

УДК 519.83

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236

EDN: BEVTED

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СПРАВЕДЛИВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КВОТ НА ВЫЛОВ РЫБЫ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ИГР

Е. М. БОГАТОВ^{1,2}, Н. Е. БОГАТОВА¹

¹ Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», Старый Оскол, Россия

² Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской обл., Губкин, Россия

Аннотация. Теория игр сформировалась как наука во второй половине XX в. Она успела хорошо зарекомендовать себя при анализе экономических ситуаций с участием нескольких субъектов экономической деятельности (игроков), интересы которых полностью или частично противоположны. При этом в ряде случаев решение игры удовлетворяло всех игроков, но не являлось наиболее выгодным (имело место равновесие по Нэшу), а в ряде других случаев оно давало возможность максимально учесть интерес всех сторон (существовало решение, оптимальное по Парето). Перенос принципов теории игр в другие области оказался сопряжённым с рядом трудностей, связанных, в том числе, с правильной интерпретацией стратегий и выигрышей сторон в конфликтной ситуации. По этой причине, несмотря на очевидную пользу от возможного применения методов теории игр к задачам о справедливом распределении квот на вылов рыбы и других морских обитателей, данный шаг до недавнего времени сделан не был.

В работе рассмотрена схема применения алгоритмов теории биматричных и кооперативных игр на примере решения задачи нахождения процента допустимого улова чёрного палтуса Баренцева моря для двух стран—участниц вылова и дана содержательная интерпретация полученных результатов. Основой для расчётов явились реальные данные, собранные российско-норвежской комиссией по рыболовству в последние десятилетия для определения пропорций вылова указанного вида рыбы в соответствующих морских зонах. Поскольку не все компоненты платёжных матриц игроков определяются однозначно, появилась возможность провести параметрический анализ математической модели конфликтной ситуации как при поиске равновесного решения, так и при реализации арбитражной схемы.

Работа является расширенной и дополненной версией доклада [2].

Ключевые слова: игровая модель справедливого распределения квот на вылов, биматричные игры, кооперативные игры, равновесие по Нэшу, арбитражное решение игры, параметрический анализ конфликтной ситуации.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки. Авторы выражают благодарность участникам Крымской осенней математической школы-симпозиума Н. Д. Копачевского КРОМШ-2022 за внимание к работе и полезные обсуждения.

Для цитирования: Е. М. Богатов, Н. Е. Богатова. Исследование задачи о справедливом распределении квот на вылов рыбы методами теории игр // Современ. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 224–236. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236>



1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что арктический запас черного палтуса является трансграничным, т. е. создает скопления во всех экономических зонах Баренцева моря. В соответствии с Конвенцией ООН по морскому праву (ч. V, ст. 63) управление такими запасами должно осуществляться на основе согласования между всеми прибрежными по отношению к указанным запасам странами. В нашем случае прибрежными странами являются Россия, Норвегия и Евросоюз. После признания палтуса совместным ресурсом, возникла задача установления квот на вылов этого гидробионта в общем допустимом улове (ОДУ) между Норвегией и Россией. Попытки ее решения предпринимались в ходе заседаний российско-норвежской комиссии по рыболовству (РНК) с 2001 по 2008 г. За 8 лет работы объединенных российско-норвежских рабочих групп были формализованы и подготовлены для практического использования три основных критерия, по которым можно было выполнить расчёт так называемого «ключа распределения» (пропорций вылова) [4, с. 508]:

- численность палтуса;
- биомасса палтуса;
- история промысла палтуса.

Результаты обследования акватории вылова показали, что в распределении палтуса по численности преимущество имеет Россия, а по биомассе — Норвегия (таб. 1).

ТАБ. 1. Распределение черного палтуса, %

Показатель	НЭЗ	РЭЗ	Шпицберген
Биомасса	53–70	5–6	22–36
Численность	15–31	31–36	36–47

ТАБ. 1. Black halibut distribution, %

Indicator	NEZ	REZ	Svalbard
Biomass	53–70	5–6	22–36
Population	15–31	31–36	36–47

Здесь через НЭЗ обозначена норвежская экономическая зона, через РЭЗ — российская экономическая зона. Район архипелага Шпицберген считается местом совместного вылова черного палтуса [5].

Что касается истории промысла, то здесь стороны согласились взять за основу период с 1973 по 1994 гг., где доля СССР в вылове палтуса составила в среднем 47,8%, Норвегии — 32,6%, третьих стран — 19,6% [4, с. 508].

В течение четырех лет российская и норвежская сторона РНК пытались найти такое распределение квот на вылов черного палтуса, которое устраивали бы всех. И только в 2012 г. соглашение было достигнуто (таб. 2).

ТАБ. 2. Распределение квот на вылов

Страна	Россия	Норвегия	Третьи страны
Вылов, % от ОДУ	45	51	4

ТАБ. 2. Distribution of fishing quotas

Country	Russia	Norway	Third countries
Catch, % of TAC	45	51	4

2. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ СПРАВЕДЛИВОЙ ДОЛИ ВЫЛОВА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ БИМАТРИЧНЫХ ИГР

Как видим, процесс нахождения приемлемого для всех участников распределения доли ОДУ был длительным и сложным. Для его упрощения можно использовать хорошо зарекомендовавшие себя в экономических и других ситуациях методы теории игр (см., например, [3]).

Выберем в качестве игрока A — Россию, в качестве игрока B — Норвегию. Будем считать, что стратегии первого игрока — это выбор фактора для определения доли вылова:

- A_1 — по биомассе;
- A_2 — по численности;
- A_3 — по истории промысла.

Тогда для второго игрока имеет смысл определить стратегии выделения квот на вылов по следующим критериям:

- B_1 — по своей экономической зоне,
- B_2 — по району Шпицбергена.

Усредним данные, имеющиеся в таб. 1, получим следующую таблицу.

ТАБ. 3. Усредненные данные по распределению черного палтуса, %.

Показатель	НЭЗ	РЭЗ	Шпицберген
Биомасса	62	6	29
Численность	23	33	42

ТАБ. 3. Average distribution of black halibut, %.

Indicator	NEZ	REZ	Svalbard
Biomass	62	6	29
Population	23	33	42

Чтобы дополнить данные таб. 3 историческими сведениями, будем пока считать, что в районе архипелага Шпицберген вылавливалось примерно одинаковое¹, количество палтуса ($x\%$ от ОДУ). Положим, для простоты, $x = 10$, тогда в дополнении к таб. 3 будем иметь следующую таблицу:

ТАБ. 4. Исторически сложившиеся объёмы промысла чёрного палтуса.

НЭЗ, % вылова	РЭЗ, % вылова	Шпицберген, % вылова	
		Доля Норвегии	Доля России
38	23	10	10

ТАБ. 4. Historical volumes of the black halibut fishery.

NEZ, % of catch	REZ, % of catch	Svalbard, % of catch	
		Share of Norway	Share of Russia
38	23	10	10

В этом случае соответствующие платёжные матрицы игроков A и B будут выглядеть так:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 33 & 22 \\ 23 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 62 & 15 \\ 23 & 20 \\ 38 & 10 \end{pmatrix}.$$

¹На самом деле, этот вопрос является спорным (см., например, [5]), что даёт возможность более гибко подходить к наполнению платёжных матриц.

Поскольку стратегия A_2 доминирует над A_3 , то последнюю можно исключить и рассматривать биматричную игру с редуцированными матрицами за счёт уменьшения числа применяемых игроком A стратегий.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 33 & 20 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 62 & 15 \\ 23 & 22 \end{pmatrix}.$$

Платёжный тензор такой игры имеет вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 6; 62 & 14; 15 \\ 33; 23 & 20; 22 \end{pmatrix}.$$

Для дальнейшего нам потребуется унифицировать компоненты матриц таким образом, чтобы их сумма в каждой ячейке нового тензора равнялась¹ 100. Для пересчёта компонент a_{11}, b_{11} решим уравнение

$$6x + 62x = 100,$$

получим $x = 100/68 = 1,47$ (коэффициент пропорциональности). Тогда $a_{11} = 6 \cdot 1,47 = 8,82 \approx 9$; $b_{11} = 62 \cdot 1,47 = 91,41 \approx 91$.

Аналогично, для пересчёта компонент a_{21}, b_{21} получим уравнение

$$33y + 23y = 100,$$

откуда извлекаем коэффициент $y = 100/56 = 1,7857$. Тогда получим $a_{21} = 33 \cdot 1,7857 = 58,93 \approx 59$; $b_{21} = 23 \cdot 1,7857 \approx 41$.

Продолжая расчёты для клеток (1,2) и (2,2), получим новый платёжный тензор:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 9; 91 & 48; 52 \\ 59; 41 & 49; 51 \end{pmatrix}.$$

Он распадается на две матрицы

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 48 \\ 59 & 49 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 91 & 52 \\ 41 & 51 \end{pmatrix}.$$

В этой игре есть седловая точка, которой соответствует решение в чистых стратегиях: (A_2, B_2) . Поэтому выигрыши игроков будут равны $H_A = 49\%$ от вылова, $H_B = 51\%$ от вылова.

Поскольку информация о распределении чёрного палтуса (по численности, биомассе и по исторически сложившейся практике вылова) в зонах вылова России и Норвегии в районе архипелага Шпицберген является неполной, а сам вопрос — спорным, имеет смысл рассмотреть разные возможности для построения и редуцирования приведённых платёжных матриц игроков A и B . Если незначительно поменять процентное соотношение биомассы, численности и выловленного объёма палтуса стран в обсуждаемом районе, взяв его равным 45:55, 47:53 и 48:52, соответственно (в пользу Норвегии), то приведённые платёжные матрицы игроков A и B будут иметь вид

$$\widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 & 45 \\ 59 & 47 \\ 37 & 48 \end{pmatrix}; \quad \widehat{B}_1 = \begin{pmatrix} 91 & 55 \\ 41 & 53 \\ 63 & 52 \end{pmatrix}.$$

В этой ситуации следует исключить из рассмотрения *первую* стратегию игрока A (а не последнюю, как это было сделано выше). Тогда платёжный тензор игры будет иметь вид

$$\widehat{P}_1 = \begin{pmatrix} 59; 41 & 47; 53 \\ 37; 63 & 48; 52 \end{pmatrix}.$$

В результате мы получим другое равновесное решение биматричной игры в смешанных стратегиях, которому соответствуют выигрыш игрока A равный 47,5% от общего вылова, и игрока B — 52,5% от общего вылова.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, продолжая считать, что стратегия A_1 доминируется в матрице A стратегий A_2 ($a_{2i} \geq a_{1i}$). Обозначим через ε и δ величины превышения доли

¹Например, $a_{11} + b_{11} = 100$ будет означать, что при определении квот на вылов для двух стран мы отталкиваемся только от фактора биомассы, отбрасывая все остальные. В этом случае общий вылов берется за 100%.

норвежского распределения палтуса над российской в районе Шпицбергена по биомассе и численности соответственно. Тогда платёжный тензор новой игры можно представить в виде

$$P_{\varepsilon, \delta} = \begin{pmatrix} 9; 91 & 50 - \varepsilon; 50 + \varepsilon \\ 59; 41 & 50 - \delta; 50 + \delta \end{pmatrix}.$$

Для нахождения равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях такой биматричной игры выделим платёжные матрицы игроков:

$$A_I = \begin{pmatrix} 9 & 50 - \varepsilon \\ 59 & 50 - \delta \end{pmatrix}; \quad B_I = \begin{pmatrix} 91 & 50 + \varepsilon \\ 41 & 50 + \delta \end{pmatrix}.$$

Обозначим оптимальную смешанную стратегию игрока A через $X^* = (p^*; 1 - p^*)$, игрока B — через $Y^* = (q^*; 1 - q^*)^T$, где $q^*, p^* \in [0; 1]$. Условия приемлемости ситуации (X^*, Y^*) для игроков A, B хорошо известны (см., например, [7, гл. 2-3]) и имеют вид

$$A_i(Y^*)^T \leq X^* A(Y^*)^T = H_A, \quad j = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$X^* B_j \leq X^* B(Y^*)^T = H_B, \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

где A_i — i -я строка матрицы A_I , B_j — j -й столбец матрицы B_I .

В предположении о том, что биматричная игра не имеет решений в чистых стратегиях¹ (что в нашем случае даёт $0 < \varepsilon < \delta$), для приемлемой ситуации получаем

$$q^* = \frac{\Delta}{50 + \Delta}, \quad (2.3)$$

где $\Delta = \delta - \varepsilon$. Тогда равновесная стратегия игрока B имеет вид

$$Y^* = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{50 + \Delta} \\ \frac{50}{50 + \Delta} \end{pmatrix}.$$

Из условия (2.2) выводим

$$p^* = \frac{41 - \delta}{50 - \Delta}. \quad (2.4)$$

Таким образом, равновесная стратегия игрока A выглядит так:

$$X^* = \left(\frac{41 - \delta}{50 - \Delta}; \frac{9 - \varepsilon}{50 - \Delta} \right).$$

Вычислим выигрыши игроков A, B из формул (2.1) и (2.2).

$$\begin{aligned} H_A = X^* A(Y^*)^T &= \frac{1}{2500 - \Delta^2} (41 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 9 & 50 - \varepsilon \\ 59 & 50 - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 50 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{125000 - 2050\delta - 9\delta^2 - 450\varepsilon + 68\delta\varepsilon - 59\varepsilon^2}{2500 - (\delta - \varepsilon)^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} H_B = X^* B(Y^*)^T &= \frac{1}{2500 - \Delta^2} (41 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 91 & 50 + \varepsilon \\ 41 & 50 + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 50 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{125000 + 1150\delta - 91\delta^2 + 450\varepsilon + 32\delta\varepsilon - 41\varepsilon^2}{2500 - (\delta - \varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введём теперь ограничения для возможных изменений величин δ и ε , исходя из смысла задачи применительно к оптимальным стратегиям игроков²

$$\begin{cases} 0,1 \leq \varepsilon \leq 8,9, \\ \varepsilon \leq \delta \leq 10. \end{cases} \quad (2.7)$$

¹Максимальные элементы в столбцах матрицы A_I не совпадают с максимальными элементами в строках матрицы B_I .

²Верхняя граница δ может быть здесь, при необходимости, увеличена.

Представляет интерес найти соответствующие границы для выигрышей игроков. Это можно сделать методами условной оптимизации, решая задачи

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \max, \\ (\varepsilon, \delta) \in T; \quad i = 1, 2; \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \min, \\ (\varepsilon, \delta) \in T; \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь T — трапеция в системе координат (ε, δ) , определяемая неравенствами (2.7); через H_1 обозначен выигрыш игрока A , через H_2 — выигрыш игрока B .

Применяя к задачам (2.8)-(2.9) стандартные методы дифференциального исчисления, получим:

$$\begin{aligned} H_1^{\min} &= H_1(8,9; 10) \approx 40,4\% \text{ от ОДУ}, & H_1^{\max} &= H_1(0,1; 0,1) \approx 49,9\% \text{ от ОДУ}, \\ H_2^{\min} &= H_2(0,1; 0,1) \approx 50,1\% \text{ от ОДУ}, & H_2^{\max} &= H_2(10; 0,1) \approx 53,1\% \text{ от ОДУ}. \end{aligned}$$

Из этих результатов следует, что максимально возможная доля в общем допустимом вылове палтуса для игрока A равна 0,499, а для игрока B — 0,531. При этом, как бы не менялись величины ε, δ в рамках допустимого коридора (2.7), доля игрока B не может быть ниже чем 0,501 от общего вылова, а игрока A — не может быть ниже, чем 0,404 от общего вылова.

Проведём теперь параметрический анализ игровой ситуации, соответствующей возмущению тензора \hat{P}_1 . По аналогии с предыдущим имеем

$$\hat{P}_{\varepsilon, \delta} = \begin{pmatrix} 59; 43 & 50 - \varepsilon; 50 + \varepsilon \\ 37; 63 & 50 - \delta; 50 + \delta \end{pmatrix},$$

причём $\varepsilon > \delta$, что даст отсутствие седловой точки. платёжные матрицы игроков A и B будут иметь вид

$$\hat{A}_I = \begin{pmatrix} 59 & 50 - \varepsilon \\ 37 & 50 - \delta \end{pmatrix}; \quad \hat{B}_I = \begin{pmatrix} 41 & 50 + \varepsilon \\ 63 & 50 + \delta \end{pmatrix}.$$

Условие приемлемости ситуации смешанного равновесия (X, Y) в этом случае равносильно выполнению равенства

$$A_2 Y^T = A_1 Y^T,$$

где A_i ($i = 1, 2$) — строки матрицы \hat{A}_I . Отсюда выводим

$$q^* = \frac{\Delta}{22 + \Delta} > 0, \quad (2.10)$$

где $\Delta = \varepsilon - \delta$. Поэтому равновесная стратегия игрока B выглядит так:

$$Y^* = \left(\frac{\Delta}{22 + \Delta}; \frac{22}{22 + \Delta} \right)^T.$$

Из условия приемлемости ситуации (X, Y) для игрока B :

$$X B_1 = X B_2,$$

где B_j ($j = 1, 2$) — столбцы матрицы \hat{B}_I , получаем

$$q^* = \frac{13 - \delta}{22 - \Delta}.$$

Таким образом, $X^* = \left(\frac{13 - \delta}{22 - \Delta}; \frac{9 - \varepsilon}{22 - \Delta} \right)$.

Теперь выигрыши игроков будут иметь вид

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{1}{484 - \Delta^2} (13 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 59 & 50 - \varepsilon \\ 37 & 50 - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{-59\delta^2 + 96\delta\varepsilon - 198\delta - 37\varepsilon^2 - 286\varepsilon + 24200}{484 - (\varepsilon - \delta)^2}, \\ H_B &= \frac{1}{484 - \Delta^2} (13 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 41 & 50 + \varepsilon \\ 63 & 50 + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{24200 + 198\delta - 41\delta^2 + 286\varepsilon + 104\delta\varepsilon - 63\varepsilon^2}{484 - (\delta - \varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Исходя из смысла задачи и естественных ограничений на компоненты векторов X^* и Y^* , целесообразно вывести границы возможных изменений переменных ε , δ по аналогии с (2.7):

$$\begin{cases} 0,1 \leq \delta \leq 9, \\ \delta \leq \varepsilon \leq 8,9. \end{cases} \quad (2.11)$$

Соответствующие задачи условной оптимизации будут иметь вид

$$\begin{cases} H_A(\delta, \varepsilon) \rightarrow \text{extr}, \\ (\varepsilon, \delta) \in T_1; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} H_B(\delta, \varepsilon) \rightarrow \text{extr}, \\ (\varepsilon, \delta) \in T_1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь T_1 — треугольник в системе координат (δ, ε) , определенный неравенствами (2.11). Решение задач (2.12), (2.13) дает следующие границы для H_A и H_B :

$$\begin{aligned} H_A^{\min} &= H_A(8,9; 8,9) \approx 41,1\% \text{ от ОДУ}, & H_A^{\max} &= H_A(0,1; 0,19) \approx 49,9\% \text{ от ОДУ}, \\ H_B^{\min} &= H_B(0,1; 8,9) \approx 50,1\% \text{ от ОДУ}, & H_B^{\max} &= H_B(8,9; 8,9) \approx 58,9\% \text{ от ОДУ}. \end{aligned}$$

Как видим, максимально возможная доля вылова игрока A не поменялась и составила 0,499, а игрока B увеличилась и составила 0,589 от общего вылова. В то же время нижний порог возможного выигрыша игрока A незначительно увеличился (до 0,411), а аналогичный порог игрока B остался прежним (0,501 от общего вылова). Это говорит о том, что ситуация с редуцированием первой строки платёжного тензора в целом более выгодна второму игроку и он будет стремиться её реализовать, игнорируя сведения о зональном распределении палтуса, исходя из биомассы. В то же время первый игрок более заинтересован в игнорировании сведений об исторически сложившихся объёмах промысла; это позволит ему приблизиться к 50%-й доле общего вылова.

3. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ СПРАВЕДЛИВОЙ ДОЛИ ВЫЛОВА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

Будем считать что игроки (страны) могут заключать между собой соглашение о распределении квот на вылов палтуса, используя арбитражное решение Нэша. В соответствии с известной схемой (см., например, [1, гл. 6], [9, гл. VII]) необходимо построить область допустимых решений задачи с платёжными матрицами A , B из предыдущего пункта. Сделаем это в системе координат Ou_1u_2 , где u_i — выигрыш i -го игрока, взяв за основу тензор P :

$$P = \begin{pmatrix} 6; 62 & 14; 15 \\ 33; 23 & 20; 22 \\ 28; 38 & 9; 11 \end{pmatrix}.$$

Выпуклая комбинация точек с координатами $(a_{ij}; b_{ij})$ (область допустимых решений) представляет собой треугольник KLM , где $K(6; 62)$, $L(9; 11)$, $M(33; 23)$. Внутри него лежат точки $Q_1(23; 38)$, $Q_2(14; 15)$, $Q_3(20; 22)$, соответствующие декартовым произведениям остальных чистых стратегий.

Определим величины выигрышей игроков, которые они могут получить, не вступая в коалицию (точку угрозы (\hat{u}_1, \hat{u}_2)). Для этого решим матричные игры с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 33 & 20 \\ 23 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 62 & 15 \\ 23 & 22 \\ 38 & 11 \end{pmatrix}.$$

Игра с матрицей A имеет седловую точку, её цена равна $v_A = 20$. Игра с матрицей B также имеет седловую точку; цена этой игры равна $v_B = 22$. Таким образом точка угрозы имеет координаты $(20; 22)$, она совпадает с Q_3 .

Проведем через точку угрозы линии, параллельные координатным осям. Они «высекают» из Парето-оптимального множества решений KM переговорное множество FM (см. рис. 1). На отрезке переговорного множества будет располагаться единственная точка арбитражного решения

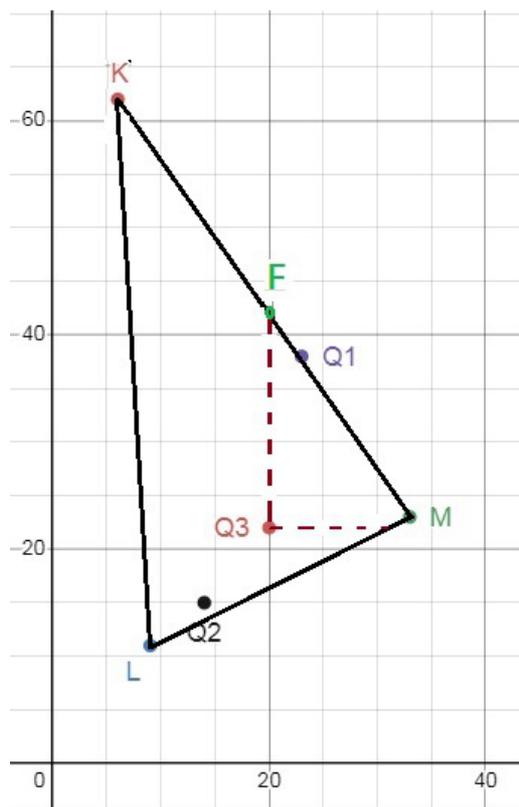


Рис. 1. Область допустимых решений кооперативной игры с платёжным тензором P , содержащая переговорное множество FM .

FIG. 1. The domain of admissible solutions of a cooperative game with payoff tensor P , containing the negotiation set FM .

Нэша N , в которой достигается максимум произведения $g(u) = (u_1 - \hat{u}_1)(u_2 - \hat{u}_2)$ — функции полезности игроков. В нашем случае $g(u) = (u_1 - 20)(u_2 - 22)$; для её максимизации удобней перейти к более привычным обозначениям в координатной системе Oxy :

$$g(u) \equiv g(x, y) = (x - 20)(y - 22). \tag{3.1}$$

Здесь y — линейная функция, соединяющая точки F и M , её уравнение выглядит так

$$y = 62 - \frac{29}{27}(x - 6). \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и проводя элементарные преобразования, получим квадратичную функцию

$$g(x) = \frac{-13x^2 + 698x - 8760}{9},$$

максимум которой достигается в точке $x_N = 349/13 \approx 26,8$, лежащей на отрезке FM . Соответствующая ей ордината равна $y_N = 287/9 \approx 31,9$.

Таким образом¹, арбитражное решение Нэша — это точка $N(26,8; 31,9)$.

Перейдем к относительной шкале, взяв суммарный вылов в арбитражном решении за 100%. Тогда доля игрока A (России) будет равна 45,65% от ОДУ, а доля игрока B (Норвегии) — 54,35%.

Для оценки результата проведём расчеты в рамках теории бескоалиционных игр, преобразуя редуцированные матрицы A_1 и B_1 из предыдущего параграфа к относительной шкале ($a_{ij}^1 + b_{ij}^1 = 100\%$) с округлением компонент a_{i2}^1, b_{i2}^1 до десятых. Получим новые платёжные матрицы

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 & 48,2 \\ 59 & 47,6 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 91 & 51,8 \\ 41 & 52,4 \end{pmatrix}.$$

¹Попутно можно сделать вывод о том, что в определении справедливой доли от ОДУ для стран—участниц вылова не участвовало соотношение сил в районе Шпицбергена.

Подставляя в формулы (2.5)-(2.6) для вычисления H_1 и H_2 величины $\varepsilon = 1,8$, $\delta = 2,4$, соответствующие матрицам \widehat{A}_2 и \widehat{B}_2 , получим следующие величины выигрышей: $H_A = 45,6\%$ и $H_B = 54,3\%$, что практически полностью совпадает с полученным выше решением.

Таким образом, игра «в открытую» не даёт никакого преимущества ни одному из игроков. Однако параметрический анализ игровой ситуации здесь тоже представляет интерес, поскольку он основан на других принципах (сохранение «рисунка» игры) и может дать дополнительную информацию о возможных предельных значениях выигрышей игроков и их поведении.

Введём параметры ε и δ возмущения матриц A и B , предполагая для простоты, что изменяться могут лишь компоненты a_{12}, a_{22} (b_{12}, b_{22}). А именно, примем за ε и δ шаги отступа от половинного значения компонентов последнего столбца таб. 3-4, которые послужили основой для построения платёжных матриц. Получим

$$A_1^K = \begin{pmatrix} 6 & 14,5 - \varepsilon \\ 33 & 21 - \delta \\ 23 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_1^K = \begin{pmatrix} 62 & 14,5 + \varepsilon \\ 23 & 21 + \delta \\ 38 & 11 \end{pmatrix}.$$

Угловые точки области допустимых решений остаются прежними: $K(6; 62)$, $L(9; 11)$, $M(33; 23)$.

Чтобы записать условие того, что точки Q_2, Q_3 не выйдут за пределы треугольника KLM , составим уравнения его сторон

$$LM : y = 6,5 + 0,5x, \quad (3.3)$$

$$KL : y = 164 - 17x. \quad (3.4)$$

Зафиксируем координаты точки Q_2 :

$$Q_2(14,5 - \varepsilon; 14,5 + \varepsilon). \quad (3.5)$$

Для того чтобы точка $Q_2(x_2, y_2)$ оставалась внутри треугольника KLM , достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} y_2 \geq 6,5 + 0,5x_2, \\ y_2 \geq 164 + 17x_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Подставим в (3.6) координаты точки Q_2 из (3.5), получим

$$\begin{cases} \varepsilon \geq -0,5, \\ \varepsilon \leq 6,0625. \end{cases}$$

Теперь зафиксируем координаты точки Q_3

$$Q_3(21 - \delta; 21 + \delta). \quad (3.7)$$

Точка Q_3 также должна остаться внутри KLM , значит её координаты с необходимостью удовлетворяют системе (3.6). Отсюда выводим

$$\begin{cases} \delta \geq -\frac{8}{3}, \\ \delta \leq 13,375. \end{cases}$$

Таким образом, при $\varepsilon \in [-0,5; 6,0685]$, $\delta \in [-8/3; 13,375]$ областью допустимых решений останется треугольник KLM , а оптимальным множеством по Парето — отрезок KM .

Чтобы определить положение точки угрозы N на переговорном множестве, выясним, при каких условиях стратегия № 1 будет сохранять своё доминирование над стратегией № 3 и в матрице A_1^K , и в матрице B_1^K . Для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} 21 - \delta \geq 9, \\ 14,5 + \varepsilon \geq 11, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \delta \leq 12, \\ \varepsilon \geq 3,5. \end{cases} \quad (3.8)$$

Для того чтобы удовлетворялись условия (3.8), необходимо сузить область возможных изменений δ , положив

$$\delta \in [-8/3; 12]. \quad (3.9)$$

Тогда для нахождения точки угрозы целесообразно редуцировать матрицы A_1^K и B_1^K в контексте матричных игр к следующим матрицам:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 14,5 - \varepsilon \\ 33 & 21 - \delta \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 62 & 14,5 + \varepsilon \\ 23 & 21 + \delta \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Определим наличие седловой точки в игре с матрицей (3.10). В соответствии с принципом минимакса имеем:

$$\alpha_1 = \min\{6; 14,5 - \varepsilon\} = 6; \quad \alpha_2 = \min\{33; 21 - \delta\} = 21 - \delta.$$

Нижняя цена игры равна $\alpha = \max\{\alpha_1; \alpha_2\} = 21 - \delta$.

Для игрока B имеем

$$\beta_1 = \max\{6; 33\} = 33; \quad \beta_2 = \max\{14,5 - \varepsilon; 21 - \delta\} = 21 - \delta.$$

Последнее равенство справедливо при условии, что $\delta < 6,5 + \varepsilon$. В этом случае $\alpha = \beta$ и цена игры (3.10) равна $21 - \delta$.

Аналогично, для игры (3.11) получаем

$$\alpha_1 = 14,5 + \varepsilon, \quad \alpha_2 = 21 + \delta \quad (\text{если } \delta > 2); \\ \beta_1 = 63, \quad \beta_2 = 21 + \delta \quad (\text{если } \delta > \varepsilon - 6,5).$$

Для одновременного выполнения неравенств (3.8)-(3.9) нам удобно будет положить $\varepsilon = 35/6$. Тогда условия того, что Q_3 остаётся точкой угрозы, а отрезок FM — переговорным множеством, где точка F имеет абсциссу $21 - \delta$, дадут следующие промежутки¹:

$$\varepsilon \in [-0,5; 6,0625], \quad \delta \in [\varepsilon - 6,5; 2].$$

Составим для решения «возмущённой» кооперативной игры с матрицами A_1^K и B_1^K функцию полезности

$$g(x) = (x - 21 + \delta)(149/3 - \delta - 13x/9).$$

Её точка максимума будет иметь абсциссу $x_0 = \frac{360 - 11\delta}{13}$ и ординату $y_0 = \frac{92}{3} + \frac{11\delta}{9}$.

Поскольку x_0, y_0 линейно зависят от δ , можно определить пределы изменения выигрышей игроков, подставляя вместо δ её наименьшее и наибольшее значение из отрезка $[0, 2]$. Получим

$$x_0(0) = x_0^{\max} = \frac{360}{13} \approx 27,7; \quad y_0(0) = y_0^{\max} = \frac{298}{9} \approx 33,11.$$

Этим значениям соответствуют выигрыши $H_A^{\max} \approx 45,5\%$, $H_B^{\max} \approx 54,5\%$.

Аналогично,

$$x_0(2) = x_0^{\min} = 26; \quad y_0(2) = y_0^{\min} \approx 30,67.$$

Найденным значениям соответствуют выигрыши $H_A^{\min} \approx 45,9\%$; $H_B^{\min} \approx 54,1\%$.

Таким образом, если при положительных δ величина ε меняется в пределах $[-0,5; 35/6]$, то выигрыши игроков не зависят от ε и находятся в пределах от 45,5% до 45,9% от ОДУ (игрок A) и от 54,1% до 54,5% от ОДУ (игрок B).

Разрешим теперь величине δ принимать отрицательные значения в пределах от $\varepsilon - 6,5$ до нуля, тогда при поиске новых экстремальных границ выигрышей игроков (координат точки Нэша) будем учитывать тот факт, что они являются линейными функциями от ε :

$$x_0^\varepsilon = x_0(\varepsilon - 6,5) = \frac{431,5 - 11\varepsilon}{13}; \quad y_0^\varepsilon = y_0(\varepsilon - 6,5) = \frac{204,5 + 11\varepsilon}{9}.$$

Тогда максимально возможное значение величины ε , равное 6,0625, даст игроку A выигрыш, равный приблизительно 48,2% от ОДУ, а игроку B — равный приблизительно 51,8% от ОДУ.

¹Здесь мы будем разрешать принимать отрицательные значения величинам ε и δ , что будет означать перевес «начальных условий» в пользу игрока A .

В итоге, если игрок A по каким-либо причинам сможет обеспечить преимущество a_{22} над b_{22} хотя бы на 0,4375 единиц, то это даст ему возможность увеличить процент позволенного вылова палтуса в ОДУ на 2,3% (по сравнению с тем, что получится при отсутствии этого преимущества) несмотря на то, что его позиция a_{12} по сравнению с b_{12} может быть гораздо хуже (более, чем на 6 единиц).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые из области теории игр инструменты могут помочь в определении квот на вылов морских гидробионтов для любой пары стран, осуществляющих их совместный промысел. При этом допускается применение как теории биматричных бескоалиционных игр, так и арбитражной схемы Нэша. В любом случае решение конфликтной ситуации существует, единственно и даёт взаимовыгодное решение в виде оптимальных пропорций вылова. Если допустить, что в определении платёжных матриц игроков A и B присутствует неопределённость, то при любом подходе имеет смысл рассматривать континуум игровых ситуаций, вводя в некоторые компоненты A и B малые параметры (данное действие близко к поиску «равновесия дрожащей руки», определённого в работе Р. Селтена [14]). Это позволяет исследовать в каком-то смысле обратную задачу, т. е. задачу об определении того, как и на сколько можно изменить платёжные матрицы игроков, чтобы максимизировать (минимизировать) выигрыш одного из них.

Представленная методология может быть взята за основу при проектировании систем поддержки принятия решений о распределении квот на вылов рыбы и других морских обитателей между двумя субъектами вылова (в качестве ориентира см., например, [11]). Наличие трёх и более (нередуцируемых) строк в платёжном тензоре не является препятствием: поиск решения можно осуществить по алгоритму Лемке—Хоусона (см., например, [6, гл. 3]).

В качестве возможного содержательного продолжения настоящего исследования можно назвать расширение множества игроков до трёх с использованием теории триматричных игр [12, 13], а также коалиционных игр [10, гл. 13] с созданием коалиций «двое против одного».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безруков А. Б., Саитгараев С. С. Прикладная теория игр. — Челябинск: Челябинский гос. унив., 2001.
2. Богатов Е. М., Богатова Н. Е. О применении методов теории игр к задаче распределения квот на вылов морских гидробионтов // В сб.: «Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2022». — Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2022. — С. 44.
3. Горелик В. А., Кононенко А. Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982.
4. Древетняк К. В., Греков А. А., Ковалев Ю. А. и др. История решения вопроса по определению ключей распределения общего допустимого улова черного палтуса Баренцева моря // Вопросы рыболовства. — 2016. — 17, № 4. — С. 502–512.
5. Зиланов В. К., Клочков Д. Н., Шибанов В. Н. Рыболовный Шпицберген // Рыбное хозяйство. — 2020. — № 1. — С. 14–24.
6. Колобашкина Л. В. Основы теории игр. — М.: Бином, 2011.
7. Конюховский П. В., Малова А. С. Теория игр. — М.: Юрайт, 2019.
8. Кремлев А. Г. Основные понятия теории игр. — Екатеринбург: Урал. унив., 2016.
9. Оуэн Г. Теория игр. — М.: Едиториал УРСС, 2005.
10. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. — СПб: БХВ-Петербург, 2014.
11. Рогачев А. Ф., Скитер Н. Н., Плещенко Т. В. Разработка системы поддержки принятия решений для обоснования параметров эколого-экономических систем // Изв. Нижневолжск. агроуниверситет. комплекса: наука и высш. проф. обр. — 2012. — № 2. — С. 238–242.
12. Gonzalez-Alcon C., Borm P., Hendrickx R. Nash equilibria in 2x2x2 trimatrix games with identical anonymous best-replies // Int. Game Theory Review. — 2014. — 16, № 4. — С. 1–11.
13. Romanuke V. Pareto-efficient strategies in 3-person games played with staircase-function strategies // Commun. Combin. Optim. — 2022. — 7, № 2. — С. 1–35.
14. Selten R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games // Int. J. Game Theory. — 1975. — № 4. — С. 25–55.

Е. М. Богатов

Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», Старый Оскол, Россия

Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской обл., Губкин, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru

Н. Е. Богатова

Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», Старый Оскол, Россия

E-mail: emejnik@gmail.com

UDC 519.83

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236

EDN: BEVTED

Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory

E. M. Bogatov^{1,2} and N. E. Bogatova¹

¹*Starooskol'skii Technological Institute, branch of the National University of Science and Technology MISIS, Staryi Oskol, Russia*

²*Branch of the National University of Science and Technology MISIS in the city of Gubkin, Gubkin, Russia*

Abstract. Game theory emerged as a science in the second half of the 20th century. It managed to prove itself well in the analysis of economic situations involving several subjects of economic activity (players), whose interests are completely or partially opposite. At the same time, in a number of cases, the solution of the game satisfied all players, but was not the most profitable (there was a Nash equilibrium), and in a number of other cases, it was possible to take into account the interests of all parties to the maximum (there was a Pareto optimal solution). The transfer of the principles of game theory to other areas turned out to have a number of difficulties associated, among other things, with the correct interpretation of strategies and gains of the parties in a conflict situation. For this reason, despite the obvious benefit from the possible application of game theory methods to problems of a fair distribution of quotas for catching fish and other seafood, this step has not been taken until recently.

In this paper, we consider a scheme for applying the algorithms of the theory of bimatrix and cooperative games on the example of solving the problem of finding the percentage of the allowable catch of the black halibut in the Barents Sea for two countries participating in the catch and give a meaningful interpretation of the results. The basis for the calculations was real data collected by the Russian–Norwegian Fisheries Commission in recent decades to determine the proportions of the catch of the indicated fish species in the respective sea zones. Since not all components of the payoff matrices of the players are uniquely determined, it became possible to perform a parametric analysis of the mathematical model of the conflict situation both in the search for an equilibrium solution and in the implementation of the arbitration scheme.

The work is an extended and supplemented version of the report [2].

Keywords: game model of fair distribution of catch quotas, bimatrix games, cooperative games, Nash equilibrium, game arbitrage solution, parametric conflict analysis.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.



Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received. The authors are grateful to the participants of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium of N. D. Kopachevsky (KROMSH-2022) for their attention to the work and useful discussions.

For citation: E. M. Bogatov, N. E. Bogatova, “Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 224–236. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236>

REFERENCES

1. A. B. Bezrukov and S. S. Saitgaraev, *Prikladnaya teoriya igr* [Applied Game Theory], Chelyabinsk State Univ., Chelyabinsk, 2001 (in Russian).
2. E. M. Bogatov and N. E. Bogatova, “O primeneniі metodov teorii igr k zadache raspredeleniya kvot na vylov morskikh gidrobiontov” [On the application of game theory methods to the problem of distribution of quotas for the catch of marine hydrobionts], In: *Sbornik materialov mezhdunarodnoy konferentsii KROMSh-2022* [Collection of materials of the international conference KROMSH-2022], IT «ARIAL», Simferopol’, 2022, pp. 44 (in Russian).
3. V. A. Gorelik and A. F. Kononenko, *Teoretiko-igrovye modeli prinyatiya resheniy v ekologo-ekonomicheskikh sistemakh* [Game-theoretic decision-making models in ecological-economic systems], Radio i svyaz’, Moscow, 1982 (in Russian).
4. K. V. Drevetnyak, A. A. Grekov, Yu. A. Kovalev, etc., “Istoriya resheniya voprosa po opredeleniyu klyuchey raspredeleniya obshchego dopustimogo ulova chernogo paltusa Barentseva morya” [The history of resolving the issue of determining the keys for the distribution of the total allowable catch of black halibut in the Barents Sea], *Voprosy rybolovstva* [Fisheries Issues], 2016, **17**, No. 4, 502–512 (in Russian).
5. V. K. Zilanov, D. N. Klochkov, and V. N. Shibanov, “Rybolovnyy Shpitsbergen” [Fishing Svalbard], *Rybnoe khozyaystvo* [Fisheries], 2020, No. 1, 14–24 (in Russian).
6. L. V. Kolobashkina, *Osnovy teorii igr* [Fundamentals of Game Theory], Binom, Moscow, 2011 (in Russian).
7. P. V. Konyukhovskiy and A. S. Malova, *Teoriya igr* [Game Theory], Yurayt, Moscow, 2019 (in Russian).
8. A. G. Kremlev, *Osnovnye ponyatiya teorii igr* [Basic Concepts of Game Theory], Ural Univ., Ekaterinburg, 2016 (in Russian).
9. G. Owen, *Teoriya igr* [Game Theory], Editorial URSS, Moscow, 2005 (in Russian).
10. L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, and E. V. Shevkoplyas, *Teoriya igr* [Game Theory], BKhV-Peterburg, Saint Petersburg, 2014 (in Russian).
11. A. F. Rogachev, N. N. Skiter, and T. V. Pleshchenko, “Razrabotka sistemy podderzhki prinyatiya resheniy dlya obosnovaniya parametrov ekologo-ekonomicheskikh sistem” [Development of a decision support system to substantiate the parameters of ecological and economic systems], *Izv. Nizhnevolzhsk. agrouniversitet. kompleksa: nauka i vyssh. prof. obr.* [Bull. Lower Volga Agricult. Univ. Complex. Sci. Higher. Prof. Edu.], 2012, No. 2, 238–242 (in Russian).
12. C. Gonzalez-Alcon, P. Borm, and R. Hendrickx, “Nash equilibria in 2x2x2 trimatrix games with identical anonymous best-replies,” *Int. Game Theory Review*, 2014, **16**, No. 4, 1–11.
13. V. Romanuke, “Pareto-efficient strategies in 3-person games played with staircase-function strategies,” *Commun. Combin. Optim.*, 2022, **7**, No. 2, 1–35.
14. R. Selten, “Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games,” *Int. J. Game Theory*, 1975, No. 4, 25–55.

E. M. Bogatov

Starooskol’skii Technological Institute, branch of the National University of Science and Technology MISIS, Staryi Oskol, Russia

Branch of the National University of Science and Technology MISIS in the city of Gubkin, Gubkin, Russia

E-mail: embogatov@inbox.ru

N. E. Bogatova

Starooskol’skii Technological Institute, branch of the National University of Science and Technology MISIS, Staryi Oskol, Russia

E-mail: emejnik@gmail.com