Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 2 (2023). С. 250–262
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.97
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262
EDN: AYDVTN

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. Ю. Кабанцова

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматривается задача Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициенты которой являются случайными процессами. Получены явные формулы для математического ожидания решения. Рассмотрены примеры систем с гауссовскими и равномерно распределенными случайными коэффициентами. Приведен пример расчетов для упрощенной модели обучения на микроуровне.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со случайными коэффициентами, математическое ожидание, вариационная производная, характеристический функционал.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Л. Ю. Кабанцова.* Математическое ожидание решения стохастической мультипликативно возмущенной системы дифференциальных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 2. С. 250–262. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z} + \varepsilon_2(t)y + b(t,z), \tag{1.1}$$

$$y(t_0,z) = y_0(z), \tag{1.2}$$

где $t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$; t_0 задано; $y : T \times \mathbb{R} \to Y$ — искомое отображение; $b : T \times \mathbb{R} \to Y$ — случайный векторный процесс; A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y; Y — конечномерное пространство со скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные процессы; $y_0(z)$ — случайный векторный процесс.

Уравнение (1.1) называется *стохастическим мультипликативно возмущенным векторным дифференциальным уравнением.*

Так как уравнение (1.1) содержит случайные процессы, то решение задачи Коши (1.1), (1.2) также является случайным процессом. Для приложений важны статистические характеристики решения — функция распределения, плотность распределения, характеристический функционал или моментные функции. Наиболее важным и одновременно простым является математическое ожидание. Метод сведения стохастической задачи к детерминированному дифференциальному уравнению с обычными и вариационными производными (см. [1, 3, 7]) оказался эффективным для нахождения моментных функций решений линейных дифференциальных уравнений. В работе [2] получены явные формулы для математического ожидания решения мультипликативно возмущенного векторного дифференциального уравнения в частных производных с одним случайным коэффициентом. В данной работе решается задача нахождения математического ожидания решения задачи (1.1), (1.2) с двумя случайными коэффициентами. Исследуемая задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с обычными и вариационными производными, для которой удается получить явную формулу решения, и на основе полученной формулы выписать математическое ожидание решения стохастического уравнения с использованием характеристического функционала случайных коэффициентов и неоднородности. В качестве приложений выведены явные формулы математических ожиданий решений с независимыми равномерно распределенными и гауссовскими случайными коэффициентами.

2. Переход к детерминированной задаче

Пусть $L_1(T)$ — пространство суммируемых функций на отрезке T с нормой $\|v\| = \int\limits_T |v(t)|dt$, $\psi : L_1(T) \to \mathbb{C}$ — функционал, $h \in L_1(T)$ — приращение переменной v.

Определение 2.1. Если

$$\psi(v+h) - \psi(v) = \int\limits_T \varphi(t,v)h(t)\,dt + o(h),$$

где $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно h, и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h, тогда отображение $\varphi : T \times L_1(T) \to \mathbb{C}$ называется *вариационной производной функционала ψ в точке v* и обозначается $\dfrac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}$.

Вариационное дифференцирование аналогично обычному дифференцированию.

Пусть $\varepsilon(t,\omega)$ обозначает случайный процесс [1] (ω — случайное событие). В дальнейшем случайный процесс будем записывать просто как $\varepsilon(t)$, а $E[\varepsilon]$ использовать как обозначение математического ожидания случайного процесса ε.

Определение 2.2 (см. [1, с. 30])**.** Функционал

$$\psi(v) = E\left[\exp\left(i\int\limits_T \varepsilon(s)v(s)\,ds\right)\right],$$

где $v \in L_1(T), i = \sqrt{-1}$, называется *характеристическим функционалом случайного процесса ε*.

Отметим, что с помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса [1], например,

$$\left.\frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}\right|_{v=0} = iE[\varepsilon(t)],$$

$$\left.\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v(t)\delta v(\tau)}\right|_{v=0} = -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)].$$

Будем считать, что процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b заданы характеристическим функционалом, т. е. считаем известным

$$\psi(v_1,v_2,v_3) = E\left[\exp\left(i\int\limits_T \varepsilon_1(s)v_1(s)\,ds + i\int\limits_T \varepsilon_2(s)v_2(s)\,ds + i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}} <b(s_1,s_2),v_3(s_1,s_2)>ds_2\,ds_1\right)\right].$$

Здесь $< \cdot,\cdot >$ обозначает скалярное произведение в Y.

Введем обозначение

$$w = \exp\left(i\int\limits_T \varepsilon_1(s)v_1(s)\,ds + i\int\limits_T \varepsilon_2(s)v_2(s)\,ds + i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}} < b(s_1,s_2),v_3(s_1,s_2) > ds_2\,ds_1\right).$$

Умножим уравнение (1.1) на w и возьмем математическое ожидание полученного равенства. Находим

$$E\Big[\frac{\partial y}{\partial t}w\Big] = E\Big[\varepsilon_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z}w\Big] + E[\varepsilon_2(t)yw] + E[b(t,z)w]. \tag{2.1}$$

Введем обозначение

$$\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3) = E[y(t,z)w].$$

Уравнение (2.1) (формально) можно записать с помощью $\widetilde{y}$. Имеем

$$\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z} - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}\widetilde{y} - i\frac{\delta_p\psi}{\delta v_3(t,z)}, \tag{2.2}$$

где, например, $\dfrac{\delta_p\psi}{\delta v_3(t,z)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной v_3.

Будем считать, что случайный процесс y_0 не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b. Умножим начальные условие (1.2) на w и вычислим математическое ожидание полученного равенства; находим

$$E[y(t_0,z)w] = E[y_0(z)w] = E[y_0(z)]E[w] = E[y_0(z)]\psi(v_1,v_2,v_3).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\widetilde{y}(t_0,z,v_1,v_2,v_3) = E[y_0(z)]\psi(v_1,v_2,v_3). \tag{2.3}$$

Определение 2.3. *Математическим ожиданием $E[y(t,z)]$ решения задачи Коши* (1.1), (1.2) называется $\widetilde{y}(t,z,0,0,0)$, где $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)$ — решение задачи (2.2), (2.3) в некоторой окрестности точки $v_1=0, v_2=0, v_3=0$.

Таким образом, чтобы найти математическое ожидание $E[y(t,z)]$ решения задачи (1.1), (1.2), достаточно найти решение $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)$ неслучайной (детерминированной) задачи (2.2), (2.3) в малой окрестности точки $v_1=0$, $v_2=0, v_3=0$.

3. Решение уравнения с обычной и вариационной производными

Пусть $F_z(g(z))(\xi)$ обозначает преобразование Фурье [6] функции g по переменной z:

$$F_z(g(z))(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{i\xi z}\,dz.$$

Применим преобразование Фурье по переменной z к уравнениям (2.2), (2.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}F_z(\widetilde{y}) = -\xi A\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}F_z(\widetilde{y}) - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}F_z(\widetilde{y}) - iF_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1,v_2,v_3)}{\delta v_3(t,z)}\right), \tag{3.1}$$

$$F_z(\widetilde{y})(t_0,\xi,v_1,v_2,v_3) = F_z(E[y_0(z)])(\xi)\psi(v_1,v_2,v_3). \tag{3.2}$$

Пусть $\chi(t_0,t,s)$ — функция переменной $s\in\mathbb{R}$, определенная следующим образом: $\chi(t_0,t,s) = \operatorname{sign}(s-t_0)$ при $s\in[\min\{t_0,t\},\max\{t_0,t\}]$ и $\chi(t_0,t,s)=0$ при s, не принадлежащих этому отрезку.

Рассмотрим отображение $g_k : L_1(T)\to\mathbb{R}$

$$g_k(v) = \int\limits_T\dots\int\limits_T B_k(s_1,s_2,\dots,s_k)v(s_1)\dots v(s_k)\,ds_1\dots ds_k,$$

где B_k — непрерывная, симметричная по любой паре переменных функция.

Теорема 3.1 (см. [2]). *Пусть a — непрерывная на отрезке $[t_0,t_1]=T$ функция и A — линейный оператор, действующий в Y. Тогда существует частная производная по переменной t отображения*

$$\Phi_k(t,v) = \int\limits_T\dots\int\limits_T B_k(s_1,s_2,\dots,s_k)(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\dots(v(s_k)I + a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)\,ds_1\dots ds_k$$

и справедливо равенство

$$\frac{\partial\Phi_k(t,v)}{\partial t}=a(t)Ak\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,s_2,\ldots,s_{k-1},t)(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots \\ \ldots(v(s_{k-1})I+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)\,ds_1\ldots ds_{k-1}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть Δt — приращение переменной t; тогда, используя формулу бинома Ньютона и симметричность функции B_k, получаем

$$\frac{1}{\Delta t}(\Phi_k(t+\Delta t,v)-\Phi_k(t,v))=$$
$$=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_k)[(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t+\Delta t,s_1)A)\ldots(v(s_k)I+a(s_k)\chi(t_0,t+\Delta t,s_k)A)-$$
$$-(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_k)I+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)]\,ds_1\ldots ds_k=$$
$$=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_k)\sum_{m=0}^{k}C_k^m\Big[(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-m})I+a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m})A)\times$$
$$\times(a(s_{k-m+1})\chi(t,t+\Delta t,s_{k-m+1}))\ldots(a(s_k)\chi(t,t+\Delta t,s_k))-$$
$$-(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_k)I+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)\Big]\,ds_1\ldots ds_k=$$
$$=\frac{k}{\Delta t}\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_k)(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-1})I+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)\times$$
$$\times(a(s_k)\chi(t,t+\Delta t,s_k)A)\,ds_1\ldots ds_k+$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_k)\sum_{m=2}^{k}C_k^m(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-m})I+a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m})A)\times$$
$$\times A^{k-m}a(s_{k-m+1})\chi(t,t+\Delta t,s_{k-m+1})\ldots a(s_k)\chi(t,t+\Delta t,s_k)\,ds_1\ldots ds_k. \tag{3.4}$$

Согласно теореме о среднем значении [5, с. 113], для непрерывной функции f

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_T f(s_k)Aa(s_k)\chi(t,t+\Delta t,s_k)\,ds_k=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}f(s_k)Aa(s_k)\,ds_k\to Aa(t)f(t)$$

при $\Delta t\to 0$. Переходя к пределу в равенстве (3.4) при $\Delta t\to 0$, получаем (3.3). □

Теорема 3.2 (см. [2]). *В условиях теоремы* 3.1 *существует частная вариационная производная* $\dfrac{\delta_p\Phi_k(t,v)}{\delta v(t)}$ *и справедливо равенство*

$$\frac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}=k\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_{k-1},t)(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\times \\ \times\ldots(v(s_{k-1})I+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)ds_1\ldots ds_{k-1}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть h — приращение переменной v, тогда

$$\Phi_k(t,v+h)-\Phi_k(t,v)=$$
$$=\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_k)[(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A+h(s_1)I)\ldots(v(s_k)I+$$
$$+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A+h(s_k)I)-(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_k)I+a(s_k)\chi(t_0,t,s_k)A)]\,ds_1\ldots ds_k=$$
$$=k\int\limits_T\ldots\int\limits_T B_k(s_1,\ldots,s_k)(v(s_1)I+a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A)\ldots(v(s_{k-1})I+a(s_{k-1})\chi(t_0,t,s_{k-1})A)h(s_k)I\,ds_1\ldots ds_k+$$

$$+\int_T \ldots \int_T B_k(s_1,\ldots,s_k) \sum_{m=2}^{k} C_k^m (v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0,t,s_1)A) \times$$
$$\times \ldots (v(s_{k-m})I + a(s_{k-m})\chi(t_0,t,s_{k-m}))h(s_{k-m+1})\ldots h(s_k)I\,ds_1\ldots ds_k. \quad (3.6)$$

Последнее слагаемое является бесконечно малой величиной высшего порядка относительно h. Согласно определению вариационной производной из (3.6) следует существование $\dfrac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}$ и ее представление в виде (3.5). □

Замечание 3.1. Из соотношений (3.3), (3.5) следует, что Φ_k удовлетворяет операторному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi_k(t,v)}{\partial t} = a(t)A\frac{\delta_p\Phi_k(t,v)}{\delta v(t)}. \quad (3.7)$$

Пусть теперь $\Phi(t,v) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi_k(t,v)$. Поскольку $\Phi_k, k = 0,1,\ldots$ удовлетворяют уравнению (3.7), то Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Phi(t,v)}{\partial t} = a(t)A\frac{\delta_p\Phi(t,v)}{\delta v(t)}.$$

Теорема 3.3. *Если функционал $\psi(v_1,v_2,v_3)$ разлагается в ряд*

$$\psi(v_1,v_2,v_3) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_T\ldots\int_T \psi_{1k}(s_1,\ldots,s_k,v_3)v_1(s_1)\ldots v_1(s_k)\,ds_1\ldots ds_k \times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\int_T\ldots\int_T \psi_{2k}(s_1,\ldots,s_k,v_3)v_2(s_1)\ldots v_2(s_k)\,ds_1\ldots ds_k, \quad \psi_{10}=1, \psi_{20}=1, \quad (3.8)$$

где ψ_{ik} — симметрические по любой паре переменных функции, имеющие вариационные производные по переменной v_3, то

$$F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2,v_3) = \psi(v_1I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)F_z(E[y_0])(\xi) -$$
$$- i\int_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1I - \xi\chi(s,t)A, v_2 - i\chi(s,t), v_3)}{\delta v_3(s,z)}\right)ds \quad (3.9)$$

является решением задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Легко видеть, что условие (3.2) выполняется. Переменная v_3 в уравнении (3.1) является параметром. Используя теорему 3.2, находим

$$\frac{\partial\psi(v_1I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)}{\partial t} =$$
$$= -\xi A\frac{\delta_p\psi(v_1I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)}{\delta v_1(t)} - i\frac{\delta_p\psi(v_1I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)}{\delta v_2(t)}.$$

Используя это равенство, находим производную по переменной t от функции $F_z(\widetilde{y})$, определяемой формулой (3.9)

$$\frac{\partial F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2,v_3)}{\partial t} = -\xi A\frac{\delta_p\psi(v_1I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)}{\delta v_1(t)}F_z(E[y_0])(\xi) -$$
$$- i\frac{\delta_p\psi(v_1I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)}{\delta v_2(t)}F_z(E[y_0])(\xi) - iF_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1I, v_2, v_3)}{\delta v_3(t,z)}\right) +$$
$$+ i\xi A\int_{t_0}^{t}F_z\left(\frac{\delta_p^2\psi(v_1I - \xi\chi(s,t)A, v_2 - i\chi(s,t), v_3)}{\delta v_1(t)\delta v_3(s,z)}\right)ds - \int_{t_0}^{t}F_z\left(\frac{\delta_p^2\psi(v_1I - \xi\chi(s,t)A, v_2 - i\chi(s,t), v_3)}{\delta v_2(t)\delta v_3(s,z)}\right)ds.$$

Кроме того,

$$\frac{\delta_p F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_1(t)} = \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)}{\delta v_1(t)} F_z(E[y_0])(\xi) -$$

$$- i\int_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi\chi(s,t)A, v_2 - i\chi(s,t), v_3)}{\delta v_1(t)\delta v_3(s,z)}\right) ds,$$

а

$$\frac{\delta_p F_z(\widetilde{y})(t,\xi,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_2(t)} = \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3)}{\delta v_2(t)} F_z(E[y_0])(\xi) -$$

$$- i\int_{t_0}^{t} F_z\left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi\chi(s,t)A, v_2 - i\chi(s,t), v_3)}{\delta v_1(t)\delta v_3(s,z)}\right) ds.$$

Подстановкой этих выражений в (3.1) убеждаемся, что (3.9) является решением уравнения (3.1). □

Замечание 3.2. Характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ будет удовлетворять условию (3.8), если мы будем предполагать независимость случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

4. Математическое ожидание решения задачи (1.1), (1.2)

Для нахождения среднего значения решения задачи (1.1), (1.2) нужно найти отображение $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)$. Это можно сделать, вычислив обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} выражения (3.9). Поскольку преобразование Фурье от произведения равно свертке преобразований Фурье сомножителей [6, с. 154], то

$$\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3) = F_\xi^{-1}\psi(v_1 I - \xi\chi(t_0,t)A, v_2 - i\chi(t_0,t), v_3) * E[y_0(z)] -$$

$$- i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi\chi(s,t)A, v_2 - i\chi(s,t), v_3)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right) ds. \quad (4.1)$$

Здесь $*$ обозначает свертку по переменной z.

Теорема 4.1. *Если характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в степенной ряд вида* (3.8), *то*

$$E[y(t,z)] = F_\xi^{-1}\psi(-\xi\chi(t_0,t)A, -i\chi(t_0,t), 0) * E[y_0(z)] - i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p \psi(-\xi\chi(s,t)A, -i\chi(s,t), 0)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right) ds \quad (4.2)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1.1), (1.2).

Доказательство. Поскольку $E[y(t,z)] = \widetilde{y}(t,z,0,0,0)$, то утверждение получается подстановкой $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$ в (4.1). □

5. Случай независимых случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b

Пусть случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы, тогда $\psi(v_1,v_2,v_3) = \psi_{\varepsilon_1}(v_1)\psi_{\varepsilon_2}(v_2)\psi_b(v_3)$, где $\psi_{\varepsilon_1}, \psi_{\varepsilon_2}, \psi_b$ — характеристические функционалы для $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b, соответственно.

Теорема 5.1. *Если случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы, то*

$$E[y(t,z)] = \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A)) * E[y_0(z)] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)) * E[b(s,z)] ds \quad (5.1)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1.1), (1.2).

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(s,t)A,-i\chi(s,t),0)}{\delta v_3(s,z)}=\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))\frac{\delta_p\psi_b(0)}{\delta v_3(s,z)}=$$

$$=i\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))E[b(s,z)].$$

Тогда в силу теоремы 4.1 среднее значение $E[y(t,z)]$ решения задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$E[y(t,z)]=F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A)\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t)))*E[y_0(z)]+$$

$$+\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))F_z(E[b(s,z)]))ds=$$

$$=\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A))*E[y_0(z)]+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A))*E[b(s,z)]ds.$$

□

Замечание 5.1. Отметим, что для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ нужно знать характеристические функционалы процессов $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ и только математическое ожидание процесса b.

6. Частные случаи

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) с гауссовскими случайными процессами $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, заданные характеристическими функционалами

$$\psi_{\varepsilon_k}(v_k)=\exp\left(i\int_T E[\varepsilon_k(s)]v_k(s)ds-\frac{1}{2}\int_T\int_T b_k(s_1,s_2)v_k(s_1)v_k(s_2)ds_1ds_2\right),\quad k=1,2,\tag{6.1}$$

где $b_k(s_1,s_2)=E[\varepsilon_k(s_1)\varepsilon_k(s_2)]-E[\varepsilon_k(s_1)]E[\varepsilon_k(s_2)],k=1,2,$ — ковариационные функции случайных процессов ε_1 и ε_2, соответственно, и с независимым от ε_1 и ε_2 случайным процессом b.

Используя определение функции $\chi(s,t)$, находим

$$\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)=\exp\left(i\int_T E[\varepsilon_1(\tau)](-\xi\chi(s,t,\tau)A)d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_T\int_T b_1(s_1,s_2)(-\xi\chi(s,t,s_1)A)(-\xi\chi(s,t,s_2)A)ds_1ds_2\right)=$$

$$=\exp\left(-i\xi\int_s^t E[\varepsilon_1(\tau)]Ad\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int_s^t\int_s^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right);$$

$$\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))=\exp\left(i\int_T E[\varepsilon_2(\tau)](-i\chi(s,t,\tau))d\tau-\frac{1}{2}\int_T\int_T b_2(s_1,s_2)(-i\chi(s,t,s_1))(-i\chi(s,t,s_2))ds_1ds_2\right)=$$

$$=\exp\left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\tau)]d\tau+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right).$$

Подставим эти выражения в (5.1), получаем следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2) *случайные процессы* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *заданы характеристическими функционалами* (6.1) *и не зависят от случайного процесса* b, *тогда*

$$E[y(t,z)] = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} E[\varepsilon_2(\tau)]\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^{t} E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau - \frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right) * E[y_0(z)] +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\exp(\int\limits_{s}^{t} E[\varepsilon_2(\tau)]d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t} b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2)\times\right.$$
$$\left.\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{s}^{t} E[\varepsilon_1(\tau)]Ad\tau - \frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t} b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right) * E[b(s,z)]\right\}ds. \quad (6.2)$$

является математическим ожиданием решения этой задачи.

Пусть теперь независимые случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, имеют равномерное распределение с характеристическими функционалами

$$\psi_{\varepsilon_k}(v_k) = \frac{\sin\int\limits_T a_k(s)v_k(s)\,ds}{\int\limits_T a_k(s)v_k(s)\,ds}\exp\left(i\int\limits_T E[\varepsilon_k(\tau)]v_k(\tau)\,d\tau\right) \quad a_k(s)\geqslant 0, \quad k=1,2, \quad (6.3)$$

и независимы от случайного процесса b.

Аналогично, используя определение функции $\chi(s,t)$, находим

$$\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A) = \frac{\sin\xi\int\limits_s^t a_1(\tau)A\,d\tau}{\xi\int\limits_s^t a_1(\tau)A\,d\tau}\exp(-i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau),$$

$$\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t)) = \frac{\sin i\int\limits_s^t a_2(\tau)\,d\tau}{i\int\limits_s^t a_2(\tau)\,d\tau}\exp(\int\limits_s^t E[\varepsilon_2(\tau)]\,d\tau).$$

Подставив эти выражения в (5.1), получаем следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2) *случайные процессы* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *заданы характеристическими функционалами* (6.3) *и не зависят от случайного процесса* b, *тогда*

$$E[y(t,z)] = \frac{\sin i\int\limits_{t_0}^t a_2(\tau)\,d\tau}{i\int\limits_{t_0}^t a_2(\tau)\,d\tau}\exp\left(\int\limits_{t_0}^t E[\varepsilon_2(\tau)]\,d\tau\right)\times$$
$$\times F_\xi^{-1}\left(\frac{\sin\xi\int\limits_{t_0}^t a_1(\tau)A\,d\tau}{\xi\int\limits_{t_0}^t a_1(\tau)A\,d\tau}\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau\right)\right) * E[y_0(z)] +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sin i\int\limits_s^t a_2(\tau)\,d\tau}{i\int\limits_s^t a_2(\tau)\,d\tau}\exp\left(\int\limits_s^t E[\varepsilon_2(\tau)]\,d\tau\right)\times$$

$$\times F_\xi^{-1}\left(\frac{\sin\xi\int\limits_s^t a_1(\tau)A\,d\tau}{\xi\int\limits_s^t a_1(\tau)A\,d\tau}\exp(-i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau)\right)*E[b(s,z)]ds \quad (6.4)$$

является математическим ожиданием решения этой задачи.

Выражение

$$\frac{\sin\xi\int\limits_{t_0}^t a(\tau)A\,d\tau}{\xi\int\limits_{t_0}^t a(\tau)A\,d\tau}$$

обозначает сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\left(\xi\int\limits_{t_0}^t a(\tau)A\,d\tau\right)^{k-1}}{k!}.$$

7. Пример: модель обучения на микроуровне

Рассмотрим пример, связанный с уравнением Фёрстера, — математическая модель функционирования системы высшего образования в России [4, 8]. Одной из частных ее составляющих является простейшая модель обучения на микроуровне (или эффективность обучения, например, в студенческой группе).

Прежде чем перейти к рассмотрению изучаемого уравнения, рассмотрим процесс получения дифференциального уравнения, описывающего данную модель. Основные предпосылки модели следующие. Пусть некоторый профессиональный признак (квалификация) для каждого студента меняется по одинаковому закону

$$\frac{dx}{dt}=F(x)+H(t),$$

где x — степень квалификации студента; t — время; $F(x)$ — функция, определяющая возможности студента менять свою квалификацию; $H(t)$ — зависимость, характеризующая взаимодействие студента с обществом (интенсивность внешнего воздействия на студента, направленное на освоение учебных дисциплин).

Пусть $n(t,x)$ — число членов некоторой профессиональной группы, имеющих в данное время t квалификацию в пределах от $x-dx$ до $x+dx$. Рассмотрим предельный случай «абсолютно доброго деканата», когда на протяжении всего времени обучения выбывание из профессиональной группы не происходит. Тогда выполняется закон сохранения

$$\int\limits_0^\infty n(t,x)\,dx=N=\text{const}.$$

Для распределения студентов во времени и по квалификации имеем следующее равенство:

$$\frac{dn}{dt}=\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial x}\frac{dx}{dt}=0.$$

Тогда для описания эволюции профессиональной группы получаем линейное уравнение вида

$$\frac{\partial n}{\partial t}+(F(x)+H(t))\frac{\partial n}{\partial x}=0.$$

Другой предельный случай — «абсолютно злой деканат», установивший «квоту отлова». В этом случае предыдущее уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (F(x) + H(t))\frac{\partial n}{\partial x} = -\gamma n.$$

Последнее уравнение связано с уравнением Фёрстера.

Рассмотрим упрощенную модель обучения в студенческой группе двум учебным дисциплинам. Будем предполагать, что $F(x) \equiv 0$. Получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_1}{\partial t} + \varepsilon_1(t)\left(a_{11}\dfrac{\partial n_1}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial n_2}{\partial x}\right) = -\varepsilon_2(t)n_1, \\ \dfrac{\partial n_2}{\partial t} + \varepsilon_1(t)\left(a_{21}\dfrac{\partial n_1}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial n_2}{\partial x}\right) = -\varepsilon_2(t)n_2, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $n_i(t,x)$ — число студентов группы, имеющих в данный момент t квалификацию в пределах от $x - dx$ до $x + dx$ по i-й учебной дисциплине, $i = 1, 2$; $\varepsilon_1(t)$ — случайный процесс, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — матрица второго порядка; $\varepsilon_1(t)A$ — характеризует внешнее воздействие на студентов, направленное на освоение учебных дисциплин; $\varepsilon_2(t)$ — случайный процесс, характеризующий «квоту отлова» студентов. Система (7.1) по своему виду схожа с уравнением (1.1). Будем искать решения системы (7.1), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} n_1(0,x) &= y_1(x), \\ n_2(0,x) &= y_2(x), \end{aligned} \tag{7.2}$$

где $y_k(x), k = 1, 2,$ — случайные процессы, характеризующие начальное число студентов в группе с уровнем квалификации от $x - dx$ до $x + dx$ по k-й учебной дисциплине.

Будем предполагать, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные гауссовские процессы, заданные функционалами вида (6.1)

$$\psi_{\varepsilon_1}(v_1) = \exp\left(i\int_T E[\varepsilon_1(s)]v_1(s)ds - \frac{1}{2}\int_T\int_T b_1(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)ds_1ds_2\right),$$

где $E[\varepsilon_1(t)] = m_1 > 0$, а ковариационная функция случайного процесса ε_1 имеет вид $b_1(s_1,s_2) = e^{-\alpha|s_1-s_2|}$;

$$\psi_{\varepsilon_2}(v_2) = \exp\left(i\int_T E[\varepsilon_2(s)]v_2(s)ds - \frac{1}{2}\int_T\int_T b_2(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)ds_1ds_2\right),$$

где $E[\varepsilon_2(t)] = m_2 > 0$, а ковариационная функция случайного процесса ε_2 имеет вид $b_2(s_1,s_2) = \dfrac{\widetilde{A}}{1+\gamma(s_1-s_2)^2}$.

Пусть матрица коэффициентов A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а математическое ожидание начальных условий (7.2) определено как

$$E[y_0(x)] = E\left[\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}\right] = e^{-2x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание решения задачи Коши (7.1), (7.2) будем искать по формуле (6.2) в предположении, что случайный процесс $b(t,z) \equiv 0$. Для нашей задачи формула принимает следующий вид:

$$E[n(t,x)] = \exp\left(-\int_0^t E[\varepsilon_2(\tau)]\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$

$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left\{i\xi\int\limits_0^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right\}\right)*E[y_0(x)].$$

Однако с вычислительной точки зрения удобнее использовать формулу вида:

$$E[n(t,x)]=\exp\left(-\int\limits_0^t E[\varepsilon_2(\tau)]\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left\{i\xi\int\limits_0^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right\}F_z(E[y_0(x)])(\xi)\right). \quad (7.3)$$

Проведем предварительные вычисления:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2=\int\limits_0^t\int\limits_0^t\frac{\widetilde{A}}{1+\gamma(s_1-s_2)^2}ds_1ds_2=\frac{2\widetilde{A}}{\gamma}\left[t\operatorname{arctg}\sqrt{\gamma}t-\ln\sqrt{1+\gamma t^2}\right];$$

$$\exp\left(-\int\limits_0^t E[\varepsilon_2(\tau)]\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)=\exp\left(-m_2t+\frac{\widetilde{A}}{\gamma}\left[t\operatorname{arctg}\sqrt{\gamma}t-\ln\sqrt{1+\gamma t^2}\right]\right)=$$
$$=(1+\gamma t^2)^{-\frac{\widetilde{A}}{2\gamma}}\exp\left(-m_2t+\frac{\widetilde{A}t}{\gamma}\operatorname{arctg}\sqrt{\gamma}t\right); \quad (7.4)$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(s_1,s_2)ds_1ds_2=\int\limits_0^t\int\limits_0^t e^{-\alpha|s_1-s_2|}ds_1ds_2=\frac{2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1);$$

$$i\xi\int\limits_0^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2=-i\xi m_1tA-\frac{1}{\alpha^2}\xi^2(e^{-\alpha t}-1)A^2=$$
$$=\begin{pmatrix}2im_1\xi t-4\dfrac{\xi^2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1) & im_1\xi t-4\dfrac{\xi^2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)\\ 0 & 2im_1\xi t-4\dfrac{\xi^2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)\end{pmatrix}.$$

Найдем экспоненту полученной матрицы:

$$\exp\left(i\xi\int\limits_0^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)=$$
$$=e^{2im_1\xi t-4\frac{\xi^2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)}\begin{pmatrix}1 & im_1\xi t-4\dfrac{\xi^2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$F_z(E[y_0(x)])(\xi)=\sqrt{2\pi}e^{-1/8\xi^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\exp\left(i\xi\int\limits_0^t E[\varepsilon_1(\tau)]A\,d\tau-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)F_z(E[y_0(x)])(\xi)=$$
$$=\sqrt{2\pi}e^{2im_1\xi t-4\frac{\xi^2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)-\frac{1}{8}\xi^2}\begin{pmatrix}im_1\xi t-4\dfrac{\xi^2}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)\\ 1\end{pmatrix}.$$

Найдем обратное преобразование Фурье от последнего выражения и подставим полученный результат и значение из (7.4) в формулу (7.3). Окончательно получаем

$$E[n_1(t,x)] = -\frac{8\alpha^5(1+\gamma t^2)^{-\frac{\widetilde{A}}{2\gamma}}}{(\alpha^2+32(e^{-\alpha t}-1))^{5/2}} \exp\left(\frac{-2\alpha^2(x-2m_1t)^2}{\alpha^2+32(e^{-\alpha t}-1)} - m_2 t + \frac{\widetilde{A}t}{\gamma}\operatorname{arctg}\sqrt{\gamma}t\right) \times$$

$$\times \left[\frac{4}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)\Big(1+\frac{32}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)\Big) + (2m_1t-x)\Big(m_1t+\frac{16}{\alpha^2}(e^{-\alpha t}-1)x\Big)\right],$$

$$E[n_2(t,x)] = \frac{2\alpha(1+\gamma t^2)^{-\frac{\widetilde{A}}{2\gamma}}}{\sqrt{\alpha^2+32(e^{-\alpha t}-1)}} \exp\left(\frac{-2\alpha^2(x-2m_1t)^2}{\alpha^2+32(e^{-\alpha t}-1)} - m_2 t + \frac{\widetilde{A}t}{\gamma}\operatorname{arctg}\sqrt{\gamma}t\right).$$

8. Заключение

Реальные динамические системы подвержены случайным возмущениям, которые можно учитывать в математических моделях, коэффициенты которых являются случайными процессами. В данной статье получены формулы для математического ожидания решения линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных со случайными коэффициентами. Явные формулы математического ожидания решений дифференциальных уравнений позволят провести анализ качественного поведения системы. Для ее применения достаточно знать характеристические функционалы процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и только математическое ожидание процесса b. Были рассмотрены наиболее распространенные варианты, когда ψ_{ε_1} и ψ_{ε_2} определяют гауссовы и равномерно распределенные случайные процессы ε_1 и ε_2, соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
2. *Задорожний В. Г., Кабанцова Л. Ю.* О решении линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 3. — С. 549–563.
3. *Задорожний В. Г., Коновалова М. А.* Мультипликативно возмущенное случайным шумом дифференциальное уравнение в банаховом пространстве// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 4. — С. 599–614.
4. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. — М.: УРСС, 2003.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Наука, 1970.
6. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Физматлит, 1965.
7. *Zadorozhniy V. G., Semenov M. E., Selavesyuk N. T., Ulshin I. I., Nozhkin V. S.* Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model// Math. Models Comput. Simul. — 2021. — *13*, № 1. — С. 11–25.
8. *Akhromeeva T. S.* Higher education as an object of mathematical modeling// Phystech J. — 1997. — *3*, № 2. — С. 115–145.

Л. Ю. Кабанцова
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: dlju@yandex.ru

UDC 517.97
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262
EDN: AYDVTN

Mathematical expectation of the solution of a stochastic multiplicatively perturbed system of differential equations

L. Yu. Kabantsova

Abstract. We consider the Cauchy problem for a first-order linear inhomogeneous system of partial differential equations with random processes as coefficients. Explicit formulas for the mathematical expectation of the solution are obtained. Examples of systems with Gaussian and uniformly distributed random coefficients are considered. An example of calculations for a simplified learning model at the microlevel is given.

Keywords: first-order systems of partial differential equations with random coefficients, mathematical expectation, variational derivative, characteristic functional.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: L. Yu. Kabantsova, "Mathematical expectation of the solution of a stochastic multiplicatively perturbed system of differential equations," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 250–262. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262

REFERENCES

1. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Methods of Variational Analysis], RKhD, Moscow—Izhevsk, 2006 (in Russian).
2. V. G. Zadorozhniy and L. Yu. Kabantsova, "O reshenii lineynykh sistem differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka" [On solution of first-order linear systems of partial differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 549–563 (in Russian).
3. V. G. Zadorozhniy and M. A. Konovalova, "Mul'tiplikativno vozmushchennoe sluchaynym shumom differentsial'noe uravnenie v banakhovom prostranstve" [Differential equations in Banach spaces multiplicatively perturbed by random noise], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 4, 599–614 (in Russian).
4. S. P. Kapitsa, S. P. Kurdyumov, and G. G. Malinetskiy, *Sinergetika i prognozy budushchego* [Synergetics and Future Forecasts], URSS, Moscow, 2003 (in Russian).
5. G. M. Fikhtengol'ts, *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. II* [Course in Differential and Integral Calculus. Vol. II], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
6. G. E. Shilov, *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs* [Mathematical Analysis. Second Special Course], Fizmatlit, Moscow, 1965 (in Russian).
7. V. G. Zadorozhniy, M. E. Semenov, N. T. Selavesyuk, I. I. Ulshin, and V. S. Nozhkin, "Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model," *Math. Models Comput. Simul.*, 2021, **13**, No. 1, 11–25.
8. T. S. Akhromeeva, "Higher education as an object of mathematical modeling," *Phystech J.*, 1997, **3**, No. 2, 115–145.

L. Yu. Kabantsova
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dlju@yandex.ru