Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 2 (2023). С. 306–331
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331
EDN: UGEKXW

# К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ СУБ- И СУПЕРРЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Е. Ю. Панов**[1,2]

[1] *Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия*
[2] *Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия*

**Аннотация**. Рассматривается нелинейное вырождающееся анизотропное параболическое уравнение второго порядка в случае, когда вектор потока лишь непрерывен, а неотрицательная матрица диффузии ограничена и измерима. Введены понятия энтропийного суб- и суперрешения задачи Коши, так что энтропийное решение этой задачи, понимаемое в смысле Чена—Пертама, является одновременно энтропийным суб- и суперрешением. Установлено, что максимум энтропийных субрешений задачи Коши также является энтропийным субрешением этой задачи. С помощью этого результата доказано существование наибольшего энтропийного субрешения (и наименьшего энтропийного суперрешения). Показано также, что наибольшее энтропийное субрешение и наименьшее энтропийное суперрешение являются и энтропийными решениями.

**Ключевые слова:** нелинейные вырождающиеся параболические уравнения, задача Коши, энтропийные решения, энтропийные суб- и суперрешения, принцип максимума/минимума, метод удвоения переменных.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 22-21-00344.

**Для цитирования:** *Е. Ю. Панов.* К теории энтропийных суб- и суперрешений нелинейных вырождающихся параболических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 2. С. 306–331. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331

## 1. Введение

В полупространстве $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \tag{1.1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ лишь непрерывен: $\varphi_i(u) \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, а симметричная матрица диффузии $a(u) = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $i, j = 1, \dots, n$. Также предполагается, что матрица $a(u) \geqslant 0$ (неотрицательно определена). Так как матрица диффузии может иметь нетривиальное ядро, уравнение (1.1) является вырождающимся (гиперболическим-параболическим) уравнением. В частном случае $a \equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) можно переписать (по крайне мере — формально) в дивергентной форме

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0, \tag{1.3}$$

где матрица $A(u)$ является первообразной для матрицы диффузии $a(u)$, $A'(u) = a(u)$, а оператор $D_x^2$ — это «дивергенция второго порядка», так что

$$D_x^2 \cdot A(u) \doteq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij}(u), \quad u = u(t,x).$$

Мы будем исследовать задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

Пусть функция $g(u) \in BV_{loc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на любом отрезке из $\mathbb{R}$. Нам понадобится ограниченный линейный оператор $T_g : C(\mathbb{R})/C \to C(\mathbb{R})/C$, где $C$ — пространство постоянных функций. Этот оператор определяется, с точностью до аддитивной константы, равенством

$$T_g(f)(u) = g(u-)f(u) - \int_0^u f(s)dg(s), \tag{1.5}$$

в котором $g(u-) = \lim\limits_{v \to u-} g(v)$ обозначает левосторонний предел функции $g$ в точке $u$, а интеграл в (1.5) понимается в соответствии с формулой

$$\int_0^u f(s)dg(s) = \operatorname{sign} u \int_{J(u)} f(s)dg(s),$$

где $\operatorname{sign} u = 1$, $J(u)$ — интервал $[0,u)$, если $u > 0$; $\operatorname{sign} u = -1$, $J(u) = [u,0)$, если $u \leqslant 0$. Следует отметить, что функция $T_g(f)(u)$ непрерывна даже в случае разрывной $g(u)$. Например, при $g(u) = \operatorname{sign}(u-k)$ имеем $T_g(f)(u) = \operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k))$. Заметим также, что при $f \in C^1(\mathbb{R})$ оператор $T_g$ однозначно определяется равенством $T_g(f)'(u) = g(u)f'(u)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Фиксируем факторизацию матрицы диффузии $a(u)$ вида $a(u) = b^\top(u)b(u)$, где $b(u) = (b_{kj}(u))$, $k \in \overline{1,l}$, $j \in \overline{1,n}$, — это $l \times n$-матрица с ограниченными и измеримыми компонентами $b_{kj}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Таким образом, справедливы равенства $a_{ij}(u) = \sum\limits_{k=1}^{l} b_{ki}b_{kj}$. Матрица $b(u)$ может рассматриваться как квадратный корень из $a(u)$. При $l = n$ можно выбрать b(u)=$a(u)^{1/2}$. Напомним понятие энтропийного решения задачи (1.1), (1.4), предложенное в работе [11].

**Определение 1.1.** Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным решением* (кратко — *э.р.*) задачи (1.1), (1.4), если выполнены следующие условия:

(i) при всех $k = 1,\dots,l$ распределения

$$\operatorname{div}_x B_k(u(t,x)) \in L^2_{loc}(\Pi), \tag{1.6}$$

где векторы $B_k(u) = (B_{k1}(u),\dots,B_{kn}(u)) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ таковы, что $B'_{ki}(u) = b_{ki}(u)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $i = 1,\dots,n$;

(ii) для любой функции $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и всех $k = 1,\dots,l$

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(u(t,x)) = g(u(t,x)) \operatorname{div}_x B_k(u(t,x)) \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi); \tag{1.7}$$

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) + \eta''(u) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi); \tag{1.8}$$

(iv) $\operatorname*{ess\,lim}\limits_{t \to 0} |u(t,\cdot) - u_0| = 0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Условие (1.8) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$\int\limits_{\Pi} \big[\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f - f\eta''(u)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u))^2\big]dtdx \geqslant 0, \tag{1.9}$$

где $D_x^2 f$ — симметричная матрица, состоящая из частных производных $f$ второго порядка (гессиан), а «$\cdot$» обозначает стандартное скалярное умножение векторов или матриц (в частности, скалярное произведение матриц $A, B$ — это $A\cdot B = \operatorname{Tr} A^\top B$).

В изотропном случае, когда матрица диффузии скалярна, определение э.р. значительно упрощается и было предложено ранее в работе Карильо [10]. В случае законов сохранения (1.2) определение 1.1 сводится к известному определению обобщённого э.р. задачи (1.2), (1.4) в смысле С. Н. Кружкова [1]. В случае гладкого вектора потока э.р. задачи Коши всегда единственно. Однако, в рассматриваемом нами общем случае лишь непрерывного вектора потока и возможно вырожденной диффузии свойство единственности э.р. может нарушаться. Для законов сохранения (1.2) соответствующие примеры можно найти в [2, 12], где были также предложены и точные достаточные условия единственности. Позднее эти условия были распространены и на параболический случай, см., например, [8, 9, 13]. Как установлено в недавней работе [16], в общем случае всегда существуют единственные наибольшее и наименьшее э.р. задачи (1.1), (1.4).

Подставив в (1.8) $\eta(u) = \pm u$, получим, что

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2\cdot A(u) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. э.р. $u$ является и слабым решением (1.3), что естественно. Если в определении 1.1 ограничиться неубывающими (невозрастающими) энтропиями $\eta(u)$, получим понятия энтропийного субрешения и энтропийного суперрешения. Приведём строгие определения.

**Определение 1.2.** Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным субрешением* (кратко — *э.субр.*) задачи (1.1), (1.4), если выполнены условия (i), (ii) определения 1.1, для любой неубывающей выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ справедливо энтропийное неравенство (iii), а начальное условие (iv) заменено на требование

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0}(u(t,\cdot) - u_0)^+ = 0 \quad \text{в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

где $z^+ = \max(z, 0)$.

**Определение 1.3.** Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным суперрешением* (кратко — *э.суперр.*) задачи (1.1), (1.4), если выполнены условия (i), (ii) определения 1.1, для любой невозрастающей выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ справедливо энтропийное неравенство (iii), а начальное условие (iv) заменено на требование

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0}(u(t,\cdot) - u_0)^- = 0 \quad \text{в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

где $z^- = \max(-z, 0) = (-z)^+$.

Легко видеть, что функция $u = u(t,x)$ является э.р. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда эта функция одновременно э.субр. и э.суперр. этой задачи.

**Замечание 1.1.** Функция $u = u(t,x)$ является э.суперр. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда $v = -u(t,x)$ — э.субр. задачи

$$v_t + \operatorname{div}_x(-\varphi(-v) - a(-v)\nabla v) = 0, \quad v(0,x) = v_0(x) \doteq -u_0(x), \tag{1.10}$$

соответствующее факторизации $a(-v) = b(-v)^\top b(-v)$.

Действительно, вектор потока $\tilde\varphi(v)$, матрица $\tilde A$ и векторы $\tilde B_k(v)$, $k \in \overline{1,l}$, соответствующие уравнению (1.10) и указанной выше факторизации матрицы диффузии, определяются равенствами:

$$\tilde\varphi(v) = -\varphi(-v),\ \tilde A(v) = -A(-v),\ \tilde B_k(v) = -B_k(-v).$$

Заметим также, что $T_{\tilde g}(\tilde f)(u) = T_g(f)(-u)$ (с точностью до аддитивной константы). Если $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, это соотношение следует из тождества

$$\frac{d}{du}T_{\tilde g}(\tilde f)(u) = \tilde g(u)\tilde f'(u) = -g(-u)f'(-u) = -T_g(f)'(-u) = \frac{d}{du}T_g(f)(-u).$$

В общем случае нужно использовать аппроксимацию функций $f, g$.

Таким образом, $\operatorname{div} T_{\tilde{g}}(\tilde{B}_j)(v) = \operatorname{div} T_g(B_j)(u)$, откуда легко следует эквивалентность условий (i), (ii) для э.суперр. $u$ и для э.субр. $v$. Если $\eta(u)$ — выпуклая функция, то $\hat{\eta}(v) = \eta(-v)$ также является выпуклой функцией и $\hat{\eta}'(v) = \widetilde{\eta'}(v) = -\eta'(-v)$. Поэтому в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$\hat{\eta}(v) + \operatorname{div}_x T_{\hat{\eta}'}(\tilde{\varphi})(v) - D_x^2 \cdot T_{\hat{\eta}'}(\tilde{A})(v) + \hat{\eta}''(u) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x \tilde{B}_k(v))^2 =$$
$$= \eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) + \eta''(u) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u))^2.$$

Поскольку условие невозрастания $\hat{\eta}$ эквивалентно условию неубывания $\eta$, то энтропийное неравенство (iii) для э.суперр. $u$ равносильно требованию (iii) для э.субр. $v = -u$. Наконец, ввиду тождества

$$(v(t,\cdot) - v_0)^+ = (u_0 - u(t,\cdot))^+ = (u(t,\cdot) - u_0)^-,$$

начальное условие для э.суперр. $u$ сводится к начальному условию для э.субр. $v$.

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

**Теорема 1.1** (принципы максимума/минимума)**.** *Пусть $u_1(t,x)$ — э.субр. задачи* (1.1), (1.4), *а $u_2 = u_2(t,x)$ — её э.суперр. Тогда для любой константы $c \in \mathbb{R}$ для п.в. $t > 0$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_1(t,x) - c)^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^+ dx,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_2(t,x) - c)^- dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^- dx.$$

*В частности, п.в. на* $\Pi$

$$u_1(t,x) \leqslant \operatorname{ess\,sup} u_0(x), \quad u_2(t,x) \geqslant \operatorname{ess\,inf} u_0(x)$$

(*принципы максимума/минимума*).

**Теорема 1.2.** *Максимум э.субр. $u_1 = u_1(t,x)$ и $u_2 = u_2(t,x)$ задачи* (1.1), (1.4) *также является э.субр. этой задачи.*

С учётом замечания 1.1 и тождества $\min(-u_1, -u_2) = -\max(u_1, u_2)$ из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.1.** *Минимум э.суперр. $u_1 = u_1(t,x)$ и $u_2 = u_2(t,x)$ задачи* (1.1), (1.4) *также является э.суперр. этой задачи.*

С помощью этих результатов устанавливается существование наибольшего э.субр. (наименьшего э.суперр).

**Теорема 1.3.** *Существуют наибольшее э.субр. $u = u_+(t,x)$ и наименьшее э.суперр. $u = u_-(t,x)$ задачи* (1.1), (1.4). *Эти функции являются и э.р. этой задачи.*

Таким образом, $u_+, u_-$ являются наибольшим и наименьшим э.р. задачи (1.1), (1.4), существование которых установлено в работе [16].

В изотропном случае теоремы 1.1–1.3 следуют из работ [6,15]. Для уравнений первого порядка, включая и неоднородные, аналогичные результаты были получены значительно раньше в [3–5].

В заключение вводного раздела мы покажем, что начальное условие из определений э.субр. и э.суперр. можно включить в интегральное энтропийное неравенство вида (1.9). Для э.р. соответствующее соотношение доказано в [16].

**Предложение 1.1.** *Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$, удовлетворяющая условиям* (i), (ii) *определения* 1.1, *является э.субр. задачи* (1.1), (1.4) *тогда и только тогда, когда для любой неубывающей выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ и всех неотрицательных пробных функций $f = f(t,x) \in$*

$C_0^\infty(\bar{\Pi})$, *где* $\bar{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$,

$$\int\limits_{\Pi} \left[ \eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f\eta''(u) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \right] dt dx$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0, x) dx \geqslant 0. \tag{1.11}$$

*Доказательство.* Предположим, что $u = u(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4). Пусть $E$ состоит из значений $t > 0$ таких, что $(t, x)$ — точка Лебега функции $u(t, x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Известно (см., например, [14, Lemma 1.2]), что множество $E$ имеет полную меру Лебега на $(0, +\infty)$ и что $t \in E$ является общей точкой Лебега функций $t \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t, x) b(x) dx$ при всех $b(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Так как, ввиду ограниченности $u$, любая точка Лебега этой функции является также точкой Лебега композиции $\eta(u)$ для любой функции $\eta \in C(\mathbb{R})$, мы можем заменить $u$ на $\eta(u)$ в приведённом выше свойстве. Выберем функцию $\omega(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, такую что $\omega(s) \geqslant 0$, $\operatorname{supp} \omega \subset [0, 1]$, $\int \omega(s) ds = 1$, и определим последовательности $\omega_r(s) = r\omega(rs)$, $\theta_r(s) = \int\limits_{-\infty}^{s} \omega_r(\sigma) d\sigma = \int\limits_{-\infty}^{rs} \omega(\sigma) d\sigma$, $r \in \mathbb{N}$. Ясно, что последовательность $\omega_r(s)$ сходится при $r \to \infty$ к $\delta$-мере Дирака слабо в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (т. е. является аппроксимативной единицей), а последовательность $\theta_r(s)$ сходится к функции Хевисайда $\theta(s)$ поточечно и в $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Заметим, что $0 \leqslant \theta_r(s) \leqslant 1$. Пусть $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, $f \geqslant 0$, $t_0 \in E$. Применяя (1.8) к неотрицательной пробной функции $\theta_r(t - t_0) f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, получим соотношение

$$\int\limits_{\Pi} \eta(u) \omega_r(t - t_0) f dt dx + \int\limits_{\Pi} \bigl[ \eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f +$$
$$+ T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f\eta''(u) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \bigr] \theta_r(t - t_0) dt dx \geqslant 0, \tag{1.12}$$

где, в соответствии с определением 1.2, $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная неубывающая выпуклая функция ($\eta''(u) \geqslant 0$, $\eta'(u) \geqslant 0$). Поскольку

$$\int\limits_{\Pi} \eta(u) \omega_r(t - t_0) f dt dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t, x)) f(t, x) dx \right) \omega_r(t - t_0) dt,$$

а $t_0$ — точка Лебега функции $t \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t, x)) f(t, x) dx$, то в пределе при $r \to \infty$ из (1.12) вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x)) f(t_0, x) dx + \int\limits_{(t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n} \bigl[ \eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f +$$
$$+ T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f\eta''(u) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \bigr] dt dx \geqslant 0. \tag{1.13}$$

Далее, поскольку функция $\eta(u)$ не убывает и удовлетворяет условию Липшица на любом отрезке,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u(t_0, x)) - \eta(u_0(x)))^+ f(t_0, x) dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - u_0(x))^+ f(t_0, x) dx, \quad C = \mathrm{const}.$$

В пределе при $E \ni t_0 \to 0$ из этой оценки и начального условия (iv) определения 1.2 следует, что

$$\limsup_{E \ni t_0 \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x)) f(t_0, x) dx \leqslant \lim_{E \ni t_0 \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(t_0, x) dx + \tag{1.14}$$
$$+ \lim_{E \ni t_0 \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u(t_0, x)) - \eta(u_0(x)))^+ f(t_0, x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0, x) dx. \tag{1.15}$$

С учётом этого соотношения из (1.13) в пределе при $E \ni t_0 \to 0$ следует (1.11).

Обратно, предположим, что выполнено соотношение (1.11). В случае неотрицательной пробной функции $f \in C_0^\infty(\Pi)$ (с компактным носителем, лежащим в открытом полупространстве $\Pi$) из этого соотношения вытекает энтропийное условие (iii) из определения 1.2. Остаётся только проверить начальное условие (iv) этого определения. Фиксируем неотрицательную функцию $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in E$ и положим $f = h(x)(1-\theta_r(t-t_0))$. Из (1.11) с выбранной пробной функцией $f$ вытекает неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))h(x)dx - \int\limits_{\Pi} \eta(u(t,x))\omega_r(t-t_0)hdtdx + \int\limits_{(0,t_0+1/r)\times\mathbb{R}^n} \big[T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla h + \\ + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D^2 h\big](1-\theta_r(t-t_0))dtdx \geqslant \int\limits_{\Pi} f\eta''(u)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u))^2 dtdx \geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to \infty$, получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))h(x)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0,x))h(x)dx + \int\limits_{(0,t_0)\times\mathbb{R}^n} \big[T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla h + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D^2 h\big]dtdx \geqslant 0,$$

откуда в пределе при $E \ni t_0 \to 0$ получаем

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0,x))h(x)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))h(x)dx. \tag{1.16}$$

По непрерывности соотношение (1.16) остаётся верным для любой выпуклой неубывающей энтропии $\eta \in C(\mathbb{R})$ (в частности, для $\eta(u) = (u-v)^+$, $v \in \mathbb{R}$) и для любой неотрицательной функции $h(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Так как $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, мы можем найти ступенчатую функцию $v(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \chi_{A_i}(x)$, где $v_i \in \mathbb{R}$, $\chi_{A_i}(x)$ — характеристические функции измеримых множеств $A_i \subset \mathbb{R}^n$, так что $\|u_0 - v\|_\infty < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Множества $A_i$, $i = 1,\dots,m$, предполагаются дизъюнктными. Ввиду (1.16)

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0,x)-v(x))^+ h(x)dx = \limsup_{E\ni t_0\to 0} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0,x)-v_i)^+ \chi_{A_i}(x)h(x)dx \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x)-v_i)^+ \chi_{A_i}(x)h(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x)-v(x))^+ h(x)dx \leqslant \varepsilon\|h\|_1. \tag{1.17}$$

Так как

$$(u(t_0,x)-u_0(x))^+ \leqslant (u(t_0,x)-v(x))^+ + (v(x)-u_0(x))^+ < (u(t_0,x)-v(x))^+ + \varepsilon,$$

из (1.17) следует, что

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0,x)-u_0(x))^+ h(x)dx \leqslant 2\varepsilon\|h\|_1$$

и, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0,x)-u_0(x))^+ h(x)dx = 0$$

для всех $h(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что это сводится к условию (iv)

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} (u(t,x)-u_0(x))^+ = 0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

и завершает доказательство. □

Заметим, что утверждение, аналогичное предложению 1.1, справедливо и для э.суперр. (нужно лишь заменить неубывающие энтропии $\eta(u)$ на невозрастающие).

## 2. Принцип максимума/минимума

В этом разделе мы докажем теорему 1.1. Достаточно доказать утверждение, касающееся э.субр. (принцип максимума).

**Предложение 2.1.** *Пусть* $u = u(t,x)$ — *э.субр. задачи* (1.1), (1.4). *Тогда* $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t,x)-c)^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x)-c)^+ dx \tag{2.1}$$

*для п.в.* $t > 0$.

*Доказательство.* Приведённое ниже доказательство почти дословно повторяет доказательство [16, Proposition 2.2]. Как следует из (1.8), для любой неубывающей выпуклой функции $\eta \in C^2(\mathbb{R})$

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) \leqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \tag{2.2}$$

По непрерывности неравенство (2.2) справедливо для любой неубывающей выпуклой энтропии $\eta \in C(\mathbb{R})$. Пусть $M = \|u\|_\infty$. Заметим, что условие (2.1) нетривиально только при

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x)-c)^+ dx < +\infty,$$

что и будет предполагаться ниже. Рассмотрим сначала случай $c = 0$. Обозначим при $m \geqslant n$, $\delta > 0$

$$\alpha(s) = \min((s^+)^m, 1), \quad \beta(k) = \alpha(k/\delta), \quad \eta(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \beta(k)dk = \begin{cases} 0, & u \leqslant 0, \\ \dfrac{u^{m+1}}{(m+1)\delta^m}, & 0 < u \leqslant \delta, \\ u - \dfrac{m\delta}{m+1}, & u > \delta. \end{cases}$$

Ввиду (2.2) при $u = u(t,x)$

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x \psi(u) - D_x^2 \cdot H(u) \leqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{2.3}$$

где обозначено

$$\psi(u) = T_\beta(\varphi)(u) = \int\limits_0^u (\varphi(u)-\varphi(k))\beta'(k)dk \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),$$

$$H(u) = T_\beta(A)(u) = \int\limits_0^u (A(u)-A(k))\beta'(k)dk \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n}).$$

Так как матрица $A'(u) = a(u) \geqslant 0$ (неотрицательно определена), матрица $A(u) - A(k) \geqslant 0$ при $k \leqslant u$. Поэтому матрица $H(u) \geqslant 0$ (ясно также, что $H(u) = 0$ при $u \leqslant 0$). Заметим, что при $|u| \leqslant M$

$$|\psi(u)| \leqslant 2 \max_{|u|\leqslant M} |\varphi(u)| \int\limits_0^u \beta'(k)dk = 2 \max_{|u|\leqslant M} |\varphi(u)|\beta(u)$$

(здесь и ниже мы используем обозначение $|v|$ для евклидовой нормы конечномерного вектора $v$) и, аналогично,

$$|H(u)| \leqslant 2 \max_{|u|\leqslant M} |A(u)|\beta(u).$$

Из этих оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{|\psi(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant \frac{C_1\beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}, \quad \frac{|H(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant \frac{C_2\beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon},$$

где $C_1 = 2\max\limits_{|u|\leqslant M} |\varphi(u)|$, $C_2 = 2\max\limits_{|u|\leqslant M} |A(u)|$.

Так как $\beta(u) = 1$ при $u > \delta$, функция $\omega(u) \doteq \dfrac{\beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}$ убывает на $[\delta, +\infty)$. Поэтому

$$\max \omega(u) = \max_{[0,\delta]} \omega(u) \leqslant \max_{u>0} \frac{(u/\delta)^m}{\delta(u/\delta)^{m+1}/(m+1)+\varepsilon} = \max_{v=u/\delta>0} \frac{m+1}{\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\min_{v>0}(\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}) = \frac{\delta(m+1)}{m}\left(\frac{m(m+1)\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Поэтому

$$\omega(u) \leqslant \frac{m}{\delta}\left(\frac{\delta}{m(m+1)}\right)^{\frac{1}{m+1}} \varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}.$$

Итак,

$$\frac{|\psi(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{|H(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \tag{2.4}$$

где

$$C = \max(C_1, C_2)\frac{m}{\delta}\left(\frac{\delta}{m(m+1)}\right)^{\frac{1}{m+1}} = \mathrm{const}.$$

Ввиду (2.3) для любого $\varepsilon > 0$

$$(\eta(u)+\varepsilon)_t + \operatorname{div}_x \psi(u) - D_x^2 \cdot H(u) \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. для любой пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $f \geqslant 0$

$$\int_\Pi [(\eta(u)+\varepsilon)f_t + \psi(u)\cdot\nabla_x f + H(u)\cdot D_x^2 f]\,dtdx \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Выберем неотрицательную невозрастающую функцию $\rho(r) \in C^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами: $\rho(r) = 1$ при $r \leqslant 0$, $\rho(r) = e^{-r}$ при $r \geqslant 1$, $\rho(r)$ выпукла вверх на луче $(-\infty, 1/2]$ и выпукла вниз на $[1/2, +\infty)$ (так что $1/2$ — точка перегиба функции $\rho(r)$). Такая функция всегда удовлетворяет неравенству

$$\rho''(r) \leqslant c|\rho'(r)| = -c\rho'(r) \tag{2.6}$$

для некоторой положительной константы $c$. Действительно, $\rho''(r) \leqslant 0 \leqslant |\rho'(r)|$ при $r < 1/2$ и $\rho''(r) = -\rho'(r) = e^{-r}$ при $r > 1$. На оставшемся отрезке $[1/2, 1]$ имеем $-\rho'(r) \geqslant -\rho'(1) = e^{-1}$ по выпуклости $\rho(r)$ и, значит, $\rho''(r) \leqslant -c\rho'(r)$, где $c = e \max\limits_{1/2\leqslant r\leqslant 1} \rho''(r) \geqslant 1$. Итак, оценка (2.6) выполнена. Зададим пробную функцию в виде

$$f(t,x) = \rho(N(t-t_0)+|x|-R)\chi(t),$$

где $0 < t_0 < T$, $R > 1$, константа $N = N(\varepsilon)$ будет указана позже, а неотрицательная функция $\chi(t) \in C_0^\infty((0,t_0))$. Заметим, что $\rho(N(t-t_0)+|x|-R) \equiv 1$ в цилиндре $|x| < R$, $t \in (0,t_0)$, так что особенность в точке $x = 0$ отсутствует. Таким образом, $f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$. Поскольку функция $f$ вместе со всеми её производными экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$, мы можем выбрать эту функцию как пробную в (2.5). Путём простых вычислений находим, что

$$f_t(t,x) = N\rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\chi(t) + \rho(N(t-t_0)+|x|-R)\chi'(t), \tag{2.7}$$

$$\nabla_x f = \rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\chi(t)\frac{x}{|x|}, \tag{2.8}$$

$$D_x^2 f = \left(\rho''(N(t-t_0)+|x|-R)\frac{x\otimes x}{|x|^2} + \rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\frac{|x|^2E - x\otimes x}{|x|^3}\right)\chi(t), \tag{2.9}$$

где $E$ обозначает единичную матрицу. Ввиду (2.9) для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(D_x^2 f)\xi\cdot\xi = \chi(t)\left(\rho''(N(t-t_0)+|x|-R)\frac{(x\cdot\xi)^2}{|x|^2} + \rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\frac{|x|^2|\xi|^2-(x\cdot\xi)^2}{|x|^3}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -c\rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\frac{(x\cdot\xi)^2}{|x|^2}\chi(t), \tag{2.10}$$

где мы используем (2.6) и неравенство $\rho'(\cdots)(|x|^2|\xi|^2-(x\cdot\xi)^2)\leqslant 0$. Из соотношения (2.10) следует, что матрица

$$-c\rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\chi(t)M(x)-D_x^2 f\geqslant 0$$

(неотрицательно определена), где $M(x)=\dfrac{x\otimes x}{|x|^2}$. Используя известное свойство неотрицательности скалярного произведения $A\cdot B$ неотрицательно определённых матриц $A,B\geqslant 0$, находим, что

$$H(u)\cdot D_x^2 f\leqslant -c\rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\chi(t)H(u)\cdot M(x)\leqslant -c\rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\chi(t)|H(u)| \quad (2.11)$$

(заметим, что $|M(x)|=1$). Как следует из (2.5) с помощью соотношений (2.7), (2.8) и (2.11),

$$\int\limits_{\Pi}[(\eta(u)+\varepsilon)\chi'(t)\rho(N(t-t_0)+|x|-R)dtdx+ \\ +\int\limits_{\Pi}[N(\eta(u)+\varepsilon)-|\psi(u)|-c|H(u)|]\rho'(N(t-t_0)+|x|-R)\chi(t)dtdx\geqslant 0. \quad (2.12)$$

Положив $N=C(c+1)\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}$ в (2.12), получим, что $N(\eta(u)+\varepsilon)-|\psi(u)|-c|H(u)|\geqslant 0$ ввиду (2.4). Так как $\rho'(r)\leqslant 0$, последний интеграл в (2.12) неположителен и из (2.12) следует, что

$$\int\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(u)+\varepsilon)\rho(N(t-t_0)+|x|-R)dx\right)\chi'(t)dt= \\ =\int\limits_{\Pi}(\eta(u)+\varepsilon)\chi'(t)\rho(N(t-t_0)+|x|-R)dtdx\geqslant 0 \quad \forall\chi(t)\in C_0^\infty((0,t_0)),\ \chi(t)\geqslant 0.$$

Это означает, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(u)+\varepsilon)\rho(N(t-t_0)+|x|-R)dx\leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'((0,t_0)). \quad (2.13)$$

Пусть $E$ — множество полной меры значений $t>0$, определённое в доказательстве предложения 1.1. Напомним, что любое значение $t\in E$ является точкой Лебега функции $t\to\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(u)+\varepsilon)\rho(N(t-t_0)+|x|-R)dx$. Если $t_0\in E$, то из (2.13) следует, что для всех $t\in E$, $t<t_0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(u(t_0,x))+\varepsilon)\rho(|x|-R)dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(u(t,x))+\varepsilon)\rho(N(t-t_0)+|x|-R)dx.$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $E\ni t\to 0$. Из начального условия следует (так же, как в (1.14)), что

$$\limsup_{E\ni t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u(t,x))\rho(N(t-t_0)+|x|-R)dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))\rho(|x|-Nt_0-R)dx,$$

откуда приходим к неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u(t_0,x))\rho(|x|-R)dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(u_0(x))+\varepsilon)\rho(|x|-Nt_0-R)dx\leqslant \\ \leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))dx+\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(|x|-Nt_0-R)dx. \quad (2.14)$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(|x|-Nt_0-R)dx\leqslant\int\limits_{|x|\leqslant Nt_0+R+1}dx+e^{Nt_0+R}\int\limits_{|x|>Nt_0+R+1}e^{-|x|}dx\leqslant$$

$$\leqslant c_n(Nt_0+R+1)^n + nc_n e^{Nt_0+R} \int\limits_{Nt_0+R+1}^{+\infty} e^{-r} r^{n-1} dr, \quad (2.15)$$

где $c_n$ — мера единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Поскольку

$$\int\limits_{Nt_0+R+1}^{+\infty} e^{-r} r^{n-1} dr = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s-Nt_0-R-1}(s+Nt_0+R+1)^{n-1} ds \leqslant$$

$$\leqslant (Nt_0+R+1)^{n-1} e^{-Nt_0-R-1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}(1+s)^{n-1} ds = a(Nt_0+R+1)^{n-1} e^{-Nt_0-R-1},$$

$a = \mathrm{const}$, из (2.15) следует, что при некоторых константах $a_1, a_2$

$$\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - N(\varepsilon)t_0 - R) dx \leqslant a_1 \varepsilon (N(\varepsilon)t_0 + R + 1)^n \leqslant a_2 \varepsilon (1 + \varepsilon^{-\frac{1}{m+1}})^n \underset{\varepsilon \to 0+}{\to} 0$$

(напомним, что $m+1 > n$). Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$ в (2.14) получим, что при всех $t_0 \in E$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0,x)) \rho(|x| - R) dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) dx. \quad (2.16)$$

Заметим, что $0 \leqslant \eta(u) \leqslant u^+$ и что $\eta(u) \to u^+$ при $\delta \to 0$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (2.16) в пределе при $\delta \to 0$ следует, что для п.в. $t = t_0 > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t,x))^+ \rho(|x| - R) dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x))^+ dx < +\infty.$$

По лемме Фату в пределе при $R \to \infty$ получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x))^+ dx, \quad (2.17)$$

что доказывает (2.1) при $c = 0$. В общем случае произвольного $c \in \mathbb{R}$ заметим, что $u - c$ является э.субр. задачи

$$u_t + \mathrm{div}_x(\varphi(u+c) - a(u+c)\nabla_x u) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) - c.$$

Соотношение (2.17) для этого э.субр. совпадает с требуемой оценкой (2.1). □

**Следствие 2.1.** *Если* $u = u(t,x)$ *— э.суперр. задачи* (1.1), (1.4), *то* $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t,x) - c)^- dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^- dx \quad (2.18)$$

*для п.в.* $t > 0$.

*Доказательство.* По замечанию 1.1 функция $v = -u$ является э.субр. задачи (1.10). По предложению 2.1 с заменой $c$ на $-c$ получим, что для п.в. $t > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (c - u(t,x))^+ dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v(t,x) - (-c))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v_0(x) - (-c))^+ dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (c - u_0(x))^+ dx,$$

что эквивалентно (2.18). □

Ясно, что из предложения 2.1 и следствия 2.1 вытекает утверждение теоремы 1.1.

## 3. Метод удвоения переменных и принцип сравнения

Пусть $\omega_r(\sigma)$, $\theta_r(s)$, $r \in \mathbb{N}$, — последовательности функций, определённые при доказательстве предложения 1.1. Положим $z_r^+ = \int\limits_0^z \theta_r(s)ds$. Ясно, что $0 \leqslant z_r^+ \leqslant z^+$ при всех $z \in \mathbb{R}$ и что $z_r^+ \to z^+$ при $r \to \infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. Положим также $m_r(u,v) = v + (u-v)_r^+$. Ясно, что эта функция является равномерной аппроксимацией $\max(u,v)$.

Рассмотрим пару функций $v, w \in L^\infty(\Pi)$, удовлетворяющих условиям (i), (ii) определения 1.1. Следующее свойство играет ключевую роль при обосновании метода удвоения переменных.

**Лемма 3.1.** *Для любой функции $f = f(t,x;\tau,y) \in C_0^\infty(\Pi\times\Pi)$ и любой функции $p(u) \in C^1(\mathbb{R})$*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times\Pi} p(m_r(w,v))\omega_r(w-v) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(w) \operatorname{div}_y B_k(v) f\,dtdxd\tau dy =$$

$$= -\int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{i,j=1}^n \theta(w-v)(T_p(A_{ij})(w) - T_p(A_{ij})(v)) f_{x_i y_j} dtdxd\tau dy, \tag{3.1}$$

*где $w = w(t,x)$, $v = v(\tau,y)$ (напомним, что $\theta(s)$ — это функция Хевисайда).*

*Доказательство.* По цепному свойству (ii) для $w = w(t,x)$ при всех $k = 1,\dots,l$

$$p(m_r(w,v))\omega_r(w-v)\operatorname{div}_x B_k(w) = \operatorname{div}_x T_{p(m_r(\cdot,v))\omega_r(\cdot-v)}(B_k)(w) = \sum_{i=1}^n (\psi_{ki}^r)_{x_i} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi\times\Pi),$$

где

$$\psi_{ki}^r = \psi_{ki}^r(w,v) = T_{p(m_r(\cdot,v))\omega_r(\cdot-v)} B_{ki}(w) = \int\limits_v^w p(m_r(\alpha,v))\omega_r(\alpha-v) b_{ki}(\alpha)d\alpha,$$

$w = w(t,x)$, $v = v(\tau,y)$. Перебрасывая производные на пробную функцию $f$, получим

$$I_r \doteq \int\limits_{\Pi\times\Pi} p(m_r(w,v))\omega_r(w-v) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(w) \operatorname{div}_y B_k(v) f\,dtdxd\tau dy =$$

$$= -\int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \psi_{ki}^r(w,v) \operatorname{div}_y B_k(v) f_{x_i} dtdxd\tau dy. \tag{3.2}$$

Используя теперь цепное свойство (ii) для функции $v = v(\tau,y)$, получим соотношение

$$\psi_{ki}^r(w,v)\operatorname{div}_y B_k(v) = \operatorname{div}_y T_{\psi_{ki}^r(w,\cdot)}(B_k)(v).$$

Подставляя это соотношение в (3.2) и перебрасывая производные на функции $f_{x_i}$, придём к равенству

$$I_r = \int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{k=1}^l \sum_{i,j=1}^n T_{\psi_{ki}^r(w,\cdot)}(B_{kj})(v) f_{x_i y_j} dtdxd\tau dy \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi\times\Pi), \tag{3.3}$$

в котором

$$T_{\psi_{ki}^r(w,\cdot)}(B_{kj})(v) = \int\limits_w^v \psi_{ki}^r(w,\beta) b_{kj}(\beta)d\beta. \tag{3.4}$$

Заметим далее, что функции $\omega_r(s)$ образуют аппроксимативную единицу. Поэтому

$$\psi_{ki}^r(w,\beta) = \int\limits_\beta^w p(m_r(\alpha,\beta))\omega_r(\alpha-\beta) b_{ki}(\alpha)d\alpha \underset{r\to\infty}{\to} \theta(w-\beta)p(\beta)b_{ki}(\beta) \quad \text{для п.в. } \beta \in \mathbb{R}.$$

Ввиду ограниченности $\psi^r_{ki}(w,\beta)$ мы вправе применить теорему Лебега об ограниченной сходимости и получить из (3.4) предельное соотношение

$$T_{\psi^r_{ki}(w,\cdot)}(B_{kj})(v) \underset{r\to\infty}{\to} \theta(w-v)\int\limits_w^v p(\beta)b_{ki}(\beta)b_{kj}(\beta)d\beta.$$

Суммируя по $k=1,\dots,l$ и используя равенства $\sum\limits_{k=1}^{l} b_{ki}(\beta)b_{kj}(\beta)=a_{ij}(\beta)$, получим

$$\sum_{k=1}^{l} T_{\psi^r_{ki}(w,\cdot)}(B_{kj})(v) \underset{r\to\infty}{\to} \theta(w-v)\int\limits_w^v p(\beta)a_{ij}(\beta)d\beta = -\theta(w-v)(T_p(A_{ij})(w)-T_p(A_{ij})(v)).$$

Используя это соотношение и теорему Лебега, перейдем к пределу в равенстве (3.3). Получим желаемое равенство (3.1):

$$\lim_{r\to\infty} I_r = -\int\limits_{\Pi\times\Pi}\sum_{i,j=1}^{n}\theta(w-v)(T_p(A_{ij})(w)-T_p(A_{ij})(v))f_{x_jy_j}dtdxd\tau dy.$$

Лемма доказана. □

**Предложение 3.1.** *Пусть $u_1=u_1(t,x)$ — э.субр. задачи* (1.1), (1.4), *а $u_2=u_2(t,x)$ — э.супер. этой задачи* (*с возможно различными начальными функциями*). *Тогда*

$$(u_1-u_2)^+_t + \operatorname{div}_x[\theta(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))] - D^2_x\cdot[\theta(u_1-u_2)(A(u_1)-A(u_2))] \leqslant 0 \qquad (3.5)$$

*в* $\mathcal{D}'(\Pi)$.

*Доказательство.* Так как $u_1=u_1(t,x)$ является э.субр., то по энтропийному неравенству (1.8) с энтропией $\eta(u)=(u-v)^+_r$, где $v\in\mathbb{R}$, получим

$$((u_1-v)^+_r)_t + \operatorname{div}_x T_{\theta_r(\cdot-v)}(\varphi)(u_1) - D^2_x T_{\theta_r(\cdot-v)}(A)(u_1) + \omega_r(u_1-v)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 \leqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Положим здесь $v=u_2(\tau,y)$, применим полученное соотношение к неотрицательной пробной функции $f=f(t,x;\tau,y)\in C^\infty_0(\Pi\times\Pi)$ и затем проинтегрируем по переменным $(\tau,y)\in\Pi$. Получим в итоге неравенство

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}[(u_1-u_2)^+_r f_t + T_{\theta_r(\cdot-u_2)}(\varphi)(u_1)\cdot\nabla_x f +$$
$$+ T_{\theta_r(\cdot-u_2)}(A)(u_1)\cdot D^2_x f - \omega_r(u_1-u_2)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2]dtdxd\tau dy \geqslant 0, \qquad (3.6)$$

$u_1=u_1(t,x)$, $u_2=u_2(\tau,y)$. Аналогично, так как $u_2=u_2(\tau,y)$ — э.суперр., справедливо неравенство (1.8) с невозрастающей выпуклой энтропией $\eta(u)=(v-u)^+_r$, где $v\in\mathbb{R}$ (заметим, что $\eta'(u)=-\theta_r(v-u)$):

$$((v-u_2)^+_r)_\tau - \operatorname{div}_y T_{\theta_r(v-\cdot)}(\varphi)(u_2) + D^2_y T_{\theta_r(v-\cdot)}(A)(u_2) + \omega_r(v-u_2)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2 \leqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Положим в этом соотношении $v=u_1(t,x)$ (при фиксированных $(t,x)\in\Pi$), применим к пробной функции $f$ (по переменным $(\tau,y)$) и затем проинтегрируем по $(t,x)\in\Pi$. В результате получим неравенство, аналогичное (3.6):

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}[(u_1-u_2)^+_r f_\tau - T_{\theta_r(u_1-\cdot)}(\varphi)(u_2)\cdot\nabla_y f -$$
$$- T_{\theta_r(u_1-\cdot)}(A)(u_2)\cdot D^2_y f - \omega_r(u_1-u_2)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2]dtdxd\tau dy \geqslant 0. \qquad (3.7)$$

Складывая (3.6) и (3.7), получим соотношение

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} [(u_1-u_2)_r^+(f_t+f_\tau) + T_{\theta_r(\cdot-u_2)}(\varphi)(u_1)\cdot\nabla_x f - T_{\theta_r(u_1-\cdot)}(\varphi)(u_2)\cdot\nabla_y f +$$
$$+ T_{\theta_r(\cdot-u_2)}(A)(u_1)\cdot D_x^2 f - T_{\theta_r(u_1-\cdot)}(A)(u_2)\cdot D_y^2 f -$$
$$-\omega_r(u_1-u_2)\sum_{k=1}^{l}((\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2)]dtdxd\tau dy \geqslant 0.$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $a^2+b^2\geqslant 2ab$, выводим из этого соотношения, что

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} [(u_1-u_2)_r^+(f_t+f_\tau) + T_{\theta_r(\cdot-u_2)}(\varphi)(u_1)\cdot\nabla_x f - T_{\theta_r(u_1-\cdot)}(\varphi)(u_2)\cdot\nabla_y f +$$
$$+ T_{\theta_r(\cdot-u_2)}(A)(u_1)\cdot D_x^2 f - T_{\theta_r(u_1-\cdot)}(A)(u_2)\cdot D_y^2 f -$$
$$-2\omega_r(u_1-u_2)\sum_{k=1}^{l}\operatorname{div}_x B_k(u_1)\operatorname{div}_y B_k(u_2)]dtdxd\tau dy \geqslant 0. \quad (3.8)$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $r\to\infty$. Учитывая, что для любой непрерывной функции $q(u)$

$$T_{\theta_r(\cdot-v)}(q)(u) \underset{r\to\infty}{\to} T_{\theta(\cdot-v)}(q)(u) = \theta(u-v)(q(u)-q(v)),$$
$$T_{\theta_r(v-\cdot)}(q)(u) \underset{r\to\infty}{\to} T_{\theta(v-\cdot)}(q)(u) = \theta(v-u)(q(u)-q(v))$$

в пространстве $C(\mathbb{R})/C$ и что по лемме 3.1 (при $p\equiv 1$, $w=u_1$, $v=u_2$)

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}\omega_r(u_1-u_2)\sum_{k=1}^{l}\operatorname{div}_x B_k(u_1)\operatorname{div}_y B_k(u_2) f dtdxd\tau dy \underset{r\to\infty}{\to}$$
$$-\int\limits_{\Pi\times\Pi}\sum_{i,j=1}^{n}\theta(u_1-u_2)(A_{ij}(u_1)-A_{ij}(u_2))f_{x_iy_j}dtdxd\tau dy,$$

выводим из (3.8) неравенство

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}[(u_1-u_2)^+(\partial_t+\partial_\tau)f + \theta(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f +$$
$$+\theta(u_1-u_2)(A(u_1)-A(u_2))\cdot(D_x^2+D_y^2+2D_{xy}^2)f]dtdxd\tau dy \geqslant 0. \quad (3.9)$$

Заметим, что операторная матрица

$$D_x^2+D_y^2+2D_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}+\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial x_j} =$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = (\nabla_x+\nabla_y)\otimes(\nabla_x+\nabla_y).$$

Выберем в (3.9) пробную функцию $f$ в виде $f=g(t,x)\delta_r(\tau-t,y-x)$, где $g=g(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $g\geqslant 0$, а $\delta_r(\tau-t,y-x)=\omega_r(\tau-t)\prod\limits_{i=1}^{n}\omega_r(y_i-x_i)$, $r\in\mathbb{N}$. Так как $(\partial_t+\partial_\tau)\delta_r=0$, $(\nabla_x+\nabla_y)\delta_r=0$, справедливы равенства

$$(\partial_t+\partial_\tau)f = \delta_r(\tau-t,y-x)g_t(t,x), \quad (\nabla_x+\nabla_y)f=\delta_r(\tau-t,y-x)\nabla_x g(t,x),$$
$$(\nabla_x+\nabla_y)\otimes(\nabla_x+\nabla_y)f = \delta_r(\tau-t,y-x)D_x^2 g(t,x),$$

Поэтому (3.9) перепишется в виде

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}[(u_1-u_2)^+g_t + \theta(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x g +$$

$$+\theta(u_1-u_2)(A(u_1)-A(u_2))\cdot D_x^2 g]\delta_r(\tau-t,y-x)dtdxd\tau dy \geqslant 0. \quad (3.10)$$

Напомним, что здесь $u_1=u_1(t,x)$, $u_2=u_2(\tau,y)$. Поскольку для п.в. $(t,x)\in\Pi$ (именно, для точек Лебега функции $u_2$)

$$\int\limits_\Pi [(u_1(t,x)-u_2(\tau,y))^+ g_t(t,x)+\theta(u_1(t,x)-u_2(\tau,y))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(\tau,y)))\cdot\nabla_x g(t,x)+$$
$$+\theta(u_1(t,x)-u_2(\tau,y))(A(u_1(t,x))-A(u_2(\tau,y)))\cdot D_x^2 g(t,x)]\delta_r(\tau-t,y-x)d\tau dy \underset{r\to\infty}{\to}$$
$$(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+ g_t(t,x)+\theta(u_1(t,x)-u_2(t,x))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(t,x)))\cdot\nabla_x g(t,x)+$$
$$+\theta(u_1(t,x)-u_2(t,x))(A(u_1(t,x))-A(u_2(t,x)))\cdot D_x^2 g(t,x),$$

что позволяет перейти к пределу при $r\to\infty$ в неравенстве (3.10) и с использованием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получить, что $\forall g=g(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $g\geqslant 0$

$$\int\limits_\Pi [(u_1-u_2)^+ g_t+\theta(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x g+\theta(u_1-u_2)(A(u_1)-A(u_2))\cdot D_x^2 g]dtdx\geqslant 0,$$

где уже $u_1=u_1(t,x)$, $u_2=u_2(t,x)$. Это означает, что выполнено требуемое соотношение (3.5). □

Неравенство (3.5) играет ключевую роль при доказательстве единственности э.р. и принципов сравнения. В изотропном случае $A(u)=g(u)E$ оно было доказано ранее в [6, лемма 3.1]. Нам понадобится один специальный вариант принципа сравнения, установленный в изотропном случае в [6, лемма 3.1], а для законов сохранения (1.2) значительно раньше в [7, Lemma 1].

**Предложение 3.2.** *Пусть $u_1=u_1(t,x)$ — э.субр., а $u_2=u_2(t,x)$ — э.суперр. задачи* (1.1), (1.4) *с начальными функциями $u_{01}$, $u_{02}$, соответственно. Предположим, что для любого $T>0$ множество*

$$A_T \doteq \{\ (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n \mid u_1(t,x)>u_2(t,x)\ \}$$

*имеет конечную меру Лебега. Тогда для п.в. $t>0$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+dx.$$

*В частности, если $u_{01}\leqslant u_{02}$, то $u_1\leqslant u_2$ п.в. на $\Pi$ (принцип сравнения).*

*Доказательство.* Будем следовать схеме доказательства [6, лемма 3.1], в анизотропном случае потребуются лишь незначительные изменения.

Выберем $0<t_0<t_1$ и положим $f=f(t,x)=(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))p(x/l)$, где $r,l\in\mathbb{N}$, неотрицательная функция $p(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $0\leqslant p(y)\leqslant p(0)=1$, а последовательность $\theta_r(s)=\int\limits_{-\infty}^{s}\omega_r(\sigma)d\sigma$ аппроксимаций функции Хевисайда определена при доказательстве предложения 1.1 выше. Применяя (3.5) к пробной функции $f$, получим после простых преобразований неравенство

$$\int\limits_\Pi(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+\omega_r(t-t_1)p(x/l)dtdx\leqslant\int\limits_\Pi(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+\omega_r(t-t_0)p(x/l)dtdx+$$
$$+\frac{1}{l}\int\limits_\Pi\theta(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_y p(x/l)(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))dtdx+$$
$$+\frac{1}{l^2}\int\limits_\Pi\theta(u_1-u_2)(A(u_1)-A(u_2))\cdot D_y^2 p(x/l)(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))dtdx. \quad (3.11)$$

Пусть $t_0,t_1\in E$, где $E$ — множество полной меры значений $t$, для которых $(t,x)$ является точкой Лебега функции $(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+$ для п.в. $x\in\mathbb{R}^n$. Тогда $t_0,t_1$ — точки Лебега функций $t\to\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+p(x/l)dx$, $l\in\mathbb{N}$, и из (3.11) в пределе при $r\to\infty$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_1,x)-u_2(t_1,x))^+p(x/l)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+p(x/l)dx+$$
$$+\frac{1}{l}\int_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n}\theta(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_y p(x/l)dtdx+$$
$$+\frac{1}{l^2}\int_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n}\theta(u_1-u_2)(A(u_1)-A(u_2))\cdot D_y^2p(x/l)dtdx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+p(x/l)dx$$
$$+\left(\frac{1}{l}\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\|_\infty\|\nabla_y p\|_\infty+\frac{1}{l^2}\|A(u_1)-A(u_2)\|_\infty\|D_y^2p\|_\infty\right)\int_{(0,t_1)\times\mathbb{R}^n}\theta(u_1-u_2)dtdx. \quad (3.12)$$

Заметим, что по условию леммы $\int\limits_{(0,t_1)\times\mathbb{R}^n}\theta(u_1-u_2)dtdx<+\infty$. Переходя к пределу в (3.12) при $E\ni t_0\to 0+$, получим, что для всех $t=t_1\in E$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+p(x/l)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+p(x/l)dx+$$
$$+\left(\frac{1}{l}\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\|_\infty\|\nabla_y p\|_\infty+\frac{1}{l^2}\|A(u_1)-A(u_2)\|_\infty\|D_y^2p\|_\infty\right)\int_{(0,t)\times\mathbb{R}^n}\theta(u_1-u_2)dtdx, \quad (3.13)$$

где мы пользуемся неравенством

$$(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+\leqslant(u_1(t_0,x)-u_{01}(x))^++(u_{01}(x)-u_{02}(x))^++(u_{02}(x)-u_2(t_0,x))^+$$

вместе с начальными условиями (iv) определений 1.2, 1.3. По лемме Фату из (3.13) в пределе при $l\to\infty$ вытекает требуемое соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+dx.$$

Предложение доказано. □

## 4. Доказательство теоремы 1.2

Установим сначала, что максимум э.субр. удовлетворяет условиям (i), (ii). Это вытекает из следующего более общего свойства.

**Лемма 4.1.** *Пусть функции* $u_1,u_2\in L^\infty(\Pi)$ *удовлетворяют условиям* (i), (ii) *определения* 1.1. *Тогда функция* $u=\max(u_1,u_2)$ *также удовлетворяет этим условиям.*

*Доказательство.* Для доказательства мы снова применим метод удвоения переменных. Фиксируем $k\in\overline{1,l}$. Пусть $p(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $v\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}$. Из свойства (ii) с функцией $g(u)=p(u)\theta_r(u-v)$ в пределе при $r\to\infty$ вытекает равенство

$$\operatorname{div}_x T_p(B_k)(\max(u_1,v))=\operatorname{div}_x T_{\theta(\cdot-v)}(B_k)(u_1)=p(u_1)\theta(u_1-v)\operatorname{div}_x B_k(u_1) \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

причём по условию (i) $\operatorname{div}_x B_k(u_1)\in L^2_{loc}(\Pi)$. Положим в этом равенстве $v=u_2(\tau,y)$, $(\tau,y)\in\Pi$, применим к пробной функции $f=f(t,x;\tau,y)$ (относительно $(t,x)$) и проинтегрируем по $(\tau,y)\in\Pi$. Получим в итоге равенство

$$-\int_{\Pi\times\Pi}T_p(B_k)(\max(u_1,u_2))\cdot\nabla_x f dtdxd\tau dy=\int_{\Pi\times\Pi}fp(u_1)\theta(u_1-u_2)\operatorname{div}_x B_k(u_1)dtdxd\tau dy, \quad (4.1)$$

в котором $u_1=u_1(t,x)$, $u_2=u_2(\tau,y)$. Аналогично, из свойств (i), (ii) для функции $u_2(\tau,y)$ при $g(u)=p(u)(1-\theta_r(u_1-u))$ в пределе при $r\to\infty$ следует, что

$$\operatorname{div}_y T_p(B_k)(\max(u_1,u_2))=T_{p(1-\theta(u_1(t,x)-\cdot))}(B_k)(u_2)=p(u_2)(1-\theta(u_1-u_2))\operatorname{div}_y B_k(u_2) \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

где $\operatorname{div}_y B_k(u_2) \in L^2_{loc}(\Pi)$. Применяя это равенство к $f$ (относительно переменных $(\tau, y)$) и затем интегрируя по $(t,x)$, получим, что

$$-\int\limits_{\Pi\times\Pi} T_p(B_k)(\max(u_1,u_2))\cdot\nabla_y f dt dx d\tau dy = \int\limits_{\Pi\times\Pi} fp(u_2)(1-\theta(u_1-u_2)) \operatorname{div}_y B_k(u_2) dt dx d\tau dy. \quad (4.2)$$

Суммируя (4.1) и (4.2), получим

$$-\int\limits_{\Pi\times\Pi} T_p(B_k)(\max(u_1,u_2))\cdot(\nabla_x+\nabla_y) f dt dx d\tau dy =$$
$$= \int\limits_{\Pi\times\Pi} f[p(u_1)\theta(u_1-u_2)\operatorname{div}_x B_k(u_1) + p(u_2)(1-\theta(u_1-u_2))\operatorname{div}_y B_k(u_2)] dt dx d\tau dy =$$
$$= \int\limits_{\Pi\times\Pi} fp(\max(u_1,u_2))[\theta(u_1-u_2)\operatorname{div}_x B_k(u_1) + (1-\theta(u_1-u_2))\operatorname{div}_y B_k(u_2)] dt dx d\tau dy. \quad (4.3)$$

Положим в этом соотношении, что $f = g(t,x)\delta_r(\tau - t, y - x)$, где $g = g(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$, а последовательность ядер $\delta_r$, образующая аппроксимативную единицу на $\Pi$, определена при доказательстве предложения 3.1. Тогда равенство (4.3) перепишется в виде

$$-\int\limits_{\Pi\times\Pi} T_p(B_k)(\max(u_1,u_2))\cdot(\nabla_x g)\delta_r(\tau-t,y-x) dt dx d\tau dy = \int\limits_{\Pi\times\Pi} [p(u_1)\theta(u_1-u_2)\operatorname{div}_x B_k(u_1) +$$
$$+ p(u_2)(1-\theta(u_1-u_2))\operatorname{div}_y B_k(u_2)] g(t,x)\delta_r(\tau-t,y-x) dt dx d\tau dy =$$
$$= \int\limits_{\Pi} g(t,x)p(\max(u_1(t,x),u_2(t,x)))[\operatorname{div}_x B_k(u_1(t,x)) I_r(t,x) +$$
$$+ \operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x))(1-I_r(t,x))] dt dx + J_{1r} + J_{2r} + J_{3r}, \quad (4.4)$$

где обозначено

$$I_r(t,x) = \int\limits_{\Pi} \theta(u_1(t,x) - u_2(\tau,y))\delta_r(\tau-t,y-x) d\tau dy,$$

$$J_{1r} = \int\limits_{\Pi\times\Pi} p(u_2(\tau,y))(1-\theta(u_1(t,x)-u_2(\tau,y)))(\operatorname{div}_y B_k(u_2(\tau,y)) -$$
$$- \operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x))) g(t,x)\delta_r(\tau-t,y-x) dt dx d\tau dy,$$

$$J_{2r} = \int\limits_{\Pi\times\Pi} [p(\max(u_1(t,x),u_2(\tau,y))) - p(\max(u_1(t,x),u_2(t,x)))] \times$$
$$\times \theta(u_1(t,x)-u_2(\tau,y))\operatorname{div}_x B_k(u_1(t,x)) g(t,x)\delta_r(\tau-t,y-x) dt dx d\tau dy,$$

$$J_{3r} = \int\limits_{\Pi\times\Pi} [p(\max(u_1(t,x),u_2(\tau,y))) - p(\max(u_1(t,x),u_2(t,x)))] \times$$
$$\times (1-\theta(u_1(t,x)-u_2(\tau,y)))\operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x)) g(t,x)\delta_r(\tau-t,y-x) dt dx d\tau dy.$$

Так как $0 \leqslant I_r \leqslant 1$, то после возможного перехода к подпоследовательности (за которой мы сохраняем прежнее обозначение)

$$I_r \rightharpoonup I(t,x) \quad *\text{-слабо в } L^\infty(\Pi),$$

причём $0 \leqslant I(t,x) \leqslant 1$. Ясно, что тогда

$$\operatorname{div}_x B_k(u_1(t,x)) I_r + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x))(1-I_r) \rightharpoonup$$
$$d_k \doteq \operatorname{div}_x B_k(u_1(t,x)) I + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x))(1-I) \quad \text{слабо в } L^2_{loc}(\Pi). \quad (4.5)$$

Покажем, что последовательности $J_{ir} \to 0$ при $r \to \infty$, $i = 1, 2, 3$. Имеем

$$|J_{1r}| \leqslant \text{const} \int\limits_{\Pi\times\Pi} |\operatorname{div}_y B_k(u_2(\tau, y)) - \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x))| g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x)dtdxd\tau dy \to 0$$

при $r \to \infty$ по свойству непрерывности в среднем для функции $\operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x))$.

Далее, по неравенству Коши—Буняковского при $i = 2, 3$

$$|J_{ir}|^2 \leqslant C^2 \int\limits_{\Pi\times\Pi} (u_2(t, x) - u_2(\tau, y))^2 g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x)dtdxd\tau dy \times$$
$$\times \int\limits_{\Pi\times\Pi} [(\operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x)))^2 + (\operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x)))^2] g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x)dtdxd\tau dy =$$
$$= C^2 \int\limits_{\Pi\times\Pi} (u_2(t, x) - u_2(\tau, y))^2 g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x)dtdxd\tau dy \times$$
$$\times \int\limits_{\Pi} [(\operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x)))^2 + (\operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x)))^2] g(t, x)dtdx,$$

где $C$ — константа Липшица функции $p(u)$ на отрезке $|u| \leqslant M$, $M = \max(\|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty)$. Так как первый сомножитель в правой части этого неравенства стремится к нулю при $r \to \infty$ (по свойству непрерывности в среднем), получаем, что $J_{ir} \to 0$. Итак,

$$J_{ir} \underset{r\to\infty}{\to} 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.6}$$

Перейдём к пределу при $r \to \infty$ в равенстве (4.4). Ввиду (4.5), (4.6) правая часть этого равенства сходится (после возможного выделения подпоследовательности) к

$$\int\limits_{\Pi} g(t, x)p(\max(u_1(t, x), u_2(t, x))d_k(t, x)dtdx.$$

Левая же часть сходится к

$$-\int\limits_{\Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x g dtdx$$

(это устанавливается так же, как при доказательстве предложения 3.1). В итоге получим тождество: $\forall g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$-\int\limits_{\Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x g dtdx = -\int\limits_{\Pi} g(t, x)p(\max(u_1(t, x), u_2(t, x)))d_k(t, x)dtdx,$$

которое означает, что

$$\operatorname{div}_x T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) = p(\max(u_1, u_2))d_k. \tag{4.7}$$

При $p \equiv 1$ из (4.7) следует, что $\operatorname{div}_x B_k(\max(u_1, u_2)) = d_k \in L^2_{loc}(\Pi)$, так что функция $u = \max(u_1, u_2)$ удовлетворяет условию (i). Подставляя $d_k = \operatorname{div}_x B_k(\max(u_1, u_2))$ в (4.7), получим, что выполнено и условие (ii). □

Аналогично доказывается, что и минимум функций, удовлетворяющих свойствам (i), (ii), также удовлетворяет этим свойствам. Заметим также, что предельное соотношение (4.5) справедливо без выделения подпоследовательности, это следует из того факта, что предельная функция $d_k = \operatorname{div}_x B_k(\max(u_1, u_2))$ не зависит от выбора подпоследовательности.

Мы готовы приступить к доказательству теоремы 1.2.

*Доказательство теоремы* 1.2. Пусть $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4). По лемме 4.1 функция $u = \max(u_1, u_2) \in L^\infty(\Pi)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 1.1. Проверим энтропийное условие (1.8) с неубывающей выпуклой энтропией $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$. Для этого снова будем использовать метод удвоения переменных. Применяя для э.субр. $u_1 = u_1(t, x)$

условие (1.8) с неубывающей выпуклой энтропией $\eta(m_r(u,u_2))$, где $u_2=u_2(\tau,y)$, получим соотношение

$$\eta(m_r(u_1,u_2))_t+\operatorname{div}_x T_{\eta'(m_r(\cdot,u_2))\theta_r(\cdot-u_2)}(\varphi)(u_1)-D_x^2 T_{\eta'(m_r(\cdot,u_2))\theta_r(\cdot-u_2)}(A)(u_1)+$$
$$+(\eta''(m_r(\cdot,u_2))(\theta_r(u_1-u_2))^2+\eta'(m_r(u_1,u_2))\omega_r(u_1-u_2))\sum_{k=1}^l(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2\leqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Применяя это соотношение к неотрицательной пробной функции $f=f(t,x;\tau,y)\in C_0^\infty(\Pi\times\Pi)$ и интегрируя по переменным $(\tau,y)$, получим неравенство

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}[\eta(m_r(u_1,u_2))f_t+T_{\eta'(m_r(\cdot,u_2))\theta_r(\cdot-u_2)}(\varphi)(u_1)\cdot\nabla_x f+T_{\eta'(m_r(\cdot,u_2))\theta_r(\cdot-u_2)}(A)(u_1)\cdot D_x^2 f-$$
$$-(\eta''(m_r(u_1,u_2))(\theta_r(u_1-u_2))^2+\eta'(m_r(u_1,u_2))\omega_r(u_1-u_2))\sum_{k=1}^l(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 f]dtdxd\tau dy\geqslant 0. \tag{4.8}$$

Аналогично, из энтропийного неравенства (1.8) для э.субр. $u_2=u_2(\tau,y)$ с неубывающей выпуклой энтропией $\eta(m_r(u_1,u))$ после применения к пробной функции $f$ и интегрирования по $(t,x)$ следует неравенство

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}[\eta(m_r(u_1,u_2))f_\tau+T_{\eta'(m_r(u_1,\cdot))(1-\theta_r(u_1-\cdot))}(\varphi)(u_2)\cdot\nabla_y f+T_{\eta'(m_r(u_1,\cdot))(1-\theta_r(u_1-\cdot))}(A)(u_2)\cdot D_y^2 f-$$
$$-(\eta''(m_r(u_1,u_2))(1-\theta_r(u_1-u_2))^2+\eta'(m_r(u_1,u_2))\omega_r(u_1-u_2))\sum_{k=1}^l(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2 f]dtdxd\tau dy\geqslant 0. \tag{4.9}$$

Суммируя (4.8) и (4.9) и затем переходя к пределу при $r\to\infty$, получим неравенство

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi}[\eta(\max(u_1,u_2))(\partial_t+\partial_\tau)f+T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1,u_2))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f+$$
$$+T_{\eta'}(A)(\max(u_1,u_2))\cdot(D_x^2+D_y^2)f]dtdxd\tau dy-$$
$$-\int\limits_{\Pi\times\Pi}\eta''(\max(u_1,u_2))\sum_{k=1}^l\left[\theta(u_1-u_2)(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2+(1-\theta(u_1-u_2))(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2\right]fdtdxd\tau dy\geqslant$$
$$\geqslant\limsup_{r\to\infty}\int\limits_{\Pi\times\Pi}\eta'(\max(u_1,u_2))\omega_r(u_1-u_2))\sum_{k=1}^l[(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2+(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2]dtdxd\tau dy\geqslant$$
$$\geqslant 2\limsup_{r\to\infty}\int\limits_{\Pi\times\Pi}\eta'(m_r(u_1,u_2))\omega_r(u_1-u_2)\sum_{k=1}^l\operatorname{div}_x B_k(u_1)\operatorname{div}_y B_k(u_2)dtdxd\tau dy. \tag{4.10}$$

Мы учли, что при $r\to\infty$ справедливы предельные соотношения $m_r(u_1,u_2)\to\max(u_1,u_2)$

$$T_{\eta'(m_r(\cdot,u_2))\theta_r(\cdot-u_2)}(p)(u)\to T_{\eta'}(p)(\max(u,u_2)),\quad T_{\eta'(m_r(u_1,\cdot))(1-\theta_r(u_1-\cdot))}(u)\to T_{\eta'}(p)(\max(u_1,u))$$

в пространстве $C(\mathbb{R})/C$. Также использован факт, что замена функций $\eta''(m_r(u_1,u_2))(\theta_r(u_1-u_2))^2$ и $\eta''(m_r(u_1,u_2))(1-\theta_r(u_1-u_2))^2$ на, соответственно, $\eta''(\max(u_1,u_2))\theta(u_1-u_2)$ и $\eta''(\max(u_1,u_2))$ $(1-\theta(u_1-u_2))$ приводит к ошибке, бесконечно малой при $r\to\infty$. По лемме 3.1

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\Pi\times\Pi}\eta'(m_r(u_1,u_2))\omega_r(u_1-u_2)\sum_{k=1}^l\operatorname{div}_x B_k(u_1)\operatorname{div}_y B_k(u_2)dtdxd\tau dy=$$

$$= -\int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{i,j=1}^{n} \theta(u_1-u_2)(T_{\eta'}(A_{ij})(u_1) - T_{\eta'}(A_{ij})(u_2)) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy. \tag{4.11}$$

Так как функции $T_{\eta'}(A_{ij})(u_2(\tau,y))$ не зависят от переменных $(t,x)$, то

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{i,j=1}^{n} T_{\eta'}(A_{ij})(u_2) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy = -\int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{i,j=1}^{n} (T_{\eta'}(A_{ij})(u_2))_{x_i} f_{y_j} dt dx d\tau dy = 0,$$

и после добавления к правой части соотношения (4.11) равного нулю интеграла

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{i,j=1}^{n} T_{\eta'}(A_{ij})(u_2) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy$$

это соотношение перепишется в виде

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times\Pi} \eta'(m_r(u_1,u_2))\omega_r(u_1-u_2) \sum_{k=1}^{l} \operatorname{div}_x B_k(u_1) \operatorname{div}_y B_k(u_2) dt dx d\tau dy =$$
$$= -\int\limits_{\Pi\times\Pi} \sum_{i,j=1}^{n} T_{\eta'}(A_{ij})(\max(u_1,u_2)) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy. \tag{4.12}$$

Это позволяет переписать (4.10) в виде

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} [\eta(\max(u_1,u_2))(\partial_t+\partial_\tau)f + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1,u_2))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f +$$
$$+ T_{\eta'}(A)(\max(u_1,u_2))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)\otimes(\nabla_x+\nabla_y)f] dt dx d\tau dy -$$
$$- \int\limits_{\Pi\times\Pi} \eta''(\max(u_1,u_2)) \sum_{k=1}^{l} [\theta(u_1-u_2)(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 +$$
$$+ (1-\theta(u_1-u_2))(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] f dt dx d\tau dy \geqslant 0, \tag{4.13}$$

$u_1 = u_1(t,x)$, $u_2 = u_2(\tau,y)$. В соответствии с методом удвоения переменных положим здесь $f = g(t,x)\delta_r(\tau-t, y-x)$, где $g(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g \geqslant 0$ и перейдем к пределу при $r \to \infty$. Так же, как при доказательстве предложения 3.1, устанавливается, что предел первого интеграла в неравенстве (4.13) равен

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times\Pi} [\eta(\max(u_1,u_2))g_t + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1,u_2))\cdot\nabla_x g +$$
$$+ T_{\eta'}(A)(\max(u_1,u_2))\cdot D_x^2 g]\delta_r(\tau-t,y-x) dt dx d\tau dy$$
$$= \int\limits_{\Pi} [\eta(\max(u_1,u_2))g_t + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1,u_2))\cdot\nabla_x g + T_{\eta'}(A)(\max(u_1,u_2))\cdot D_x^2 g] dt dx, \tag{4.14}$$

где уже $u_1 = u_1(t,x)$, $u_2 = u_2(t,x)$. Предел второго интеграла в (4.13) не изменится, если мы заменим $u_2(\tau,y)$ на $u_2(t,x)$ в выражениях $\eta''(\max(u_1,u_2))$, $\operatorname{div}_y B_k(u_2)$. Используя также неравенство Йенсена, получим

$$\liminf_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times\Pi} \eta''(\max(u_1,u_2)) \sum_{k=1}^{l} [\theta(u_1-u_2)(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + (1-\theta(u_1-u_2))(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] \times$$
$$\times g\delta_r(\tau-t,y-x) dt dx d\tau dy \geqslant \liminf_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi} \eta''(\max(u_1(t,x),u_2(t,x)))g(t,x) \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Pi}\sum_{k=1}^{l}[\theta(u_1-u_2)\operatorname{div}_x B_k(u_1)+(1-\theta(u_1-u_2))\operatorname{div}_x B_k(u_2)]^2\delta_r(\tau-t,y-x)d\tau dy\right)dtdx. \tag{4.15}$$

Заметим, что мера $\delta_r(\tau-t,y-x)d\tau dy$ — вероятностная при всех $(t,x)$. По интегральному неравенству Йенсена

$$\int\limits_{\Pi}\sum_{k=1}^{l}[\theta(u_1-u_2)\operatorname{div}_x B_k(u_1)+(1-\theta(u_1-u_2))\operatorname{div}_x B_k(u_2)]^2\delta_r(\tau-t,y-x)d\tau dy\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{l}\left(\int\limits_{\Pi}\theta(u_1-u_2)\operatorname{div}_x B_k(u_1)+(1-\theta(u_1-u_2))\operatorname{div}_x B_k(u_2)\delta_r(\tau-t,y-x)d\tau dy\right)^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u_1(t,x))I_r+\operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x))(1-I_r))^2, \tag{4.16}$$

где

$$I_r=I_r(t,x)=\int\limits_{\Pi}\theta(u_1(t,x)-u_2(\tau,y))\delta_r(\tau-t,y-x)d\tau dy.$$

Ввиду (4.5) для всех $k\in\overline{1,l}$ при $r\to\infty$

$$\operatorname{div}_x B_k(u_1(t,x))I_r+\operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x))(1-I_r)\rightharpoonup d_k=\operatorname{div} B_k(\max(u_1,u_2)).$$

По свойству слабой полунепрерывности снизу выпуклых функционалов $u\to\int u^2\rho dtdx$, $\rho=\rho(t,x)\geqslant 0$,

$$\int\limits_{\Pi}\eta''(\max(u_1(t,x),u_2(t,x)))g(t,x)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div} B_k(\max(u_1,u_2)))^2dtdx\leqslant$$

$$\leqslant\liminf_{r\to\infty}\int\limits_{\Pi}\eta''(\max(u_1(t,x),u_2(t,x)))g(t,x)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u_1(t,x))I_r+\operatorname{div}_x B_k(u_2(t,x))(1-I_r))^2dtdx$$

$$\leqslant\liminf_{r\to\infty}\int\limits_{\Pi\times\Pi}\eta''(\max(u_1,u_2))\sum_{k=1}^{l}[\theta(u_1-u_2)(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2+(1-\theta(u_1-u_2))(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2]\times$$

$$\times g\delta_r(\tau-t,y-x)dtdxd\tau dy, \tag{4.17}$$

где мы использовали неравенства (4.15), (4.16). С учётом (4.14), (4.17) из (4.13) в пределе при $r\to\infty$ следует неравенство

$$\int\limits_{\Pi}[\eta(\max(u_1,u_2))g_t+T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1,u_2))\cdot\nabla_x g+T_{\eta'}(A)(\max(u_1,u_2))\cdot D_x^2 g-$$

$$-\eta''(\max(u_1,u_2))\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div} B_k(\max(u_1,u_2)))^2 g]dtdx\geqslant 0,$$

справедливое для любой неотрицательной пробной функции $g=g(t,x)$. Таким образом, функция $u=\max(u_1(t,x),u_2(t,x))$ удовлетворяет энтропийному условию (1.8) с любой неубывающей выпуклой энтропией $\eta(u)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$(\max(u_1(t,x),u_2(t,x))-u_0(x))^+\leqslant(u_1(t,x)-u_0(x))^++(u_2(t,x)-u_0(x))^+.$$

Поэтому из начального условия (iv) определения 1.2 для э.субр. $u_1$, $u_2$ следует, что

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0}(\max(u_1(t,x),u_2(t,x))-u_0(x))^+=0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

В соответствии с определением 1.2 функция $u = \max(u_1(t,x), u_2(t,x))$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4). □

Индукцией по числу функций $m$ легко установить следующий результат.

**Следствие 4.1.** *Максимум конечного множества э.субр.* $u_1, \dots, u_m$ *задачи* (1.1), (1.4) *также является э.субр. этой задачи.*

Ввиду замечания 1.1 и тождества $\min(u_1, \dots, u_m) = -\max(-u_1, \dots, -u_m)$ получаем, что минимум любого конечного множества э.суперр. задачи (1.1), (1.4) также является э.суперр. этой задачи.

## 5. Существование наибольшего э.субр. Доказательство теоремы 1.3

Нам понадобится следующая априорная оценка функций $\operatorname{div}_x B_k(u)$ в $L^2_{loc}(\Pi)$.

**Лемма 5.1.** *Пусть* $u = u(t,x)$ — *э.субр. задачи* (1.1), (1.4) *и* $\|u\|_\infty \leqslant M$. *Тогда для любой функции* $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $f \geqslant 0$

$$\int\limits_\Pi \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 f\,dtdx \leqslant C(f,M), \tag{5.1}$$

*где константа* $C(f,M)$ *зависит только от* $f$ *и* $M$.

*Доказательство.* Фиксируем неубывающую выпуклую энтропию $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ такую, что $\eta''(u) \geqslant 1$ на отрезке $[-M, M]$ (например, $\eta(u) = e^{u+M}$). Тогда из условия (1.9) вытекает неравенство

$$\int\limits_\Pi \left(\sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u))^2\right) f\,dtdx \leqslant \int\limits_\Pi \left[\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f\right] dtdx \leqslant$$
$$\leqslant C(f,M) \doteq \max_{|u|\leqslant M} (\eta(u) + |T_{\eta'}(\varphi)(u)| + |T_{\eta'}(A)(u)|) \int\limits_\Pi \max(|f_t|, |\nabla_x f|, |D_x^2 f|) dtdx,$$

что и требовалось доказать. □

Мы готовы доказать существование наибольшего э.субр.

**Теорема 5.1.** *Существует наибольшее э.субр.* $u = u_+(t,x)$ *задачи* (1.1), (1.4).

*Доказательство.* Выберем строго положительную суммируемую функцию $\rho(t,x)$ на $\Pi$ (например, можно взять $\rho = e^{-t-|x|}$) и рассмотрим функционал $J(u) = \int\limits_\Pi u(t,x)\rho(t,x)dtdx$. Поскольку любое э.субр. $u = u(t,x)$ задачи (1.1), (1.4) удовлетворяет оценке $u(t,x) \leqslant b = \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ п.в. на $\Pi$ (по принципу максимуму из теоремы 1.1), то функционал $J$ ограничен сверху на множестве $Sub$ э.субр. задачи (1.1), (1.4). Поэтому

$$\sup_{u\in Sub} J(u) = R \leqslant b\|\rho\|_1 < +\infty.$$

Выберем последовательность э.субр. $u_r$ так, что $J(u_r) > R - 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. Положим $\bar u_r = \max_{i\in\overline{1,r}} u_i(t,x)$. По следствию 4.1 $\bar u_r$ — также э.субр. задачи (1.1), (1.4). Так как $\bar u_r \geqslant u_r$,

$$R - 1/r < J(u_r) \leqslant J(\bar u_r) \leqslant R.$$

Поскольку последовательность $\bar u_r$ монотонно возрастает и ограничена сверху константой $b$, существует предел

$$u_+(t,x) = \lim_{r\to\infty} \bar u_r(t,x) = \sup_{r\in\mathbb{N}} u_r(t,x)$$

для п.в. $(t,x) \in \Pi$, удовлетворяющих условию $u_r(t,x) \leqslant b$ $\forall r \in \mathbb{N}$. Заметим также, что для всех $r \in \mathbb{N}$ справедлива оценка снизу $\bar u_r(t,x) \geqslant u_1(t,x) \geqslant a \doteq \operatorname{ess\,inf} u_1(t,x)$. В частности, при $M = \max(|a|,|b|)$

$$\|\bar u_r\|_\infty \leqslant M \ \forall r \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

а значит, также и $\|u_+\|_\infty \leqslant M$. Ясно, что

$$J(u_+) = \lim_{r\to\infty} J(\bar u_r) = R.$$

Покажем, что $u_+$ также является э.субр. задачи (1.1), (1.4). Как следует из леммы 5.1 и оценки (5.2), последовательности $\operatorname{div}_x B_k(\bar u_r)$ ограничены в $L^2_{loc}(\Pi)$. Поэтому после возможного выделения подпоследовательностей они сходятся слабо при $r\to\infty$ к некоторым функциям $d_k = d_k(t,x) \in L^2_{loc}(\Pi)$:

$$\operatorname{div}_x B_k(\bar u_r) \rightharpoonup d_k, \quad k = 1,\dots,l.$$

Переходя к пределу при $r\to\infty$ в тождествах

$$\int\limits_\Pi B_k(\bar u_r)\cdot\nabla_x f\,dtdx = -\int\limits_\Pi \operatorname{div}_x B_k(\bar u_r) f\,dtdx \quad \forall f = f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi),$$

получим, что

$$\int\limits_\Pi B_k(u_+)\cdot\nabla_x f\,dtdx = -\int\limits_\Pi d_k f\,dtdx \quad \forall f = f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$$

(заметим, что $B_k(\bar u_r)\to B_k(u_+)$ сильно в $L^1_{loc}(\Pi)$), откуда следует, что

$$\operatorname{div}_x B_k(u_+) = d_k \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. $u_+$ удовлетворяет условию (i) определения 1.1. Аналогично, по условию (ii) для э.субр. $\bar u_r$ для любого $g(u)\in C^1(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(\bar u_r) = g(\bar u_r)\operatorname{div}_x B_k(\bar u_r) \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Так как при $r\to\infty$ $T_g(B_k)(\bar u_r)\to T_g(B_k)(u_+)$, $g(\bar u_r)\to g(u_+)$ сильно в $L^2_{loc}(\Pi)$, а $\operatorname{div}_x B_k(\bar u_r) \rightharpoonup \operatorname{div}_x B_k(u_+)$ слабо в $L^2_{loc}(\Pi)$, то можно перейти в этих равенствах к пределу при $r\to\infty$ и получить, что

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(u_+) = g(u_+)\operatorname{div}_x B_k(u_+) \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Это означает, что функция $u_+$ удовлетворяет и условию (ii) определения 1.1.

По предложению 1.1 для любой неубывающей выпуклой энтропии $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ и любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x)\in C_0^\infty(\bar\Pi)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_\Pi \Big[\eta(\bar u_r)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(\bar u_r)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(\bar u_r)\cdot D_x^2 f - f\eta''(\bar u_r)\sum_{k=1}^l(\operatorname{div}_x B_k(\bar u_r))^2\Big]dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))f(0,x)dx \geqslant 0. \quad (5.3)$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $r\to\infty$. Ясно, что

$$\int\limits_\Pi \Big[\eta(\bar u_r)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(\bar u_r)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(\bar u_r)\cdot D_x^2 f\Big]dtdx \underset{r\to\infty}{\to} \int\limits_\Pi \Big[\eta(u_+)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u_+)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u_+)\cdot D_x^2 f\Big]dtdx. \quad (5.4)$$

Заметим далее, что последовательности

$$\sqrt{\eta''(\bar u_r)}\operatorname{div}_x B_k(\bar u_r) \underset{r\to\infty}{\rightharpoonup} \sqrt{\eta''(u_+)}\operatorname{div}_x B_k(u_+)$$

слабо в $L^2(\Pi, f\,dtdx)$. По известному свойству слабой полунепрерывности снизу $L^2$-нормы получим после суммирования по $k\in\overline{1,l}$, что

$$\int\limits_\Pi \eta''(u_+)\sum_{k=1}^l(\operatorname{div}_x B_k(u_+))^2 f\,dtdx \leqslant \liminf_{r\to\infty}\int\limits_\Pi \eta''(\bar u_r)\sum_{k=1}^l(\operatorname{div}_x B_k(\bar u_r))^2 f\,dtdx. \quad (5.5)$$

С помощью предельных соотношений (5.4), (5.5) из (5.3) следует неравенство

$$\int\limits_{\Pi}\left[\eta(u_+)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u_+)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u_+)\cdot D_x^2 f - f\eta''(u_+)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u_+))^2\right]dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))f(0,x)dx \geqslant 0.$$

В соответствии с предложением 1.1 мы можем утверждать, что $u_+$ является э.субр. задачи (1.1), (1.4). Покажем, что это э.субр. — наибольшее. Для этого возьмём произвольное э.субр. $u \in Sub$ задачи (1.1), (1.4). По теореме 1.2 тогда $v = \max(u_+, u) \in Sub$. Так как $R = J(u_+) \leqslant J(v) \leqslant R$, имеем $J(v) = J(u_+) = R$. Тогда

$$\int\limits_{\Pi}(u-u_+)^+\rho dtdx = \int\limits_{\Pi}(v-u_+)\rho dtdx = J(v) - J(u_+) = 0.$$

Поскольку $\rho = \rho(t,x) > 0$, заключаем, что $u \leqslant u_+$ п.в. на $\Pi$ для всех $u \in Sub$. Это и значит, что $u_+$ — наибольшее э.субр. Теорема доказана. □

По замечанию 1.1 функция $u_- = -v_+$, где $v_+$ — наибольшее э.субр. задачи (1.10), является наименьшим э.суперр. задачи (1.1), (1.4). Для завершения доказательства теоремы 1.3 достаточно установить, что наибольшее э.субр. задачи (1.1), (1.4) является и её э.р. Для этого выберем строго убывающую последовательность $b_r$, $r \in \mathbb{N}$, такую что $b_r > b = \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ для всех $r \in \mathbb{N}$ и определим соответствующую последовательность начальных функций

$$u_{0r}(x) = \begin{cases} u_0(x), & |x| \leqslant r, \\ b_r, & |x| > r. \end{cases}$$

Заметим, что $\forall r \in \mathbb{N}$

$$u_0(x) \leqslant u_{0r+1}(x) \leqslant u_{0r}(x) \leqslant b_r \ \text{ п.в. } \mathbb{R}^n, \text{ и } \lim_{r\to\infty} u_{0r}(x) = u_0(x).$$

Известно, что существует э.р. $u_r = u_r(t,x)$ задачи (1.1), (1.4) с начальной функцией $u_{0r}(x)$. Например, можно взять наибольшее (или наименьшее) э.р.; существование таких э.р. установлено в [16]. Как показано в [16], последовательность $u_r$ убывает и сходится при $r \to \infty$ к наибольшему э.р. $\tilde{u}$ исходной задачи.

По принципу максимума $u_+ \leqslant b$ п.в. на $\Pi$. Поэтому в слое $\Pi_T = (0,T)\times\mathbb{R}^n$ множество $\{u_+ > u_r\} \subset \{b > u_r\} = \{b_r - u_r > b_r - b\}$, и следовательно,

$$\operatorname{meas}\{u_+ > u_r\} \leqslant \frac{1}{b_r - b}\int\limits_{\Pi_T}(u_r - b_r)^- dtdx \leqslant \frac{T}{b_r - b}\int\limits_{|x|<r}(u_0 - b_r)^- dx < +\infty,$$

где мы использовали неравенство Чебышёва и теорему 1.1 для э.суперр. $u_r$. Таким образом, выполнено требование предложения 3.2, а значит, выполнен принцип сравнения для э.субр. $u_+$ и э.суперр. $u_r$, так что из неравенства $u_0 \leqslant u_{0r}$ следует, что $u_+ \leqslant u_r$ п.в. на $\Pi$. В пределе при $r \to \infty$ получаем, что $u_+ \leqslant \tilde{u}$ п.в. на $\Pi$. Но так как $\tilde{u}$ — э.р., а значит, и э.субр. задачи (1.1), (1.4), в то время как $u_+$ — наибольшее э.субр. этой задачи, верно обратное неравенство $\tilde{u} \leqslant u_+$ п.в. на $\Pi$. Итак, $u_+ = \tilde{u}$ является э.р., что завершает доказательство теоремы 1.3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81*, № 2. — С. 228–255.
2. *Кружков С. Н., Панов Е. Ю.* Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных// Докл. АН СССР. — 1990. — *314*, № 1. — С. 79–84.
3. *Панов Е. Ю.* К теории обобщенных энтропийных суб- и супер-решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 2. — С. 252–259.
4. *Панов Е. Ю.* О наибольших и наименьших обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 5. — С. 95–112.
5. *Панов Е. Ю.* К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классе локально суммируемых функций// Изв. РАН. — 2002. — *66*, № 6. — С. 91–136.

6. *Панов Е. Ю.* К теории энтропийных решений нелинейных вырождающихся параболических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2020. — *66*, № 2. — С. 292–313.
7. *Andreianov B. P., Bénilan Ph., Kruzhkov S. N.* $L^1$-theory of scalar conservation law with continuous flux function// J. Funct. Anal. — 2000. — *171*, № 1. — С. 15–33.
8. *Andreianov B. P., Igbida N.* On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems// Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2012. — *4*, № 1-2. — С. 3–34.
9. *Andreianov B. P., Maliki M.* A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in $\mathbb{R}^N$// NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2010. — *17*, № 1. — С. 109–118.
10. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1999. — *147*. — С. 269–361.
11. *Chen G.-Q., Perthame B.* Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2003. — *20*. — С. 645–668.
12. *Kruzhkov S. N., Panov E. Yu.* Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order// Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. — 1994. — *40*. — С. 31–54.
13. *Maliki M., Touré H.* Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem// J. Evol. Equ. — 2003. — *3*, № 4. — С. 603–622.
14. *Panov E. Yu.* On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2016. — *13*. — С. 633–659.
15. *Panov E. Yu.* To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 16. — С. 9387–9404.
16. *Panov E. Yu.* On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations// J. Differ. Equ. — 2021. — *275*. — С. 139–166.

Е. Ю. Панов
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия
Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

UDC 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331
EDN: UGEKXW

# On the theory of entropy sub- and supersolutions of nonlinear degenerate parabolic equations

**E. Yu. Panov**[1,2]

[1] *Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia*
[2] *Scientific Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia*

**Abstract**. We consider a second-order nonlinear degenerate anisotropic parabolic equation in the case when the flux vector is only continuous and the nonnegative diffusion matrix is bounded and measurable. The concepts of entropy sub- and supersolution of the Cauchy problem are introduced, so that the entropy solution of this problem, understood in the sense of Chen–Perthame, is both an entropy sub- and supersolution. It is established that the maximum of entropy subsolutions of the Cauchy problem is also an entropy subsolution of this problem. This result is used to prove the existence of the largest entropy subsolution (and the smallest entropy supersolution). It is also shown that the largest entropy subsolution and the smallest entropy supersolution are also entropy solutions.

**Keywords**: nonlinear degenerate parabolic equations, Cauchy problem, entropy solutions, entropy sub- and supersolutions, maximum/minimum principle, method of doubling variables.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The work was financially supported by the Russian Science Foundation, grant № 22-21-00344.

**For citation:** E. Yu. Panov, "On the theory of entropy sub- and supersolutions of nonlinear degenerate parabolic equations," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 306–331. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331

## REFERENCES

1. S. N. Kruzhkov, "Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi" [First-order quasilinear equations with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 2, 228–255 (in Russian).
2. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, "Konservativnye kvazilineynye zakony pervogo poryadka s beskonechnoy oblast'yu zavisimosti ot nachal'nykh dannykh" [Conservative quasilinear first-order laws with an infinite domain of dependence on the initial data], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **314**, No. 1, 79–84 (in Russian).
3. E. Yu. Panov, "K teorii obobshchennykh entropiynykh sub- i super-resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka" [On the theory of generalized entropy sub- and supersolutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 2, 252–259 (in Russian).
4. E. Yu. Panov, "O naibol'shikh i naimen'shikh obobshchennykh entropiynykh resheniyakh zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka" [On the largest and smallest generalized entropy solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 5, 95–112 (in Russian).
5. E. Yu. Panov, "K teorii obobshchennykh entropiynykh resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka v klasse lokal'no summiruemykh funktsiy" [On the theory of generalized entropy

solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation in the class of locally summable functions], *Izv. RAN* [Bull. Russ. Acad. Sci.], 2002, **66**, No. 6, 91–136 (in Russian).
6. E. Yu. Panov, "K teorii entropiynykh resheniy nelineynykh vyrozhdayushchikhsya parabolicheskikh uravneniy" [On the theory of entropy solutions to nonlinear degenerate parabolic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2020, **66**, No. 2, 292–313 (in Russian).
7. B. P. Andreianov, Ph. Bénilan, and S. N. Kruzhkov, "$L^1$-theory of scalar conservation law with continuous flux function," *J. Funct. Anal.*, 2000, **171**, No. 1, 15–33.
8. B. P. Andreianov and N. Igbida, "On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems," *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 2012, **4**, No. 1-2, 3–34.
9. B. P. Andreianov and M. Maliki, "A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in $\mathbb{R}^N$," *NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2010, **17**, No. 1, 109–118.
10. J. Carrillo, "Entropy solutions for nonlinear degenerate problems," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1999, **147**, 269–361.
11. G.-Q. Chen and B. Perthame, "Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2003, **20**, 645–668.
12. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, "Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order," *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 1994, **40**, 31–54.
13. M. Maliki and H. Touré, "Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem," *J. Evol. Equ.*, 2003, **3**, No. 4, 603–622.
14. E. Yu. Panov, "On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property," *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2016, **13**, 633–659.
15. E. Yu. Panov, "To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations," *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, **43**, No. 16, 9387–9404.
16. E. Yu. Panov, "On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations," *J. Differ. Equ.*, 2021, **275**, 139–166.

E. Yu. Panov
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia
Scientific Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru