quad (5.2)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (4.15) и (4.16) существенно отличаются друг от друга, что приводит к необходимости аккуратно проводить квантизацию в целях получения достоверных результатов о непрерывных играх. С другой стороны, каждый из классов дискретных игр (4.15) и (4.16) можно рассматривать как самостоятельный объект, который при исследовании может дать свои собственные результаты.

В заключение отметим, что уравнение (4.16) использовалось в [1] только для исследования задачи преследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азамов А. А. Основания теории дискретных игр. — Ташкент: Niso Poligraf, 2011.
2. Дзюбенко Г. Ц., Пшеничный Б. Н. Дискретные дифференциальные игры с запаздыванием информации // Кибернетика. — 1972. — № 6. — С. 69–73.
3. Маматов М. Ш. О применении метода конечных разностей к решению задачи преследования в системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 8. — С. 123–132.
4. Мищенко Е. Ф., Никольский М. С., Сатимов Н. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Тр. МИАН. — 1997. — 113. — С. 105–128.
5. Половинкин Е. С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. — М.: Физматлит, 2014.

6. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача уклонения одного управляемого объекта от другого // Докл. АН СССР. — 1969. — 189, № 4. — С. 721–723.
7. Сатимов Н. Ю. Задача уклонения для одного класса нелинейных дискретных игр // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1973. — № 6. — С. 45–48.
8. Сатимов Н., Азамов А. А. Нелинейные дискретные игры уклонения // Кибернетика. — 1976. — № 4. — С. 70–73.
9. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи поиска и управления. — М.: Наука, 1978.
10. Чикрий А. А. О линейных дискретных играх качества // Кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 90–99.
11. Chikrii A. A. Conflict-controlled processes. — Boston—London—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
12. Fleming W. The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. Appl. — 1961. — № 3. — С. 102–116.
13. Isaacs R. Differential games (A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization). — New York—London—Sydney: John Wiley and Sons, 1965.
14. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. Game theoretical control problems. — New York—Berlin: Springer, 1988.
15. Yugay L. P. The problem of trajectories avoiding a sparse terminal set // Dokl. Math. — 2020. — 102, №3. — С. 538–541.

Л. П. Югай

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта, Чирчик, Узбекистан
E-mail: yugailp@mail.ru

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382

EDN: VCEYZY

Evasion problem in linear parametric discrete games

L. P. Yugay

Uzbek State University of Physical Culture and Sport, Chirchiq, Uzbekistan

Abstract. We consider the evasion problem in the formulation by Pontryagin and Mishchenko for linear discrete games depending on a parameter. We obtain sufficient conditions and domains of parameter values that ensure the solvability of the evasion problem. The obtained results are applied to the solution of the evasion problem for the well-known problem in the theory of differential games “Isotropic Rockets”—“Boy and Crocodile” in the discrete version.

Keywords: differential game, discrete game, evasion, pursuer, evader player, control, parameter, terminal set.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: L. P. Yugay, “Evasion problem in linear parametric discrete games,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 2, 375–382. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382>

REFERENCES

1. A. A. Azamov, *Osnovaniya teorii diskretnykh igr* [Foundations of the Theory of Discrete Games], Niso Poligraf, Tashkent, 2011 (in Russian).



2. G. Ts. Dzyubenko and B. N. Pshenichnyy, “Diskretnye differentsial’nye igry s zapazdyvaniem informatsii” [Discrete differential games with information delay], *Kibernetika* [Cybernetics], 1972, No. 6, 69–73 (in Russian).
3. M. Sh. Mamatov, “O primeneniі metoda konechnykh raznostey k resheniyu zadachi presledovaniya v sistemakh s raspredelennymi parametrami” [On the application of the finite difference method to solving the pursuit problem in systems with distributed parameters], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation Telemekh.], 2009, No. 8, 123–132 (in Russian).
4. E. F. Mishchenko, M. S. Nikol’skiy, and N. Satimov, “Zadacha ukлонeniya ot vstrechi v differentsial’nykh igrakh mnogikh lits” [Evasion problem in differential games for many persons], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1997, **113**, 105–128 (in Russian).
5. E. S. Polovinkin, *Mnogoznachnyy analiz i differentsial’nye vkluycheniya* [Multivalued Analysis and Differential Inclusions], Fizmatlit, Moscow, 2014 (in Russian).
6. L. S. Pontryagin and E. F. Mishchenko, “Zadacha ubeganiya odnogo upravlyaemogo ob"ekta ot drugogo” [The evasion problem of one controlled object from another], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **189**, No. 4, 721–723 (in Russian).
7. N. Yu. Satimov, “Zadacha ubeganiya dlya odnogo klassa nelineynykh diskretnykh igr” [Evasion problem for a class of nonlinear discrete games], *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibern.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Tech. Cybern.], 1973, No. 6, 45–48 (in Russian).
8. N. Satimov and A. A. Azamov, “Nelineynye diskretnye igry ubeganiya” [Nonlinear Discrete Evasion Games], *Kibernetika* [Cybernetics], 1976, No. 4, 70–73 (in Russian).
9. F. L. Chernous’ko and A. A. Melikyan, *Igrovye zadachi poiska i upravleniya* [Game Problems of Search and Control], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
10. A. A. Chikriy, “O lineynykh diskretnykh igrakh kachestva” [On linear discrete quality games], *Kibernetika* [Cybernetics], 1971, No. 6, 90–99 (in Russian).
11. A. A. Chikrii, *Conflict-controlled processes*, Kluwer Acad. Publ., Boston—London—Dordrecht, 1997.
12. W. Fleming, “The convergence problem for differential games,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1961, No. 3, 102–116.
13. R. Isaacs, *Differential games (A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization)*, John Wiley and Sons, New York—London—Sydney, 1965.
14. N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, *Game theoretical control problems*, Springer, New York—Berlin, 1988.
15. L. P. Yugay, “The problem of trajectories avoiding a sparse terminal set,” *Dokl. Math.*, 2020, **102**, No. 3, 538–541.

L. P. Yugay

Uzbek State University of Physical Culture and Sport, Chirchiq, Uzbekistan

E-mail: yugailp@mail.ru