Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 2 (2023). С. 342–363
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958, 517.956.32
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363
EDN: URKODE

ОБОБЩЁННАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка в полуполосе плоскости с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с нулевым и ненулевым потенциалом. Данное уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматривается случай нулевой начальной скорости и закрепленных концов (условия Дирихле). Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Определяется классическое решение начально-граничной задачи. В случае нулевого потенциала формулируется теорема единственности классического решения и дается формула для решения в виде ряда, членами которого являются контурные интегралы, содержащие исходные данные задачи. На основе этой формулы вводятся понятия обобщённой начально-граничной задачи и обобщённого решения. Формулируются основные теоремы о конечных формулах для обобщённого решения в случае однородной и неоднородной задач. Для доказательства этих теорем применяется подход, использующий теорию расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера, предложенный А. П. Хромовым (аксиоматический подход). С помощью этого подхода, на основе формул для решений в виде ряда, доказываются сформулированные основные теоремы. Далее, как приложение полученных основных теорем, доказывается теорема о существовании и единственности обобщённого решения начально-граничной задачи при наличии ненулевого суммируемого потенциала и дается формула для решения в виде экспоненциально сходящегося ряда.

Ключевые слова: начально-граничная задача, гиперболическое уравнение, волновое уравнение, уравнение с частными производными, полуполоса, смешанная производная в уравнении, потенциал общего вида, обобщённое решение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *В. С. Рыхлов*. Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 2. С. 342–363. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим обобщёную неоднородную начально-граничную задачу для волнового уравнения со смешанной производной простейшего вида

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; $\varphi(x) \in L_1[0,1]$; $f(x,t)$ является функцией класса Q и обе эти функции являются комплекснозначными.

Здесь и далее считаем, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$ есть *функция класса* Q, если $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$. Кроме того, для краткости, используются обозначения

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \ \ldots .$$

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1.1), т. е. выполняется условие

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Возможны только две принципиально разные ситуации

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \tag{1.4}$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{1.5}$$

В случае (1.4) соответствующая спектральная задача (см. далее задачу (2.2)) является регулярной по Биркгофу [9, с. 66-67], а в случае (1.5) — не регулярной. Не регулярный случай был рассмотрен в [11]. Метод доказательства был отличным от метода настоящей статьи. Далее будет рассматриваться только случай (1.4).

Определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3) будет дано далее в пункте 3.1.

Обобщённая начально-граничная задача (1.1)–(1.3) является одним из наиболее сильных обобщений классической начально-граничной задачи (определение классической задачи дается немного ниже). Внешний вид её такой же, как и у классической задачи, но смысл совсем другой.

При $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q задача (1.1)–(1.3) понимается чисто формально, так как ни о каком удовлетворении решения уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2) речь уже не может идти.

Решение задачи (1.1)–(1.3) ищется как суперпозиция решений двух более простых задач

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{1.6}$$

где $u_1(x,t)$ есть решение обобщённой однородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \tag{1.7}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.9}$$

а $u_2(x,t)$ есть решение обощенной неоднородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t), \tag{1.10}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.11}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{1.12}$$

Первый результат настоящей статьи относится к решению обобщённой задачи (1.7)–(1.9). Для того, чтобы его сформулировать, введём необходимые обозначения, а именно, для функции $f(x) \in L_1[0,1]$ положим:

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in [0,a), \\ f\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi \in [a,1]; \end{cases} \qquad f_*(\xi) = \begin{cases} f\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi \in [0,a), \\ 0, & \xi \in [a,1]. \end{cases} \tag{1.13}$$

где обозначено $a = \dfrac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$ и, таким образом, $1 - a = \dfrac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1}$. Кроме того, воспользуемся известным обозначением $\{x\}$ для дробной части числа $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (1.4). *Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи* (1.7)–(1.9) *является функция* $u_1(x,t)$ *класса* Q, *определяемая формулой*

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\varphi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \varphi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) + \\ + \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right). \quad (1.14)$$

Второй результат статьи относится к решению обобщённой задачи (1.10)–(1.12). Для формулировки результата положим

$$F(x,t) = \int_0^x f(\xi,t)\,d\xi. \quad (1.15)$$

Теорема 1.2. *Пусть* $f(x,t)$ *есть функция класса* Q *и выполняется условие* (1.4). *Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи* (1.10)–(1.12) *является функция* $u_2(x,t)$ *класса* Q, *определяемая формулой*

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int_0^t \left(F^*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right) - F^*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right) + \right. \\ \left. + F_*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right) - F_*\left(\left\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\right) d\tau. \quad (1.16)$$

В этой формуле звёздочки у функции $F(x,t)$ *относятся к первой переменной.*

Для получения этих результатов используется подход, предложенный А. П. Хромовым в [22] (подробно эти результаты изложены в [23]). А именно, как и в [22], используется теория расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера [24], который является основоположником теории суммирования расходящихся рядов.

Вопросы, касающиеся расходящихся рядов, а именно, какой смысл они имеют, как понимать и трактовать сумму расходящегося ряда, какими свойствами должны обладать суммы таких рядов и другие связанные с этими вопросами понятия активно обсуждались ведущими математиками ещё во времена Эйлера, т. е. в 18-м веке. Исторический обзор можно найти в монографии [15].

При получении формул (1.14) и (1.16) для обобщённых решений важнейшую роль играют естественные аксиомы из монографии [15, с. 19] для преобразования расходящихся рядов:

(А) $\sum a_n = s \Longrightarrow \sum k a_n = ks$;
(Б) $\sum a_n = s$, $\sum b_n = t \Longrightarrow \sum (a_n + b_n) = s + t$;
(В) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$.

Также существенно используется правило интегрирования расходящихся рядов, которое предложил А. П. Хромов в [22]:

$$\int \sum = \sum \int, \quad (1.17)$$

где $\int$ — определенный интеграл. И все это опирается на соответствующую теорему Лебега о почленном интегрировании тригонометрического ряда в экспоненциальной форме (формулировку теоремы Лебега для тригонометрического ряда по синусам и косинусам можно найти в [10, с. 277, теорема 3]).

Наконец, как приложение к вышеприведенным результатам, рассматривается обобщённая начально-граничнная задача для волнового уравнения с ненулевым потенциалом

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = q(x)u(x,t), \quad (1.18)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad (1.19)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad (1.20)$$

где $\varphi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x) \in L_1[0,1]$ и $q(x)u(x,t)$ класса Q.

Показывается, что эта задача приводится к интегральному уравнению, решение которого вполне естественно назвать обобщённым решением задачи (1.18)–(1.20). Это решение получается по методу последовательных подстановок. Соответствующий результат будет сформулирован и доказан далее в разделе 4.

2. Определение классического решения, его единственность и формула для решения в виде ряда

Под *классическим решением* задачи (1.1)–(1.3) (или, как иногда говорят, *решением п.в.*) понимается функция $u(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$, которая:

а) непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t))$ абсолютно непрерывны и по x, и по t, и п.в. в Q выполняется равенство

$$u_{xt}(x,t) = u_{tx}(x,t); \tag{2.1}$$

б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q.

Отметим, что необходимость в условии (2.1) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [14].

Из определения видно, что в случае, когда ищется классическое решение задачи (1.1)–(1.3), необходимо считать, что $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

В случае $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$ имеем $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, и уравнение (1.1) является классическим уравнением колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

В [22] рассматривался именно такой случай. Как следствие, из результатов настоящей статьи вытекает полученный в [22] результат об обобщённом решении. Результаты, излагаемые в настоящей статье, относятся к общему случаю $p_1 \in \mathbb{R}$.

С задачей (1.1)–(1.3) тесно связана спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \tag{2.2}$$

порождённая оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \tag{2.3}$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \tag{2.4}$$

Пусть R_λ есть резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x,\xi,\lambda)$ — её функция Грина. Обозначим через $R_{1\lambda}$ интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ рассмотрим систему решений

$$y_1(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ [9, с. 26] имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega_1} & e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1},$$

и его корни, очевидно, суть числа

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \tag{2.5}$$

Эти числа, кроме точки $\lambda_0 = 0$, являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число $\lambda_0 = 0$, как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Результат настоящей статьи будет вытекать из результата, даваемого следующей теоремой единственности для классического решения и представления его рядом (полная версия теоремы опубликована в [12]).

Теорема 2.1. *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) с условием (1.4) и дополнительно выполняется условие, что функция u_{tt} класса Q, то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int\limits_{\gamma_k} \left(\Big(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} + p_2 e^{\lambda t}\lambda R_\lambda\Big)\varphi + \int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)\,d\tau\right) d\lambda, \tag{2.6}$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Из формулы (2.6) найдём, в частности, что если классические решения задач (1.7)–(1.9) и (1.10)–(1.12) существуют, то для их решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, соответственно, справедливы формулы:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int\limits_{\gamma_k} \Big(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} + p_2 e^{\lambda t}\lambda R_\lambda\Big)\varphi\,d\lambda, \tag{2.7}$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int\limits_{\gamma_k} \int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)\,d\tau\,d\lambda. \tag{2.8}$$

3. Конечные формулы для обобщённого решения

3.1. Определение обобщённого решения. Теорема 2.1 говорит о том, что формальный ряд (2.6) и начально-граничная задача (1.1)–(1.3) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (2.6). При этом функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям: $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Аналогично [22] расширим понятие этой связи.

Можно заметить, что ряд в (2.6) имеет смысл для любых функций $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q, хотя теперь он, вообще говоря, может быть и расходящимся. Будем считать, что этот ряд является формальным решением задачи (1.1)–(1.3), когда $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q. Как уже отмечалось, в этом случае задача (1.1)–(1.3) понимается чисто формально.

Эту задачу (1.1)–(1.3) в случае $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q мы и назвали ранее *обобщённой начально-граничной задачей*. Назовем ряд справа в (2.6) *обобщённым решением* этой обобщённой задачи.

Затем можно попытаться найти сумму этого ряда, используя обычные правила анализа и накладывая дополнительно те или иные ограничения на начальную функцию $\varphi(x)$ и неоднородность $f(x,t)$, обеспечивающие сходимость этого ряда к некоторой сумме, понимаемой в классическом смысле по Коши как предел последовательности частичных сумм. Затем, найдя эту сумму, можно попытаться ослабить наложенные ограничения на $\varphi(x)$ и $f(x,t)$.

Но можно, как и в [22], использовать другой подход, упростив тем самым выкладки и при этом не накладывая никаких дополнительных ограничений на $\varphi(x)$ и $f(x,t)$, кроме того, что $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q. А именно, можно трактовать ряд справа в формуле (2.6) изначально как расходящийся (даже если он и сходится) и соответствующим образом определить (или, другими словами, назначить) «сумму» этого ряда («сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда).

Таким образом, найти решение обобщённой начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) — значит определить (или назначить) «сумму» ряда справа в (2.6).

3.2. Определение «суммы» расходящегося тригонометрического ряда. Далее будет показано, что с использованием только аксиом (A)–(B) без использования обычного определения суммы ряда по Коши как предела его частичных сумм ряд справа в (2.6) сводится к сумме конечного числа рядов вида

$$\sum_k a_k e^{2k\pi i x}, \quad \text{где} \quad a_k = \int\limits_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi, \tag{3.1}$$

а функции $f(x) \in L_1[0,1]$ выражаются по простым формулам через функцию $\varphi(x)$ или $f(x,t)$ и суммируемы в том и только в том случае, когда $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q.

Таким образом, чтобы найти формулу для обобщённого решения, необходимо определить «сумму» ряда (3.1). Наиважнейшую роль в этом играет теорема Лебега об интегрировании тригонометрического ряда [10, с. 277, теорема 3]. Нам эта теорема потребуется в следующей формулировке.

Теорема 3.1 (теорема Лебега об интегрировании тригонометрического ряда)**.** *Пусть на промежутке* $[0,1]$ *задана суммируемая функция* $f(x)$, *имеющая ряд* (3.1) *своим рядом Фурье. Если* $[A,B] \subset [0,1]$, *то*

$$\int\limits_A^B f(x)\,dx = \sum_k \int\limits_A^B a_k e^{2k\pi i x}\,dx.$$

Доказательство этой теоремы без особых затруднений получается из доказательства соответствующей теоремы, см. [10, с. 277].

После формулировки этой теоремы в [10, с. 277] отмечено: «Иначе говоря, ряд Фурье суммируемой функции можно *почленно интегрировать*. Этот факт весьма замечателен, поскольку сам этот ряд может и не сходиться».

По сути эта теорема разрешает для тригонометрического ряда переставлять суммирование и интегрирование, даже если ряд расходится. Ввиду этого, как уже было отмечено, в [22] было предложено дополнить сформулированные выше три аксиомы (A)–(B) для расходящихся рядов правилом (1.17).

Используя теорему 3.1, можно определить «сумму» расходящегося ряда (3.1).

Лемма 3.1. *Если* (3.1) *есть ряд Фурье функции* $f(x) \in L_1[0,1]$, *то «сумма» ряда* (3.1) *есть функция* $f(x)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы почти дословно повторяет доказательство соответствующего результата из [22].

В самом деле, пусть «сумма» ряда (3.1) при $x \in [0,1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L_1[0,1]$ (мы ограничиваем себя именно такими функциями). Тогда в соответствии с правилом (1.17) имеем

$$\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \sum_k \left(\int\limits_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\right)\int\limits_0^x e^{2k\pi i\eta}\,d\eta. \tag{3.2}$$

По теореме 3.1 ряд в (3.2) сходится при любом $x \in [0,1]$ и его сумма есть

$$\sum_k \left(\int\limits_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\right)\int\limits_0^x e^{2k\pi i\eta}\,d\eta = \int\limits_0^x f(\eta)\,d\eta. \tag{3.3}$$

Таким образом, из (3.2) и (3.3) получим, что

$$\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^x f(\eta)\,d\eta.$$

А отсюда следует, что $g(x) = f(x)$ для п.в. $x \in [0,1]$, т. е. функция $f(x)$ является «суммой» ряда (3.1). Лемма доказана. □

Утверждение леммы 3.1 вполне согласуется с идеей Эйлера [24], что «сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд».

Описанный метод получения «суммы» расходящегося тригонометрического ряда (3.1) является «регулярным» [15], так как для сходящихся рядов эта «сумма» совпадает с обычной суммой ряда, т. е. с функцией $f(x)$.

3.3. Конечная формула для обобщённого решения в случае однородной задачи. В этом разделе доказывается сформулированная выше теорема 1.1 о конечной формуле (1.14) для обобщённого решения. Исходим из формулы (2.7), которую запишем в виде

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{\gamma_k}\left(e^{\lambda t}\int\limits_0^1\big(-p_1G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)+\lambda p_2G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)\big)\,d\xi\right)d\lambda. \tag{3.4}$$

Для функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ имеет место представление

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)\Delta(\lambda)}\Big(e^{\lambda(\omega_1x+\omega_2(1-\xi))}-e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)}+e^{\lambda(\omega_1(1-\xi)+\omega_2x)}-$$
$$-e^{\lambda(\omega_1+\omega_2(x-\xi))}\Big)-\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)}\chi(x-\xi)+e^{\lambda\omega_2(x-\xi)}\chi(\xi-x)\Big),$$

где $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x)=1$ при $x\geqslant0$, $\chi(x)=0$ при $x<0$).

Для доказательства потребуются две леммы.

Так как числа λ_k, $k=\pm1,\pm2,\dots$, определяемые формулой (2.5), являются простыми полюсами функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$, то для вычетов имеют место формулы, определяемые следующей леммой.

Лемма 3.2. *Справедливы формулы*

$$r_k(x,\xi):=\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k}G(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda_k\omega_2x}-e^{\lambda_k\omega_1x}\Big)\Big(e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big), \tag{3.5}$$

$$r_{1k}(x,\xi):=\operatorname*{res}_{\lambda_k}G_\xi(x,\xi,\lambda)=-\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Big(e^{\lambda_k\omega_2x}-e^{\lambda_k\omega_1x}\Big)\Big(\omega_1e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-\omega_2e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big). \tag{3.6}$$

Доказательство леммы получается непосредственным подсчетом по формуле для вычетов отношения двух целых функций в случае простых полюсов [7, с. 417].

В следующей лемме даются формулы приведения интегралов от $e^{-\lambda_k\omega_j\xi}f(\xi)$, $j=1,2$ к коэффициентам Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi ix}\}$ некоторых преобразований функций $f(\xi)$.

Лемма 3.3. *Если* $f(x)\in L_1[0,1]$, *то справедливы формулы*

$$\int\limits_0^1e^{-\lambda_k\omega_1\xi}f(\xi)\,d\xi=-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}\int\limits_0^1e^{-2k\pi i\xi}f^*(\xi)\,d\xi, \tag{3.7}$$

$$\int\limits_0^1e^{-\lambda_k\omega_2\xi}f(\xi)\,d\xi=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\int\limits_0^1e^{-2k\pi i\xi}f_*(\xi)\,d\xi, \tag{3.8}$$

где функции $f^*(\xi)$ *и* $f_*(\xi)$ *определяются формулами* (1.13).

Доказательство этой леммы без особых проблем получается в результате соответствующих замен переменных под знаками интегралов.

Перейдём теперь к непосредственному доказательству теоремы 1.1.

Используя обозначения леммы 3.2, из (3.4) получим

$$u_1(x,t)=\sum_k\int\limits_0^1\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k}\Big(e^{\lambda t}\big(-p_1G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)+\lambda p_2G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)\big)\Big)\,d\xi=$$
$$=\sum_k\int\limits_0^1\Big(e^{\lambda_kt}\big(-p_1r_{1k}(x,\xi)+\lambda_kp_2r_k(x,\xi)\big)\varphi(\xi)\Big)\,d\xi. \tag{3.9}$$

На основании формул (3.5)-(3.6), а также аксиом (А)-(Б) из (3.9) будем иметь

$$u_1(x,t)=\sum_k\big(e^{\lambda_k(t+\omega_2x)}-e^{\lambda_k(t+\omega_1x)}\big)\Bigg(\int\limits_0^1\bigg(\Big(\frac{p_1\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}+\frac{\lambda_kp_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)}\Big)e^{-\lambda_k\omega_1\xi}-$$

$$- \Big(\frac{p_1\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)} \Big) e^{-\lambda_k\omega_2\xi} \Big)\varphi(\xi)\,d\xi \Big). \quad (3.10)$$

Отсюда, используя формулы Виета: $p_1 = -(\omega_1+\omega_2)$ и $p_2 = \omega_1\omega_2$, найдём

$$u_1(x,t) = \sum_k \big(e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)}\big) \times$$

$$\times \Big(-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k\omega_1\xi}\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\varphi(\xi)\,d\xi \Big) =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \Big(-\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_1\xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_1\xi} d\xi \Big) +$$

$$+ \frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \Big(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi)e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\,d\xi \Big). \quad (3.11)$$

Далее применяем лемму 3.3 и аксиому (A). В результате получим

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1} \Big(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi \Big) +$$

$$+ \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1} \Big(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi \Big). \quad (3.12)$$

Теперь, чтобы получить конечную формулу для обобщённого решения, воспользуемся леммой 3.1 для определения «сумм» рядов, стоящих справа. Так как функция $e^{2k\pi i x}$ есть 1-периодическая функция, то в результате получим следующее представление для правой части последней формулы при п.в. $(x,t) \in Q$:

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1} \Big(\varphi^*\Big(\Big\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\Big) - \varphi^*\Big(\Big\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\Big) \Big) +$$

$$+ \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1} \Big(\varphi_*\Big(\Big\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\Big) - \varphi_*\Big(\Big\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\Big) \Big), \quad (3.13)$$

где, как и раньше, $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$. А это и есть формула (1.14).

То, что решение $u_1(x,t)$ есть функция класса Q, следует из следующей леммы.

Лемма 3.4. *Имеет место оценка*

$$\|u_1(x,t)\|_{L_1(Q_T)} \leqslant \Big(\frac{\omega^*}{\omega_*}\Big)^2 (T + 4\omega_*)\|\varphi\|_{L_1[0,1]}, \quad (3.14)$$

где обозначено $\omega_* = \min\{|\omega_1|, \omega_2\}$, $\omega^* = \max\{|\omega_1|, \omega_2\}$.

Доказательство. Из формулы (1.14) следует оценка

$$\|u_1(x,t)\|_{L_1(Q_T)} = \int_0^T d\tau \int_0^1 |u_1(\xi,\tau)|\,d\xi = \int_0^1 d\xi \int_0^T |u_1(\xi,\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\omega_1|}{\omega_2-\omega_1} \Big(\int_0^1 d\xi \int_0^T \Big|\varphi^*\Big(\Big\{\frac{t+\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\Big)\Big|\,d\tau + \int_0^1 d\xi \int_0^T \Big|\varphi^*\Big(\Big\{\frac{t+\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}\Big\}\Big)\Big|\,d\tau \Big) +$$

$$
+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^T\left|\varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right|d\tau+\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^T\left|\varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right|d\tau\right)=
$$

$$
=\frac{|\omega_1|}{\omega_2-\omega_1}\big(I_1+I_2\big)+\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\big(I_3+I_4\big). \quad (3.15)
$$

Оценим каждое слагаемое.

Делая в I_1 замену

$$
\frac{\tau+\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}=\tau_1 \quad\longrightarrow\quad d\tau=(\omega_2-\omega_1)d\tau_1,
$$

получим

$$
I_1=(\omega_2-\omega_1)\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_{\frac{\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}}^{\frac{T+\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}}\big|\varphi^*\big(\{\tau_1\}\big)\big|\,d\tau_1\leqslant(\omega_2-\omega_1)\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^{\frac{T+\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}\big|\varphi^*\big(\{\tau_1\}\big)\big|\,d\tau_1.
$$

Обозначим через m наименьшее натуральное число такое, что

$$
\frac{T}{\omega_2-\omega_1}\leqslant m<\frac{T}{\omega_2-\omega_1}+1.
$$

Учитывая это и принимая во внимание, что $\varphi^*\big(\{\tau_1\}\big)$ есть 1-периодическая функция, будем иметь

$$
I_1\leqslant(\omega_2-\omega_1)\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_0^{m+1}\big|\varphi^*\big(\{\tau_1\}\big)\big|\,d\tau_1=(\omega_2-\omega_1)(m+1)\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^1\big|\varphi^*(\tau_1)\big|\,d\tau_1. \quad (3.16)
$$

Далее потребуется следующая лемма.

Лемма 3.5. *Для функции $f(x)\in L_1[0,1]$ имеют место равенства*

$$
\int\limits_0^1\big|f^*(x)\big|\,dx=\frac{|\omega_1|}{\omega_2-\omega_1}\|f\|_{L_1[0,1]},\qquad\int\limits_0^1\big|f_*(x)\big|\,dx=\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\|f\|_{L_1[0,1]}.
$$

Доказательство. Вспоминая определение функций $f^*(x)$ и $f_*(x)$ (см. формулы (1.13)), легко найдём

$$
\int\limits_0^1\big|f^*(x)\big|\,dx=\int\limits_a^1\Big|f\Big(\frac{1-x}{1-a}\Big)\Big|\,dx=(1-a)\int\limits_0^1|f(\xi)|\,d\xi=\frac{|\omega_1|}{\omega_2-\omega_1}\|f\|_{L_1[0,1]},
$$

а это есть первое равенство в формулировке леммы. Второе равенство получается аналогично. Лемма 3.5 доказана. □

Используя эту лемму, без труда получим из (3.16)

$$
I_1\leqslant|\omega_1|(m+1)\|\varphi\|_{L_1[0,1]}\leqslant|\omega_1|\left(\frac{T}{\omega_2-\omega_1}+2\right)\|\varphi\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.17)
$$

Рассмотрим теперь I_2. Делая в I_2 замену

$$
\frac{\tau+\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}=\tau_2 \quad\longrightarrow\quad d\tau=(\omega_2-\omega_1)d\tau_2,
$$

получим аналогично предыдущему

$$
I_2=(\omega_2-\omega_1)\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_{\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}}^{\frac{T+\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}}\big|\varphi^*\big(\{\tau_2\}\big)\big|\,d\tau_2\leqslant(\omega_2-\omega_1)\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_{-1}^{\frac{T}{\omega_2-\omega_1}}\big|\varphi^*\big(\{\tau_2\}\big)\big|\,d\tau_2\leqslant
$$

$$
\leqslant(\omega_2-\omega_1)\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{-1}^{m}\big|\varphi^*\big(\{\tau_2\}\big)\big|\,d\tau_2=(\omega_2-\omega_1)(m+1)\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^1\big|\varphi^*(\tau_2)\big|\,d\tau_2\leqslant
$$

$$\leqslant |\omega_1|(m+1)\|\varphi\|_{L_1[0,1]} \leqslant |\omega_1| \left(\frac{T}{\omega_2-\omega_1}+2\right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.18)$$

Похожим образом можно получить оценки

$$I_3 \leqslant \omega_2 \left(\frac{T}{\omega_2-\omega_1}+2\right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}, \quad I_4 \leqslant \omega_2 \left(\frac{T}{\omega_2-\omega_1}+2\right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.19)$$

Из (3.15), (3.17), (3.18) и (3.19) будем иметь

$$\|u_1(x,t)\|_{L_1(Q_T)} \leqslant \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2-\omega_1}\big(|\omega_1|+|\omega_1|\big) + \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}(\omega_2+\omega_2)\right) \left(\frac{T}{\omega_2-\omega_1}+2\right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]} =$$
$$= \left(\frac{2\big(|\omega_1|^2+\omega_2^2\big)}{\omega_2-\omega_1}\right) \left(\frac{T}{\omega_2-\omega_1}+2\right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]} \leqslant \left(\frac{\omega^*}{\omega_*}\right)^2 (T+4\omega_*)\|\varphi\|_{L_1[0,1]},$$

а это и есть утверждение леммы 3.4. Тем самым лемма 3.4 доказана. □

Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

Следствие 3.1. *Пусть* $\varphi \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (1.4). *Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи* (1.7)–(1.9) *является функция* $u_1(x,t)$ *класса* Q, *определяемая формулой*

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right), \quad (3.20)$$

где

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2\varphi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \text{если } \xi \in [0,a); \\ \omega_1\varphi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \text{если } \xi \in [a,1]. \end{cases} \quad (3.21)$$

Доказательство. Запишем формулу (1.14) (или, что то же самое, (3.13)) в другом виде:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\left(\omega_1\varphi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) + \omega_2\varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\omega_1\varphi^*\left(\left\{\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) + \omega_2\varphi_*\left(\left\{\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)\right). \quad (3.22)$$

Используя формулы (1.13) для функций со звёздочками, получим более простое представление для комбинации функций, стоящих в скобках в (3.22):

$$\omega_1\varphi^*(\xi) + \omega_2\varphi_*(\xi) \equiv \widehat{\varphi}(\xi),$$

где $\widehat{\varphi}(\xi)$ — именно та функция (3.21), которая фигурирует в формуле (3.20).

С учётом этого формула (3.22) запишется в виде (3.20).

То, что $u_1(x,t)$ есть функция класса Q, уже установлено в лемме 3.4. Таким образом, следствие 3.1 доказано. □

Для сравнения целесообразно привести следующий результат из [12] о формуле для классического решения задачи (1.7)–(1.9).

Теорема 3.2. *Пусть выполняется условие* (1.4). *Для того, чтобы задача* (1.7)–(1.9) *имела единственное классическое решение, необходимо и достаточно, чтобы функции* $\varphi(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *были абсолютно непрерывны,* $\varphi''(x) \in L_1[0,1]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. *При этом решение* $u_1(x,t)$ *определяется формулой* (1.14) *(или* (3.13)*).*

Следовательно, и классическое, и обобщённое решения выражаются одной и той же формулой. Этот факт подтверждает правильность изложенного подхода получения формулы (1.14) для обобщённого решения $u_1(x,t)$ задачи (1.7)–(1.9).

3.4. Конечная формула для обобщённого решения в случае неоднородной задачи. В этом разделе доказывается сформулированная выше теорема 1.2 о конечной формуле (1.16) для обобщённого решения. Исходим из формулы (2.8), которую запишем в виде

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int\limits_{\gamma_k} \int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau\, d\lambda.$$

Используя обозначения леммы 3.2, отсюда найдём

$$u_2(x,t) = \sum_k \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_k} \Big(e^{\lambda(t-\tau)} G(x,\xi,\lambda) f(\xi,\tau)\Big)\, d\xi\, d\tau = \sum_k \int\limits_0^t \int\limits_0^1 e^{\lambda_k(t-\tau)} r_k(x,\xi) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{3.23}$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формул (3.10)–(3.12), а именно, на основании леммы 3.2 из (3.23) получим

$$u_2(x,t) = \sum_k \frac{1}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)} \int\limits_0^t \big(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)}\big) \times$$
$$\times \int\limits_0^1 \frac{\omega_1\omega_2}{2k\pi i(\omega_2-\omega_1)} \Big(e^{-\lambda_k\omega_1\xi} - e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\Big) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{3.24}$$

Используя обозначение (1.15), проведём во внутреннем интеграле справа в (3.24) один раз интегрирование по частям, при этом учтём равенство

$$e^{-\lambda_k\omega_1} - e^{-\lambda_k\omega_2} = e^{-\lambda_k\omega_2}\big(e^{\lambda_k(\omega_2-\omega_1)} - 1\big) = e^{-\lambda_k\omega_2}\big(e^{2k\pi i} - 1\big) = 0$$

и аксиомы (A)–(B). Получим

$$u_2(x,t) = \sum_k \int\limits_0^t \big(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)}\big) \times$$
$$\times \left(\frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int\limits_0^1 F(\xi,\tau) e^{-\lambda\omega_1\xi}\, d\xi - \frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2} \int\limits_0^1 F(\xi,\tau) e^{-\lambda\omega_2\xi}\, d\xi\right) =$$
$$= \frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\sum_k \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} \int\limits_0^1 F(\xi,\tau) e^{-\lambda_k\omega_1\xi} d\xi\, d\tau - \right.$$
$$\left. - \sum_k \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \int\limits_0^1 F(\xi,\tau) e^{-\lambda_k\omega_1\xi}\, d\xi\, d\tau\right) -$$
$$- \frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\sum_k \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} \int\limits_0^1 F(\xi,\tau) e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\, d\xi\, d\tau - \right.$$
$$\left. - \sum_k \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \int\limits_0^1 F(\xi,\tau) e^{-\lambda_k\omega_2\xi}\, d\xi\, d\tau\right).$$

Далее применяем лемму 3.3, аксиому (A) и правило (1.17). В результате получим

$$u_2(x,t) =$$
$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1} \int\limits_0^t \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}} \int\limits_0^1 F^*(\xi,\tau) e^{-2k\pi i\xi}\, d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}} \int\limits_0^1 F^*(\xi,\tau) e^{-2k\pi i\xi}\, d\xi - \right.$$

$$-\sum_k e^{2k\pi i\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}}\int\limits_0^1 F_*(\xi,\tau)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi+\sum_k e^{2k\pi i\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}}\int\limits_0^1 F_*(\xi,\tau)e^{-2k\pi i\xi}\,d\xi\Bigg)\,d\tau. \quad (3.25)$$

Используя уже найденную «сумму»[1] ряда (3.1), получим следующее представление для правой части формулы (3.25):

$$u_2(x,t)=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t\Bigg(F^*\bigg(\bigg\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\bigg\},\tau\bigg)-F^*\bigg(\bigg\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\bigg\},\tau\bigg)-$$
$$-F_*\bigg(\bigg\{\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\bigg\},\tau\bigg)-F_*\bigg(\bigg\{\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\bigg\},\tau\bigg)\Bigg)\,d\tau, \quad (3.26)$$

а это и есть формула (1.16).

То, что $u_2(x,t)$ является функцией класса Q, вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.6. *Имеет место оценка*

$$\|u_2(x,t)\|_{L_1(Q_T)}\leqslant\frac{1}{2\omega_*}\|f(x,t)\|_{L_1(Q_T)}. \quad (3.27)$$

Доказательство. Чтобы доказать оценку (3.27), получим для функции $u_2(x,t)$, определенной формулой (3.26), другое, более удобное в некоторых вопросах, представление. Сформулируем результат в виде леммы.

Лемма 3.7. *Если $f(x,t)$ есть функция класса Q и выполняется условие* (1.4)*, то для решения $u_2(x,t)$ обобщённой начально-граничной задачи* (1.9)–(1.11) *справедлива формула*

$$u_2(x,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\eta\left(\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right)}^{\eta\left(\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)} f(\xi,\tau)\,d\xi, \quad (3.28)$$

где

$$\eta(s)=\frac{\{s\}}{a}\chi\big(a-\{s\}\big)+\frac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\}-a\big) \quad (3.29)$$

является непрерывной кусочно-линейной функцией при $s\in(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет неравенству

$$0\leqslant\eta(s)\leqslant 1. \quad (3.30)$$

Доказательство. Положим для краткости

$$\alpha\equiv\alpha(x,t-\tau):=\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1},\quad \beta\equiv\beta(x,t-\tau):=\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}. \quad (3.31)$$

Тогда выражение под интегралом (3.26) будет иметь вид

$$\Phi(\alpha,\beta,\tau)=F^*(\{\alpha\},\tau)-F^*(\{\beta\},\tau)-F_*(\{\alpha\},\tau)-F_*(\{\beta\},\tau).$$

Найдём для функции $\Phi(\alpha,\beta,\tau)$ явное выражение через функцию $f(x,t)$. Из формул (1.13) следует, что для функций со звёздочками возможны следующие четыре случая:

1) $\{\alpha\},\{\beta\}\in[0,a)$; в этом случае, учитывая обозначение (1.15), будем иметь

$$\Phi(\alpha,\beta,\tau)=0-0+F\bigg(\frac{\{\alpha\}}{a},\tau\bigg)-F\bigg(\frac{\{\beta\}}{a},\tau\bigg)=\int\limits_0^{\frac{\{\alpha\}}{a}}f(\xi,\tau)\,d\xi-\int\limits_0^{\frac{\{\beta\}}{a}}f(\xi,\tau)\,d\xi=\int\limits_{\frac{\{\beta\}}{a}}^{\frac{\{\alpha\}}{a}}f(\xi,\tau)\,d\xi;$$

[1] В данном случае это будет уже обычная сумма, так как если $f(x)\in W_1^1[0,1]$, то ряд (3.1) сходится, в частности, для п.в. $x\in[0,1]$ к функции $f(x)$.

2) $\{\alpha\}\in[0,a), \{\beta\}\in[a,1]$; в этом случае аналогично предыдущему будем иметь

$$\Phi(\alpha,\beta,\tau)=0-F\left(\frac{1-\{\beta\}}{1-a},\tau\right)+F\left(\frac{\{\alpha\}}{a},\tau\right)-0=-\int\limits_0^{\frac{1-\{\beta\}}{1-a}} f(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^{\frac{\{\alpha\}}{a}} f(\xi,\tau)\,d\xi=\int\limits_{\frac{1-\{\beta\}}{1-a}}^{\frac{\{\alpha\}}{a}} f(\xi,\tau)\,d\xi;$$

3) $\{\beta\}\in[0,a), \{\alpha\}\in[a,1]$; в этом случае аналогично предыдущему будем иметь

$$\Phi(\alpha,\beta,\tau)=F\left(\frac{1-\{\alpha\}}{1-a},\tau\right)-0+0-F\left(\frac{\{\beta\}}{a},\tau\right)=\int\limits_0^{\frac{1-\{\alpha\}}{1-a}} f(\xi,\tau)\,d\xi-\int\limits_0^{\frac{\{\beta\}}{a}} f(\xi,\tau)\,d\xi=\int\limits_{\frac{\{\beta\}}{a}}^{\frac{1-\{\alpha\}}{1-a}} f(\xi,\tau)\,d\xi;$$

4) $\{\alpha\},\{\beta\}\in[a,1]$; в этом случае аналогично предыдущему будем иметь

$$\Phi(\alpha,\beta,\tau)=F\left(\frac{1-\{\alpha\}}{1-a},\tau\right)-F\left(\frac{1-\{\beta\}}{1-a},\tau\right)+0-0=$$
$$=\int\limits_0^{\frac{1-\{\alpha\}}{1-a}} f(\xi,\tau)\,d\xi-\int\limits_0^{\frac{1-\{\beta\}}{1-a}} f(\xi,\tau)\,d\xi=\int\limits_{\frac{1-\{\beta\}}{1-a}}^{\frac{\{1-\alpha\}}{1-a}} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Учитывая теперь определение (3.29) функции $\eta(s)$ и найденные в пунктах 1)–4) формулы для функции $\Phi(\alpha,\beta,\tau)$ в разных случаях, получим

$$\Phi(\alpha,\beta,\tau)=\int\limits_{\eta(\beta)}^{\eta(\alpha)} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Подставляя найденное выражение для $\Phi(\alpha,\beta,\tau)$ в формулу (3.26) для решения $u_2(x,t)$, получим формулу (3.28).

Докажем, что функция $\eta(s)$ непрерывна при $s\in(-\infty,+\infty)$.

Функция $\eta(s)$ кусочно-линейная. Разрывы могут быть только в точках $x=n$ и $a+n$, $n\in\mathbb{Z}$. Покажем, что в этих точках односторонние пределы совпадают:

$$\eta(n+0)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{\{n+\varepsilon\}}{a}\chi\big(a-\{n+\varepsilon\}\big)+\frac{1-\{n+\varepsilon\}}{1-a}\chi\big(\{n+\varepsilon\}-a\big)\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{\varepsilon}{a}\chi(a-\varepsilon)+\frac{1-\varepsilon}{1-a}\chi(\varepsilon-a)\right)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{\varepsilon}{a}=0;$$
$$\eta(n-0)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{\{n-\varepsilon\}}{a}\chi\big(a-\{n-\varepsilon\}\big)+\frac{1-\{n-\varepsilon\}}{1-a}\chi\big(\{n-\varepsilon\}-a\big)\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{1-\varepsilon}{a}\chi\big(a-(1-\varepsilon)\big)+\frac{1-(1-\varepsilon)}{1-a}\chi\big((1-\varepsilon)-a\big)\right)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{\varepsilon}{1-a}=0,$$

таким образом, $\eta(n+0)=\eta(n-0)$;

$$\eta(a+n+0)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{\{a+n+\varepsilon\}}{a}\chi\big(a-\{a+n+\varepsilon\}\big)+\frac{1-\{a+n+\varepsilon\}}{1-a}\chi\big(\{a+n+\varepsilon\}-a\big)\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{a+\varepsilon}{a}\chi\big(a-(a+\varepsilon)\big)+\frac{1-(a+\varepsilon)}{1-a}\chi\big((a+\varepsilon)-a\big)\right)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{1-a-\varepsilon}{1-a}=1;$$
$$\eta(a+n-0)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{\{a+n-\varepsilon\}}{a}\chi\big(a-\{a+n-\varepsilon\}\big)+\frac{1-\{a+n-\varepsilon\}}{1-a}\chi\big(\{a+n-\varepsilon\}-a\big)\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\chi\big(a-(a-\varepsilon)\big)+\frac{1-(a-\varepsilon)}{1-a}\chi\big((a-\varepsilon)-a\big)\right)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{a-\varepsilon}{a}=1,$$

таким образом. $\eta(a+n+0)=\eta(a+n-0)$.

Тем самым установлено, что $\eta(s)$ есть непрерывная кусочно-линейная функция на всей вещественной оси.

Осталось доказать неравенства (3.30). Если $0 \leqslant \{s\} < a$, то из (3.29) получим

$$0 \leqslant \eta(s) < 1,$$

а если $a \leqslant \{s\} < 1$, то

$$0 < \eta(s) \leqslant 1.$$

Тем самым неравенства (3.30) установлены и лемма 3.7 полностью доказана. □

Теперь можно завершить доказательство леммы 3.6. Для этого воспользуемся представлением (3.28) для решения $u_2(x,t)$, предположением, что $f(x,t)$ есть функция класса Q, и оценкой (3.30). Получим для $\forall (x,t) \in Q_T$:

$$|u_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha)}^{\eta(\beta)} |f(\xi,\tau)|\,d\xi \leqslant \frac{1}{2\omega_*}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |f(\xi,\tau)|\,d\xi = \frac{1}{2\omega_*}\|f(x,t)\|_{L_1(Q_T)}, \tag{3.32}$$

а отсюда сразу следует неравенство (3.27). Лемма 3.6 доказана.

□

А, тем самым, и теорема 1.2 полностью доказана.

На самом деле справедлив более сильный результат, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть $f(x,t)$ есть функция класса Q и выполняется условие* (1.4). *Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи* (1.10)–(1.12) *является функция $u_2(x,t)$, непрерывная в Q_T, определяемая формулами* (1.16) *или* (3.28), *и для неё имеет место оценка*

$$\|u_2(x,t)\|_{C(Q_T)} \leqslant \frac{1}{2\omega_*}\|f(x,t)\|_{L_1(Q_T)}. \tag{3.33}$$

Доказательство. Непрерывность функции $u_2(x,t)$ следует из формулы (3.28), непрерывности функции $\eta(s)$ на всей вещественной оси и функций $\alpha = \alpha(x,t-\tau)$, $\beta = \beta(x,t-\tau)$ в области $(x,t,\tau) \in [0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ как интегралов от суммируемой функции с непрерывными пределами интегрирования.

Оценка (3.33) непосредственно вытекает из оценки (3.32). Тем самым, теорема 3.3 доказана. □

Для сравнения целесообразно привести следующий результат из [13] о формуле для классического решения неоднородной задачи (1.10)–(1.12).

Теорема 3.4. *Пусть выполняется условие* (1.4). *Для того, чтобы задача* (1.10)–(1.12) *имела единственное классическое решение $u_2(x,t)$, достаточно, чтобы функция $f(x,t)$ была абсолютно непрерывна по $t > 0$ при п.в. $x \in [0,1]$ и $f'_t(x,t)$ была функцией класса Q. При этом решение $u_2(x,t)$ определяется формулой* (1.16) (*или* (3.26)).

Следовательно, и классическое, и обобщённое решения выражаются одной и той же формулой. Этот факт подтверждает правильность изложенного подхода получения формулы (1.16) для обобщённого решения $u_2(x,t)$ задачи (1.10)–(1.12).

4. Простейшая начально-граничная задача с ненулевым потенциалом

Вначале вернёмся к исходной обобщённой задаче (1.1)–(1.3). В соответствии с формулой (1.6), теоремой 1.1, леммой 3.7 и обозначениями (3.31) имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если $\varphi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t)$ есть функция класса Q и выполняется условие* (1.4), *то для решения $u(x,t)$ обобщённой начально-граничной задачи* (1.1)–(1.3) *справедлива формула*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} f(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{4.1}$$

где функция $u_1(x,t)$ определяется формулой (1.14).

Теперь рассмотрим начально-граничную задачу (1.18)–(1.20). В этой задаче будем рассматривать правую часть $q(x)u(x,t)$ в уравнении (1.18) как возмущение в задаче (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 4.1 мы от задачи (1.18)–(1.20) приходим к интегральному уравнению:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)u(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{4.2}$$

Вполне естественно назвать *обобщённым решением* обобщённой начально-граничной задачи (1.18)–(1.20) решение интегрального уравнения (4.2).

Решим уравнение (4.2). Решать будем методом последовательных подстановок.

Введём оператор, действующий из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ по формуле:

$$Bf = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Лемма 4.1. *Оператор B — линейный и ограниченный в $C(Q_T)$, причём*

$$\|Bf\|_{C(Q_T)} \leqslant \frac{T}{2\omega_*}\|q\|_{L_1[0,1]}\|f(x,t)\|_{C(Q_T)}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Линейность оператора B очевидна. А ограниченность оператора B и оценка (4.3) следует из неравенства, получаемого аналогично неравенству (3.32):

$$|(Bf)(x,t)| \leqslant \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |q(\xi)||f(\xi,\tau)|\,d\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\omega_*}\max_{(x,t)\in Q_T|}|f(x,t)|\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1 |q(\xi)|\,d\xi = \frac{T}{2\omega_*}\|q\|_{L_1[0,1]}\|f(x,t)\|_{C(Q_T)}.$$

Лемма доказана. ☐

Образуем ряд

$$A_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x,t),$$

где $a_n = Ba_{n-1}(= B^n a_0 = B^{n-1}a_1)$ $(n \geqslant 1)$ и $a_0(x,t) = u_1(x,t)$.

Лемма 4.2. *Функции $a_n(x,t)$ непрерывны в Q_T при $n \geqslant 1$.*

Доказательство. На основании формулы (3.20) и определения $a_1(x,t)$ имеем

$$a_1(x,t) = (Ba_0)(x,t) = (Bu_1)(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)u_1(\xi,\tau)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(\xi,\tau\}\big) - \widehat{\varphi}\Big(\big\{\beta(\xi,\tau\}\Big)\Big)\,d\xi = \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\big(J_1(x,t) - J_2(x,t)\big). \tag{4.4}$$

Рассмотрим, например, $J_1(x,t)$. Для $J_2(x,t)$ рассуждения аналогичны. Так как $q(x), \widehat{\varphi}(x) \in L_1[0,1]$, $\eta(s)$ — непрерывная кусочно-линейная функция на всей оси, $\{\alpha(x,t)\}$ и $\{\beta(x,t)\}$ — кусочно-линейные функции в Q, то по теореме Фубини [10, с. 328–336] можно поменять порядок интегрирования в $J_1(x,t)$. Затем делаем замену $\tau_1 = \alpha(\xi,\tau)$. В результате получим интеграл по ограниченному подмножеству, мера которого непрерывно зависит от переменных x и t, от функции класса Q. Тогда непрерывность $J_1(x,t)$ есть простое следствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега по множеству интегрирования [3, с. 301, теорема 5].

Таким образом, функции $J_1(x,t)$ и $J_2(x,t)$ непрерывны в Q_T, а следовательно, в силу (4.4) и $a_1(x,t)$ непрерывна в Q_T.

Непрерывность остальных $a_n(x,t)$ в Q_T при $n \geqslant 2$ вытекает из непрерывности $a_1(x,t)$, формулы $a_n = Ba_{n-1}$ и определения оператора B. Тем самым, лемма доказана. □

Лемма 4.3. *Справедливы следующие оценки при $n \geqslant 1$:*

$$|a_n(x,t)| \leqslant M_1 M_2^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{4.5}$$

$$\|a_n(x,t)\|_{C(Q_T)} \leqslant M_1 M_2^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{4.6}$$

где $M_1 = \|a_1(x,t)\|_{C(Q_T)}$, $M_2 = \|q\|_{L_1[0,1]}/(2\omega_*)$. Кроме того, $M_1 \leqslant C_T \|\varphi\|_{L_1[0,1]}$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Доказательство. Положим $f_n(x,t) = q(x)a_n(x,t)$. Так как $q(x) \in L_1[0,1]$ и $a_n(x,t) \in C(Q_T)$ при $n \geqslant 1$, то и $f_n(x,t) \in L_1(Q_T)$.

Доказательство леммы проведём, используя принцип математической индукции. При $n = 1$ оценка (4.5) справедлива.

Предположим, что оценка (4.5) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что она выполняется и для $n+1$. Имеем

$$|a_{n+1}(x,t)| \leqslant \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \left| \int\limits_{\eta(\alpha)}^{\eta(\beta)} |f_n(\xi,\tau)|\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{2\omega_*} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 |f_n(\xi,\tau)|\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\omega_*} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 |q(\xi)||a_n(\xi,\tau)|\, d\xi \leqslant \frac{1}{2\omega_*} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 |q(\xi) M_1 (M_2)^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi =$$

$$= M_1 \frac{1}{2\omega_*} \|q\|_{L_1[0,1]} M_2^{n-1} \frac{t^n}{n!} = M_1 M_2^n \frac{t^n}{n!},$$

а это есть оценка (4.5) для $n+1$.

Тем самым, оценка (4.5) установлена для всех $n \geqslant 1$. Оценка (4.6) непосредственно вытекает из оценки (4.5), если учесть, что $t \leqslant T$.

Оценим M_1. Аналогично предыдущему имеем

$$|a_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |f_0(\xi,\tau)|\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |q(\xi)||u_1(\xi,\tau)|\, d\xi = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^1 |q(\xi)|\, d\xi \int\limits_0^T |u_1(\xi,\tau)|\, d\tau. \tag{4.7}$$

Далее проводим рассуждения, которые полностью повторяют рассуждения при доказательстве леммы 3.4, с единственным отличием, что в (4.7), в отличие от (3.15), под интегралом по переменной ξ присутствует функция $|q(\xi)|$. Учитывая это, без особых проблем получим оценку

$$\|a_1(x,t)\|_{C(Q_T)} \leqslant C_T \|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]},$$

где

$$C_T = \left(\frac{\omega^*}{\omega_*}\right)^2 (T + 4\omega_*) \|q(x)\|_{L_1[0,1]}.$$

Таким образом, лемма 4.3 доказана.

□

Из этой леммы вытекает, что ряд $A_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T.

Теорема 4.2. *Уравнение* (4.2) *имеет единственное решение*

$$u(x,t) = A(x,t), \tag{4.8}$$

где

$$A(x,t) = a_0(x,t) + A_1(x,t),$$

получаемое по методу последовательных подстановок.

Доказательство. Повторяем рассуждения из [23] при доказательстве аналогичной теоремы. Положим $v(x,t) = u(x,t) - a_0(x,t)$. Тогда из (4.2) получим для $v(x,t)$ интегральное уравнение

$$v(x,t) = a_1(x,t) + Bv(\cdot,t). \tag{4.9}$$

Так как $a_1(x,t) \in C(Q_T)$ на основании леммы 4.2, то уравнение (4.9) рассматриваем в $C(Q_T)$. По методу последовательных подстановок из (4.9) получаем ряд $A_1(x,t)$. Поскольку B на основании леммы 4.1 — линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$ и $(BA_1)(x,t) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(x,t)$, то $A_1(x,t)$ есть решение (4.9).

Докажем, что уравнение (4.9) имеет единственное решение. Допустим, что кроме $A_1(x,t)$ есть ещё другое решение $w(x,t)$ этого уравнения. Тогда $z_1(x,t) = A_1(x,t) - w(x,t)$ есть решение уравнения $z(x,t) = (Bz)(x,t)$, а значит, и $z(x,t) = (B^{n-1}z)(x,t)$ при любом натуральном n. Заметим, что оценка (4.6) в лемме 4.2 остается верной, если в качестве $a_1(x,t)$ взять любую функцию из $C(Q_T)$. Возьмем в качестве такой функции $z(x,t)$. Тогда из оценки (4.6) получим

$$\|z(x,t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^{n-1}z)(x,t)\|_{C(Q_T)} \leqslant \|z(x,t)\|_{C(Q_T)} M_2^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получаем $z(x,t) = 0$, следовательно, единственным решением уравнения (4.9) является ряд $A_1(x,t)$, а уравнения (4.2) — ряд $A(x,t)$. Теорема доказана. □

Нетрудно установить аналогичными рассуждениями, что для классического решения[1] задачи (1.18)–(1.20) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Если выполняется условие* (1.4)*, функции* $\varphi(x), \varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\varphi''(x) \in L_1[0,1]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$*, то сумма ряда* $A(x,t)$ *представляет собой классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.18)–(1.20) *при условии, что* $u_{tt}(x,t)$ *— функция класса* Q.

Таким образом, классическое решение задачи (1.18)–(1.20) и её обобщённое решение, даваемое теоремой 4.2, выражаются одной и той же формулой (4.8).

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Если* $\varphi(x) \in L_1[0,1]$*, а функция* $\varphi_h(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.3 *и* $\|\varphi - \varphi_h\|_{L_1[0,1]} \to 0$ *при* $h \to 0$*, то соответствующее функции* $\varphi_h(x)$ *классическое решение* $u_h(x,t)$ *задачи* (1.18)–(1.20) *сходится при* $h \to 0$ *по норме* $L_1(Q_T)$ *к* $A(x,t)$.

Доказательство. Утверждение теоремы без особых трудностей следует из линейности $A(x,t)$ по $\varphi(x)$ и леммы 4.3. □

Таким образом, ряд $A(x,t)$ в случае $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ играет роль обобщённого решения задачи (1.18)–(1.20), если понимать его как предел классических решений. Иногда такое обобщённое решения называют *секвенциальным* (см., например, [4]). Таким образом, и обобщённое решение, определенное как решение интегрального уравнения (4.2), и секвенциальное обобщённое решение даются одной и той же формулой (4.8).

---

[1]Определение классического решения для этой задачи в случае $q(x) \in L_1[0,1]$ совершенно аналогично определению классического решения для задачи (1.1)–(1.3).

5. Краткая история вопроса

Восстановить полную историю исследований начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) довольно трудно, так как очень много математиков рассматривали такую задачу на протяжении долгого времени под разными углами зрения и использовали разные методы.

Тем не менее, для полноты картины приведём некоторые исторические факты, которые в какой-то мере близки к обсуждаемым проблемам. Некоторые работы и авторы уже цитировались в процессе изложения.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад в работах [25–27].

Излагаемые в настоящей статье результаты получены с использованием двух подходов к решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым.

Первый подход, который можно назвать резольвентным, был применён впервые к решению начально-граничных задач для волнового уравнения в [1] и получил развитие в статьях [2, 16].

В дальнейшем А. П. Хромов дополнил резольвентный метод подходом, связанным с расходящимися рядами формальных решений. Расходящиеся ряды рассматриваются в понимании Л. Эйлера [15, 24], основоположника суммирования расходящихся рядов. Такой подход был первоначально рассмотрен в [17], а затем получил развитие в работах [18–20]. Иногда такой подход называют аксиоматическим. Наиболее просто подход А. П. Хромова описан в краткой статье [22], которая уже цитировалась. Развернутое изложение этой статьи, как уже было отмечено, дано в [23].

Историю формирования и развития этого метода, а также полученные с помощью этого метода результаты можно найти в указанных и других работах А. П. Хромова (например, в [21]). Аналогичный подход к решению смешанных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях использовал И. С. Ломов. Одними из последних его работ являются статьи [4, 5]. Другой подход, отличный от используемого А. П. Хромовым и И. С. Ломовым и при других постановках начально-граничных задач, получил развитие в работах Ф. Е. Ломовцева. Одна из последних его работ есть статья [6]. Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1). Например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны исследовадась в статье [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 2. — С. 138–140.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2015. — *55*, № 2. — С. 229–241.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
4. *Ломов И. С.* Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы// Дифф. уравн. — 2022. — *58*, № 11. — С. 1471–1483.
5. *Ломов И. С.* Новый метод построения обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
6. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке// Пробл. физ., мат. и техн. — 2022. — № 1. — С. 62–73.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Том 1. Начала теории. — М.: Наука, 1967.
8. *Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М.* О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны// Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — *28*, № 4. — С. 472–485.
9. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
11. *Рыхлов В. С.* Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2022. — *204*. — С. 124–134.

12. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. унив., 2022. — С. 252–255.
13. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конф. "Понтрягинские чтения — XXXIII"». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 237–240.
14. *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — *24*, № 1. — С. 27–51.
15. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Иностр. лит., 1951.
16. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — *56*, № 2. — С. 239–251.
17. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конф. "Понтрягинские чтения — XXX"». — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
18. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2019. — *19*, № 3. — С. 280–288.
19. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 21». — Саратов: Саратов. унив., 2019. — С. 62–67.
20. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
21. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. Инст. Мат. Мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 4. — С. 215–238.
22. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. унив., 2022. — С. 319–324.
23. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2022. — *22*, № 3. — С. 322–331.
24. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. — М.: Л.: ГИТТЛ, 1949.
25. *Archibald F. R., Emslie A. G.* The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — *25*, № 1. — С. 347–348.
26. *Mahalingam S.* Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — *8*, № 4. — С. 145–148.
27. *Sack R. A.* Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — *5*, № 6. — С. 224–226.

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`

UDC 517.958, 517.956.32
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363
EDN: URKODE

Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative

V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. We study an initial-boundary problem for a second-order inhomogeneous hyperbolic equation in a half-strip of the plane containing a mixed derivative with constant coefficients and zero or nonzero potential. This equation is the equation of transverse oscillations of a moving finite string. The case of zero initial velocity and fixed ends (Dirichlet conditions) is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on opposite sides of the origin. The classical solution of the initial-boundary problem is determined. In the case of zero potential, a uniqueness theorem for the classical solution is formulated and a formula for the solution is given in the form of a series consisting of contour integrals containing the initial data of the problem. Based on this formula, the concepts of a generalized initial-boundary value problem and a generalized solution are introduced. The main theorems on finite formulas for the generalized solution in the case of homogeneous and inhomogeneous problems are formulated. To prove these theorems, we apply an approach that uses the theory of divergent series in the sense of Euler, proposed by A. P. Khromov (axiomatic approach). Using this approach, on the basis of formulas for solutions in the form of a series, the formulated main theorems are proved. Further, as an application of the main theorems obtained, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a generalized solution of the initial-boundary problem in the presence of a nonzero summable potential and give a formula for the solution in the form of an exponentially convergent series.

Keywords: initial boundary value problem, hyperbolic equation, wave equation, partial differential equation, half-strip, mixed derivative in the equation, potential of the general form, generalized solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: V. S. Rykhlov, "Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 342–363. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363`

REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, "Rezol'ventnyy podkhod v metode Fur'e" [Resolvent approach in the Fourier method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 2, 138–140 (in Russian).
2. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, "Rezol'ventnyy podkhod dlya volnovogo uravneniya" [Resolvent approach for the wave equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 2, 229–241 (in Russian).
3. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
4. I. S. Lomov, "Postroenie obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya: sekventsial'nyy i aksiomaticheskiy podkhody" [Construction of a generalized solution of a mixed problem for a telegraph equation: Sequential and axiomatic approaches], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 11, 1471–1483 (in Russian).

5. I. S. Lomov, “Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [A new method for constructing a generalized solution of the mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vychisl. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2022, No. 3, 33–40 (in Russian).
6. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti pervoy smeshannoy zadachi dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na otrezke” [Global well-posedness theorem for the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on a segment], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2022, No. 1, 62–73 (in Russian).
7. A. I. Markushevich, *Teoriya analiticheskikh funktsiy. Tom 1. Nachala teorii* [Theory of Analytic Functions. Vol. 1. Basic Theory], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
8. L. A. Muravey, V. M. Petrov, and A. M. Romanenkov, “O zadache gasheniya poperechnykh kolebaniy prodol’no dvizhushcheysya struny” [On the problem of damping transverse vibrations of a longitudinally moving string], *Vestn. Mordov. un-ta* [Bull. Mordov. Univ.], 2018, **28**, No. 4, 472–485 (in Russian).
9. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
10. I. P. Natanson, *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable], Nauka, Moscow, 1974 (Russian translation).
11. V. S. Rykhlov, “Razreshimost’ smeshannoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s raspadayushchimisya kraevymi usloviyami pri otsutstvii polnoty sobstvennykh funktsiy” [Solvability of a mixed problem for a hyperbolic equation with splitting boundary conditions in the absence of completeness of eigenfunctions], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 124–134 (in Russian).
12. V. S. Rykhlov, “Reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa so smeshannoy proizvodnoy” [Solution of an initial-boundary value problem for a hyperbolic-type equation with a mixed derivative], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov. univ., Saratov, 2022, pp. 252–255 (in Russian).
13. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konf. “Pontryaginskie chteniya — XXXIII”* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. Int. Conf. “Pontryagin Readings — XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 237–240 (in Russian).
14. G. P. Tolstov, “O vtoroy smeshannoy proizvodnoy” [On the second mixed derivative], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1949, **24**, No. 1, 27–51 (in Russian).
15. G. Hardy, *Raskhodyashchiesya ryady* [Divergent Series], Inostr. lit., Moscow, 1951 (Russian translation).
16. A. P. Khromov, “Povedenie formal’nogo resheniya smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya” [Behavior of the formal solution of the mixed problem for the wave equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 2, 239–251 (in Russian).
17. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i funktsional’nye uravneniya, svyazannye s analogami geometricheskoy progressii” [Divergent series and functional equations related to analogues of geometric progression], In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konf. “Pontryaginskie chteniya — XXX”* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. Int. Conf. “Pontryagin Readings — XXX”], VGU, Voronezh, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
18. A. P. Khromov, “O klassicheskom reshenii smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami i nulevoy nachal’noy skorost’yu” [On the classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed ends and zero initial velocity], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. New Ser. Ser. Math. Mech. Inf.], 2019, **19**, No. 3, 280–288 (in Russian).
19. A. Khromov P., “Raskhodyashchiesya ryady i smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and the mixed problem for the wave equation], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 21* [Math. Mech. Iss. 21], Saratov. univ., Saratov, 2019, pp. 62–67 (in Russian).
20. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i metod Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and the Fourier method for the wave equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 20-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 20th Int. Saratov Winter School], Nauchnaya kniga, Saratov, 2020, pp. 433–439 (in Russian).

21. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady v metode Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series in the Fourier method for the wave equation], *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch of the RAS], 2021, **27**, No. 4, 215–238 (in Russian).
22. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov. univ., Saratov, 2022, pp. 319–324 (in Russian).
23. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya prosteyshego vida” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation of the simplest form], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. New Ser. Ser. Math. Mech. Inf.], 2022, **22**, No. 3, 322–331 (in Russian).
24. L. Euler, *Differentsial’noe ischislenie* [Differential Calculus], GITTL, Leningrad–Moscow, 1949 (in Russian).
25. F. R. Archibald and A. G. Emslie, “The vibration of a string having a uniform motion along its length,” *J. Appl. Mech.*, 1958, **25**, No. 1, 347–348.
26. S. Mahalingam, “Transverse vibrations of power transmission chains,” *British J. Appl. Phys.*, 1957, **8**, No. 4, 145–148.
27. R. A. Sack, “Transverse oscillations in traveling strings,” *British J. Appl. Phys.*, 1954, **5**, No. 6, 224–226.

V. S. Rykhlov
Saratov State University, Saratov, Russia
E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`