

УДК 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288

EDN: TXNZS

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

Аннотация. В данной статье рассматривается функционально-дифференциальное уравнение параболического типа на полосе с преобразованием пространственной переменной и краевыми условиями с косою производной. Используя преобразования Лапласа и Фурье, получено представление рассматриваемой задачи в виде нелинейного интегрального уравнения. Рассмотрен частный случай данного представления. Доказанные утверждения дают возможность реализовать итерационные методы получения приближенных решений нелинейных уравнений в частных производных с учетом заданных условий. Результаты показывают, что представленный метод перспективен для решения аналогичных задач.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, бифуркация, краевые условия с косою производной, преобразование Фурье, преобразование Лапласа.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко. Задача нелинейной оптики с преобразованием пространственной переменной и косою производной // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 2. С. 276–288. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>

ВВЕДЕНИЕ

В различных прикладных задачах (динамика жидкости, физика плазмы, механика твердого тела, квантовая теория поля, в оптических системах и др.) для изучения различных процессов используются математические модели, представленные в виде нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений в частных производных, функционально-дифференциальных, а также нелинейных интегральных уравнений.

Широко используются нелинейные уравнения с параметрами при изучении моделей нелинейной оптики. Проводятся теоретические и численные исследования поведения решений нелинейных уравнений с параметрами. В зависимости от параметров задачи рассматриваются вопросы устойчивости, бифуркации решений, возникновения пространственно-неоднородных структур, квазипериодических решений и др. При этом применяются различные аналитические и асимптотические подходы: теория бифуркации векторных полей, теория центральных многообразий, теория нормальных форм и др.

Математические модели нелинейной оптики, обладающие особенностями самоорганизующихся систем, представляют класс задач, описывающих динамику изменения светового поля в зависимости от параметров системы. Примером такой системы является оптическая система, состоящая

из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного внешнего контура двумерной обратной связи [1, 11], динамику которой описывает уравнение [13]:

$$\tau_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) = \mu \Delta u(x, t) + K(1 + \gamma \cos Qu(x, t - \tau)), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — фазовая модуляция световой волны в тонком слое нелинейной среды керровского типа в пределах апертуры $S \subset \mathbb{R}^2$. Уравнение (1) рассматривается с краевыми условиями на границе ∂S , а также начальными условиями при $(x, t) \in S \times [-\tau, 0]$. Здесь Δ — оператор Лапласа, $\mu > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного поля, γ ($0 < \gamma \leq 1$) — видность (контрастность) интерференционной картины, $Qu(x, t) = u(q(x), t)$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственной переменной (например, отражение, поворот).

Одной из задач, возникающих при исследовании процессов бифуркации в уравнении (1), является задача выявления решений различных типов (бегущих волн, вращающихся волн, фронтов). В частности, в работах А. В. Разгулина [12], Е. В. Григорьевой, С. А. Кащенко [16], М. А. Воронцова [22], Е. П. Белана [2, 3] для круговых областей в случае преобразования поворота пространственных аргументов показано появление в результате бифуркации Андронова—Хопфа вращающихся волн. А. Б. Муравник [9] исследует сингулярные уравнения, содержащие оператор Бесселя и оператор обобщенного сдвига, которые являются не только дифференциально-разностными, но и интегро-дифференциальными. В работе Е. П. Кубышкина и В. А. Куликова [8] изучаются бифуркации автоколебательных решений в круге для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором поворота пространственного аргумента и временным запаздыванием, динамика и устойчивость которых определяются параметрами начально-краевой задачи. Дано геометрическое представление области однородных состояний равновесия.

В работах авторов [5, 6, 17–19] показано существование на круге, кольце и окружности периодических по времени решений, описана асимптотика этих решений.

В статье исследуется задача (1) в случае $\tau_1 = 1$, $\tau = 0$ с оператором отражения Q , который обладает свойством $Q^2 = I$ для бесконечной полосы и краевыми условиями с косой производной.

Задача с косой производной для уравнения Лапласа исследовалась методом интегральных преобразований в работах П. А. Крутицкого, А. И. Сбигнева, А. В. Чикилева [7, 20]. Начально-краевая задача без преобразования пространственных переменных с косой производной для кольца изучалась в работах А. В. Разгулина и соавторов [14, 15].

Для асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной краевой задачи для случая нелинейных граничных условий в работе Г. А. Несененко использовано интегральное представление с функцией Грина [10].

В работе проводится анализ существования, формы и устойчивости решений (1), бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений, т. е. решений $u(x, t) = w$, определяемых из уравнения $w = K(1 + \gamma \cos w)$, с краевыми условиями, содержащими косую производную. Указанный анализ предлагается сводить к исследованию эквивалентного нелинейного интегрального уравнения, которое представляет самостоятельный интерес. Нелинейные интегральные уравнения в дальнейшем могут использоваться для построения итерационных схем получения приближённых асимптотических решений исходной задачи.

1. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С ОПЕРАЦИЕЙ ОТРАЖЕНИЯ

Рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного функционально-дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с преобразованием отражения по переменной $x \in \mathbb{R}$. В отличие от наиболее часто рассматриваемых условий Дирихле и Неймана, рассмотрим условие с косой производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad |y| \leq l, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=-l} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=l} = 0, \quad (1.3)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (1.4)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$ — фазовая модуляция световой волны в тонком слое нелинейной среды керровского типа в пределах полосы $x \in \mathbb{R}$, $|y| \leq l$, Δ — оператор Лапласа, $D > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного поля, γ ($0 < \gamma \leq 1$) — видность (контрастность) интерференционной картины, $Qu(x, y, t) = u(q(x), y, t)$, $q(x) = -x$ — преобразование отражения переменной x .

Граничные условия (1.3) с косой производной определяют производные по направлению, которое образуют с внешними нормальными углы $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Представляет интерес асимптотическая форма и анализ устойчивости решений, бифурцирующих из пространственно-однородного решения (1.2) $u(x, y, t) = \hat{w} = \text{const}$, определяемого равенством

$$w = K(1 + \gamma \cos w).$$

Фиксируем гладкую ветвь $\hat{w} = \hat{w}(K)$, $1 + K\gamma \sin \hat{w}(K) \neq 0$, и выполняем замену $u = \hat{w} + v$, где $v = v(x, y, t)$ — новая неизвестная функция, которую по-прежнему будем обозначать через $u(x, y, t)$. Приходим к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = N(Qu) = g, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |y| \leq l, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \text{tg } \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} = 0, \quad (1.6)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (1.7)$$

где $L = D\Delta - I + \Lambda Q$, $N(Qu) = K(1 + \gamma \cos Qu) - \Lambda Qu = \Omega(Qu)^2 - \frac{\Lambda}{6}(Qu)^3 + \dots$, $Qu(x, y, t) = u(-x, y, t)$, $Q^2 = I$. Через $g(x, y, t)$ обозначен нелинейный оператор $N(Qu)$ как функция, зависящая от переменных (x, y, t) . Уравнение (1.5) является неоднородным. Представим задачу (1.5)–(1.7) в виде нелинейного интегрального уравнения. Будем использовать преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}$ и преобразование Лапласа по переменной $t > 0$. Обозначим

$$U(\omega, y, t) = (\mathcal{F}u)(\omega, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) \exp[i\omega x] dx,$$

$$U(\omega, y, p) = (\mathcal{L}\mathcal{F}u)(\omega, y, p) = \int_0^{\infty} U(\omega, y, t) \exp[-pt] dt.$$

Используя свойства преобразования Фурье

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right\} (\omega, y, t) = (-i\omega)U(\omega, y, t), \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \right\} (\omega, y, t) = (-i\omega)^2 U(\omega, y, t)$$

и преобразования Лапласа

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right\} (x, y, p) = pU(x, y, p) - u(x, y, 0) = p(x, y, p) - u_0(x, y),$$

мы видим, что задача (1.5)–(1.7) в образах Фурье–Лапласа имеет вид функционально-дифференциального уравнения второго порядка с оператором отражения $\{Q : QU(\omega, y, p) = U(-\omega, y, p)\}$:

$$\frac{\partial^2 U(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] U(\omega, y, p) - \frac{\Lambda}{D} U(-\omega, y, p) = G(\omega, y, p) + U_0(\omega, y), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial U(\omega, \pm l, p)}{\partial y} + i\omega \text{tg } \alpha U(\omega, \pm l, p) = 0. \quad (1.9)$$

Вводя обозначение $V(\omega, y, p) = U(-\omega, y, p)$ ($V = QU$), приводим однородное уравнение (1.8) к системе уравнений, не содержащих явно оператор Q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] U(\omega, y, p) + \frac{\Lambda}{D} V(\omega, y, p) &= 0, \\ \frac{\partial^2 V(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] V(\omega, y, p) + \frac{\Lambda}{D} U(\omega, y, p) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решения определяются через корни характеристического уравнения системы (1.10)

$$\lambda^2 - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] = \pm \frac{\Lambda}{D},$$

или, при соответствующем выборе ветви корня,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\omega, p) &= - \left(\omega^2 + \frac{1+p+\Lambda}{D} \right)^{1/2}, & \lambda_2(\omega, p) &= - \left(\omega^2 + \frac{1+p-\Lambda}{D} \right)^{1/2}, \\ \lambda_3(\omega, p) &= \left(\omega^2 + \frac{1+p+\Lambda}{D} \right)^{1/2}, & \lambda_4(\omega, p) &= \left(\omega^2 + \frac{1+p-\Lambda}{D} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Утверждение 1.1. Решения системы (1.10) представимы в виде

$$\begin{aligned} U(\omega, y, p) &= A_1(\omega, p) \exp[\lambda_1(\omega, p)y] + A_2(\omega, p) \exp[\lambda_2(\omega, p)y] + \\ &+ A_3(\omega, p) \exp[\lambda_3(\omega, p)y] + A_4(\omega, p) \exp[\lambda_4(\omega, p)y] = \sum_{s=1}^4 A_s(\omega, p) \exp[\lambda_s(\omega, p)y], \\ V(\omega, y, p) &= -A_1(\omega, p) \exp[\lambda_1(\omega, p)y] + A_2(\omega, p) \exp[\lambda_2(\omega, p)y] - \\ &- A_3(\omega, p) \exp[\lambda_3(\omega, p)y] + A_4(\omega, p) \exp[\lambda_4(\omega, p)y] = \sum_{s=1}^4 (-1)^s A_s(\omega, p) \exp[\lambda_s(\omega, p)y]. \end{aligned}$$

Замечание. Полученное представление далее в работе не используется. Далее получим зависимость только от двух коэффициентов.

2. СВЕДЕНИЕ К НЕЛИНЕЙНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Применим метод разделения переменных к решению краевой задачи (1.8), (1.9).

Лемма 2.1. Решение $U(\omega, y, p)$ представимо в виде разложения по собственным функциям краевой задачи по переменной y :

$$\begin{aligned} U(\omega, y, p) &= \frac{1}{2} A_0(\omega, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k(\omega, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y + B_k(\omega, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ G(\omega, y, p) &= \frac{1}{2} C_0(\omega, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k(\omega, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y + D_k(\omega, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ U_0(\omega, y) &= \frac{1}{2} A_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{0k}(\omega) \cos \frac{k\pi}{2l} y + B_{0k}(\omega) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$A_k(\omega, p) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l U(\omega, y, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y dy, \quad B_k(\omega, p) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l U(\omega, y, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y dy, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

Аналогично выписываются коэффициенты разложения для $G(\omega, y, p)$ и $U_0(\omega, y)$. В исходных переменных разложение (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ g(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ u_0(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{0k}(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Исходные коэффициенты и их изображения Фурье и Лапласа связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}a_k(x, t))(\omega, p), & B_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}b_k(x, t))(\omega, p), \\ C_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}c_k(x, t))(\omega, p), & D_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}d_k(x, t))(\omega, p), \\ A_k(x, p) &= (\mathcal{L}a_k(x, t))(x, p), & A_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}a_k(x, t))(\omega, t), \\ B_k(x, p) &= (\mathcal{L}b_k(x, t))(x, p), & B_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}b_k(x, t))(\omega, t), \\ C_k(x, p) &= (\mathcal{L}c_k(x, t))(x, p), & C_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}c_k(x, t))(\omega, t), \\ D_k(x, p) &= (\mathcal{L}d_k(x, t))(x, p), & D_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}d_k(x, t))(\omega, t), \\ A_{0k}(\omega) &= (\mathcal{F}a_{0k}(x))(\omega), & B_{0k}(\omega) &= (\mathcal{F}b_{0k}(x))(\omega). \end{aligned}$$

Подставляя выражение (2.1) в краевую задачу (1.8), (1.9), находим коэффициенты разложения (2.2) и (2.3).

Теорема 2.1. *Начально-краевая задача с косой производной (1.5)–(1.7) представима в виде нелинейного интегрального уравнения*

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda(t - \tau) \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] + \operatorname{sh} \Lambda(t - \tau) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] \right) \times \\ &\times \frac{\exp[-(t - \tau)]}{2\sqrt{\pi(t - \tau)D}} \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-D \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 (t - \tau) \right] \cos \frac{k\pi}{2l} (y - \eta) \right] \times \\ &\times \left(K(1 + \gamma \cos u(\xi, \eta, \tau)) - \Lambda u(\xi, \eta, \tau) \right) d\eta d\xi d\tau + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda t \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4tD} \right] + \operatorname{sh} \Lambda t \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4tD} \right] \right) \times \\ &\times \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi tD}} \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-D \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 t \right] \cos \frac{k\pi}{2l} (y - \eta) \right] u_0(\xi, \eta) d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство. Применим метод разделения переменных: $U(\omega, y, p) = \sum_k Y_k(y) Z_k(\omega, p)$. Каждый член ряда удовлетворяет однородному уравнению (1.8) и краевому условию (1.9). Далее опустим индекс k .

Разделяя переменные, для однородного уравнения получим

$$\frac{Y_k''(y)}{Y_k(y)} = \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] - \frac{\Lambda}{D} \frac{Z_k(-\omega, p)}{Z_k(\omega, p)} = -\nu^2. \quad (2.5)$$

Из (2.5) и условия (1.9) следует

$$\begin{aligned} Y''(y) + \nu^2 Y(y) &= 0, \\ Y'(\pm l) + i\omega \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение дифференциального уравнения краевой задачи $Y(y) = a \cos \nu y + b \sin \nu y$ имеет нетривиальное решение при условии

$$2(\omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \nu^2) \sin \nu l \cos \nu l = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что $\nu_k = \frac{k\pi}{2l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$Y_k(y) = a_k \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_k \sin \frac{k\pi}{2l} y,$$

т. е. справедливо представление (2.1).

Случай $\nu = \pm \text{tg } \alpha$ рассматривается отдельно.

Для $Z_k(\omega, p)$ получим систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} Z_k(\omega, p) \left[\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right] - \frac{\Lambda}{D} Z_k(-\omega, p) &= 0, \\ -\frac{\Lambda}{D} Z_k(\omega, p) + Z_k(-\omega, p) \left[\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Второе уравнение получено в результате применения оператора Q . Система (2.8) имеет нетривиальное решение при условии

$$\left(\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right)^2 - \left(\frac{\Lambda}{D} \right)^2 = 0,$$

или $q_k(\omega, p) = \pm \Lambda$, где $q_k(\omega, p) = 1 + D \left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 \right] + p$.

Коэффициенты разложения A_k и B_k определяются из неоднородной системы уравнений, содержащих оператор отражения Q :

$$\begin{cases} q_k(\omega, p) A_k(\omega, p) - \Lambda A_k(-\omega, p) = C_k(\omega, p) + A_{0k}(\omega), \\ q_k(\omega, p) B_k(\omega, p) - \Lambda B_k(-\omega, p) = D_k(\omega, p) + B_{0k}(\omega). \end{cases}$$

Решения системы имеют вид

$$\begin{aligned} A_k(\omega, p) &= \frac{q_k(\omega, p) [C_k(\omega, p) + A_{0k}(\omega)] + \Lambda [C_k(-\omega, p) + A_{0k}(-\omega)]}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \\ B_k(\omega, p) &= \frac{q_k(\omega, p) [D_k(\omega, p) + B_{0k}(\omega)] + \Lambda [D_k(-\omega, p) + B_{0k}(-\omega)]}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \end{aligned}$$

или

$$A_k(\omega, p) = K_1(\omega, p, k) C_k(\omega, p) + K_2(\omega, p, k) C_k(-\omega, p) + K_1(\omega, p, k) A_{0k}(\omega) + K_2(\omega, p, k) A_{0k}(-\omega),$$

$$B_k(\omega, p) = K_1(\omega, p, k) D_k(\omega, p) + K_2(\omega, p, k) D_k(-\omega, p) + K_1(\omega, p, k) B_{0k}(\omega) + K_2(\omega, p, k) B_{0k}(-\omega),$$

где

$$\begin{aligned} K_1(\omega, p, k) &= \frac{q_k(\omega, p)}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \quad K_2(\omega, p, k) = \frac{\Lambda}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \\ k_j(x, t, k) &= \left(\mathcal{F}^{-1} \mathcal{L}^{-1} \{ K_j \} \right) (x, t, k), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(k_1(x - \xi, t - \tau, k) \left[c_k(\xi, \tau) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2(x - \xi, t - \tau, k) \left[c_k(-\xi, \tau) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(-\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] \right) \right] d\xi d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(k_1(x - \xi, t, k) \left[a_{0k}(\xi) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(\xi) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2(x - \xi, t, k) \left[a_{0k}(-\xi) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(-\xi) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] \right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

С помощью обратных преобразований Фурье и Лапласа определим оригиналы $\mathcal{L}^{-1}\{K_1(\omega, p, k)\}$ и $\mathcal{L}^{-1}\{K_2(\omega, p, k)\}$, используя формулы [4]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+d}{(p-a)(p-b)}\right\} &= A \exp[at] + B \exp[bt], \quad A = \frac{a+d}{a-b}, \quad B = \frac{b+d}{b-a}, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right\} &= A \exp[at] + B \exp[bt], \quad A = \frac{1}{a-b}, \quad B = \frac{1}{b-a}.\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{K_1(\omega, p, k)\} &= \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] + \Lambda - 1\right)\right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] - \Lambda - 1\right)\right], \\ \mathcal{L}^{-1}\{K_2(\omega, p, k)\} &= \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] + \Lambda - 1\right)\right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] - \Lambda - 1\right)\right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}k_1(x, t, k) &= \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi t D}} \exp\left[-\frac{x^2}{4tD}\right] \exp\left[-D\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 t\right] \operatorname{ch} \Lambda t, \\ k_2(x, t, k) &= \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi t D}} \exp\left[-\frac{x^2}{4tD}\right] \exp\left[-D\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 t\right] \operatorname{sh} \Lambda t.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Преобразуя (2.9) с учетом (2.10) и $g(x, y, t) = K(1 + \gamma \cos u(-x, y, t)) - \Lambda u(-x, y, t)$, получаем (2.4). □

3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В разделе 2 при разделении переменных получена зависимость решения $Y(y) = \exp[-i\omega \operatorname{tg} \alpha y]$. Рассмотрим данный случай.

После применения преобразования Фурье к (1.5)–(1.7) получим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial U(\omega, y, t)}{\partial t} - U(\omega, y, t) - D\left[\frac{\partial^2 U(\omega, y, t)}{\partial y^2} - \omega^2 U(\omega, y, t)\right] - \Lambda U(-\omega, y, t) = G(\omega, y, t)\tag{3.1}$$

с начальным условием

$$U(\omega, y, 0) = U_0(\omega, y)\tag{3.2}$$

и краевым условием

$$\frac{\partial U(\omega, \pm l, t)}{\partial y} = (-i\omega)(\operatorname{tg} \alpha)U(\omega, \pm l, t).\tag{3.3}$$

Представим решение однородного уравнения в виде

$$U(\omega, y, t) = A(\omega, t) \exp[-i\omega \operatorname{tg} \alpha y].\tag{3.4}$$

Решение (3.4) удовлетворяет краевому условию (3.3). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Начально-краевая задача (3.1)–(3.3) представима в виде нелинейного интегрального уравнения*

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} k_1(x - \xi, y, t) u_0(\xi, y) d\xi + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} k_2(x - \xi, t - \tau) g(\xi, y, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$g(\xi, y, \tau) = K(1 + \gamma \cos Qu(\xi, y, \tau)) - \Lambda Qu(\xi, y, \tau),$$

$$k_1(x, y, t) = \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)t]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}} \exp\left[-\frac{(x + y \operatorname{tg} \alpha)^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right],$$

$$k_2(x, t) = \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)t]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right].$$

Доказательство. Подставим (3.4) в (3.2), получим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial A(\omega, t)}{\partial t} - [1 - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)]A(\omega, t) - \Lambda QA(\omega, t) = G(\omega, y, t) \exp[i\omega \operatorname{tg} \alpha y]. \quad (3.5)$$

Соответствующее (3.5) однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial A(\omega, t)}{\partial t} = [1 - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)]A(\omega, t) + \Lambda QA(\omega, t). \quad (3.6)$$

Разделяя переменные в (3.6) в виде $A(\omega, t) = X(\omega)T(t)$, получим:

$$\frac{T'(t) - T(t)}{T(t)} = -D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \Lambda \frac{QX(\omega)}{X(\omega)} = -\lambda,$$

откуда

$$T(t) = C \exp[(1 - \lambda)t].$$

Спектральную задачу для функционального уравнения

$$(\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X(\omega) + \Lambda X(-\omega) = 0$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} (\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X(\omega) + \Lambda X_1(\omega) &= 0, \\ (\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X_1(\omega) + \Lambda X(\omega) &= 0, \end{aligned}$$

где $X_1(\omega) = X(-\omega)$. Существование нетривиального решения определяется условием

$$\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \pm \Lambda.$$

Если $\lambda = \lambda^+ = D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \Lambda$, то $X(-\omega) = -X(\omega)$, следовательно, $X(\omega)$ — произвольная нечётная функция. Если $\lambda = \lambda^- = D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \Lambda$, то $X(-\omega) = X(\omega)$, следовательно, $X(\omega)$ — произвольная чётная функция.

Тогда

$$\begin{aligned} T^+(t) &= C^+ \exp[(1 - \lambda^+)t] = C^+ \exp[(1 - \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t], \\ T^-(t) &= C^- \exp[(1 - \lambda^-)t] = C^- \exp[(1 + \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^\pm(\omega, t) = X^\pm C^\pm \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t].$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (3.1) имеет вид

$$U^\pm(\omega, y, t) = C^\pm X^\pm \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y].$$

Общее решение (3.1) получаем методом вариации произвольной постоянной:

$$U^\pm(\omega, y, t) = C(t)X^\pm \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y]. \quad (3.7)$$

Одно из частных решений

$$\tilde{U}^\pm(\omega, y, t) = \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau. \quad (3.8)$$

Таким образом, с учетом формул (3.7), (3.8), соответственно, для общего решения получаем

$$\begin{aligned} U(\omega, y, t) &= U^\pm(\omega, y, t) + \tilde{U}^\pm(\omega, y, t) = \\ &= C^\pm X^\pm(\omega) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] + \\ &+ \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Из начального условия (3.2)

$$U(\omega, y, 0) = C^\pm X^\pm(\omega) \exp[-i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] = U_0(\omega, y).$$

Итак,

$$\begin{aligned} U(\omega, y, t) &= U_0(\omega, y) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t] + \\ &+ \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau = \\ &= K_1(\omega, t)U_0(\omega, y) + \int_0^t K_2(\omega, t - \tau)G(\omega, y, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$\begin{aligned} k_1(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t] \exp[-i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] \exp[-i\omega x] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}t} \exp\left[-\frac{(x + y \operatorname{tg} \alpha)^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right] \exp[(1 \mp \Lambda)t], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x, t - \tau) &= \exp[(1 \mp \Lambda)(t - \tau)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp[-D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(t - \tau)] \exp[-i\omega x] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}(t - \tau)} \exp[(1 \mp \Lambda)(t - \tau)] \exp\left[-\frac{x^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(t - \tau)}\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место представление (3.1). \square

Замечание. Представление (2.4) задачи (1.5)–(1.7) (теорема 2.1) в виде нелинейного интегрального уравнения (не содержащего оператор Q) позволяет строить итерационный процесс вида $u^{n+1} = Au^n + Bu_0$, $n = 0, 1, \dots$. Считая $u^0 = 0$, получаем $u^1 = Bu_0$, что позволяет видеть структуру решения (первое итерационное слагаемое в (2.4)). На рис. 1 представлено $u^1(x, y, t = 1)$ при фиксированных значениях параметров и начальных условиях $u_0(x, y) = \sin \frac{\pi}{2l}y \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$ или $u_0(x, y) = \cos \frac{\pi}{2l}y \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$. Аналогичное рассуждение справедливо для частного случая теоремы 3.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе начально-краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения в полосе с оператором отражения по переменной $x \in \mathbb{R}$ и краевыми условиями с косой производной на границах полосы с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа сводится к нелинейному интегральному уравнению. При разделении переменных получены спектральная задача по переменной y ($|y| < l$) с условиями, соответствующими косой производной, и зависимая задача по переменной $x \in \mathbb{R}$, содержащая оператор инволюции Q ($Q^2 = I$). Структура соответствующих нелинейных уравнений отражает структуру исходной задачи. Ядра уравнений определяются через функции Грина соответствующей линеаризованной задачи.

Полученные нелинейные интегральные уравнения в дальнейшем будут использоваться для итерационных алгоритмов построения приближенных асимптотических решений исходной задачи. Частным случаем является задача с условиями Неймана.

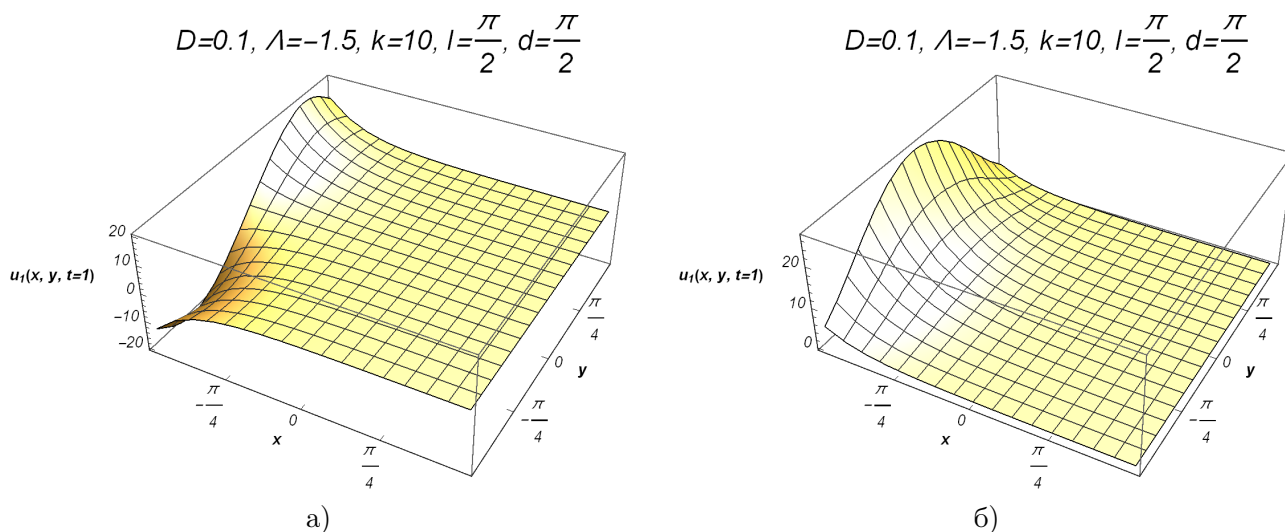


Рис. 1. Приближенное представление первого итерационного слагаемого в (2.4) при $t = 1$: а) для $u_0(x, y) = \sin \frac{\pi}{2l} y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$; б) для $u_0(x, y) = \cos \frac{\pi}{2l} y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$.

FIG. 1. Approximate representation of the first iteration term in (2.4) for $t = 1$: а) for $u_0(x, y) = \sin \frac{\pi}{2l} y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$; б) for $u_0(x, y) = \cos \frac{\pi}{2l} y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей// В сб.: «Новые принципы оптической обработки информации». — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
2. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Дифф. уравн. — 2004. — 40, № 5. — С. 645–654.
3. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной// Журн. мат. физ., анализ, геом. — 2005. — 1, № 1. — С. 3–34.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. С прил. табл., сост. Р. Гершелем. — М.: Наука, 1971.
5. Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции// Динам. сист. — 2019. — 9, № 4. — С. 390–409.
6. Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Динамика решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа// Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. — 2022. — 30, № 2. — С. 132–151.
7. Крутицкий П. А., Чикилев А. В. Метод углового потенциала в краевых задачах физики замагниченных полупроводников// Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2003. — 072.
8. Кубышкин Е. П., Куликов В. А. Бифуркации автоколебательных решений нелинейного параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2021. — 61, № 3. — С. 428–449.
9. Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 52. — С. 3–141.
10. Несененко Г. А. Метод граничных интегральных уравнений в решениях двумерных сингулярно возмущенных задач нестационарной теплопроводности с нелинейными граничными условиями// Дифф. уравн. — 2000. — 36, № 9. — С. 1160–1171.
11. Разгулин А. В. Нелинейные модели оптической синергетики. — М.: МАКС Пресс, 2008.

12. *Разгулин А. В., Романенко Т. Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2013. — 53, № 11. — С. 1804–1821.
13. *Achmanov S. A., Vorontzov M. A., Ivanov V. Yu., Larichev A. V., Zeleznykh N. I.* Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics — generation and interaction of spatiotemporal structures// J. Opt. Soc. Am. B. Opt. Phys. — 1992. — 9, № 1. — С. 78–90.
14. *Budzinskiy S. S., Razgulin A. V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under O(2) Hopf bifurcation// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2017. — 49. — С. 17–29.
15. *Budzinskiy S. S., Razgulin A. V.* Pulsating and rotating spirals in a delayed feedback diffractive nonlinear optical system// Internat. J. Bifur. Chaos. Appl. Sci. Engrg. — 2021. — 31, № 1. — 2130002.
16. *Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback// Phys. D. — 1999. — 125. — С. 123–141.
17. *Kornuta A. A., Lukianenko V. A.* Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 5. — С. 911–930.
18. *Kornuta A. A., Lukianenko V. A.* Stability of structures and asymptotics of nonlinear parabolic type equations solutions with transformation of arguments// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 14. — С. 3468–3485.
19. *Kornuta A. A., Lukianenko V. A.* Scenarios of the behavior of solutions of a nonlinear functional-differential equation of parabolic type with transformation of arguments// В сб.: «Int. Sci. Conf. “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis”». — Rostov-on-Don, 2021. — С. 29.
20. *Krutitskii P. A., Sgibnev A. I.* Integral-equation method in the mixed oblique derivative problem for harmonic functions outside cuts on the plane// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2008. — 151. — С. 2710–2725.
21. *Kubyshekin E. P., Kulikov V. A.* Bifurcations of self-oscillatory solutions to a nonlinear parabolic equation with a rotating spatial argument and time delay// Comput. Math. Math. Phys. — 2021. — 61, № 3. — С. 403–423.
22. *Vorontzov M. A., Razgulin A. V.* Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions// Photonics and Optoelectronics. — 1993. — 1, No 2. — С. 103–111.

А. А. Корнута

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

E-mail: korn_57@mail.ru

В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

E-mail: art-inf@yandex.ru

UDC 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288

EDN: TXNZS

Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative

A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University

Abstract. In this paper, we consider a functional differential equation of parabolic type on a strip with a transformation of a spatial variable and boundary conditions with an oblique derivative. Using the Laplace and Fourier transforms, we obtain a representation of the problem under consideration in the form of a nonlinear integral equation. A special case of this representation is considered. The proved statements make it possible to implement iterative methods for obtaining approximate solutions of nonlinear partial differential equations taking into account the given conditions. The results show that the presented method is promising for solving similar problems.

Keywords: functional differential equations, bifurcation, boundary conditions with an oblique derivative, Fourier transform, Laplace transform.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko, “Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 2, 276–288. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>

REFERENCES

1. S. A. Akhmanov, A. M. Vorontsov, and V. Yu. Ivanov, “Generatsiya struktur v opticheskikh sistemakh s dvumernoy obratnoy svyaz’yu: na puti k sozdaniyu nelineyno-opticheskikh analogov neyronnykh setey” [Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: On the way to the creation of nonlinear optical analogs of neural network], In: *Novye printsipy opticheskoy obrabotki informatsii* [New Physical Principles of Optical Information Processing], Nauka, Moscow, 1990, pp. 263–325 (in Russian).
2. E. P. Belan, “O vzaimodeystvii begushchikh voln v parabolicheskom funktsional’no-differentsial’nom uravnenii” [On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2004, 40, No. 5, 645–654 (in Russian).
3. E. P. Belan, “O dinamike begushchikh voln v parabolicheskom uravnenii s preobrazovaniem sdviga prostranstvennoy peremennoy” [Travelling waves dynamics in a nonlinear parabolic equation with a shifted spatial argument], *Zhurn. mat. fiz., anal., geom.* [J. Math. Phys. Anal. Geom.], 2005, 1, No. 1, 3–34 (in Russian).
4. G. Doetsch, *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasya i Z-preobrazovaniya* [A Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and Z-transform], Nauka, Moscow, 1971 (Russian translation).
5. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Funktsional’no-differentsial’nye uravneniya parabolicheskogo tipa s operatorom involyutsii” [Functional differential equations of parabolic type with an involution operator], *Dinam. sist.* [Dyn. Sys.], 2019, 9, No. 4, 390–409 (in Russian).
6. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Dinamika resheniy nelineynykh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy parabolicheskogo tipa” [Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equations of



- parabolic type], *Izv. vuzov. Prikl. neline. dinam.* [Bull. Higher Edu. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2022, **30**, No. 2, 132–151 (in Russian).
7. P. A. Krutitskiy and A. V. Chikilev, “Metod uglovogo potentsiala v kraevykh zadachakh fiziki zamagnichenykh poluprovodnikov” [Angular potential method in boundary-value problems of physics of magnetized semiconductors], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints of Keldysh Inst. Appl. Math.], 2003, **072** (in Russian).
 8. E. P. Kubyshkin and V. A. Kulikov, “Bifurkatsii avtokolebatel’nykh resheniy nelineynogo parabolicheskogo uravneniya s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniem” [Bifurcations of self-oscillating solutions of a nonlinear parabolic equation with rotation of the spatial argument and delay], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 2021, **61**, No. 3, 428–449 (in Russian).
 9. A. B. Muravnik, “Funktional’no-differentsial’nye parabolicheskie uravneniya: integral’nye predstavleniya i kachestvennye svoystva resheniy zadachi Koshi” [Functional differential parabolic equations: Integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–141 (in Russian).
 10. G. A. Nesenenko, “Metod granichnykh integral’nykh uravneniy v resheniyakh dvumernykh singulyarno voz-mushchennykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s nelineynymi granichnymi usloviyami” [Method of boundary integral equations in solutions of two-dimensional singularly perturbed problems of nonstationary heat conduction with nonlinear boundary conditions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 9, 1160–1171 (in Russian).
 11. A. V. Razgulin, *Nelineynye modeli opticheskoy sinergetiki* [Nonlinear Models of Optical Synergetics], MAKS Press, Moscow, 2008 (in Russian).
 12. A. V. Razgulin and T. E. Romanenko, “Vrashchayushchiesya volny v parabolicheskom funkcional’no-differentsial’nom uravnenii s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniem” [Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2013, **53**, No. 11, 1804–1821 (in Russian).
 13. S. A. Achmanov, M. A. Vorontzov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zeleznykh, “Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics — generation and interaction of spatiotemporal structures,” *J. Opt. Soc. Am. B. Opt. Phys.*, 1992, **9**, No. 1, 78–90.
 14. S. S. Budzinskiy and A. V. Razgulin, “Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under $O(2)$ Hopf bifurcation,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, **49**, 17–29.
 15. S. S. Budzinskiy and A. V. Razgulin, “Pulsating and rotating spirals in a delayed feedback diffractive nonlinear optical system,” *Internat. J. Bifur. Chaos. Appl. Sci. Engrg.*, 2021, **31**, No. 1, 2130002.
 16. E. V. Grigorieva, H. Haken, S. A. Kashchenko, and A. Pelster, “Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback,” *Phys. D*, 1999, **125**, 123–141.
 17. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 911–930.
 18. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Stability of structures and asymptotics of nonlinear parabolic type equations solutions with transformation of arguments,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 14, 3468–3485.
 19. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Scenarios of the behavior of solutions of a nonlinear functional-differential equation of parabolic type with transformation of arguments,” In: *Int. Sci. Conf. “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis”*, Rostov-on-Don, 2021, pp. 29.
 20. P. A. Krutitskii and A. I. Sgibnev, “Integral-equation method in the mixed oblique derivative problem for harmonic functions outside cuts on the plane,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2008, **151**, 2710–2725.
 21. E. P. Kubyshkin and V. A. Kulikov, “Bifurcations of self-oscillatory solutions to a nonlinear parabolic equation with a rotating spatial argument and time delay,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, **61**, No. 3, 403–423.
 22. M. A. Vorontzov and A. V. Razgulin, “Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions,” *Photonics and Optoelectronics*, 1993, **1**, No 2, 103–111.

A. A. Kornuta
 V. I. Vernadsky Crimean Federal University
 E-mail: korn_57@mail.ru

V. A. Lukianenko
 V. I. Vernadsky Crimean Federal University
 E-mail: art-inf@yandex.ru