

УДК 517.443, 535.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341

EDN: UFJOVO

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ФУРЬЕ-ОПТИКИ

В. Э. ПЕТРОВ

ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Рассматривается общая постановка задачи восстановления сигнала по неполной априорной информации о нем и измерениям интенсивности его Фурье-образа. Изучены некоторые частные случаи, когда априорной информацией является знание четной или нечетной части сигнала, а также вещественной или мнимой части сигнала. Построены точные решения в квадратурах. Также предложен алгоритм решения задачи, когда известны лишь интенсивности сигнала и изображения.

Ключевые слова: преобразования Фурье, обратные задачи оптики, алгоритм Гершберга–Сакстона.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки. Автор благодарен А. А. Румянцеву за физическую постановку задачи.

Для цитирования: В. Э. Петров. Некоторые обратные задачи Фурье-оптики // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 2. С. 332–341. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341>

1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из основных приложений преобразования Фурье

$$F(\xi) = \mathcal{F}[u](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos x\xi + i \sin x\xi) dx, \quad (1.1)$$
$$f(y) = \mathcal{F}^{-1}[F](y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi y} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) (\cos \xi y - i \sin \xi y) d\xi$$

— спектральный анализ и восстановление сигналов. В курсах по теоретической оптике (см., например, [4]) указывается фундаментальное значение преобразования Фурье как математическое содержание принципа Гюйгенса. Фактически, оптическая система преобразует оригинал в плоскости исходного сигнала в его Фурье-образ на плоскости изображения. Однако технически измерение на плоскости изображения всего сигнала невозможно. Измеряется лишь интенсивность — квадрат модуля. Ясно, что для полного восстановления оригинала этого недостаточно; для этого об оригинале должно быть заранее что-то известно. Поставим вопрос шире и сформулируем обратную задачу как восстановление оригинала $f(x)$ по некоторой неполной информации о Фурье-образе и определенной априорной информации об оригинале¹. Простейший случай доставляют

¹Ниже термины оригинал и сигнал, а также образ и изображение будут применяться как тождественные.

нам синус и косинус преобразования Фурье. Например, если нами измерена четная часть образа $F_2(\xi)$ и известна нечетная часть оригинала $f_1(x)$, то мы можем восстановить весь оригинал по формуле:

$$f(x) = f_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\xi) \cos \xi x \, d\xi.$$

Напротив, если нам известна четная часть оригинала и четная часть образа, то этого недостаточно для восстановления оригинала, а если они не связаны между собой косинус-преобразованием Фурье, задача будет некорректной.

В этом примере мы использовали обозначения, которыми будем пользоваться на протяжении всей статьи:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad (1.2)$$

т. е. индексом «1» обозначается нечетная часть функции, а индексом «2» — четная. Это же правило действует и для образов.

Практически обратная задача восстановления сигнала для преобразования Фурье всегда некорректна. Дело в том, что преобразование Фурье задано на всей вещественной оси, тогда как физически носитель оригинала всегда компактен, например, световая щель. Но преобразование Фурье от компактного сигнала

$$F(\xi) = \int_a^b f(x) e^{i\xi x} \, dx, \quad -\infty < a < b < \infty,$$

— целая функция на всей плоскости, т. е. она аналитически продолжается с вещественной оси $-\infty < \xi < \infty$ на всю комплексную плоскость. С другой стороны, измерение сигнала опять-таки происходит не на всей оси $-\infty < \xi < \infty$, а на некотором конечном интервале, т. е. мы отбрасываем «хвосты» изображения, «обосновывая» это малостью амплитуды этих хвостов. Следовательно, отбрасывая «хвосты», мы принудительно полагаем изображение вне некоторого интервала нулем. Но целая функция, равная нулю на некотором множестве положительной меры (например, на части вещественной оси), равна нулю тождественно. Мы не будем обсуждать здесь эту тему, ограничиваясь ситуацией корректно поставленных задач.

В 1942 г. вышла книга Хартли, посвященная вопросам восстановления сигналов, где была высказана мысль об избыточности преобразования Фурье. Действительно, Фурье-образ $F(\xi)$ — это комплексная функция одной вещественной переменной. Полная информация о ней может быть получена, если нам известны четная и нечетная ее части, а также вещественная и мнимая ее части. Точно так же оригинал восстанавливается, если мы можем определить его четную и нечетную части или вещественную и мнимую его части. Но знать и то, и другое (именно для вопросов спектрального анализа) является совершенно избыточным. Таким образом, родилось вещественное преобразование (преобразование Хартли, см. [1])

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos x\xi + \sin x\xi) \, dx, \quad f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) (\cos \xi y + \sin \xi y) \, d\xi, \quad (1.3)$$

которое вещественную функцию оставляет вещественной. Поэтому при использовании преобразования Хартли стоит задача определения знаков оригинала и образа, а не фазы.

Предположение Брейсуэлла, что все результаты, полученные с помощью преобразования Фурье, могут быть получены с помощью вещественного преобразования Хартли, нам представляется неверным. Например, Фурье-образы оригиналов с носителями на полуосях аналитически продолжаютя в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Это дает возможность создания чрезвычайно полезной и содержательной теории уравнений типа свертки (решение уравнений Винера—Хопфа и их аналогов, см. [3]). Ничего подобного мы не имеем при использовании преобразования Хартли.

В работе [6] преобразования (1.1) и (1.3) были существенно обобщены. Во-первых, было показано, что для произвольных постоянных (в том числе, комплексных) a, b при обычных условиях,

накладываемых на оригинал и Фурье-образ, справедливо преобразование:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (a \cos x\xi + b \sin x\xi) dx, \quad f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \left(\frac{1}{a} \cos \xi y + \frac{1}{b} \sin \xi y \right) d\xi. \quad (1.4)$$

Нетрудно заметить, что при вещественных коэффициентах преобразование (1.4) самосопряженное, а при $|a| = |b| = (2\pi)^{-1/2}$ — унитарное. Более того, справедливы формулы взаимобратных преобразований с переменными коэффициентами.

Теорема 1.1 (см. [6]). Пусть $a(x)$, $b(x)$ — гельдеровы функции на оси. Пусть, далее,

$$a(x)b(-x) + a(-x)b(x) \neq 0. \quad (1.5)$$

Тогда уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(a(x) \cos x\xi + b(x) \sin x\xi) dx = F(\xi) \quad (1.6)$$

имеет единственное решение

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)(c(y) \cos \xi y + d(y) \sin \xi y) d\xi, \quad (1.7)$$

где

$$c(y) = \frac{2b(-y)}{a(y)b(-y) + a(-y)b(y)}, \quad d(y) = \frac{2a(-y)}{a(y)b(-y) + a(-y)b(y)}. \quad (1.8)$$

Здесь $f(x)$ и $F(\xi)$ понимаются в том же смысле, как и обычные Фурье-преобразования. В [6] можно найти и более общие преобразования, а также формулы свертки для этих преобразований, условия унитарности и самосопряженности. Строгая формулировка этой теоремы в классах $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ приведена в [7].

Задачей настоящей статьи является исследование обратных задач, связанных с нахождением фазы изображения, считая интенсивность (квадрат амплитуды) изображения известной. Изображение — это то, что измеряется с той или иной точностью. При этом измеряется именно интенсивность; измерение фазы, вообще говоря, невозможно. Говоря, что интенсивность изображения известна, мы не обсуждаем шумы и точность измерения. Мы говорим о тех случаях, когда то или иное априорное знание о сигнале позволяет восстановить изображение и сигнал полностью. Рассматриваются следующие задачи:

- 1°. Определить фазу изображения по известной четной части оригинала и известной интенсивности изображения.
- 2°. Определить фазу изображения по известной вещественной части оригинала и известной интенсивности изображения.
- 3°. Определить фазу оригинала по известной амплитуде образа и известной амплитуде оригинала.

Наиболее интересна, конечно, задача 3°, поскольку измеряются, как уже говорилось, именно интенсивности (и то, с погрешностью), но ее решения в явном виде нам записать не удалось. Однако первые две задачи будут решены точно (т. е. мы предъявим фазу явно в квадратурах), и именно это даст нам возможность предложить простой алгоритм решения задачи 3°.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ИЗВЕСТНОЙ ЧЕТНОЙ ЧАСТИ СИГНАЛА

Задача восстановления изображения, в том числе определение его фазы $\psi(\xi)$, в квадратурах в случае, когда нам известна четная часть $u_2(x)$ сигнала, является вполне элементарной задачей. Действительно, зная $u_2(x)$, мы косинус-преобразованием Фурье находим $U_2(\xi)$ — четную часть изображения:

$$U_2(\xi) = 2 \int_0^{\infty} u_2(x) \cos \xi x dx. \quad (2.1)$$

Таким образом, наша задача — восстановить функцию, зная ее модуль и четную часть. Имеем:

$$|U(\xi)|^2 = (U_1(\xi) + U_2(\xi))\overline{(U_1(\xi) + U_2(\xi))} = |U_1(\xi)|^2 + |U_2(\xi)|^2 + U_1(\xi)\overline{U_2(\xi)} + U_2(\xi)\overline{U_1(\xi)}. \quad (2.2)$$

Заметим, что $|U_1(\xi)|^2$ и $|U_2(\xi)|^2$ — четные функции, тогда как $|U(\xi)|^2$ — совсем не обязательно. Поменяем знак аргумента в (2.2):

$$|U(-\xi)|^2 = |U_1(\xi)|^2 + |U_2(\xi)|^2 - U_1(\xi)\overline{U_2(\xi)} - U_2(\xi)\overline{U_1(\xi)}$$

и сложим. Мы получим:

$$|U_1(\xi)|^2 + |U_2(\xi)|^2 = \frac{|U(\xi)|^2 + |U(-\xi)|^2}{2},$$

откуда находим модуль нечетной части:

$$|U_1(\xi)|^2 = \frac{|U(\xi)|^2 + |U(-\xi)|^2}{2} - |U_2(\xi)|^2. \quad (2.3)$$

Отсюда находим условие разрешимости задачи:

$$\frac{|U(\xi)|^2 + |U(-\xi)|^2}{2} \geq |U_2(\xi)|^2. \quad (2.4)$$

Для нахождения фазы нечетной части изображения, представим

$$U_1(\xi) = |U_1(\xi)|e^{i\alpha(\xi)}, \quad U_2(\xi) = |U_2(\xi)|e^{i\beta(\xi)}$$

и подставим эти выражения в (2.2). Тогда получим:

$$\cos(\alpha(\xi) - \beta(\xi)) = \frac{|U(\xi)|^2 - |U_1(\xi)|^2 - |U_2(\xi)|^2}{2|U_1(\xi)||U_2(\xi)|}. \quad (2.5)$$

В этом равенстве известны все функции, кроме $\alpha(\xi)$. Найдя ее, восстановим изображение по формуле:

$$U(\xi) = |U_1(\xi)|e^{i\alpha(\xi)} + U_2(\xi). \quad (2.6)$$

Отметим, что $\alpha(\xi)$ — это фаза нечетной функции, модуль которой четен. Поэтому из всего множества решений уравнения (2.5) следует отбирать те, которые удовлетворяют равенству

$$\alpha(-\xi) = \pi + \alpha(\xi). \quad (2.7)$$

Нам понадобится дальше решение аналогичной задачи в плоскости сигнала: пусть задана интенсивность сигнала $|u(x)|$ и известна его нечетная часть $|u_1(x)|$. Тогда модуль четной части сигнала определяется формулой:

$$|u_2(x)|^2 = \frac{|u(x)|^2 + |u(-x)|^2}{2} - |u_1(x)|^2, \quad (2.8)$$

а фаза четной части определяется из уравнения

$$\cos(a(x) - b(x)) = \frac{|u(x)|^2 - |u_1(x)|^2 - |u_2(x)|^2}{2|u_1(x)||u_2(x)|}, \quad (2.9)$$

где $u_1(x) = |u_1(x)|e^{ia(x)}$, $u_2(x) = |u_2(x)|e^{ib(x)}$. По тем же соображениям, что и выше, следует отбирать решения уравнения (2.9), которые удовлетворяют равенству

$$b(x) = b(-x). \quad (2.10)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ОРИГИНАЛА ПО ИЗВЕСТНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ ОБРАЗА

В отличие от простых формул предыдущего пункта, формулы этого раздела будут значительно изощреннее. Мы восстановим сигнал по известной его интенсивности и известной вещественной части изображения. Отметим, что простых аналогов синус- и косинус-преобразований Фурье, которые бы связывали вещественные и мнимые части сигнала и изображений, также нет. Чтобы найти, например, вещественную часть сигнала, недостаточно знать только вещественную часть изображения, надо знать полное изображение.

Пусть в преобразовании Фурье (1.1) известна амплитуда $q(x)$ оригинала и вещественная часть $A(\xi)$ образа:

$$f(x) = q(x)e^{i\varphi(x)}, \quad q(x) = |f(x)| \geq 0, \quad U(\xi) = A(\xi) + iB(\xi).$$

Мы решаем задачу

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) \cos(\xi x + \varphi(x)) dx = A(\xi), \quad (3.1)$$

где по известным функциям $q(x)$ и $A(\xi)$ надо найти фазу $\varphi(x)$. Кроме этого, надо найти условия разрешимости и единственности. Физически естественно предположить, что фаза $\varphi(x)$ непрерывна.

Уравнение (3.1) — это нелинейное интегральное уравнение 1-го рода. Аналитические сложности, связанные с его решением, преодолеваются с помощью теоремы 1.1, которая интегральное уравнение переводит в алгебраическую систему. Причина этого в том, что коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ в записи прямого преобразования (1.6) являются «внутренними» (интегрирование происходит по переменной x), а коэффициенты $c(y)$, $d(y)$ в записи обратного преобразования (1.7) являются «внешними» (интегрирование происходит по переменной ξ).

Запишем уравнение (3.1) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) (\cos \xi x \cos \varphi(x) - \sin \xi x \sin \varphi(x)) dx = A(\xi) \quad (3.2)$$

и по теореме 1.1 выразим $q(y)$ через $A(\xi)$, полагая $a(x) = \cos \varphi(x)$, $b(x) = -\sin \varphi(x)$:

$$q(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) (c(y) \cos \xi y + d(y) \sin \xi y) d\xi, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} c(y) &= \frac{-2 \sin \varphi(-y)}{-\cos \varphi(y) \sin \varphi(-y) - \cos \varphi(-y) \sin \varphi(y)}, \\ d(y) &= \frac{2 \cos \varphi(-y)}{-\cos \varphi(y) \sin \varphi(-y) - \cos \varphi(-y) \sin \varphi(y)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Знаменатель в этих дробях равен

$$\cos \varphi(y) \sin \varphi(-y) + \cos \varphi(-y) \sin \varphi(y) = \sin(\varphi(y) + \varphi(-y)) = \sin 2\varphi_2(y),$$

где, напомним, индекс «2» означает четную часть функции. Поэтому равенство (3.3) можно записать в виде:

$$q(y) = \frac{\sin \varphi(-y)}{\pi \sin 2\varphi_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos \xi y d\xi - \frac{\cos \varphi(-y)}{\pi \sin 2\varphi_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \sin \xi y d\xi$$

или

$$\begin{aligned} q(y) \sin 2\varphi_2(y) &= \sin(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A_2(\xi) \cos \xi y d\xi - \cos(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A_1(\xi) \sin \xi y d\xi = \\ &= \sin(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) a_2(y) - \cos(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) a_1(y). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь

$$a_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \sin \xi x d\xi, \quad a_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos \xi x d\xi. \quad (3.6)$$

Чтобы не загромождать запись, опустим далее зависимость от переменной y , запомнив только, что четная часть функции (со значком «2») сохраняет знак при перемене знака аргумента, а нечетная часть (со значком «1») его меняет. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (q_2 + q_1) \sin 2\varphi_2 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) a_2 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1) a_1, \\ (q_2 - q_1) \sin 2\varphi_2 = \sin(\varphi_2 + \varphi_1) a_2 + \cos(\varphi_2 + \varphi_1) a_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Сложим и вычтем уравнения (3.7):

$$\begin{cases} 2q_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 a_2 - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 a_1, \\ 2q_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = -\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 a_2 - \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 a_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Теперь заметим, что для применения теоремы 1.1 мы должны предположить, что знаменатель коэффициентов (3.4) нигде на оси не обращается в нуль (см. (1.5)), т. е.

$$\sin \varphi_2 \neq 0, \quad \cos \varphi_2 \neq 0. \quad (3.9)$$

Поэтому в системе (3.8) мы можем сократить каждое из уравнений:

$$\begin{cases} 2q_2 \cos \varphi_2 = \cos \varphi_1 a_2 - \sin \varphi_1 a_1, \\ 2q_1 \sin \varphi_2 = -\sin \varphi_1 a_2 - \cos \varphi_1 a_1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Возведем в квадрат уравнения (3.10) и сложим:

$$4q_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 4q_1^2 \sin^2 \varphi_2 = a_2^2 + a_1^2, \quad (3.11)$$

откуда

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)}, \quad \sin^2 \varphi_2 = \frac{4q_2^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{4(q_2^2 - q_1^2)}. \quad (3.12)$$

Заметим далее, что при условии (3.9) в силу непрерывности фазы синус и косинус ее четной части не меняют знак. То есть φ_2 может изменяться лишь в одном из четырех квадрантов, не пересекая границы $\pi/2$, π , $3\pi/2$. Это следует учитывать при извлечении корней в выражениях (3.12). Однако мы покажем, что независимых решений не четыре, а всего два: например, I и II квадранты. Значения *всей фазы* $\varphi_2 + \varphi_1$, если мы зафиксируем φ_2 в III или IV квадрантах, с ними совпадут. Из (3.12) получаем:

$$\cos \varphi_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{q_2^2 - q_1^2}}, \quad \sin \varphi_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4q_2^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{q_2^2 - q_1^2}}, \quad (3.13)$$

и первое условие корректности задачи (3.1):

$$0 < \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)} < 1,$$

или

$$4q_1^2 < a_1^2 + a_2^2 < 4q_2^2. \quad (3.14)$$

Имея явные выражения (3.13), из системы (3.10) находим:

$$\cos \varphi_1 = \frac{2q_2 a_2 \cos \varphi_2 - 2q_1 a_1 \sin \varphi_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad \sin \varphi_1 = -\frac{2q_2 a_1 \cos \varphi_2 + 2q_1 a_2 \sin \varphi_2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (3.15)$$

На нечетную часть фазы нет никаких ограничений, связанных с непрерывностью, поэтому ее можно найти из любого из уравнений (3.15). Надо лишь следить, чтобы

$$0 < \varphi_2(y) + \varphi_1(y) < 2\pi.$$

Теперь мы можем доказать, что выбор III или IV квадранта при определении φ_2 эквивалентен выбору I или II квадранта. Действительно, из (3.15) видно, что если φ_2 сдвигается на π , то и φ_1 сдвигается на π . Поэтому суммарная фаза сдвигается на 2π , т. е. на период.

Уравнения (3.15) новых условий корректности вдобавок к (3.14) не добавляют. Докажем это. Рассмотрим, например, первое уравнение (3.15) и подставим в него значения (3.13). Нам следует доказать, что при выполнении условия (3.14) имеем $|\cos \varphi_1| \leq 1$ автоматически. Сначала воспользуемся неравенством Коши—Буняковского

$$ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}, \quad \forall a, b, x, y > 0,$$

а затем равенством (3.11):

$$|\cos \varphi_1| \leq \frac{|2q_2 \cos \varphi_2| |a_2| + |2q_1 \sin \varphi_2| |a_1|}{a_1^2 + a_2^2} \leq \sqrt{\frac{4q_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 4q_1^2 \sin^2 \varphi_2}{a_1^2 + a_2^2}} = 1.$$

Аналогично получаем, что $|\sin \varphi_1| \leq 1$.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ОРИГИНАЛА ПО ИЗВЕСТНОЙ МНИМОЙ ЧАСТИ ОБРАЗА

Здесь мы рассмотрим задачу определения функции $\varphi(x)$ из уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) \sin(\xi x + \varphi(x)) dx = B(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Повторяя дословно выкладки предыдущего раздела, получаем:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi_2 &= \frac{4q_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{4(q_2^2 - q_1^2)}, & \sin^2 \varphi_2 &= \frac{b_1^2 + b_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)}, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{2q_2 b_2 \sin \varphi_2 + 2q_1 b_1 \cos \varphi_2}{b_1^2 + b_2^2}, & \sin \varphi_1 &= \frac{2q_1 b_2 \cos \varphi_2 - 2q_2 b_1 \sin \varphi_2}{b_1^2 + b_2^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$b_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \sin \xi x d\xi, \quad b_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \cos \xi x d\xi. \quad (4.3)$$

Аналогично предыдущему, имеем условие корректности задачи (4.1):

$$4q_1^2 < b_1^2 + b_2^2 < 4q_2^2. \quad (4.4)$$

5. ОБОБЩЕННЫЕ РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ

Как известно, классическое равенство Парсеваля для преобразования Фурье имеет вид числового равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.1)$$

В этом разделе мы дадим два обобщения этого равенства. Первое из них совсем элементарно. Перемножим $U(\xi)$ и $\overline{U(\xi)}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(y) e^{i\xi y}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{u(y)} e^{i\xi(x-y)} dx dy = |U(\xi)|^2. \quad (5.2)$$

Применим к (5.2) обратное преобразование Фурье, пользуясь известным равенством для обобщенных функций

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-i\xi z} d\xi = \delta(z).$$

Таким образом, получаем первое поточечное равенство типа Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{u(x+z)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi)|^2 e^{-i\xi z} d\xi. \quad (5.3)$$

Очевидно, что при $z = 0$ мы получаем классическое равенство (5.1).

Для вывода второго поточечного равенства воспользуемся формулами (3.12) и (4.2). Если $A(\xi)$ и $B(\xi)$ — вещественная и мнимая части одного и того же Фурье-образа $U(\xi)$, то $\varphi_2(x)$, найденная по формулам (3.12) и (4.2) — это одна и та же функция. Поэтому

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)} = \frac{4q_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{4(q_2^2 - q_1^2)},$$

следовательно,

$$a_1^2(x) + a_2^2(x) + b_1^2(x) + b_2^2(x) = |u(x)|^2 + |u(-x)|^2, \quad (5.4)$$

где функции в левой части определены в (3.6), (4.3). Напомним, что по физическому смыслу сигнал $u(x)$ является ограниченной функцией. Поэтому $q_2^2(x) - q_1^2(x) = |u(x)||u(-x)| \neq \infty$.

6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФАЗ ПО ИЗВЕСТНЫМ ИНТЕНСИВНОСТЯМ

Пусть нам известна априорная информация — интенсивность оригинала $|u(x)|$ и измерена интенсивность образа $|U(\xi)|$. Требуется восстановить фазы оригинала $\varphi(x)$ и образа $\psi(\xi)$. Обычно эта задача решается алгоритмом Гершберга—Сакстона (ГС) (см., например, [5]), представленном на диаграмме на рис. 1.

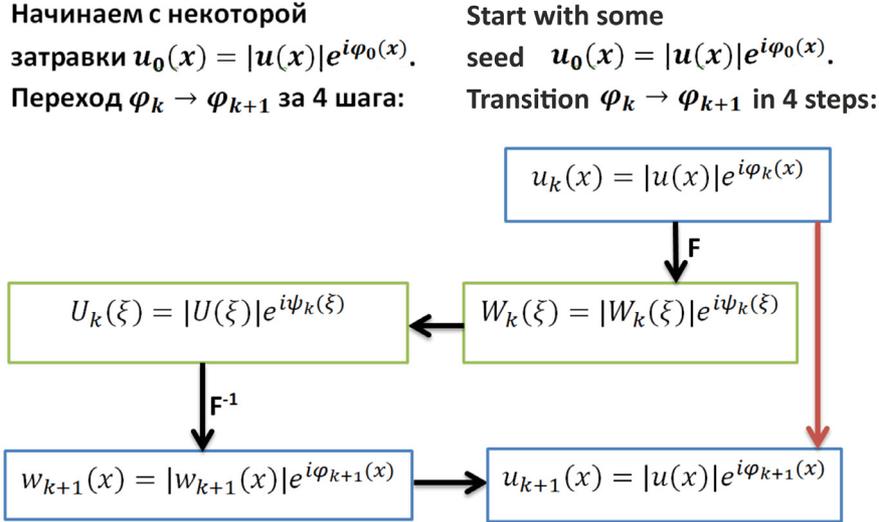


Рис. 1. Алгоритм Гершберга—Сакстона

FIG. 1. Gerchberg–Saxton algorithm

Таким образом, Гершберг и Сакстон вводят в рассмотрение две вспомогательные функции $w_k(x)$, $W_k(\xi)$. Если алгоритм сходится, то он сходится к четырем функциям $u_\infty(x)$, $w_\infty(x)$, $W_\infty(\xi)$, $U_\infty(\xi)$. По алгоритму

$$\begin{aligned}
 W_\infty(\xi) &= \mathcal{F}[u_\infty](\xi) & w_\infty(x) &= \mathcal{F}^{-1}[W_\infty](x), \\
 \int_{-\infty}^{\infty} |u_\infty(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |w_\infty(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\infty|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U_\infty|^2 d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

При этом того, что найденные предельные функции u_∞ , U_∞ связаны преобразованием Фурье, алгоритм не гарантирует. Можно было бы сказать, что алгоритм ГС решает задачу минимизации:

$$\|u_\infty(x) - \mathcal{F}^{-1}[U_\infty](x)\| = \min,
 \tag{6.2}$$

если бы функции $w_\infty(x)$, $W_\infty(\xi)$ были связаны преобразованием Фурье. Но и это не так. Справедливо лишь равенство Парсеваля.

В то же время, в литературе приведено множество удачных применений алгоритма ГС. Считается, что если затравка выбрана достаточно удачно, то алгоритм ГС сходится. В иных случаях известны примеры, когда алгоритм расходится, закликивается, или сходится неизвестно к чему.

Мы предлагаем алгоритм фазировки, который, по-видимому, лишен указанных выше недостатков. Будем пользоваться формулами раздела 2 и начнем с некоторой затравки: зададим четную функцию $u_{2,0}(x)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{|u(x)|^2 + |u(-x)|^2}{2} - |u_{2,0}(x)|^2 \geq 0.
 \tag{6.3}$$

По этой функции косинус-преобразованием Фурье \mathcal{F}_c находим $U_{2,0}(\xi)$. По этой функции формулами (2.3), (2.5) находим нечетную функцию $U_{1,0}(\xi)$. По этой функции обратным синус-преобразованием Фурье \mathcal{F}_s^{-1} находим нечетную функцию в плоскости сигнала $u_{1,1}(x)$. Теперь

формулами (2.8), (2.9) находим следующее приближение $u_{2,1}(x)$. Каждый шаг алгоритма можно представить диаграммой

$$u_{2,k} \xrightarrow{\mathcal{F}_c} U_{2,k}(\xi) \longrightarrow U_{1,k}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{F}_s^{-1}} u_{1,k+1}(x) \longrightarrow u_{2,k+1}(x).$$

Если алгоритм сходится, то он сходится к решению, поскольку в пределе найденные четные и нечетные части оригинала и образа связаны, соответственно, косинус- и синус-преобразованиями Фурье. Корректность алгоритма обеспечивается затравкой, удовлетворяющей условию (6.3). Сходимость алгоритма подлежит дальнейшему исследованию. Кроме того, предложенный алгоритм с вычислительной точки зрения в два раза экономнее алгоритма ГС, поскольку требует не двух вычислений полных преобразований Фурье, а только один раз косинус-преобразования, и один раз синус-преобразования. Все остальные формулы алгебраические и не требуют переходов из плоскости изображения в плоскость сигнала и обратно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. Теория и приложения. — М.: Мир, 1990.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1974.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.
4. *Гудмен Дж.* Введение в Фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.
5. *Ильина И. В., Черезова Т. Ю., Кудряшов А. В.* Алгоритм Гершберга–Сакстона: экспериментальная реализация и модификация для задачи формирования многомодового лазерного излучения // Квант. электрон. — 2009. — 39, № 6. — С. 521–527.
6. *Петров В. Э.* Обобщенные тригонометрические преобразования // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2015. — 438. — С. 203–224.
7. *Петров В. Э.* Преобразование типа Фурье на полуоси с произвольной фазой // Мат. заметки. — 2020. — 107, № 2. — С. 256–275.

В. Э. Петров
ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vladimir.petrov@twell.ru

UDC 517.443, 535.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341

EDN: UFJOVO

Some inverse problems of Fourier optics

V. È. Petrov

TWELL Ltd., Saint Petersburg, Russia

Abstract. We consider a general formulation of the problem of signal reconstruction from incomplete a priori information about it and measurements of the intensity of its Fourier transform. Some special cases are studied when a priori information is the even or odd part of the signal, as well as the real or imaginary part of the signal. Exact solutions in quadratures are constructed. An algorithm for solving the problem is proposed when only the signal and image intensities are known.

Keywords: Fourier transforms, inverse problems of optics, Gerchberg–Saxton algorithm.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.



Acknowledgments and funding. The author declares that no financial support was received. The author is grateful to A. A. Rumyantsev for the physical formulation of the problem.

For citation: V. È. Petrov, “Some inverse problems of Fourier optics,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 332–341. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341>

REFERENCES

1. R. N. Bracewell, *Preobrazovanie Khartli. Teoriya i prilozheniya* [The Hartley Transform], Mir, Moscow, 1990 (Russian translation).
2. F. D. Gakhov, *Kraevye zadachi* [Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
3. F. D. Gakhov and Yu. I. Cherskiy, *Uravneniya tipa svertki* [Convolution Type Equations], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
4. J. Goodman, *Vvedenie v Fur'e-optiku* [Introduction to Fourier Optics], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
5. I. V. Il'ina, T. Yu. Cherezova, and A. V. Kudryashov, “Algoritm Gershberga—Sakstona: eksperimental'naya realizatsiya i modifikatsiya dlya zadachi formirovaniya mnogomodovogo lazernogo izlucheniya” [The Gerchberg–Saxton algorithm: Experimental implementation and modification for the problem of generation of multimode laser radiation], *Kvant. elektron.* [Quantum Electron.], 2009, **39**, No. 6, 521–527 (in Russian).
6. V. È. Petrov, “Obobshchennnye trigonometricheskie preobrazovaniya” [Generalized trigonometric transformations], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2015, **438**, 203–224 (in Russian).
7. V. È. Petrov, “Preobrazovanie tipa Fur'e na poluosi s proizvol'noy fazoy” [Fourier-type transformation on a semiaxis with an arbitrary phase], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 2, 256–275 (in Russian).

V. È. Petrov
TWELL Ltd., Saint Petersburg, Russia
E-mail: vladimir.petrov@twell.ru