

УДК 517.926

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275

EDN: APCXKP

СЕМЕЙСТВО КУСОЧНО-ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

С. А. КАЩЕНКО, Д. С. КОСТЕРИН, С. Д. ГЛЫЗИН

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

Аннотация. В работе рассматривается пространственно-распределенное уравнение с периодическим краевым условием и условием нулевого по пространственной переменной интегрального среднего. Рассматриваемая краевая задача имеет семейство кусочно-постоянных по пространственной переменной решений с одной точкой разрыва. Определены условия устойчивости таких решений. Показано существование кусочно-постоянных решений, имеющих более одной точки разрыва. Представлен алгоритм вычисления решений краевой задачи численными методами. Выполнен численный анализ динамики краевой задачи.

Ключевые слова: эволюционные пространственно распределенные уравнения, кусочно-постоянные решения, устойчивость, кластерная синхронизация.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

Для цитирования: С. А. Кащенко, Д. С. Костерин, С. Д. Глызин. Семейство кусочно-гладких решений одного класса пространственно-распределенных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 263–275. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим пространственно-распределенное уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi - \beta(\xi^2 - M(\xi^2)) - (1 - \beta)(\xi^3 - M(\xi^3)), \quad (1.1)$$

где $\beta \in [0, 1]$, а $\xi = \xi(t, x)$ при каждом $t \geq 0$ представляет собой кусочно-гладкую по пространственной переменной x функцию

$$M(\xi) = \int_0^1 \xi(t, x) dx.$$

Уравнение (1.1) рассматривается с периодическим краевым условием

$$\xi(t, x + 1) = \xi(t, x) \quad (1.2)$$

и дополнительным условием нулевого по пространственной переменной среднего

$$M(\xi) = 0. \quad (1.3)$$

Коротко опишем модели, при анализе которых появляется краевая задача (1.1)–(1.3). В первую очередь отметим работы, в которых исследуется динамика уравнений и систем уравнений с большим коэффициентом запаздывания из оптоэлектроники [5, 7–9]. При изучении локальной динамики этих моделей характеристический квазиполином системы, линеаризованной на ее состоянии равновесия, имеет бесконечно много корней, которые стремятся к мнимой оси при увеличении коэффициента запаздывания. Тем самым, реализуется критический случай бесконечной размерности в задаче об устойчивости состояния равновесия. В [5] был разработан асимптотический алгоритм построения системы первого приближения для решений таких моделей. Этот алгоритм основывается на переходе к уравнениям в частных производных. Как оказывается, расположение корней характеристического квазиполинома определяет и граничные условия для построенных уравнений в частных производных. Такими граничными условиями являются как периодические, так и антипериодические граничные условия, а также периодические и антипериодические краевые условия с дополнительным условием равенства нулю среднего значения решений уравнения в частных производных. Нелокальная динамика краевой задачи (1.1)–(1.3) определяет поведение решений исходной динамической системы с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия.

Источником такого типа граничных условий являются также сингулярно возмущенные задачи параболического типа [2, 3]. В них уравнение первого приближения содержит произвольный параметр в качестве множителя при старшей пространственной производной. Поэтому возникает задача исследования в том числе уравнений без производных по пространству, но с граничными условиями, включающими условие равенства нулю среднего значения решений и с нелинейными слагаемыми в уравнении первого приближения, которые получаются путем усреднения по пространственной переменной.

Также отметим, что уравнения с комплексными переменными аналогичного задаче (1.1)–(1.2) вида возникают при исследовании полностью связанных систем генераторов (см. [1, 4, 6]), при этом в дополнение к ним может понадобиться условие (1.3) нулевого среднего. В случае стремления числа взаимодействующих генераторов к бесконечности получается непрерывная модель такого же типа, что и краевая задача (1.1)–(1.3).

В работе исследуется динамика решений краевой задачи (1.1)–(1.3) при различных значениях параметра β . Доказано существование семейства кусочно-постоянных решений краевой задачи. Рассматривается вопрос о так называемой α -устойчивости этих решений. Для иллюстрации результатов аналитического исследования задачи (1.1)–(1.3) ее решения строятся численными методами.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ РАЗРЫВА

В данном разделе статьи обратимся к проблеме существования кусочно-постоянных решений краевой задачи (1.1)–(1.3). В связи с этим отметим, что для поиска таких решений достаточно выполнения условий (1.1)–(1.2). Свойство (1.3) получается, если проинтегрировать от 0 до 1 по пространственной переменной уравнение (1.1), учесть условие (1.2) и равенство нулю производной по времени.

Рассмотрим случай $\beta = 1$, при котором уравнение (1.1) содержит только квадратичную нелинейность. Покажем, что при выполнении этого условия существует однопараметрическое семейство кусочно-постоянных решений.

Представим искомую функцию в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x < \alpha, \\ b, & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

где a, b, α — некоторые ненулевые постоянные, причем $a \neq b$ и $\alpha \in (0, 1)$. Для функции (2.1) полагаем выполненным условие (1.2) периодичности по пространственной переменной.

Подставим (2.1) в (1.1), тогда на интервале $0 \leq x < \alpha$ получаем равенство

$$a - (a^2 - (\alpha a^2 + (1 - \alpha)b^2)) = 0,$$

а на интервале $\alpha \leq x < 1$ имеем

$$b - (b^2 - (\alpha a^2 + (1 - \alpha)b^2)) = 0.$$

Вычитая равенства друг из друга, получаем $(a - b)(1 - a - b) = 0$. Учитывая, что $a \neq b$, имеем $a + b = 1$. Если теперь сложить первое из равенств, умноженное на α , со вторым, умноженным на $1 - \alpha$, то получим соотношение $\alpha a + b(1 - \alpha) = 0$, которое представляет собой условие (1.3) нулевого среднего для решения (2.1). Тем самым, при фиксированном α можно определить числа a и b в формуле (2.1)

$$a = \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha}, \quad b = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}.$$

Заметим, что при $\alpha = \frac{1}{2}$ функции вида (2.1) не существует.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Краевая задача (1.1)–(1.3) при $\beta = 1$ имеет семейство зависящих от параметра $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$, кусочно-постоянных по пространственной переменной x решений вида*

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha}, & 0 \leq x < \alpha, \\ -\frac{\alpha}{1 - 2\alpha}, & \alpha \leq x < 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи $\beta = 0$ и $\beta \in (0, 1)$. В связи с этим можно сформулировать следующие два утверждения.

Лемма 2.2. *Краевая задача (1.1)–(1.3) при $\beta = 0$ имеет два семейства зависящих от параметра $\alpha \in (0, 1)$ кусочно-постоянных по пространственной переменной x решений вида*

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \pm \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - 3\alpha + 3\alpha^2}}, & 0 \leq x < \alpha, \\ \mp \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 3\alpha + 3\alpha^2}}, & \alpha \leq x < 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Лемма 2.3. *Краевая задача (1.1)–(1.3) при $\beta \neq 0$ и $\beta \neq 1$ имеет два семейства кусочно-постоянных по пространственной переменной x решений вида*

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a(\alpha), & 0 \leq x < \alpha, \\ b(\alpha), & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= \frac{-\beta(1 - \alpha)(1 - 2\alpha) \pm (1 - \alpha)D}{2(1 - \beta)(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)}, \\ b(\alpha) &= \frac{\alpha\beta(1 - 2\alpha) \mp \alpha D}{2(1 - \beta)(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)}, \\ D &= \sqrt{\beta^2(1 - 2\alpha)^2 + 4(1 - \beta)(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Результаты данной части работы могут быть обобщены, если промежутки постоянства функции (2.1) заменить произвольным измеримым подмножеством отрезка $[0, 1]$. Очевидно, что результаты лемм 2.1–2.3 не зависят от вида множеств, на которых функция принимает значения a и b , а зависят только от меры этих множеств. Если положить

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a, & x \in E, \\ b, & x \in [0, 1] \setminus E, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $E \subset [0, 1]$, $\text{mes } E = \alpha$, то формулировки лемм 2.1–2.3 сохранятся в прежнем виде. Вместе с тем, представление в форме (2.1) более наглядно, кроме того, для решений такого вида можно ввести свойство α -устойчивости и исследовать построенные решения на наличие или отсутствие этого свойства.

3. α -УСТОЙЧИВОСТЬ КУСОЧНО ПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ

Определим понятие α -устойчивого кусочно-постоянного решения.

Пусть $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k+1} = 1$ и

$$\xi_*(x) = \{\rho_j \text{ при } x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}), j = 0, \dots, k\}$$

является кусочно-постоянным решением краевой задачи (1.1). Рассмотрим решения этой краевой задачи с «близкими» к $\xi_*(x)$ начальными условиями

$$\xi(t_0, x) = \{\rho_j + \xi_j(x) \text{ при } x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}), j = 0, \dots, k\}.$$

Назовем решение $\xi_*(x)$ краевой задачи (1.1) α -устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что из условия $\max_x \sum_{j=1}^k |\xi_j(x)| < \delta$ следует неравенство $\max_x |\xi(t, x) - \xi_*(x)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Если при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} \max_x |\xi(t, x) - \xi_*(x)| = 0$, то решение $\xi_*(x)$ будем называть *асимптотически α -устойчивым*.

Из указанных определений вытекает, что вопрос об α -устойчивости решения на отрезке $[0, 1]$ можно условно разбить на изучение асимптотической устойчивости отдельно на каждом из промежутков (α_j, α_{j+1}) . Кроме того, справедлива теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Аналогично можно ввести понятие α -неустойчивости. Понятно, что из α -неустойчивости следует неустойчивость решения.

Рассмотрим устойчивость представленных в леммах 2.1–2.3 кусочно-постоянных решений. В случае квадратичной нелинейности ($\beta = 1$) выполнено следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для любого $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$, решение вида (2.2) краевой задачи (1.1)–(1.3) является неустойчивым.

Доказательство. Представим решение краевой задачи в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} + \xi_1, & 0 \leq x < \alpha, \\ -\frac{\alpha}{1-2\alpha} + \xi_2, & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\xi_i = \xi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx + \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = 0. \quad (3.2)$$

Тем самым функция (3.1) удовлетворяет условию (1.3).

Подставляя (3.1) в уравнение (1.1) и отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= -\frac{1}{1-2\alpha} \xi_1 + \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha} \int_0^\alpha \xi_1 dx - \frac{2\alpha}{1-2\alpha} \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1}{1-2\alpha} \xi_2 + \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha} \int_0^\alpha \xi_1 dx - \frac{2\alpha}{1-2\alpha} \int_\alpha^1 \xi_2 dx. \end{aligned}$$

Используя условие (3.2), получаем два независимых уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= -\frac{1}{1-2\alpha} \xi_1 + \frac{2}{1-2\alpha} \int_0^\alpha \xi_1 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1}{1-2\alpha} \xi_2 - \frac{2}{1-2\alpha} \int_\alpha^1 \xi_2 dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

В системе (3.3) проинтегрируем первое уравнение по x от 0 до α , а второе от α до 1. Получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = - \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = - \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx,$$

решения которых имеют вид

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = A_0 e^{-t}, \quad \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = B_0 e^{-t}.$$

Подставляя найденные интегралы в (3.3), получим два линейных неоднородных уравнения, решения которых

$$\xi_1(t, x) = A(x) e^{-\frac{t}{1-2\alpha}} + \frac{A_0}{\alpha} e^{-t}, \quad \xi_2(t, x) = B(x) e^{\frac{t}{1-2\alpha}} + \frac{B_0}{1-\alpha} e^{-t}$$

не стремятся к нулю одновременно ни при каких $\alpha \neq \frac{1}{2}$. □

Рассмотрим теперь случай кубической нелинейности ($\beta = 0$).

Теорема 3.2. Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$. Тогда решение вида (2.3) краевой задачи (1.1)–(1.3) асимптотически α -устойчиво.

Доказательство. Представим решение краевой задачи в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \pm \frac{1-\alpha}{\sqrt{1-3\alpha+3\alpha^2}} + \xi_1, & 0 \leq x < \alpha, \\ \mp \frac{1-\alpha}{\sqrt{1-3\alpha+3\alpha^2}} + \xi_2, & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\xi_i = \xi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx + \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = 0. \tag{3.5}$$

Подставим (3.4) в уравнение (1.1) и отбросим слагаемые более высокого порядка малости. Получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= \frac{-2+3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_1 + \frac{3(1-\alpha)^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_0^\alpha \xi_1 dx + \frac{3\alpha^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1-3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_2 + \frac{3(1-\alpha)^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_0^\alpha \xi_1 dx + \frac{3\alpha^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \end{aligned}$$

тогда из условия (3.5) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= \frac{-2+3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_1 + \frac{3-6\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_0^\alpha \xi_1 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1-3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_2 + \frac{6\alpha-3}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_\alpha^1 \xi_2 dx.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Как и в предыдущем случае, проинтегрируем первое уравнение системы (3.6) по x от 0 до α , а второе от α до 1. Получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = -2 \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = -2 \int_\alpha^1 \xi_2 dx,$$

решения которых равны

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = A_0 e^{-2t}, \quad \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = B_0 e^{-2t}.$$

Подставив найденные интегралы в систему (3.6), получим два линейных неоднородных уравнения, решения которых

$$\xi_1(t, x) = A(x) e^{\frac{-2+3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} t} + \frac{A_0}{\alpha} e^{-2t}, \quad \xi_2(t, x) = B(x) e^{\frac{1-3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} t} + \frac{B_0}{1-\alpha} e^{-2t}$$

стремятся к нулю одновременно при $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$. При $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha = \frac{2}{3}$ из этих же формул следует α -устойчивость по Ляпунову ступенчатого решения. \square

В случае произвольного β аналогично предыдущим случаям построим линеаризованную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Представим решение задачи в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a(\alpha) + \xi_1, & 0 \leq x < \alpha, \\ b(\alpha) + \xi_2, & \alpha \leq x < 1, \end{cases}\tag{3.7}$$

где $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ определены по формуле (2.5), $\xi_j = \xi_j(t, x)$, $j = 1, 2$, а ξ_j удовлетворяют условию

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx + \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = 0.\tag{3.8}$$

Подставив (3.7) в (1.1) и отбросив слагаемые более высокого порядка малости, приходим к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= a_1(\alpha) \xi_1 + b_1(\alpha) \int_0^\alpha \xi_1 dx + b_2(\alpha) \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= a_2(\alpha) \xi_1 + b_1(\alpha) \int_0^\alpha \xi_1 dx + b_2(\alpha) \int_\alpha^1 \xi_2 dx,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_1(\alpha) &= 1 - 2\beta a(\alpha) - 3(1-\beta)a^2(\alpha), & a_2(\alpha) &= 1 - 2\beta b(\alpha) - 3(1-\beta)b^2(\alpha), \\ b_1(\alpha) &= 2\beta a(\alpha) + 3(1-\beta)a^2(\alpha), & b_2(\alpha) &= 2\beta b(\alpha) + 3(1-\beta)b^2(\alpha).\end{aligned}$$

С учетом условия (3.8) получаем два независимых друг от друга уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= a_1(\alpha)\xi_1 + (b_1(\alpha) - b_2(\alpha)) \int_0^\alpha \xi_1 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= a_2(\alpha)\xi_2 + (b_2(\alpha) - b_1(\alpha)) \int_\alpha^1 \xi_2 dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (3.9) по x от 0 до α , а второе от α до 1. Получим два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = d(\alpha) \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = d(\alpha) \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx,$$

решения которых равны

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = A_0 e^{d(\alpha)t}, \quad \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = B_0 e^{d(\alpha)t}.$$

Подставив найденные интегралы в (3.9), получим два линейных неоднородных уравнения, решения которых

$$\xi_1(t, x) = A(x)e^{a_1(\alpha)t} + \frac{A_0}{\alpha} e^{d(\alpha)t}, \quad \xi_2(t, x) = B(x)e^{a_2(\alpha)t} + \frac{B_0}{1-\alpha} e^{d(\alpha)t}$$

стремятся к нулю одновременно при отрицательных $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, $d(\alpha)$.

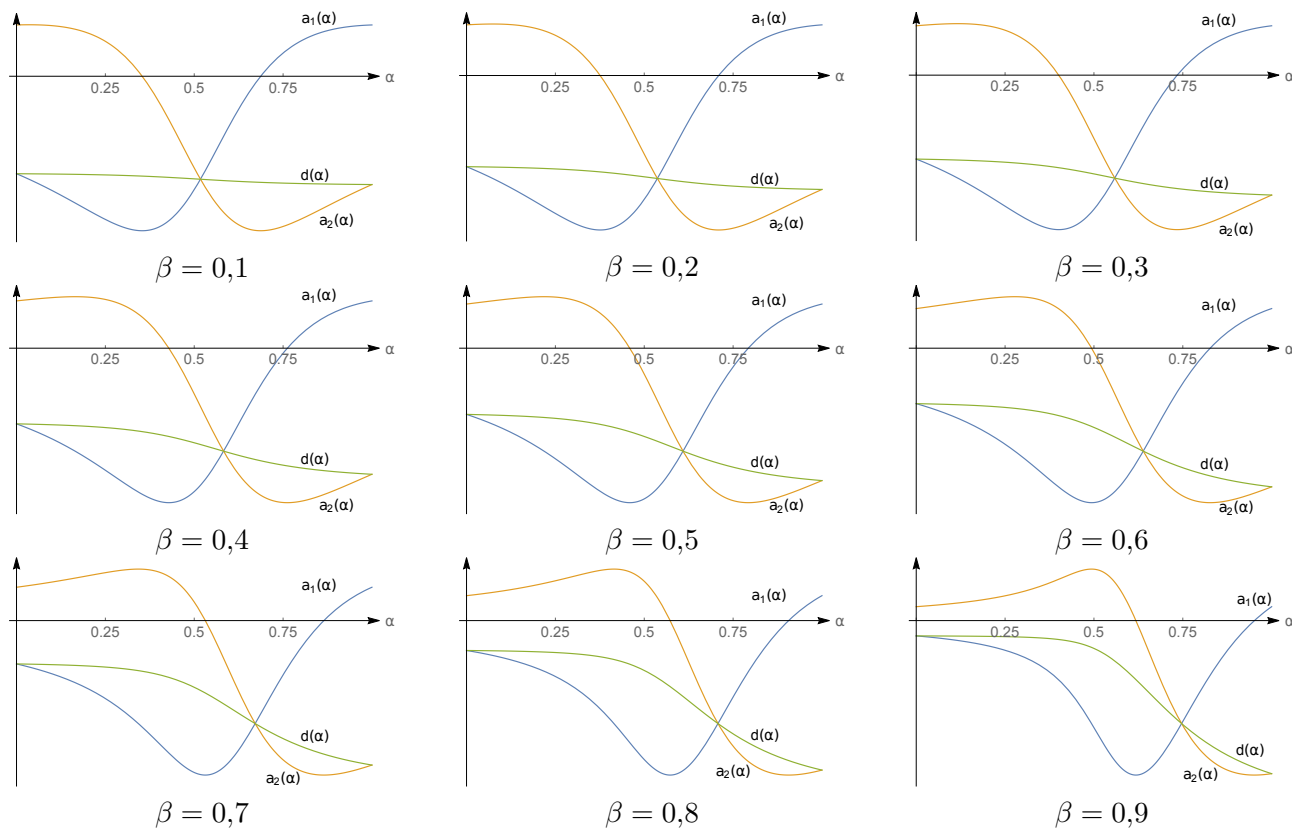


Рис. 1. Графики $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$ и $d(\alpha)$

FIG. 1. Graphs of $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, and $d(\alpha)$

На рис. 1 представлены численно построенные графики функций $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$ и $d(\alpha)$ при различных β . Анализ этих графиков позволяет предположить, что непрерывные на отрезке $[0, 1]$

функции $a_2(\alpha)$, $a_1(\alpha)$ меняют знак в точках $\alpha_0(\beta) \in (0, 1)$, $\alpha_1(\beta) \in (0, 1)$, соответственно. При всех рассмотренных $\beta \in (0, 1)$ у этих функций точка смены знака единственная и выполнено неравенство $\alpha_0(\beta) < \alpha_1(\beta)$. Кроме того, обе функции $a_2(\alpha)$ и $a_1(\alpha)$ отрицательны при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ и $d(\alpha) < 0$ для всех $\alpha \in (0, 1)$. Тем самым, можно предположить, что при каждом $\beta \in (0, 1)$ существует промежуток $(\alpha_0, \alpha_1) \subset [0, 1]$, на котором функции $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$ и $d(\alpha)$ отрицательны одновременно. Это означает, что при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ решения вида (3.7) краевой задачи (1.1)–(1.3) являются асимптотически α -устойчивыми.

4. ДРУГИЕ АТТРАКТОРЫ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Поскольку задача (1.1)–(1.3) в случае $\beta \neq 1$ является диссипативной, имеет смысл исследовать динамику решений краевой задачи вне промежутка α -устойчивости кусочно-постоянных решений, имеющих одну точку разрыва.

Можно доказать, что при наличии только кубической нелинейности краевая задача имеет α -устойчивые кусочно-постоянные решения со значениями 1 и -1 . Покажем, что это действительно так.

Пусть кусочно-постоянная функция $\xi(t, x)$ имеет $n + 1$ точку разрыва α_j , $j = 0, \dots, n$, и на промежутках $[\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ равна $(-1)^{j-1}$. Причем $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = 1$. Тогда из условия нулевого среднего (1.3) получаем уравнение на величины $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$

$$2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + 2(-1)^n \alpha_n + (-1)^{n+1} = 0. \quad (4.1)$$

Подставляя $\xi(t, x)$ в уравнение (1.1), можно заметить, что $M(\xi^3)$ также равно нулю. Тогда на промежутках $[\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ уравнение (1.1) принимает вид

$$0 = (-1)^{j-1} - (-1)^{3(j-1)},$$

что, очевидно, является верным тождеством. Следовательно, при выполнении условия (4.1) в случае кубической нелинейности у краевой задачи (1.1)–(1.3) действительно имеются решения рассматриваемого вида.

Рассмотрим вопрос об α -устойчивости этих решений. Пусть

$$\xi(t, x) = (-1)^{j-1} + \xi_j(t, x) \quad \text{при } x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j),$$

тогда

$$M(\xi) = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \xi_j(t, x) dx = 0.$$

Подставим $\xi(t, x)$ в уравнение (1.1) и отбросим слагаемые более высокого порядка малости. Заметим, что в этом случае

$$M(\xi^3) = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} ((-1)^{j-1} + \xi_j(t, x))^3 dx = 3 \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \xi_j(t, x) dx = 0.$$

Таким образом, получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial t} = -2\xi_j, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

решения которой стремятся к нулю по t . Следовательно, рассматриваемые кусочно-постоянные решения α -устойчивы.

Тем не менее, открытым остается вопрос о существовании других кусочно-постоянных решений краевой задачи при различных значениях β и вопрос α -устойчивости этих решений.

Аналитическое исследование в этом случае представляет определенную трудность, поэтому уместно проводить исследование поведения решений краевой задачи численными методами.

Будем искать решение краевой задачи в виде частичной суммы ряда Фурье

$$\xi(t, x) = \sum_{k=-N}^N \xi_k(t) \exp(2\pi kix). \quad (4.2)$$

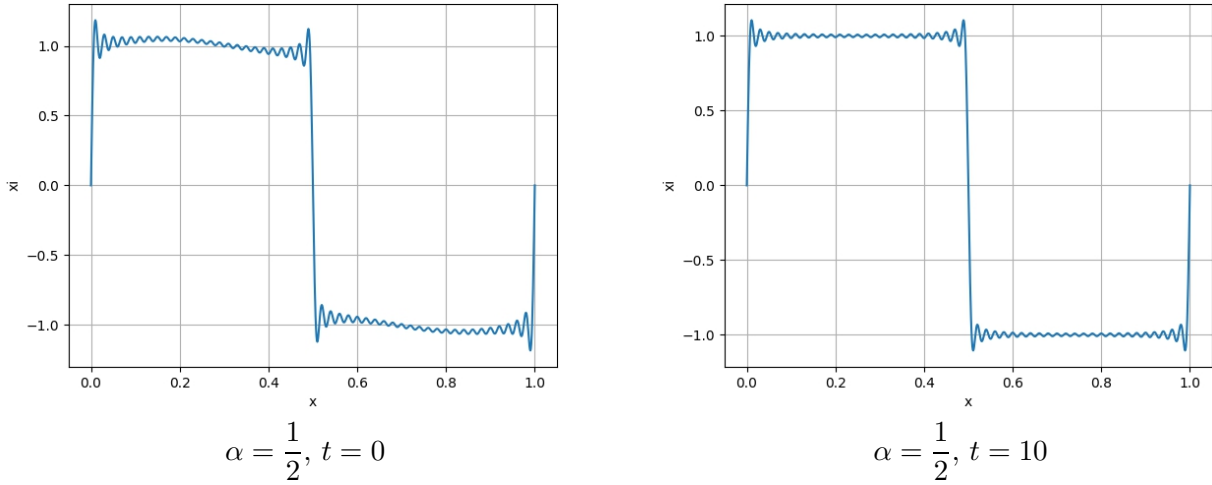


Рис. 2

Такое представление, очевидно, удовлетворяет краевому условию (1.2). Поскольку при выполнении условия нулевого среднего (1.3) следует, что коэффициент ряда Фурье при нулевой гармонике равен нулю, считаем, что в (4.2) имеет место $\xi_0(t) \equiv 0$. Также $\xi_{-k}(t) = \bar{\xi}_k(t)$.

Подставляя (4.2) в (1.1) и выделяя коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем систему из $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_k = \xi_k - \beta \left(\xi_{k/2}^2 + 2 \sum_{i+j=k} \xi_i \xi_j \right) - (1 - \beta) \left(\xi_{k/3}^3 + 3 \sum_{2i+j=k} \xi_i^2 \xi_j + 6 \sum_{i+j+l=k} \xi_i \xi_j \xi_l \right),$$

$k = -N, \dots, N, \quad k \neq 0. \quad (4.3)$

Начальное условие $\xi(0, x)$ также представим в виде частичной суммы ряда Фурье

$$\xi(0, x) = \sum_{k=-N}^N c_k \exp(2\pi k i x), \quad c_0 = 0.$$

Тогда система (4.3) рассматривается с начальными условиями

$$\xi_k(0) = c_k, \quad k = -N, \dots, N, \quad k \neq 0. \quad (4.4)$$

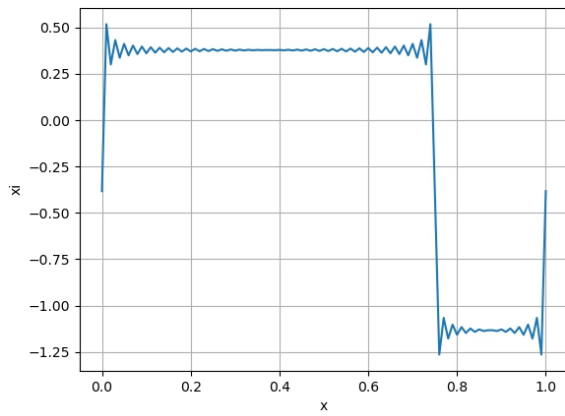
Таким образом, численное решение краевой задачи (1.1)–(1.3) определяется формулой (4.2), где $\xi_k(t)$ — решение системы (4.3).

Построим решение задачи (1.1)–(1.3) с начальным условием $\xi(0, x) = \xi_0(x) + g(x)$, где $\xi_0(x)$ — решение вида (2.4), $g(x)$ — малое возмущение, удовлетворяющее краевым условиям (1.2), (1.3).

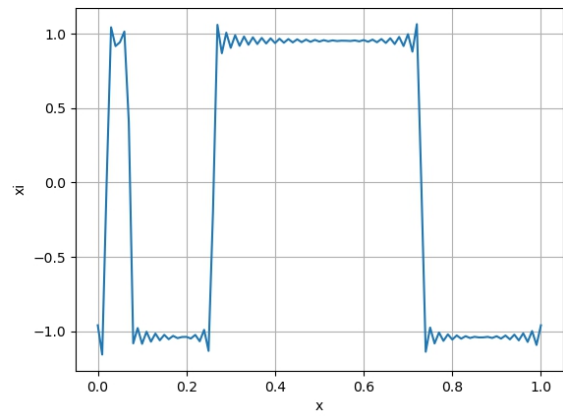
На рис. 2 представлен пример α -устойчивого решения вида (2.3) в случае $\beta = 0$.

Возьмем теперь такое значение α , при котором решение вида (2.4) неустойчиво. Тогда при $t \rightarrow \infty$ решения стремятся к кусочно-постоянным функциям, имеющим несколько точек разрыва. На рис. 3 представлен пример такого решения. Слева показано начальное условие краевой задачи в виде графика функции (3.4) с добавлением малого возмущения. Справа на рисунке показано это же решение при $t = 15$. Оно представляет собой кусочно-постоянную функцию с несколькими точками разрыва. Заметим, что дальнейшее увеличение значений переменной t не меняет структуры решения, его график не отличается от графика в правой части рис. 3.

Более того, если при фиксированном $\xi_0(x)$ в качестве возмущения $g(x)$ брать функцию вида $A \sin(kx)$, имеется зависимость количества точек разрыва α -устойчивого кусочно-постоянного решения от параметра k . А именно, чем больше k , тем больше точек разрыва имеет кусочно-постоянное решение, получающееся при вычислении решения системы (4.3). Так, в левой части рис. 4 представлено начальное условие краевой задачи в виде функции (3.4) с добавлением малого возмущения. С увеличением значений переменной t решение принимает вид кусочно-постоянной функции с несколькими точками разрыва. В левой части рис. 5 представлен график

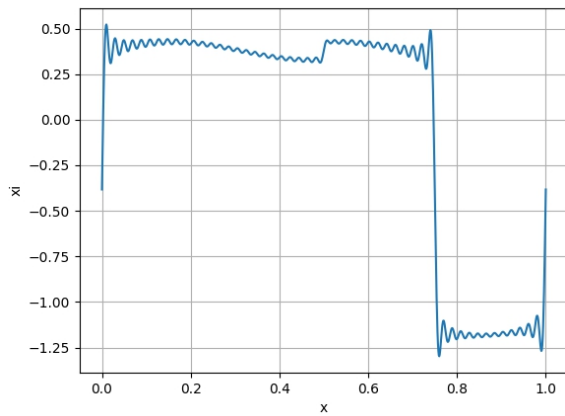


$$\alpha = \frac{3}{4}, t = 0$$

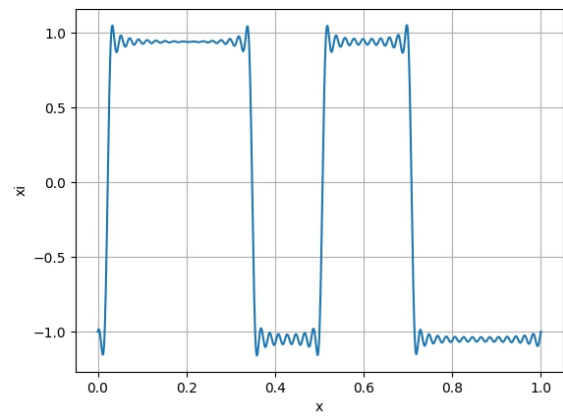


$$\alpha = \frac{3}{4}, t = 15$$

Рис. 3

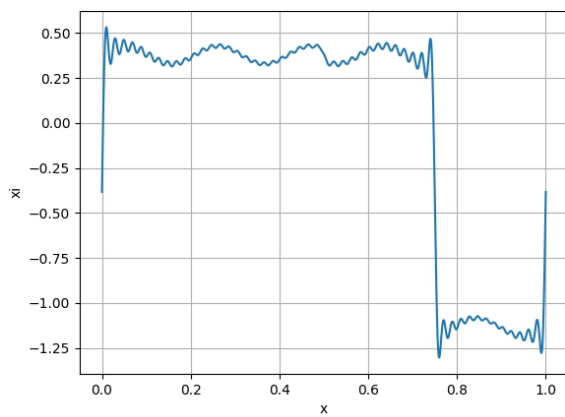


$$k = 10, \alpha = 0,7, t = 0$$

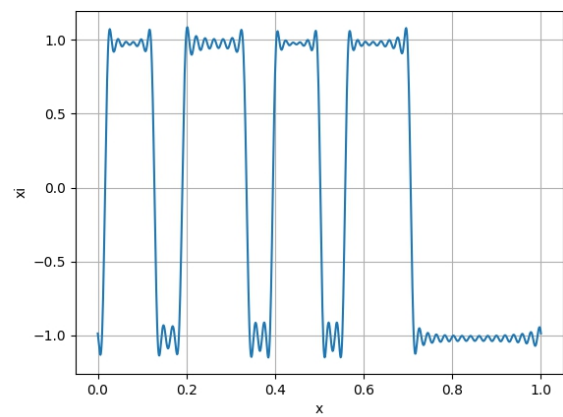


$$k = 10, \alpha = 0,7, t = 15$$

Рис. 4



$$k = 30, \alpha = 0,7, t = 0$$



$$k = 30, \alpha = 0,7, t = 15$$

Рис. 5

аналогичного начального условия, к которому добавлено возмущение с большей частотой колебаний. Увеличение значений переменной t в этом случае приводит решение к кусочно-постоянной функции, имеющей большее количество точек разрыва.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась динамика решений краевой задачи (1.1)–(1.3) при различных значениях параметра β . Доказано, что при каждом β задача имеет одно или два однопараметрических семейств кусочно-постоянных решений, зависящих от параметра α . Исследована α -устойчивость этих решений. Показано, что при $\beta \neq 1$ существует промежуток изменения параметра α , на котором эти решения асимптотически α -устойчивы. Доказано, что в случае $\beta = 1$ все такие решения неустойчивы.

Выполнено численное исследование поведения решений краевой задачи при $\beta \neq 1$ вне промежутка α -устойчивости однопараметрического семейства кусочно-постоянных решений. Показано наличие α -устойчивых кусочно-постоянных решений, имеющих более одной точки разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. — 2022. — 30, № 2. — С. 152–175.
2. Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. Взаимодействие двух волн в модели Ферми–Паста–Улама // Модел. и анализ информ. сист. — 2016. — 23, № 5. — С. 548–558.
3. Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. Уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. — 2019. — 27, № 4. — С. 52–70.
4. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Теор. мат. физ. — 2022. — 212, № 2. — С. 213–233.
5. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Медленные и быстрые колебания в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Докл. РАН. — 2019. — 484, № 1. — С. 21–25.
6. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2022. — 62, № 1. — С. 71–89.
7. Ikeda K., Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // Phys. D. — 1987. — 29. — С. 223–235.
8. Marquez B. A. Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback // Phys. Rev. E. — 2016. — 94, № 6. — 062208.
9. Talla Mbe J. H., Talla A. F., Goune Chengui G. R. Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems // Phys. Rev. E. — 2015. — 91, № 1. — 012902.

С. А. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Д. С. Костерин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: kosterin.dim@mail.ru

С. Д. Глызин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

UDC 517.926

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275

EDN: APCXKP

A family of piecewise-smooth solutions of a class of spatially distributed equations

S. A. Kaschenko, D. S. Kosterin, and S. D. Glyzin

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

Abstract. In this paper, we consider a spatially distributed equation with a periodic boundary condition and the zero integral mean condition in the spatial variable. The boundary-value problem under consideration has a family of solutions that are piecewise constant with respect to the spatial variable and have one discontinuity point. Conditions for the stability of such solutions are determined. The existence of piecewise constant solutions with more than one discontinuity point is shown. An algorithm for calculating solutions to a boundary-value problem by numerical methods is presented. A numerical analysis of the dynamics of the boundary-value problem is performed.

Keywords: evolutionary spatially distributed equations, piecewise constant solutions, stability, cluster synchronization.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by the Russian Science Foundation, grant № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

For citation: S. A. Kaschenko, D. S. Kosterin, S. D. Glyzin, “A family of piecewise-smooth solutions of a class of spatially distributed equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 263–275. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275>

REFERENCES

1. D. S. Glyzin, S. D. Glyzin, and A. Yu. Kolesov, “Okhota na khimer v polnosvyaznykh setyakh nelineynykh ostillyatorov” [Hunting for chimeras in fully connected networks of nonlinear oscillators], *Izv. vuzov. Prikl. nelinein. dinam.* [Bull. Higher Edu. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2022, **30**, No. 2, 152–175 (in Russian).
2. S. D. Glyzin, S. A. Kaschenko, and A. O. Tolbey, “Vzaimodeystvie dvukh voln v modeli Fermi–Pasta–Ulama” [Interaction of two waves in the Fermi–Pasta–Ulam model], *Model. i analiz inform. sist.* [Model. Anal. Inf. Sys.], 2016, **23**, No. 5, 548–558 (in Russian).
3. S. D. Glyzin, S. A. Kaschenko, and A. O. Tolbey, “Uravneniya s nelineynostyami dislokatsiy i Fermi–Pasty–Ulama” [Equations with dislocations and Fermi–Pasta–Ulam nonlinearities], *Izv. vuzov. Prikl. nelinein. dinam.* [Bull. Higher Edu. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2019, **27**, No. 4, 52–70 (in Russian).
4. S. D. Glyzin and A. Yu. Kolesov, “Periodicheskie rezhimy dvukhklasternoy sinkhronizatsii v polnosvyaznykh setyakh nelineynykh ostillyatorov” [Periodic modes of two-cluster synchronization in fully connected networks of nonlinear oscillators], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2022, **212**, No. 2, 213–233 (in Russian).
5. E. V. Grigorieva and S. A. Kaschenko, “Medlennye i bystrye kolebaniya v modeli optiko-elektronogo ostillyatora s zapazdyvaniem” [Slow and fast oscillations in the model of an optoelectronic oscillator with delay], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **484**, No. 1, 21–25 (in Russian).
6. S. D. Glyzin and A. Yu. Kolesov, “Begushchie volny v polnosvyaznykh setyakh nelineynykh ostillyatorov” [Traveling waves in fully connected networks of nonlinear oscillators], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2022, **62**, No. 1, 71–89 (in Russian).
7. K. Ikeda and K. Matsumoto, “High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback,” *Phys. D.*, 1987, **29**, 223–235.



8. B. A. Marquez, “Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback,” *Phys. Rev. E*, 2016, **94**, No. 6, 062208.
9. J. H. Talla Mbe, A. F. Talla, and G. R. Goune Chengui, “Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems,” *Phys. Rev. E*, 2015, **91**, No. 1, 012902.

S. A. Kaschenko

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

D. S. Kosterin

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: kosterin.dim@mail.ru

S. D. Glyzin

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru