

УДК 534.121.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374

EDN: UZSLLN

**ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПЬЕЗОАКТИВНОГО БИМОРФА
В РАМКАХ НЕСВЯЗНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ**

А. Н. СОЛОВЬЕВ^{1,2}, В. А. ЧЕБАНЕНКО^{2,3}, М. С. ГЕРМАНЧУК⁴

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

³Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

⁴Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются поперечные установившиеся колебания пьезоактивного биморфа в постановке плоской деформации. Задача решается в рамках линейной термоэлектроупругости, при этом температурная задача решается отдельно и распределение температуры учитывается в определяющих соотношениях электроупругости. На основе гипотез типа Кирхгофа–Лява для механических величин и симметричного квадратичного распределения электрического потенциала строится приближенная теория расчета колебаний биморфа. Проведены численные эксперименты для различных случаев закрепления и возбуждения колебаний. Результаты этих экспериментов сравнивались с расчетами, произведенными с помощью метода конечных элементов в пакете COMSOL и показали адекватность построенной теории в низкочастотной области.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, биморф, колебания, прикладная теория, метод конечных элементов, пьезоэлектрический генератор сбора и накопления энергии.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке (первый и второй авторы) гранта РФФИ № 22-11-00265.

Для цитирования: А. Н. Соловьев, В. А. Чебаненко, М. С. Германчук. Прикладная теория изгибных колебаний пьезоактивного биморфа в рамках несвязной краевой задачи термоэлектроупругости // Современ. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 364–374. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374>

ВВЕДЕНИЕ

Пьезоэлектрические преобразователи широко используются в различных сферах: в промышленности, медицине, в быту и др. С этим связана актуальность проектирования эффективных устройств преобразования механической, магнитной, тепловой энергии в электрическую и обратно. В настоящее время предварительный расчет конструкций с пьезоактивными элементами возможен с помощью метода конечных элементов (МКЭ), реализованного в «тяжелых» и специализированных САЕ пакетах, таких, как ANSYS, COMSOL, ACELAN и др. Однако для ряда устройств возможно построение приближенных теорий расчета их колебаний на основе гипотез



о распределении механических, электрических, магнитных полей [2, 10]. Одним из типов таких устройств являются излучатели, приемники и пьезоэлектрические генераторы (ПЭГ), рабочим элементом которых являются биморфы — электродированные многослойные пластины, совершающие поперечные колебания. Кроме механического и магнитного воздействия, источником возникновения индуцированной разности потенциалов на электродах пьезоэлектрических слоев является неоднородное распределение температуры в них, возникающее за счет действия внешних температурных потоков. Такая задача может быть решена в рамках термоэлектроупругости. При использовании в качестве пьезоактивного материала композитов первым шагом исследования является нахождение их эффективных свойств. Вопросам определения эффективных свойств термоэлектроупругих и термомагнитоэлектроупругих композитов посвящены работы [1, 4, 6, 7, 14], толщинные колебания пластины под действием начального термоэлектромеханического поля исследуются в [3], аналитические и численные аналитические решения задач термоэлектроупругости рассматриваются в [5, 9, 11–13].

В настоящей работе рассматриваются поперечные колебания двухслойной пластины в рамках линейной теории термоэлектроупругости в плоской постановке. Температура входит в определяющие соотношения, а уравнение теплопроводности решается независимо от уравнений электроупругости. С помощью гипотез типа Кирхгофа—Лява в предположении о квадратичном распределении электрического потенциала строится прикладная теория колебаний и граничные условия для рассматриваемого биморфа. Проведены численные эксперименты при различном способе возбуждения колебаний. Осуществлено сравнение прогибов и распределений электрического потенциала с расчетом в COMSOL.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Геометрическая и физическая модель. Рассматривается двухслойная пластина (см. рис. 1) толщины h и длины l ; верхняя, нижняя и интерфейсная границы электродированы. На верхнем и нижнем электродах электрические потенциалы одинаковы и равны V_0 , потенциал на среднем электроде равен V_2 , на боковых сторонах отсутствует электрический заряд. На верхнюю границу действует распределенное механическое давление $q_3(x_1)$, на боковых сторонах задаются граничные условия, соответствующие свободной границе, шарнирному опиранию или жесткой заделке. Температурная задача решается независимо и определяется распределение температуры $\theta(x_1, x_3)$, которое затем учитывается в уравнениях состояния для электроупругого тела.

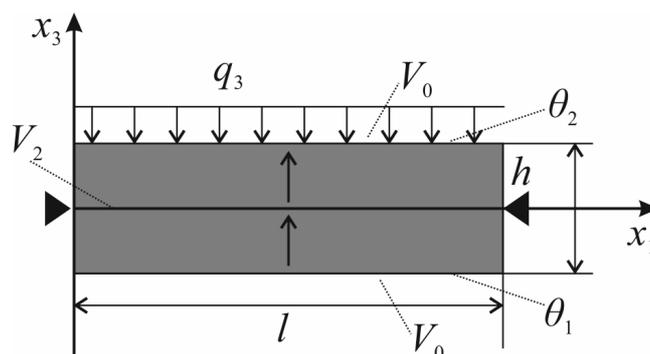


Рис. 1. Геометрия пластины

FIG. 1. Plate geometry

1.2. Континуальная модель. Рассматриваются установившиеся колебания биморфа (рис. 1) с круговой частотой ω в рамках линейной теории термоэлектроупругости. Задача сводится к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент

вектора смещений $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ и электрического потенциала $\varphi(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} &= -\rho \omega^2 \mathbf{u}, & \nabla \mathbf{D} &= \sigma \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} - \mathbf{g} \theta, & \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \mathbf{E} + \mathbf{p} \theta, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), & \mathbf{E} &= -\nabla \varphi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры механических напряжений и деформации, \mathbf{D} и \mathbf{E} — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля, ρ — плотность материала, \mathbf{c} — тензор упругих модулей, \mathbf{e} — тензор пьезоэлектрических модулей, \mathbf{g} — тензор температурных напряжений, $\boldsymbol{\kappa}$ — тензор диэлектрических проницаемостей, \mathbf{p} — вектор пьезоэлектрических коэффициентов, \mathbf{f} — вектор плотности массовых сил, $\sigma \Omega$ — объемная плотность электрических зарядов, \mathbf{u} — вектор перемещений, φ — электрический потенциал.

Граничные условия. Механические напряжения на границе биморфа:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j|_S = q_i, \quad i, j = 1, 3. \quad (1.2)$$

Биморф шарнирно закреплен на концах, как указано на рис. 1:

$$u_i|_{(0,0)} = u_i|_{(l,0)} = 0, \quad i = 1, 3. \quad (1.3)$$

Электрический потенциал на внутреннем и внешнем электродах, соответственно:

$$\varphi|_{x_3} = 0 = V_2, \quad \varphi|_{x_3=\pm h/2} = V_0. \quad (1.4)$$

Отсутствие зарядов на боковых гранях:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{x_1=0} = 0, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{x_1=l} = 0. \quad (1.5)$$

В задачах электроупругости для упрощения записи часто используются определяющие соотношения на основе нотации Фойгта:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{pmatrix} \mathbf{S} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E} - \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \theta, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S} + \begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{pmatrix} \mathbf{E} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \theta. \quad (1.7)$$

Здесь $\mathbf{T} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$ и $\mathbf{S} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^T$ — это псевдовекторы, элементами которых являются компоненты тензоров напряжений и деформаций, соответственно.

2. ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

2.1. Гипотезы. Для построения прикладной теории колебаний примем гипотезы типа Кирхгофа—Лява. В соответствии с ними предполагается отсутствие нормальных напряжений и распределение перемещений по толщине:

$$\sigma_{33}(x_1, x_3) = 0, \quad u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_{,1}, \quad u_3(x_1, x_3) = w(x_1). \quad (2.1)$$

Распределение электрического потенциала по толщине каждого слоя принимается квадратичным; так, например, в верхнем слое оно имеет вид:

$$\varphi(x_1, x_3) = V_0 \frac{2x_3}{h} \left(\frac{4x_3}{h} - 1 \right) + V_1(x_1) \frac{8x_3}{h} \left(1 - \frac{2x_3}{h} \right) + V_2 \left(\frac{2x_3}{h} - 1 \right) \left(\frac{4x_3}{h} - 1 \right). \quad (2.2)$$

где функции V_0 , V_1 и V_2 отвечают за значение электрического потенциала на внешнем электроде, в середине слоя и на внутреннем электроде, соответственно. Чтобы удовлетворить условиям задачи, примем эти функции в следующем виде:

$$V_0(x_1) = V_0 = \text{const}, \quad V_1(x_1) = \Phi(x_1), \quad V_2(x_1) = V_2 = \text{const}, \quad (2.3)$$

где функция $\Phi(x_1)$ является неизвестной.

Предполагается, что задача теплопроводности решена предварительно, и распределение температуры берется линейным по толщине биморфа:

$$\theta(x_1, x_3) = \theta_1 \left(1 + \frac{2x_3}{h}\right) / 2 + \theta_2 \left(1 - \frac{2x_3}{h}\right) / 2, \quad (2.4)$$

где θ_1, θ_2 — температуры на верхней и нижней грани биморфа, соответственно.

2.2. Вариационный принцип. Для дальнейшего построения прикладной теории воспользуемся принципом Гамильтона для электроупругой среды. Рассмотрим функционал

$$\Pi = \iint_S (H - X_i u_i) dS - \int_{\partial S} (q_i u_i - \sigma \varphi) dl, \quad (2.5)$$

где H — электрическая энтальпия, σ — заряд на ∂S . Принцип Гамильтона, обобщенный на теорию пьезоэлектричества, имеет вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{K} - \Pi) dt = 0. \quad (2.6)$$

Здесь \mathcal{K} — кинетическая энергия, а $t_2 - t_1$ — временной промежуток. Допустимое движение тела должно быть согласовано с ограничениями на это движение. Должны быть выполнены условия

$$\delta u_i(x, t_1) = \delta u_i(x, t_2) = 0. \quad (2.7)$$

Вариация кинетической энергии с учетом условия (2.7) равна

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{K} dt = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{K} - \Pi) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\rho \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS - \iint_S \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} - \frac{\partial H}{\partial E_i} \delta E_i - X_i \delta u_i \right) dS + \int_{\partial B} (p_i \delta u_i - \sigma \delta \varphi) dl \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пользуясь определяющими соотношениями [8] $\sigma_{ij} = \partial H / \partial \varepsilon_{ij}$, $D_i = -\partial H / \partial E_i$, для случая наличия поверхностных нагрузок, а также отсутствия поверхностных зарядов и массовых сил получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\rho \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS - \iint_S (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i) dS + \int_{\partial B} q_i \delta u_i dl \right) = 0. \quad (2.10)$$

Далее будем рассматривать случай установившихся гармонических колебаний, когда

$$u_i = u_i e^{i\omega t}, \quad \varphi = \varphi e^{i\omega t}, \quad q_i = q_i e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\iint_S (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i) dS - \rho \omega \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS - \int_{\partial B} q_i \delta u_i dl = 0. \quad (2.12)$$

С учетом принятых гипотез (2.1) вариационное уравнение принимает следующий вид:

$$\iint_S (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} - D_1 \delta E_1 - D_3 \delta E_3) dS - \rho \omega \iint_S (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_3 \delta u_3) dS - \int_{\partial B} (q_1 \delta u_1 + q_3 \delta u_3) dl = 0. \quad (2.13)$$

ТАБ. 1

ρ , кг/м ³ kg/m ³	c_{11}^E , ГПа GPa	c_{12}^E , ГПа GPa	c_{13}^E , ГПа GPa	c_{33}^E , ГПа GPa	c_{44}^E , ГПа GPa
7500	139	77,8	74,3	115	25,6
e_{31} , пКл/Н pC/N	e_{33} , пКл/Н pC/N	e_{15} , пКл/Н pC/N	κ_{11}^S/κ_0	κ_{33}^S/κ_0	
-5,2	15,1	12,7	730	635	
g_1 , Па/К Pa/K	g_3 , Па/К Pa/K	p_1 , мКл/(м ² К) mC/(m ² К)	p_3 , мКл/(м ² К) mC/(m ² К)		
9,5	7,6	0	0,25		

2.3. Уравнения и силовые факторы. Проведем вариацию уравнения (2.13), а также проинтегрируем его по толщине. Последняя операция устраняет зависимость от x_3 , поэтому в дальнейшем опустим нижний индекс у x_1 . На последнем шаге, после вариации и интегрирования, приравняв коэффициенты при независимых вариациях δw и $\delta \Phi$ в выведенном выше уравнении, мы получим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.14), (2.15) и выражения силовых факторов, которые представлены уравнениями (2.16)–(2.18).

$$1/24 \frac{h(-16c_{13}e_{33} + 16c_{33}e_{31})}{c_{33}} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + 1/24 \frac{h(2c_{11}c_{33}h^2 - 2c_{13}^2h^2)}{c_{33}} \frac{d^4}{dx^4} w(x) - \omega^2 \rho h U(x) - q_3(x) = 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \left(-16 \frac{e_{33}^2}{h^2 c_{33}} - 16 \frac{g_{33}}{h^2}\right) V_0 + \left(-16 \frac{e_{33}^2}{h^2 c_{33}} - 16 \frac{g_{33}}{h^2}\right) V_2 + \left(-\frac{e_{33}g_3}{hc_{33}} + \frac{p_3}{h}\right) \theta_1 + \\ & + \left(\frac{e_{33}g_3}{hc_{33}} - \frac{p_3}{h}\right) \theta_2 + \left(32 \frac{e_{33}^2}{h^2 c_{33}} + 32 \frac{g_{33}}{h^2}\right) \Phi(x) - 2/3g_{11} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \\ & + \left(-e_{31} + \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}}\right) \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для удовлетворения граничных условий на концах биморфа получены выражения для силовых факторов: M_1 — момента, Q_1 — поперечной силы и D_1 — осредненной по толщине горизонтальной компоненты вектора электрической индукции.

$$\begin{aligned} M_1 = & -1/12 \frac{h(10c_{13}e_{33} - 10c_{33}e_{31})}{c_{33}} V_0 - 1/12 \frac{h(-2c_{13}e_{33} + 2c_{33}e_{31})}{c_{33}} V_2 - \\ & - 1/12 \frac{h(c_{13}g_3h - c_{33}g_1h)}{c_{33}} \theta_1 - 1/12 \frac{h(-c_{13}g_3h + c_{33}g_1h)}{c_{33}} \theta_2 - \\ & - 1/12 \frac{h(-8c_{13}e_{33} + 8c_{33}e_{31})}{c_{33}} \Phi(x) - 1/12 \frac{h(c_{11}h^2c_{33} - c_{13}^2h^2)}{c_{33}} \frac{d^2}{dx^2} w(x), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$Q_1 = 1/24 \frac{h(-16c_{13}e_{33} + 16c_{33}e_{31})}{c_{33}} \frac{d}{dx} \Phi(x) + 1/24 \frac{h(2c_{11}h^2c_{33} - 2c_{13}^2h^2)}{c_{33}} \frac{d^3}{dx^3} w(x), \quad (2.17)$$

$$D_1 = -1/2(\theta_2 - \theta_1)p_1 - 2/3g_{11} \frac{d}{dx} \Phi(x). \quad (2.18)$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В численном эксперименте в качестве пьезоэлектрического материала была выбрана пьезоке-рамика PZT-4, поляризованная по толщине, физические константы которой приведены в таб. 1, где κ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Размеры пластины: $l = 0,01$ м, $h = 0,0012$ м, толщины слоев одинаковы. Рассматриваются установившиеся колебания на частоте 314,16 Гц под действием равномерно распределенной нагрузки амплитуды $q_3 = 1000$ Па, температуры $\theta_1 = 15^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 10^\circ\text{C}$ и разности потенциалов $V_0 = 100$ В, $V_2 = 0$ В.

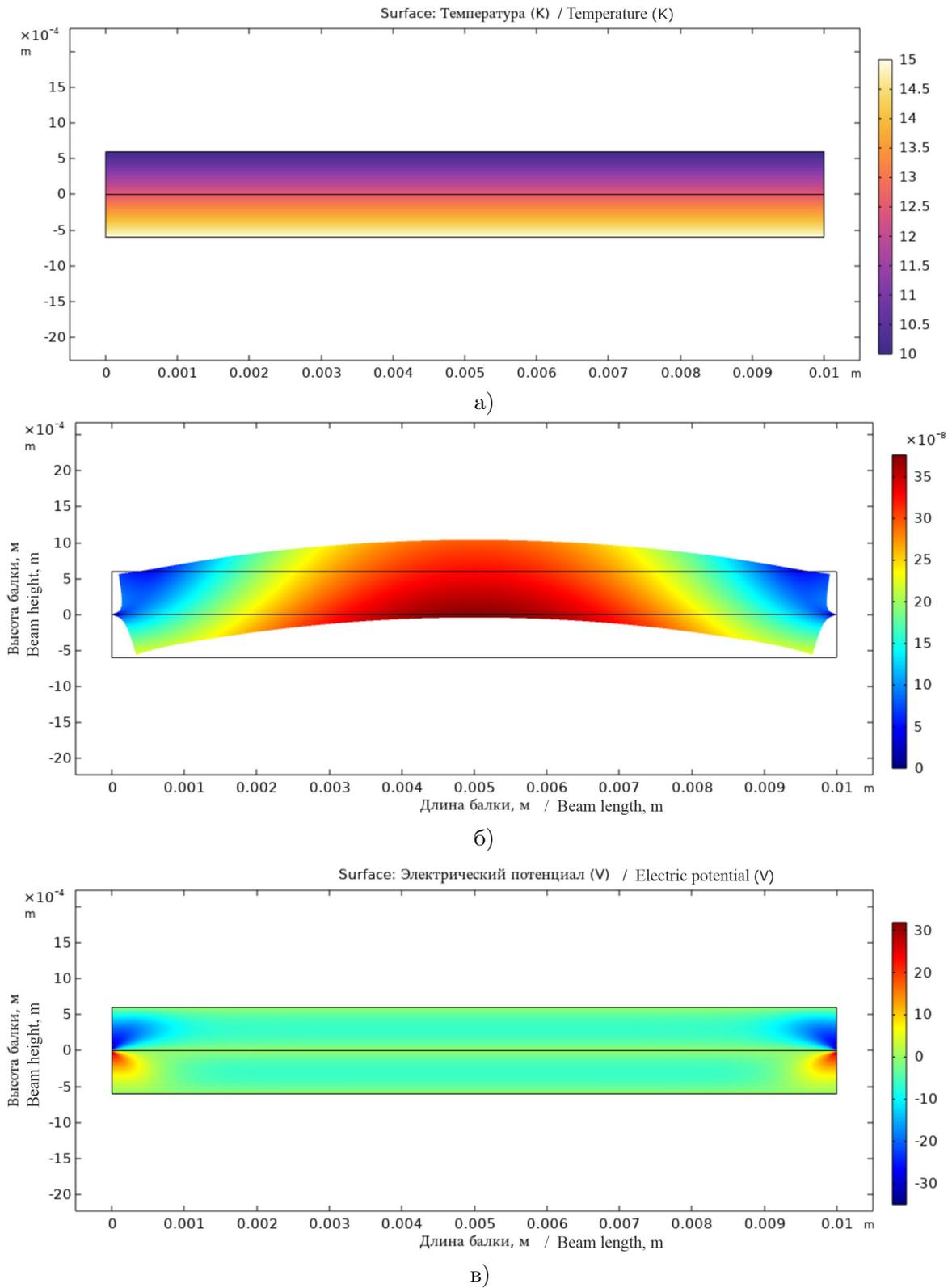


РИС. 2. Распределение физических полей при разнице температур на границах и нулевых потенциалах: а) температура, б) модуль вектора перемещений, в) электрический потенциал.

FIG. 2. Distribution of physical fields with temperature difference on the boundaries and zero potentials: а) temperature, б) displacement vector modulus, в) electric potential.

Граничные условия в соответствии с постановкой задачи (рис. 1) имеют вид

$$w(0) = w(l) = 0, \quad M_1(0) = M_1(l) = 0, \quad D_1(0) = D_1(l) = 0.$$

Рассматриваются три задачи: в первой возбуждение колебаний осуществляется разностью температур, во второй разностью электрических потенциалов и в третьей распределенной нагрузкой при неизвестном электрическом потенциале V_0 .

Аналогичный набор задач был решен в конечно-элементном (КЭ) пакте COMSOL Multiphysics (ЦКП ЮНЦ РАН № 501994). В интерфейсе решения уравнений в частных производных была решена система (1.1) для плоского случая. На рис. 2 представлено распределение перемещений, температуры и электрического потенциала для первой задачи, полученные на основе метода КЭ.

На рис. 3–5 для описанных выше задач, соответственно, представлены графики распределения: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины; при этом сплошная линия соответствует прикладной теории, штрих-пунктирная — расчетам методом КЭ.

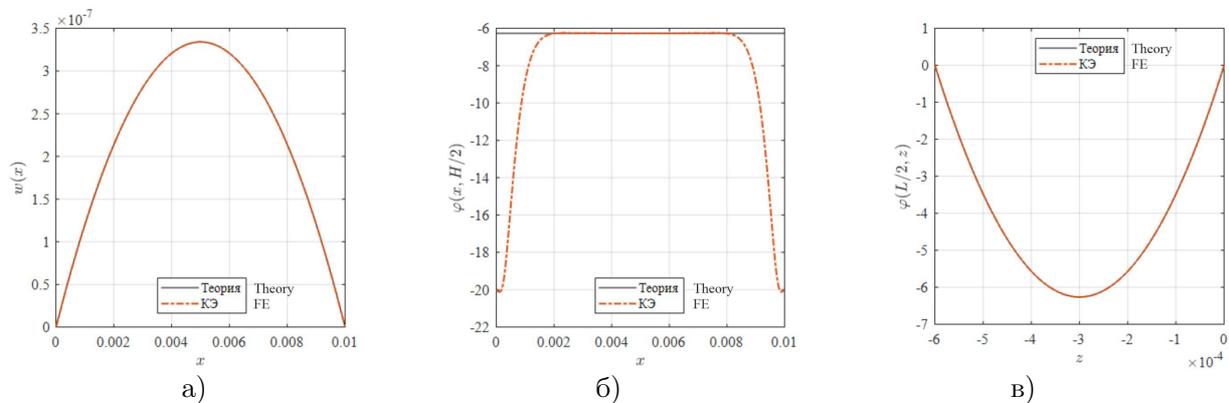


РИС. 3. Распределение механических и электрических полей в верхнем слое при разнице температур на границах и нулевых потенциалах: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины.

FIG. 3. Distribution of mechanical and electric fields in the upper layer with temperature difference on the boundaries and zero potentials: а) plate deflection, б) longitudinal potential distribution in the middle of the layer, в) transverse potential distribution in the middle of the plate.

Анализ результатов, полученных по прикладной теории и с помощью метода КЭ, показывает, что погрешность в значениях характеристик деформированного состояния, как и распределения электрического потенциала, составляет не более одного процента. Исключением являются концы пластины, где различие для электрического потенциала более существенно. Вместе с тем важная характеристика ПЭГ — выходной электрический потенциал для третьей задачи (его значение оказалось равным $V_0 = 237$ В) находится также с незначительной погрешностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе гипотез типа Кирхгофа–Лява и предположения о квадратичном распределении электрического потенциала в каждом слое пластины, представляющей собой пьезоэлектрический биморф из термоэлектрострупугого материала, строится прикладная теория его поперечных колебаний. Распределение температуры учитывается в определяющих соотношениях для механических и электрических полей, при этом уравнение теплопроводности решается отдельно. Задача сводится к двум связанным обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого и второго порядков относительно прогиба нейтральной линии и распределения электрического потенциала в середине каждого из слоев и граничных условий для механических характеристик: прогиба, угла поворота, момента и поперечной силы, потенциала или продольной компоненты вектора электрической индукции. Внешние поверхности и интерфейсный слой биморфа

электродированы. Электрические потенциалы на внешних электродах одинаковы. В численных экспериментах рассматривалось линейное распределение температуры по толщине биморфа и постоянное распределение по внешним поверхностям. Колебания рассматривались для шарнирно опертой пластины при их возбуждении равномерно распределенным механическим давлением, разностью потенциалов на электродах, разностью температур на внешних поверхностях. Численные результаты сравнивались с расчетом с помощью метода конечных элементов в пакете COMSOL. Это сравнение подтвердило адекватность предложенной прикладной теории в низкочастотной области, а именно, резонансная частота первой изгибной моды является рабочей для такого устройства.

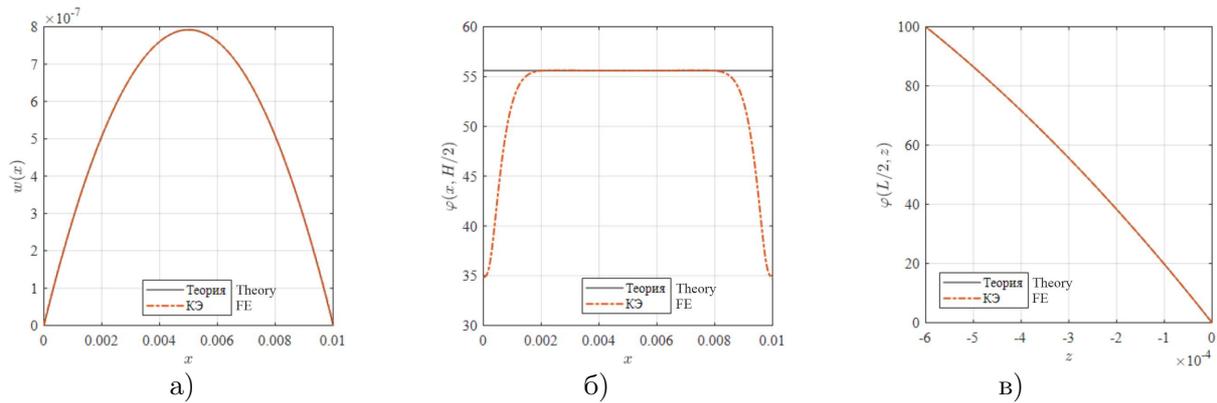


РИС. 4. Распределение механических и электрических полей в верхнем слое при одинаковой температуре и приложенном потенциале 100 В: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины.

FIG. 4. Distribution of mechanical and electric fields in the upper layer for the same temperature and applied potential of 100 V: а) deflection of the plate, б) longitudinal distribution of the potential in the middle of the layer, в) transverse distribution of the potential in the middle of the plate.

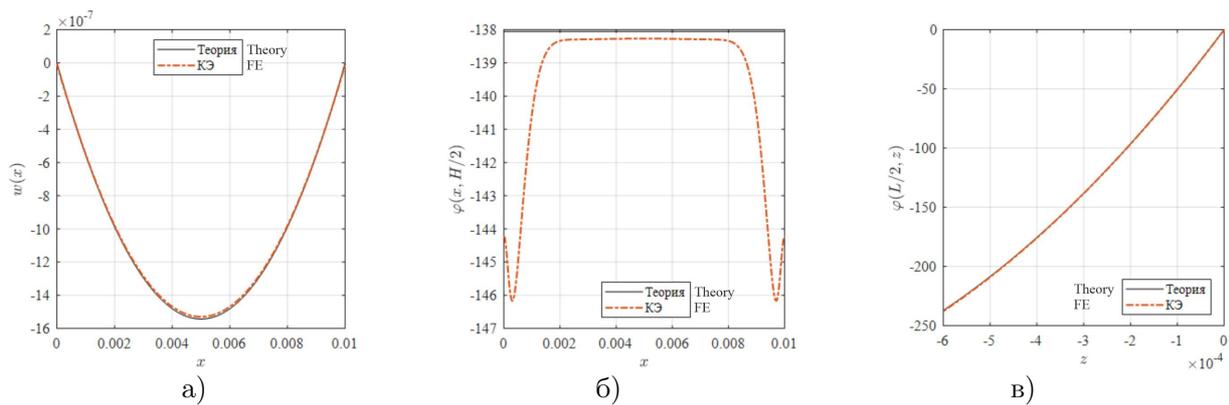


РИС. 5. Распределение механических и электрических полей в верхнем слое при разнице температур на границах и неизвестном потенциале на внешних электродах: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины.

FIG. 5. Distribution of mechanical and electric fields in the upper layer with temperature difference on the boundaries and unknown potential on the external electrodes: а) plate deflection, б) longitudinal potential distribution in the middle of the layer, в) transverse potential distribution in the middle of the plate.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bednarek S.* Elastic and magnetic properties of heat-shrinkable ferromagnetic composites with elastomer matrix// Mater. Sci. Engrg. B. — 2000. — 77. — С. 120–127.
2. *Binh D. T., Chebanenko V. A., Duong L. V., Kirillova E., Thang P. M., Soloviev A. N.* Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph// J. Adv. Dielectrics. — 2020. — 10, № 3. — 2050007.
3. *Du J. K., Wang J., Zhou Ya.* Thickness vibrations of a piezoelectric plate under biasing fields// Ultrasonics. — 2006. — 44. — С. 853–857.
4. *Huang J.* Micromechanics determinations of thermoelectroelastic fields and effective thermoelectroelastic moduli of piezoelectric composites// Mater. Sci. Engrg. B. — 1996. — 39. — С. 163–172.
5. *Kulikov G. M., Mamontov A., Plotnikova S.* Coupled thermoelectroelastic stress analysis of piezoelectric shells// Composite Structures. — 2015. — 124. — С. 65–76.
6. *Levin V.* Exact relations between the effective thermoelectroelastic characteristics of piezoelectric composites// Int. J. Engrg. Sci. — 2013. — 66-67. — С. 14–20.
7. *Levin V. M., Rakovskaja M. I., Kreher W. S.* The effective thermoelectroelastic properties of microinhomogeneous materials// Int. J. Solids Structures. — 1999. — 36. — С. 2683–2705.
8. *Nowacki W.* Mathematical models of phenomenological piezoelectricity// Banach Center Publ. — 1985. — 1, № 15. — С. 593–607.
9. *Pasternak I., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on Green's functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelasticity// Eng. Anal. Bound. Elem. — 2016. — 64. — С. 222–229.
10. *Soloviev A. N., Chebanenko V. A., Oganessian P. A., Chao S.-F., Liu Y.-M.* Applied theory for electroelastic plates with non-homogeneous polarization// Mater. Phys. Mech. — 2019. — 42, № 2. — С. 242–255.
11. *Xu K., Noor A. K., Tang Y. Y.* Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multilayered plates// Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 1995. — 126, № 3-4. — С. 355–371.
12. *Xu K., Noor A. K., Tang Y. Y.* Three-dimensional solutions for free vibrations of initially-stressed thermoelectroelastic multilayered plates// В сб.: «Contemporary Research in Engineering Science». — Berlin—Heidelberg: Springer, 1995. — С. 593–612.
13. *Zhang C., Cheung Y. K., Di S., Zhang N.* The exact solution of coupled thermoelectroelastic behavior of piezoelectric laminates// Comput. Struct. — 2002. — 80. — С. 1201–1212.
14. *Zhong X., Wu Y., Zhang K.* An extended dielectric crack model for fracture analysis of a thermopiezoelectric strip// Acta Mech. Solida Sin. — 2020. — 33. — С. 521–545.

А. Н. Соловьев

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: solovievarc@gmail.com

В. А. Чебаненко

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: valera@chebanenko.ru

М. С. Германчук

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: germanchukms@cfuv.ru

UDC 534.121.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374

EDN: UZSLLN

Applied theory of flexural vibrations of a piezoactive bimorph in the framework of an uncoupled boundary-value problem of thermoelectroelasticity

A. N. Soloviev^{1,2}, V. A. Chebanenko^{2,3}, and M. S. Germanchuk⁴

¹*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia*

²*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

³*Southern Research Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

⁴*V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia*

Abstract. In this paper, we consider transverse steady oscillations of a piezoactive bimorph in the formulation of a plane deformation. The problem is solved within the framework of linear thermoelectroelasticity, while the temperature problem is solved separately and the temperature distribution is taken into account in the constitutive relations of electroelasticity. On the basis the Kirchhoff–Love type hypothesis for mechanical quantities and a symmetric quadratic distribution of the electric potential, an approximate theory for calculating bimorph vibrations is constructed. Numerical experiments have been carried out for various cases of pinning and excitation of vibrations. The results of these experiments were compared with calculations made using the finite element method in the COMSOL package and showed the adequacy of the constructed theory in the low-frequency region.

Keywords: thermoelectroelasticity, bimorph, vibrations, applied theory, finite element method, piezoelectric generator for collecting and storing energy.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was financially supported (first and second authors) by the Russian Science Foundation grant № 22-11-00265.

For citation: A. N. Soloviev, V. A. Chebanenko, M. S. Germanchuk, “Applied theory of flexural vibrations of a piezoactive bimorph in the framework of an uncoupled boundary-value problem of thermoelectroelasticity,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 364–374. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374>

REFERENCES

1. S. Bednarek, “Elastic and magnetic properties of heat-shrinkable ferromagnetic composites with elastomer matrix,” *Mater. Sci. Engrg. B*, 2000, **77**, 120–127.
2. D. T. Binh, V. A. Chebanenko, L. V. Duong, E. Kirillova, P. M. Thang, A. N. Soloviev, “Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph,” *J. Adv. Dielectrics*, 2020, **10**, No. 3, 2050007.
3. J. K. Du, J. Wang, and Ya. Zhou, “Thickness vibrations of a piezoelectric plate under biasing fields,” *Ultrasonics*, 2006, **44**, 853–857.
4. J. Huang, “Micromechanics determinations of thermoelectroelastic fields and effective thermoelectroelastic moduli of piezoelectric composites,” *Mater. Sci. Engrg. B*, 1996, **39**, 163–172.
5. G. M. Kulikov, A. Mamontov, and S. Plotnikova, “Coupled thermoelectroelastic stress analysis of piezoelectric shells,” *Composite Structures*, 2015, **124**, 65–76.
6. V. Levin, “Exact relations between the effective thermoelectroelastic characteristics of piezoelectric composites,” *Int. J. Engrg. Sci.*, 2013, **66-67**, 14–20.



7. V. M. Levin, M. I. Rakovskaja, and W. S. Kreher, “The effective thermoelectroelastic properties of micro-inhomogeneous materials,” *Int. J. Solids Structures*, 1999, **36**, 2683–2705.
8. W. Nowacki, “Mathematical models of phenomenological piezoelectricity,” *Banach Center Publ.*, 1985, **1**, No. 15, 593–607.
9. I. Pasternak, R. Pasternak, and H. Sulym, “A comprehensive study on Green’s functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelasticity,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2016, **64**, 222–229.
10. A. N. Soloviev, V. A. Chebanenko, P. A. Oganessian, S.-F. Chao, and Y.-M. Liu, “Applied theory for electro-elastic plates with non-homogeneous polarization,” *Mater. Phys. Mech.*, 2019, **42**, No. 2, 242–255.
11. K. Xu, A. K. Noor, and Y. Y. Tang, “Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multilayered plates,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1995, **126**, No. 3-4, 355–371.
12. K. Xu, A. K. Noor, and Y. Y. Tang, “Three-dimensional solutions for free vibrations of initially-stressed thermoelectroelastic multilayered plates,” In: *Contemporary Research in Engineering Science*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1995, pp. 593–612.
13. C. Zhang, Y. K. Cheung, S. Di, and N. Zhang, “The exact solution of coupled thermoelectroelastic behavior of piezoelectric laminates,” *Comput. Struct.*, 2002, **80**, 1201–1212.
14. X. Zhong, Y. Wu, and K. Zhang, “An extended dielectric crack model for fracture analysis of a thermopiezoelectric strip,” *Acta Mech. Solida Sin.*, 2020, **33**, 521–545.

A. N. Soloviev

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: solovievarc@gmail.com

V. A. Chebanenko

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Southern Research Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: valera@chebanenko.ru

M. S. Germanchuk

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: germanchukms@cfuv.ru