

УДК 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223

EDN: BSNBJE

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

С. И. Безродных, С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
Москва, Россия

Аннотация. Построен эффективный численно-аналитический метод решения начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса на отрезке с периодическим краевым условием. Метод включает в себя редукцию к линейной задаче на основе явно-неявной схемы дискретизации по времени и аналитическое решение вспомогательной линейной задачи на каждом временном шаге с использованием явного вида соответствующей функции Грина. Эффективность построенного метода обусловлена тем, что алгоритм решения вспомогательной задачи имеет всего лишь линейную сложность по количеству используемых узлов пространственной дискретизации, не задействуя при этом разностные аппроксимации производных искомой функции. На основе подстановки Коула—Хопфа получено явное периодическое решение задачи на отрезке и проведено сопоставление результатов численной реализации построенного алгоритма с этим явным решением. Разработанный метод продемонстрировал сочетание высокой вычислительной эффективности и точности получаемого результата.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, численно-аналитический метод, функция Грина, явно-неявная схема.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы благодарят проф. В. И. Власова за полезные стимулирующие обсуждения и внимание к работе. Работа выполнена в ФИЦ ИУ РАН за счет средств госзадания.

Для цитирования: С. И. Безродных, С. В. Пикулин. Численно-аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 208–223. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения Бюргерса на отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (1.2)$$

и краевыми условиями периодичности

$$u(t, -1) = u(t, 1), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, -1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1), \quad (1.3)$$



где коэффициент диффузии $\lambda > 0$ не зависит от t и x , функции $u_0(x)$ и $f(t, x)$ являются непрерывными и периодическими по $x \in [-1, 1]$.

Известно (см. [11, гл. 4]), что решение задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно в классе $C^1([0, T], C^2([-1, 1]))$. Отметим, что особый интерес представляет случай, когда коэффициент λ является малой величиной (см. [7, гл. 2]).

Как правило (см. [8, гл. VIII]), численное решение начально-краевых задач для нелинейного эволюционного уравнения, к классу которых принадлежит рассматриваемая задача (1.1)–(1.3), включает в себя этап пространственно-временной дискретизации при помощи той или иной схемы приближения искомого решения и входящих в уравнение его производных, затем переход ко вспомогательной линейной задаче, и, наконец, решение соответствующего линейного уравнения на каждом временном слое. При этом основная вычислительная нагрузка порождается последним из перечисленных шагов, т. е. решением линейной задачи.

Метод, построенный в настоящей работе, включает использование явно-неявной схемы дискретизации по времени [3, 9, 14, 16], приводящий на каждом шаге к линейной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и независимой переменной x . Схема метода изложена в разделе 2.

Новизна применяемого в настоящей работе подхода заключается в способе решения указанной линейной задачи, опирающемся на использование явного вида соответствующей функции Грина и имеющем при этом алгоритмическую сложность $O(N)$ при $N \rightarrow \infty$, где N — количество узлов пространственной аппроксимации. Линейная по N сложность алгоритма решения вспомогательной задачи на временном слое обеспечивает высокую эффективность разработанного алгоритма. Метод решения линейной задачи на отрезке с периодическим краевым условием изложен в разделах 3 и 4. Отметим, что близкий подход использовался в работе [2] при решении краевой задачи для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения, где вместо функции Грина при вычислениях был использован главный член ее асимптотики, построенный методом ВКБ.

Известно (см. [11]), что уравнение Бюргерса (1.1) с помощью некоторой замены искомой функции (т. н. подстановки Коула–Хопфа) приводится к линейному уравнению теплопроводности. Такая редукция позволяет строить решения уравнения (1.1) в явном виде (см., например, [5]). В разделе 5 указанным способом построено явное периодическое решение уравнения Бюргерса, имеющее N -образный профиль. Это решение является аналогом известного решения Хохлова, определенного на всей числовой оси (см. [10]). Отметим в связи с этим также работы [6, 13], в которых на основе применения теста Пенлеве построены в явном аналитическом либо в полуаналитическом виде решения уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. Это квазилинейное параболическое уравнение, в отличие от уравнения Бюргерса, не приводится какой-либо заменой переменных к линейному виду, однако излагаемый в данной работе метод применим также и к уравнениям такого типа.

В разделе 6 приведены результаты численной реализации построенного метода и их сопоставление с найденным явным решением.

2. СХЕМА МЕТОДА

Для того чтобы построить приближенное решение задачи (1.1)–(1.3), введем дискретизацию по времени с шагом $\tau = T/K$, $K \in \mathbb{N}$, и обозначим через $u_n(x)$ искомое приближение при $t = t_n$:

$$u_n(x) \approx u(t_n, x), \quad x \in [-1, 1], \quad t_n = n\tau.$$

Предполагая, что функции $u_1(x), \dots, u_n(x)$ уже вычислены, воспользуемся для нахождения функции $u_{n+1}(x)$ при $n > 1$ явно-неявной трехслойной схемой, центрированной в точке

$$t_n^* = t_n + \frac{\tau}{2},$$

включающей приближение линейного члена по схеме Кранка–Николсон (см. [15]) и экстраполяцию нелинейного члена по схеме Адамса–Бэшфорта (см. [14]):

$$\frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2} + \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right) + \frac{3}{2} u_n(x) \frac{du_n}{dx} - \frac{1}{2} u_{n-1}(x) \frac{du_{n-1}}{dx} = f(t_n^*, x),$$

откуда получаем относительно $u_{n+1}(x)$ следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (одномерное уравнение Гельмгольца):

$$-\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2} + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad \frac{1}{\omega^2} := \frac{\lambda\tau}{2}, \quad (2.1)$$

где правая часть, определяемая по формуле

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + u_n(x) + \tau \left(f(t_n^*, x) - \frac{3}{2} u_n(x) \frac{du_n}{dx} + \frac{1}{2} u_{n-1}(x) \frac{du_{n-1}}{dx} \right) = \\ &= 2 u_n(x) - g_n(x) + \tau \left(f(t_n^*, x) - \frac{3}{2} u_n(x) \frac{du_n}{dx} + \frac{1}{2} u_{n-1}(x) \frac{du_{n-1}}{dx} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

зависит только от известных, уже вычисленных на предыдущих шагах алгоритма функций. Отметим, что выражение (2.2) не содержит явной зависимости от вторых производных функций $u_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$. Уравнение (2.1) с правой частью (2.2) дополняется краевыми условиями периодичности искомой функции в соответствии с (1.3):

$$u_{n+1}(-1) = u_{n+1}(1), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(-1) = \frac{du_{n+1}}{dx}(1). \quad (2.3)$$

Для нахождения функции $u_1(x)$, приближающей решение в момент времени $t = t_1 = \tau$, можно воспользоваться любой двуслойной вычислительной схемой. Мы для этого используем двуслойную явно-неявную схему [14] на основе приближения Кранка–Николсон. При сопоставлении численных результатов с явным решением в разделе 6 необходимые данные (т. е. значение решения $u(t, x)$ и его производных в требуемых точках) для двух начальных временных слоев $t = 0$ и $t = \tau$ не вычисляются, а задаются в качестве известных величин.

3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Перейдем к формулировке алгоритма решения задачи (2.1)–(2.3), который составляет основу построения решения исходной задачи (1.1)–(1.3).

Переформулируем задачу (2.1)–(2.3) в виде

$$Lv(x) := -\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + v(x) = g(x), \quad \omega > 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.1)$$

$$v(-1) = v(1), \quad \frac{dv}{dx}(-1) = \frac{dv}{dx}(1), \quad (3.2)$$

где предполагается, что $g(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[-1, 1]$, причем $g(-1) = g(1)$. Известно (см. [4, гл. 7]), что существует единственное решение $v(x) \in C^2([-1, 1])$ задачи (3.1), (3.2). Условия периодичности, которым удовлетворяют функции $g(x)$ и $v(x)$, позволяют продолжить их на всю числовую ось \mathbb{R} до непрерывных, имеющих период 2. Для таких продолженных функций сохраним те же обозначения.

Представим решение задачи (3.1), (3.2) в виде свертки правой части $g(x)$ уравнения (3.1) и соответствующей функции Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$:

$$v(x) = \int_{-1}^1 \mathcal{G}(x, \xi) g(\xi) d\xi. \quad (3.3)$$

Отметим, что функция Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$ задачи (3.1), (3.2), т. е. ее решение при $g(x) = \delta(x - \xi)$, имеет следующий явный вид: $\mathcal{G}(x, \xi) = G(x - \xi)$, где

$$G(r) = \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(r - \operatorname{sign} r)) \quad \text{при } r \neq 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, функция \mathcal{G} в (3.3) записывается по формуле

$$\mathcal{G}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(x - \xi + 1)) & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(x - \xi - 1)) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad x, \xi \in [-1, 1]. \quad (3.5)$$

Приведем также выражения для производной функции Грина (3.5), которые потребуются при дальнейшем изложении алгоритма:

$$\mathcal{G}'(x, \xi) := \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x - \xi + 1)) & \text{при } x < \xi, \\ \frac{\omega^2}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x - \xi - 1)) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad x, \xi \in [-1, 1]. \quad (3.6)$$

Отметим, что справедливы следующие свойства симметрии функции Грина:

$$\mathcal{G}(x, \xi) = \mathcal{G}(\xi, x), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{G}'(x, \xi) = -\mathcal{G}'(\xi, x), \quad x, \xi \in [-1, 1]. \quad (3.8)$$

Предположим, что правая часть $g(x)$ уравнения (3.1) является кусочно-линейной непрерывной функцией, т. е. задано разбиение отрезка $[-1, 1]$ на N частей узловыми точками

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad (3.9)$$

на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ определена линейная функция

$$P_k(x) = s_k(x - x_k^0) + y_k^0, \quad x_k^0 := \frac{x_k + x_{k-1}}{2}, \quad s_k, y_k^0 \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

и справедливы равенства

$$g(x) = P_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad (3.11)$$

причем

$$P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k), \quad (3.12)$$

где мы полагаем $P_{N+1}(x_N) = P_1(x_0)$, $s_{N+1} = s_1$.

Здесь и далее удобно считать, что разбиение (3.9) продолжено на всю числовую ось с периодом 2 с сохранением нумерации по $k \in \mathbb{Z}$ таким образом, что равенство вида (3.11) справедливо при каждом $x \in \mathbb{R}$ для некоторого индекса k , т. е.

$$x_{k+N} = x_k + 2, \quad P_{k+N}(x + 2) = P_k(x), \quad s_{k+N} = s_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

С учетом сделанного замечания введем следующее обозначение для скачка производной функции $g(x)$ в узловой точке x_k :

$$\widehat{p}_k := \frac{dP_{k+1}}{dx}(x_k) - \frac{dP_k}{dx}(x_k) = s_{k+1} - s_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.13)$$

Следующее утверждение уточняет представление (3.3) для рассматриваемого случая кусочно-линейной непрерывной правой части $g(x)$ уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), где правая часть $g(x)$ имеет вид (3.10)–(3.12), а также производная $v'(x)$ этого решения, могут быть представлены по формулам*

$$v(x) = g(x) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}(x, x_j), \quad (3.14)$$

$$\frac{dv}{dx}(x) = \frac{dg}{dx}(x) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x, x_j), \quad x \in [-1, 1], \quad (3.15)$$

где производная \mathcal{G}' функции Грина по первому аргументу задана формулой (3.6), коэффициенты \widehat{p}_j определены равенствами (3.13).

Доказательство. Для всякой линейной функции $P(\xi)$ и любого $c \in \mathbb{R}$ справедлива следующая формула, получаемая интегрированием по частям:

$$\int \operatorname{ch}(\omega\xi + c) P(\xi) d\xi = \frac{1}{\omega} \operatorname{sh}(\omega\xi + c) P(\xi) - \frac{1}{\omega^2} \operatorname{ch}(\omega\xi + c) P'(\xi) + \operatorname{const}. \quad (3.16)$$

Зафиксируем точку z на одном из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения (3.9), $k \in \{1, \dots, N\}$, и введем следующие обозначения:

$$\eta_j := x_j, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad \eta_k := z =: \zeta_k, \quad \zeta_j := x_j, \quad j = k+1, \dots, N.$$

Тогда, заменяя x на ξ в выражении (3.10) и подставляя его вместе с функцией Грина (3.5) при $x = z$ в представление (3.3), с помощью формулы (3.16) находим

$$\begin{aligned} v(z) &= \sum_{j=1}^k \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} P_j(\xi) \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(\xi - z + 1)) d\xi + \sum_{j=k+1}^N \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} P_j(\xi) \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(\xi - z - 1)) d\xi = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=1}^k \left[P_j(\xi) \operatorname{sh}(\omega(\xi - z + 1)) \right]_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} - \frac{1}{2 \omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=1}^k \left[P'_j(\xi) \operatorname{ch}(\omega(\xi - z + 1)) \right]_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} + \\ &+ \frac{1}{2 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=k+1}^N \left[P_j(\xi) \operatorname{sh}(\omega(\xi - z - 1)) \right]_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} - \frac{1}{2 \omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=k+1}^N \left[P'_j(\xi) \operatorname{ch}(\omega(\xi - z - 1)) \right]_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} =: \\ &=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Группируя в выражении (3.17) слагаемые, содержащие $P_j(\xi)$, с учетом условия непрерывности (3.12) находим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sh} \omega (S_1 + S_3) &= -P_0(x_0) \operatorname{sh}(\omega(x_0 - z + 1)) + \sum_{j=1}^{k-1} (P_j(x_j) - P_{j+1}(x_j)) \operatorname{sh}(\omega(x_j - z + 1)) + \\ &+ P_k(z) \operatorname{sh}(\omega(z - z + 1)) - P_k(z) \operatorname{sh}(\omega(z - z - 1)) + \\ &+ \sum_{j=k}^{N-1} (P_j(x_j) - P_{j+1}(x_j)) \operatorname{sh}(\omega(x_j - z - 1)) + P_N(x_N) \operatorname{sh}(\omega(x_N - z - 1)) = 2 \operatorname{sh} \omega P_k(z). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогичным образом, группируя в (3.17) слагаемые, содержащие $P'_j(\xi)$, с учетом определения (3.13) находим

$$\begin{aligned} -2 \omega \operatorname{sh} \omega (S_2 + S_4) &= -P'_0(x_0) \operatorname{ch}(\omega(x_0 - z + 1)) + \sum_{j=1}^{k-1} (P'_j(x_j) - P'_{j+1}(x_j)) \operatorname{ch}(\omega(x_j - z + 1)) + \\ &+ \widehat{p}_k(z) \operatorname{ch}(\omega(z - z + 1)) - \widehat{p}_k(z) \operatorname{ch}(\omega(z - z - 1)) + \\ &+ \sum_{j=k}^{N-1} (P'_j(x_j) - P'_{j+1}(x_j)) \operatorname{ch}(\omega(x_j - z - 1)) + P'_N(x_N) \operatorname{ch}(\omega(x_N - z - 1)) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} -\widehat{p}_j \operatorname{ch}(\omega(x_j - z + 1)) + \sum_{j=k}^N -\widehat{p}_j \operatorname{ch}(\omega(x_j - z - 1)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Объединяя равенства (3.17)–(3.19), на основании формул (3.5) получаем

$$v(z) = P_k(z) - \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}(x_j, z),$$

откуда с учетом симметрии (3.7) вытекает утверждение (3.14). Формула (3.15) получается из (3.14) путем дифференцирования по x . Теорема доказана. \square

Отметим, что формулы (3.14), (3.15) согласуются с тем, что решение $v(x)$ принадлежит классу $C^2[-1, 1]$. В самом деле, правая часть равенства (3.14) является непрерывной кусочно-аналитической функцией, возможно, имеющей разрывы производной первого рода в узлах разбиения (3.9). Вычислим согласно формулам (3.15), (3.13), (3.6) производную справа решения $v(x)$ в точке x_k :

$$\frac{dv}{dx}(x_k)_+ = \frac{dP_{k+1}}{dx}(x_k) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'_+(x_k, x_j) =$$

$$= s_{k+1} + \frac{\widehat{p}_k}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x_k - x_k - 1)) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j) = \frac{s_k + s_{k+1}}{2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j),$$

и аналогичным образом вычислим производную слева в той же точке:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(x_k)_- &= \frac{dP_k}{dx}(x_k) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'_-(x_k, x_j) = \\ &= s_k + \frac{\widehat{p}_k}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x_k - x_k + 1)) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j) = \frac{s_k + s_{k+1}}{2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j). \end{aligned}$$

Равенство полученных предельных величин с учетом непрерывности функции $v(x)$ означает, что она является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1, 1]$. Непрерывность второй производной вытекает из уравнения (3.1) и непрерывности его правой части $g(x)$.

Утверждение теоремы 3.1 можно обобщить на случай, когда кусочно-линейная правая часть $g(x)$ уравнения (3.1) имеет разрывы первого рода в узлах разбиения. В таком случае решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2) ищется в классе $C^1[-1, 1]$ и понимается в смысле выполнения интегрального уравнения, эквивалентного (3.1) (см. [12]). Представление (3.3) при этом сохраняет силу.

Для того, чтобы сформулировать соответствующий результат, введем следующее обозначение для скачков $g(x)$ в точках x_k :

$$p_k := P_{k+1}(x_k) - P_k(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.20)$$

Следующая теорема уточняет представление (3.3) для случая кусочно-линейной разрывной правой части $g(x)$ уравнения (3.1).

Теорема 3.2. *Решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), где правая часть $g(x)$ является кусочно-линейной функцией вида (3.10), (3.11), а также производная $v'(x)$ этого решения, могут быть представлены по формулам*

$$v(x) = g(x) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N p_j \mathcal{G}'(x, x_j) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}(x, x_j), \quad (3.21)$$

$$\frac{dv}{dx}(x) = \frac{dg}{dx}(x) + \sum_{j=1}^N p_j \mathcal{G}(x, x_j) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x, x_j), \quad x \in [-1, 1], \quad (3.22)$$

где величины p_j, \widehat{p}_j имеют вид (3.20) и (3.13), соответственно.

Теорема 3.2 доказывается аналогично теореме 3.1 с той разницей, что в выражении (3.18) слагаемые, содержащие разности $P_j(x_j) - P_{j+1}(x_j) = -p_j$, не обращаются в нуль, а вносят соответствующий вклад в сумму в правые части формул (3.21), (3.22).

Нетрудно увидеть, что утверждение теоремы 3.1 вытекает из утверждения теоремы 3.2, если положить $p_j = 0$, т. е. считать, что правая часть $g(x)$ уравнения (3.1) является непрерывной функцией.

4. ЛИНЕЙНЫЙ ПО СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ N ТОЧЕК

Вычисление решения задачи (3.1), (3.2), (3.10) и его производной в заданной точке $z \in [-1, 1]$ по формулам (3.13)–(3.15), как легко видеть, требует $\sim N$ арифметических операций в предположении, что значения $\mathcal{G}(z, x_j), \mathcal{G}'(z, x_j)$ являются известными для всех $j = 1, \dots, N$. Действительно, для нахождения коэффициентов \widehat{p}_j в соответствии с (3.13) необходимо произвести N вычитаний, затем, следуя равенствам (3.14) и (3.15), нужно выполнить по N умножений найденных коэффициентов на величины $\mathcal{G}(z, x_j)$ и $\mathcal{G}'(z, x_j)$, соответственно, и, наконец, дважды вычислить сумму $N + 1$ слагаемых.

Если требуется провести аналогичные вычисления для $\sim N$ точек z_k , например, по $M \geq 1$ точек для каждого из отрезков разбиения (4.1), тогда общая алгоритмическая сложность возрастает до

$O(N^2)$ при $N \rightarrow \infty$. Однако, за счет использования явного вида функции Грина (3.5), оказывается возможным сохранить алгоритмическую сложность такого вычисления на уровне $O(N)$, $N \rightarrow \infty$.

Для простоты изложения будем далее предполагать, что функция $g(x)$ является непрерывной, т. е. выполнено условие (3.12), разбиение (3.9) является равномерным, т. е.

$$x_k = -1 + 2Lk, \quad L := \frac{1}{N}, \quad (4.1)$$

и на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ выбрана точка z_k :

$$z_k = x_k^0 + h_k, \quad h_k \in [-L, L], \quad z_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

где x_k^0 является серединой отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ в соответствии с определением (3.10).

Прежде чем перейти к формулировке алгоритма эффективного вычисления решения задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12), введем следующие обозначения:

$$\beta(h) := e^{-\omega(L+h)}, \quad \gamma(h) := \beta(-h) = e^{-\omega(L-h)}, \quad h \in [-L, L], \quad (4.3)$$

$$\mu := \beta(L) = \exp(-2L\omega), \quad (4.4)$$

$$b_0 = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_j \mu^{N-j} \right), \quad b_k = \mu b_{k-1} + \hat{p}_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (4.5)$$

$$d_N = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \left(\hat{p}_N + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{p}_j \mu^j \right), \quad d_k = \mu d_{k+1} + \hat{p}_k, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (4.6)$$

Справедливо следующее утверждение, устанавливающее эффективный, т. е. имеющий линейную по N сложность, алгоритм вычисления функции $v(x)$ и ее производной.

Теорема 4.1. *Если в условиях теоремы 3.1 разбиение отрезка с отмеченными точками z_k имеет вид (4.1), (4.2), то решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) и его производная в точках z_k даются формулами*

$$v(z_k) = g(z_k) + \frac{b_{k-1} \beta(h_k) + d_k \gamma(h_k)}{2\omega}, \quad h_k = z_k - x_k^0, \quad (4.7)$$

$$\frac{dv}{dx}(z_k) = \frac{dg}{dx}(z_k) + \frac{-b_{k-1} \beta(h_k) + d_k \gamma(h_k)}{2}, \quad (4.8)$$

здесь величины $\beta(h_k)$, $\gamma(h_k)$, b_k , d_k определены равенствами (4.3)–(4.6), $k = 1, \dots, N$.

Доказательство. Следуя соглашению раздела 3, доопределим функции $g(x)$ и $\mathcal{G}(x, \xi)$ таким образом, чтобы они являлись непрерывными периодическими с периодом 2 функциями своих аргументов $x, \xi \in \mathbb{R}$, и распространим разбиение (4.1) с отмеченными точками (4.2) на всю числовую ось, сохраняя обозначения x_k, z_k и т. д. с индексом $k \in \mathbb{Z}$. Тогда последовательность $(\hat{p}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ обладает периодом N в соответствии с определением (3.13). Обозначим множество всех таких последовательностей через $\mathfrak{P}(N)$, т. е.

$$\mathfrak{P}(N) = \{ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} : a_{k+N} = a_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \}. \quad (4.9)$$

Для того чтобы получить эффективную вычислительную процедуру решения задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12), преобразуем формулу (3.14) при $x = z_k$ с учетом явного вида (3.5) функции \mathcal{G} .

Исходя из сделанного выше замечания о периодичности функции Грина, находим

$$\Delta_k := v(z_k) - g(z_k) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \mathcal{G}(z_k, x_j) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=k}^{N+k-1} \hat{p}_j \mathcal{G}(x_j, z_k). \quad (4.10)$$

Пользуясь вытекающим из (4.1), (4.2) равенством

$$x_j - z_k = (2(j - k) + 1)L - h_k,$$

подставляем явный вид (3.5) функции \mathcal{G} при $x_j > z_k$ в выражение (4.10):

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \frac{1}{2\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=k}^{N+k-1} \hat{p}_{k+j} \operatorname{ch}\left(\omega((2(j-k)+1)L - h_k - 1)\right) = \\ &= \frac{1}{2\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \operatorname{ch}\left(\omega((2j+1)L - h_k - 1)\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Гиперболический косинус в формуле (4.11) запишем в виде линейной комбинации экспонент:

$$4\omega \operatorname{sh} \omega \Delta_k = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp\left(\omega((2j+1)L - h_k - 1)\right) + \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp\left(\omega(-(2j+1)L + h_k + 1)\right),$$

затем в получившемся выражении вынесем общие множители таким образом, чтобы максимальный аргумент экспоненты в каждой из сумм оказался равен нулю:

$$\Delta_k = \frac{e^{-\omega(L+h_k)} e^\omega}{4\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp((2j+2)L\omega - 2\omega) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)} e^\omega}{4\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \quad (4.12)$$

Обращая порядок слагаемых и нумерацию по j в первой сумме, входящей в правую часть выражения (4.12), и пользуясь периодичностью $\hat{p}_{k+N-1-j} = \hat{p}_{k-1-j}$, а также равенством

$$\frac{e^\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}},$$

приходим к следующему результату:

$$\Delta_k = \frac{e^{-\omega(L+h_k)}}{2\omega(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k-1-j} \exp(-2L\omega j) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)}}{2\omega(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \quad (4.13)$$

Таким образом, разность (4.10) искомого решения $v(x)$ и правой части $g(x)$ уравнения (3.1) представлена выражением (4.13) в виде суммы двух линейных комбинаций величин \hat{p}_j , коэффициенты которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем μ вида (4.4), не зависящим от k .

Получим выражение аналогичного (4.13) вида для разности производных решения и правой части уравнения. Из формулы (3.15) находим

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(z_k) - \frac{dg}{dx}(z_k) &= \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \hat{p}_j G'(z_k, x_j) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=k}^{N+k-1} \hat{p}_j G'(x_j, z_k) = \\ &= -\frac{1}{2 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \operatorname{sh}\left(\omega((2j+1)L - h_k - 1)\right) = \\ &= -\frac{e^{-\omega(L+h_k)} e^\omega}{4 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp((2j+2)L\omega - 2\omega) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)} e^\omega}{4 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j) = \\ &= -\frac{e^{-\omega(L+h_k)}}{2(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k-1-j} \exp(-2L\omega j) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)}}{2(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Таким образом, разность производных решения $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) и правой части $g(x)$ уравнения (3.1) в точках z_k представлена выражением (4.14) в виде разности тех же самых линейных комбинаций величин \hat{p}_j , которые входят в формулу (4.13), умноженных на коэффициент ω .

Прежде чем перейти к обоснованию формул (4.5)–(4.8), введем некоторые обозначения. Определим для последовательностей из класса (4.9) инволютивную операцию \mathcal{R} обращения порядка на периоде

$$(a_k) \xrightarrow{\mathcal{R}} (\tilde{a}_k) \in \mathfrak{P}(N), \quad \tilde{a}_k := a_{N-k+1}, \quad k = 1, \dots, N,$$

а также бинарную операцию $*$ циклической свертки

$$(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}) \mapsto (a_k^{(1)}) * (a_k^{(2)}) = (a_k^{(3)}) \in \mathfrak{P}(N), \quad (4.15)$$

$$a_k^{(3)} := \sum_{j=0}^{N-1} a_j^{(1)} a_{k-j}^{(2)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.16)$$

Зададим периодическую последовательность $(\varepsilon_k) \in \mathfrak{P}(N)$ ее значениями на периоде

$$\varepsilon_k = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \exp(-2L\omega k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.17)$$

С учетом того, что $(\hat{p}_k) \in \mathfrak{P}(N)$, положим

$$(\tilde{b}_k) := (\varepsilon_k) * (\hat{p}_k), \quad \tilde{b}_k = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k-j} \exp(-2L\omega j), \quad (4.18)$$

$$(\tilde{d}_k) := \mathcal{R}((\varepsilon_k) * \mathcal{R}(\hat{p}_k)), \quad \tilde{d}_k = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \quad (4.19)$$

Тогда формулы (4.13) и (4.14) записываются в виде

$$v(z_k) = g(z_k) + \frac{\tilde{b}_{k-1} \beta(h_k) + \tilde{d}_k \gamma(h_k)}{2\omega}, \quad (4.20)$$

$$\frac{dv}{dx}(z_k) = \frac{dg}{dx}(z_k) + \frac{-\tilde{b}_{k-1} \beta(h_k) + \tilde{d}_k \gamma(h_k)}{2}, \quad (4.21)$$

где значения $\beta(h_k)$, $\gamma(h_k)$ заданы равенствами (4.3).

Для того чтобы установить справедливость формул (4.5), (4.6), покажем, что

$$\tilde{b}_k = b_k, \quad \tilde{d}_k = d_k. \quad (4.22)$$

В самом деле, используя обозначение (4.4) и свойство периодичности $\hat{p}_{-j} = \hat{p}_{N-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, исходя из определения (4.18), при $k = 0$ находим

$$(1 - e^{-2\omega}) \tilde{b}_0 = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{-j} \exp(-2L\omega j) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{-j} \mu^j = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{N-j} \mu^j = \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \mu^{N-j} = (1 - e^{-2\omega}) b_0.$$

Аналогичным образом, из определения (4.19) при $k = N$ получаем

$$(1 - e^{-2\omega}) \tilde{d}_N = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_j \exp(-2L\omega j) = \hat{p}_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{p}_j \mu^j = \hat{p}_N + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{p}_j \mu^j = (1 - e^{-2\omega}) d_N,$$

следовательно,

$$\tilde{b}_0 = b_0, \quad \tilde{d}_N = d_N. \quad (4.23)$$

Справедливость равенств (4.22) при $k = 1, \dots, N-1$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Рассмотрим последовательности $(a_k), (h_k) \in \mathfrak{P}(N)$ и $(H_k) = (a_k) * (h_k)$, где*

$$a_k = a_0 \mu^k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad a_0, \mu \in \mathbb{R},$$

тогда справедлива следующая формула:

$$H_k = \mu H_{k-1} + a_0 (1 - \mu^N) h_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.24)$$

Доказательство. Пользуясь определением свертки (4.16) и свойством периодичности $h_{k-N} = h_k$, находим

$$\begin{aligned} \mu H_{k-1} &= \mu \sum_{j=0}^{N-1} a_0 \mu^j h_{k-1-j} = \sum_{j=1}^N a_0 \mu^j h_{k-j} = \sum_{j=0}^{N-1} a_0 \mu^j h_{k-j} + a_0 \mu^N h_{k-N} - a_0 h_k = \\ &= H_k - a_0 (1 - \mu^N) h_k, \end{aligned}$$

откуда следует равенство (4.24). Лемма доказана. \square

Применяя лемму 4.1 к последовательностям (\widehat{p}_k) и $\mathcal{R}(\widehat{p}_k)$ при

$$\mu = \exp(-2L\omega), \quad a_0 = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} = (1 - \mu^N)^{-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_k &= \mu \widetilde{b}_{k-1} + \widehat{p}_k, & k &= 1, \dots, N-1, \\ \widetilde{d}_k &= \mu \widetilde{d}_{k+1} + \widehat{p}_k, & k &= 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

что вместе с равенствами (4.23) и определениями (4.5), (4.6) обеспечивает выполнение условий (4.22) при всех $k \in \mathbb{Z}$. Из (4.20)–(4.22) следуют формулы (4.7), (4.8). Теорема 4.1 доказана. \square

Подчеркнем, что вычисление решения $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) и его производной в точках z_k по формулам (4.5)–(4.8) требует порядка N арифметических операций. В самом деле, алгоритм состоит из следующих четырех шагов:

1. по формулам (4.5), (4.6) вычислить величины b_0, d_N ;
2. вычислить b_k, d_k при $k = 1, \dots, N-1$;
3. по формуле (4.7) найти решение $v(z_k)$, $k = 1, \dots, N$;
4. согласно (4.8) найти производную решения $v'(z_k)$, $k = 1, \dots, N$.

При этом каждый из указанных шагов требует выполнения $\sim N$ операций.

5. НЕКОТОРЫЕ ЯВНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Для оценки численного алгоритма используем следующее явное решение уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

т. е. уравнения (1.1) при $f(t, x) = 0$:

$$u(t, x) = \widetilde{u}(t, x) = -2\pi\lambda \frac{\sin(\pi x)}{e^{\pi^2\lambda t} - \cos(\pi x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.2)$$

Непосредственно из вида (5.2) функции $\widetilde{u}(t, x)$ следует, что по переменной x она является нечетной, имеет период 2 и удовлетворяет условиям (1.3).

Решение (5.2) уравнения (5.1) получено при помощи подстановки Коула–Хопфа (см. [11, п. 4.1])

$$u(t, x) = -\frac{2\lambda}{\varphi(t, x)} \frac{d\varphi}{dx}$$

из решения

$$\varphi(t, x) = 1 - e^{-\pi^2\lambda t} \cos(\pi x)$$

линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Рассмотрим подробнее поведение функции (5.2) на отрезке $[-1, 1]$. Для этого запишем равенство (5.2) в следующем виде:

$$-\frac{2\pi\lambda}{u(t, x)} = \frac{A(t) + 1}{2} \theta + \frac{A(t) - 1}{2} \theta^{-1}, \quad (5.3)$$

где

$$A(t) := e^{\pi^2\lambda t}, \quad \theta = \theta(x) := \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

При изменении переменной x от -1 до 1 величина θ пробегает всю числовую ось от $-\infty$ до $+\infty$. Рассматривая правую часть формулы (5.3) при фиксированном значении $t \geq 0$ как функцию переменной θ , приходим к следующему результату.

Утверждение 5.1. При каждом фиксированном значении $t \geq 0$ правая часть равенства (5.2) как функция от $x \in [-1, 1]$ имеет единственный максимум $U(t) > 0$ в точке $-m(t) \in (-1, 0)$ и единственный минимум $-U(t)$ в точке $m(t) \in (0, 1)$, где

$$m(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A(t) - 1}{A(t) + 1}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi^2 \lambda t}{2}}, \quad (5.4)$$

$$U(t) = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{A^2(t) - 1}}, \quad t > 0. \quad (5.5)$$

Функция $u(t, x)$ монотонно возрастает по x на отрезках $x \in [-1, -m(t)]$ и $x \in [m(t), 1]$ и монотонно убывает на отрезке $x \in [-m(t), m(t)]$.

При $t = 0$ решение (5.2) формально не существует, обращаясь в бесконечность при $x = 0$. Найдем асимптотики величин (5.4), (5.5) при $t \rightarrow 0$:

$$m(t) \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi^2 \lambda t}{2}} = \sqrt{2\lambda t}, \quad U(t) \sim \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{2\pi^2 \lambda t}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{t}}, \quad t \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.6) вытекает, что при малых t значение $m(t)$ мало, а значение $U(t)$ велико. Таким образом, решение (5.2) на отрезке убывания $[-m(t), m(t)]$ образует резкий фронт, на котором среднее значение градиента имеет асимптотику

$$-\frac{U(t)}{m(t)} \sim -\frac{1}{t}, \quad t \rightarrow 0.$$

На основании представления (5.3) заключаем, что при фиксированном $t > 0$ решение (5.2) в окрестности начала координат ведет себя следующим образом:

$$u(t, x) \sim -2\pi\lambda \frac{2}{A(t) - 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \sim -\frac{2\pi^2 \lambda}{A(t) - 1} x, \quad x \rightarrow 0, \quad t > 0,$$

откуда находим

$$u(t, x) \sim -\frac{2\pi^2 \lambda}{\pi^2 \lambda t} x = -\frac{2}{t} x, \quad x, t \rightarrow 0.$$

Из формулы (5.2) можно получить явные решения, которые описывают перемещающийся фронт, при помощи известного преобразования

$$u(t, x) \mapsto V + u(t, x - Vt), \quad V \in \mathbb{R}, \quad (5.7)$$

переводящего решение уравнения (5.1) снова в решение этого же уравнения.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численный алгоритм решения задачи (1.1)–(1.3), схема которого изложена в разделе 2, содержит основной этап, который заключается в решении линейной задачи (2.1)–(2.3). Для реализации этого основного этапа воспользуемся методом, предоставляемым теоремой 4.1.

Для численного представления непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ периодических с периодом 2 функций будем использовать кусочно-линейное приближение (3.10)–(3.12) на основе равномерного разбиения (4.1). Каждая функция из этого класса однозначно задается своими значениями в узлах x_k этого разбиения, $k = 0, \dots, N - 1$.

В качестве отмеченных точек z_k вида (4.2), фигурирующих в теореме 4.1, выберем левые концы соответствующих отрезков разбиения, т. е.

$$z_k = x_{k-1}, \quad h_k = -L \quad \beta(h_k) = 1, \quad \gamma(h_k) = \exp(-2L\omega) = \mu, \quad k = 1, \dots, N.$$

Тогда в результате применения формул (4.7), (4.8) получим представление решения задачи (2.1)–(2.3) в указанном выше кусочно-линейном виде (3.10)–(3.12).

Проведем сравнение результатов численного расчета по изложенному алгоритму с явным решением, построенным в разделе 5.

В качестве начального условия (1.2) выберем функцию

$$u_0(x) = \tilde{u}(T_0, x) + V, \quad T_0 = \operatorname{const} > 0, \quad V \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

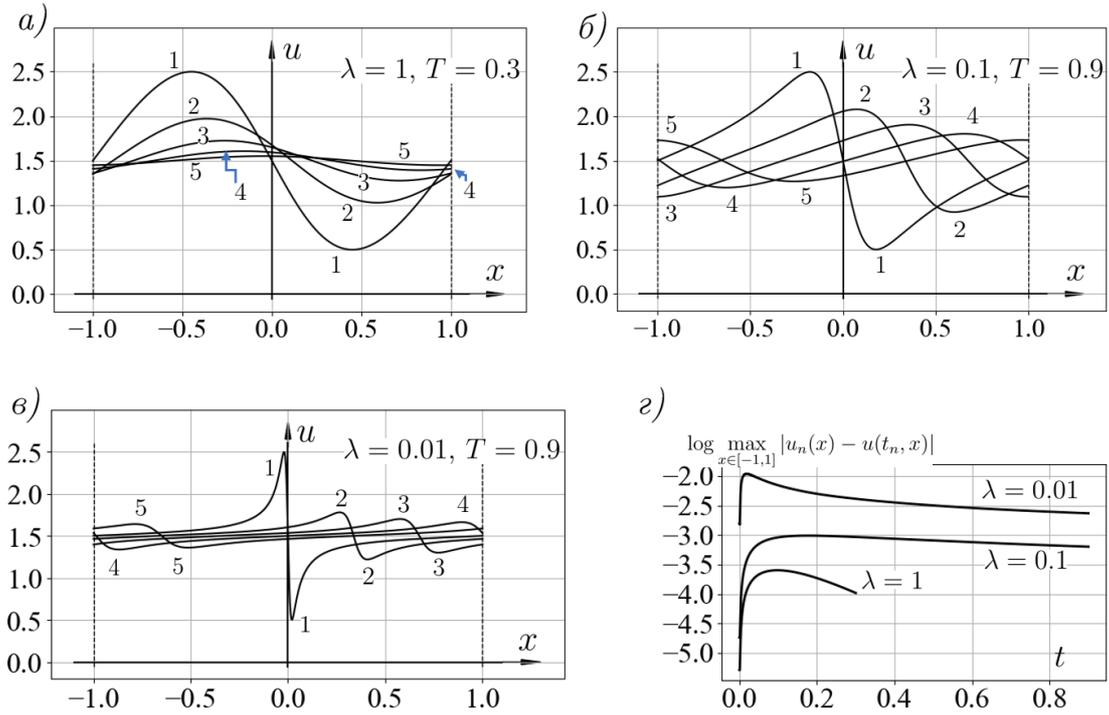


Рис. 1. Сопоставление численного расчета с явным решением.

FIG. 1. Comparison of the numerical result with the explicit solution.

где явное решение $\tilde{u}(t, x)$ уравнения (5.1) имеет вид (5.2). Тогда решение задачи (5.1), (1.2) в соответствии с преобразованием (5.7) имеет вид

$$u(t, x) = \tilde{u}(T_0 + t, x - Vt) + V. \tag{6.2}$$

Значение параметра T_0 установим, исходя из заданной величины

$$U_0 = U(T_0) \tag{6.3}$$

амплитуды (5.5) решения в начальный момент времени. Выражая T_0 через U_0 из равенства (6.3), находим

$$T_0 = \frac{\ln(1 + 4\pi^2\lambda^2/U_0^2)}{2\pi^2\lambda}.$$

На рис. 1 а), б), в) представлены результаты расчета решения задачи (5.1), (1.2), (6.1) при следующих значениях параметров:

$$U_0 = 1, \quad V = 1,5, \quad \tau = 10^{-3}, \quad N = 1500,$$

при трех различных значениях коэффициента λ , указанных на соответствующих рисунках, а также приведенных в таб. 1. Цифрами от 1 до 5 на каждом из рис. 1 а), б), в) обозначены графики решения в моменты времени $t = 0, T/4, T/2, 3T/4$ и T , соответственно.

λ	T	$K = T/\tau$	Ошибка/Error	Время, сек./Time, sec.	Рисунок/Figure
1,0	0,3	300	$2,5 \cdot 10^{-4}$	0,02	1 а)
0,1	0,9	900	$9,8 \cdot 10^{-4}$	0,09	1 б)
0,01	0,9	900	$1,1 \cdot 10^{-2}$	0,09	1 в)

ТАБ. 1. Параметры численного расчета решения (6.2) при различных λ .
 ТАБ. 1. Parameters of numerical calculation of solution (6.2) for different λ .

На рис. 1 г) дана зависимость логарифма абсолютной погрешности приближенного решения от времени для трех случаев, отвечающих строкам таб. 1 и рис. 1 а), б), в).

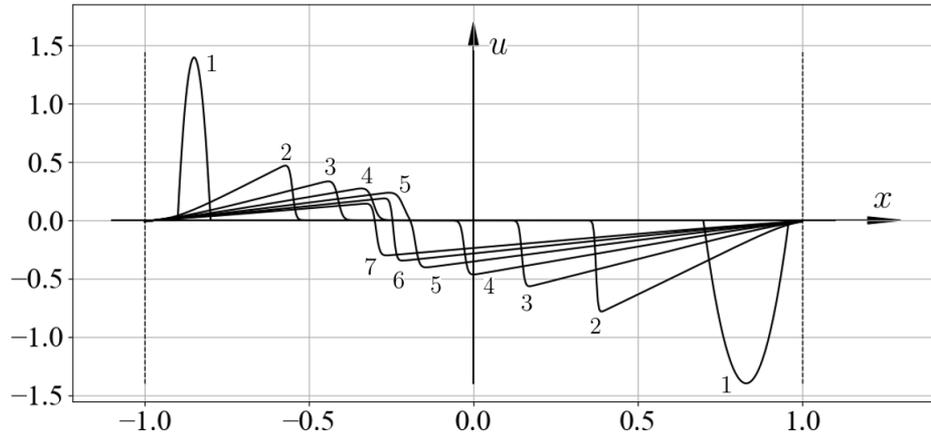


Рис. 2. Расчет взаимодействия двух бегущих волн при $\lambda = 10^{-3}$.

FIG. 2. Calculation of the interaction of two traveling waves for $\lambda = 10^{-3}$.

На рис. 2 дан результат численного решения задачи (5.1), (1.2) при

$$\lambda = 10^{-3}, \quad \tau = 10^{-3}, \quad N = 1500, \quad T = 4.$$

Начальный профиль решения $u_0(x)$, обозначенный цифрой 1, имеет два «горба» различной ширины, т. е. область положительных значений $\{u_0(x) > 0\}$ и область отрицательных значений $\{u_0(x) < 0\}$, на дополнении к которым функция $u_0(x)$ обращается в нуль. С течением времени эти «горбы» эволюционируют в виде бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу и затем сливающихся (см. график, обозначенный цифрой 5) в одну волну, которая продолжает двигаться влево (см. графики 6, 7). Отметим, что направление движения получившейся волны обусловлено тем, что правый «горб» занимал в начальный момент времени большую площадь, чем левый. Время вычислений составило 0,36 сек.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построен метод для уравнения Бюргера — квазилинейного параболического уравнения с нелинейностью, включающей градиент искомой функции. Метод использует известную явно- неявную схему дискретизации по времени на основе приближения Кранка—Николсон для линейных членов уравнения и экстраполяции Адамса—Бэшфорта нелинейного члена.

Предлагаемый метод опирается на интегральное представление решения линейной задачи с функцией Грина, заданной в явном виде. Такой подход позволяет избежать потери точности, связанной с использованием разностных аппроксимаций производных искомой функции по пространственной переменной. Это может быть особенно актуальным в задачах для уравнений, содержащих малый коэффициент при старшей производной неизвестной функции по переменной x . Вместе с тем, данный метод обладает высокой вычислительной эффективностью, присущей разностным методам, таким как метод прогонки.

В связи с тем, что вычислительный алгоритм, даваемый теоремой 4.1 для решения линейной задачи с кусочно-линейной правой частью, имеет алгоритмическую сложность $O(N)$, $N \rightarrow \infty$, где N — число отрезков пространственной дискретизации, подчеркнем, что такая сложность является минимальной из потенциально возможных в рассматриваемом классе алгоритмов. Как было показано (см. формулы (4.18)–(4.21)), получение решения задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) сводится к нахождению циклической свертки периодических последовательностей с периодом N . Нетрудно видеть, что прямое вычисление такой циклической свертки на основе определения (4.16) требует $\sim N^2$ операций. При помощи дискретного преобразования Фурье можно сократить необходимый объем вычислений до $\sim N \log N$, получая при этом приближенный результат (см. [1, гл. 4, § 4]). Однако для свертки с последовательностью, период которой представляет собой геометрическую прогрессию (4.17), можно вычислить точный результат за $\sim N$ операций в соответствии с утверждением леммы 4.1.

Вычислительный алгоритм, даваемый теоремой 4.1, может быть использован с неравномерным шагом по времени, а также, при некоторой модификации, может быть адаптирован для использования пространственной дискретизации с неравномерной сеткой.

Отметим, что теорема 4.1 может быть обобщена на случай кусочно-непрерывной правой части на основании теоремы 3.2. Модифицированный соответствующим образом алгоритм решения линейной задачи допускает использование более широкого класса кусочно-непрерывных кусочно-линейных аппроксимаций целевых функций, что в некоторых случаях может повысить точность приближения и, следовательно, улучшить качество вычислительного алгоритма.

Использованный в данной работе подход применим к широкому классу нелинейных пространственно одномерных параболических начально-краевых задач, включая задачи для уравнений типа Колмогорова—Петровского—Пискунова, уравнений реакции—диффузии—адвекции и систем таких уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Бином, 2011.
2. Безродных С. И., Власов В. И. Аналитико-численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде // Мат. модел. — 2015. — 27, № 7. — С. 15–24.
3. Вабищевич П. Н., Васильева М. В. Явно-неявные схемы для задач конвекции—диффузии—реакции // Сиб. ж. выч. мат. — 2012. — 15, № 4. — С. 359–369.
4. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: ФМЛ, 1981.
5. Новиков Б. К. Точные решения уравнения Бюргерса // Акуст. ж. — 1978. — 24, № 4. — С. 577–581.
6. Пикулин С. В. О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2018. — 58, № 2. — С. 244–252.
7. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
9. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции—диффузии. — М.: Либроком, 2015.
10. Солуян С. И., Хохлов Р. В. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон. — 1961. — № 3. — С. 52–61.
11. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
12. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
13. Ablowitz M., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed // Bull. Math. Biol. — 1979. — 41, № 6. — С. 835–840.
14. Ascher U. M., Ruuth S. J., Wetton B. T. R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — 32. — С. 797–823.
15. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heatconduction type // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1947. — 49. — С. 50–67.
16. Ruuth S. J. Implicit-explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation // J. Math. Biol. — 1995. — 34, № 2. — С. 148–176.

С. И. Безродных

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

E-mail: spikuln@gmail.com

UDC 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223

EDN: BSNBJE

Numerical-analytical method for the Burgers equation with a periodic boundary condition

S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. We construct an efficient numerical-analytical method for solving the initial-boundary value problem for the Burgers equation on a segment with a periodic boundary condition. The method includes the reduction to a linear problem based on an explicit-implicit time discretization scheme and an analytical solution of an auxiliary linear problem at each time step using the explicit form of the corresponding Green’s function. The efficiency of the constructed method is due to the fact that the algorithm for solving the auxiliary problem has only linear complexity in terms of the number of spatial discretization nodes used, without involving difference approximations of the derivatives of the desired function. On the basis of the Cole–Hopf substitution, we obtain an explicit periodic solution of the problem on the interval and compare the results of the numerical implementation of the constructed algorithm with this explicit solution. The developed method demonstrated a combination of high computational efficiency and accuracy of the result.

Keywords: Burgers equation, numerical-analytical method, Green’s function, explicit-implicit scheme.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors thank prof. V. I. Vlasov for useful stimulating discussions and attention to the work. The work was carried out at the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences at the expense of state assignment funds.

For citation: S. I. Bezrodnykh, S. V. Pikulin, “Numerical-analytical method for the Burgers equation with a periodic boundary condition,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 208–223. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223>

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel’kov, *Chislennyye metody* [Numerical Methods], Binom, Moscow, 2011 (in Russian).
2. S. I. Bezrodnykh and V. I. Vlasov, “Analitiko-chislennyi metod rascheta vzaimodeystviya fizicheskikh poley v poluprovodnikovom diode” [Analytical-numerical method for calculating the interaction of physical fields in semiconductor diode], *Mat. model.* [Math. Model.], 2015, **27**, No. 7, 15–24 (in Russian).
3. P. N. Vabishchevich and M. V. Vasil’eva, “Yavno-neyavnye skhemy dlya zadach konveksii–diffuzii–reaktsii” [Explicit-implicit schemes for convection–diffusion–reaction problems], *Sib. zh. vych. mat.* [Siberian J. Comput. Math.], 2012, **15**, No. 4, 359–369 (in Russian).
4. P. I. Lizorkin, *Kurs differentsial’nykh i integral’nykh uravneniy s dopolnitel’nyimi glavami analiza* [Course in Differential and Integral Equations with Additional Chapters of Analysis], FML, Moscow, 1981 (in Russian).
5. B. K. Novikov, “Tochnye resheniya uravneniya Byurgersa” [Exact solutions of the Burgers equation], *Akust. zh.* [Acoustic J.], 1978, **24**, No. 4, 577–581 (in Russian).



6. S. V. Pikulin, “O resheniyakh tipa begushchey volny uravneniya Kolmogorova—Petrovskogo—Piskunova” [On solutions of the traveling wave type of the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2018, **58**, No. 2, 244–252 (in Russian).
7. O. V. Rudenko and S. I. Soluyan, *Teoreticheskie osnovy nelineynoy akustiki* [Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
8. A. A. Samarskii, *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
9. A. A. Samarskiy and P. N. Vabishchevich, *Chislennyye metody resheniya zadach konveksii–diffuzii* [Numerical Methods for Solving Convection–Diffusion Problems], Librokom, Moscow, 2015 (in Russian).
10. S. I. Soluyan and R. V. Khokhlov, “Rasprostraneniye akusticheskikh voln konechnoy amplitudy v dissipativnoy srede” [Propagation of acoustic waves of finite amplitude in a dissipative medium], *Vestn. MGU. Ser. 3. Fiz. Astron.* [Bull. MSU. Ser. 3. Phys. Astron.], 1961, No. 3, 52–61 (in Russian).
11. G. B. Whitham, *Lineynyye i nelineynyye volny* [Linear and Nonlinear Waves], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
12. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
13. M. Ablowitz and A. Zeppetella, “Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed,” *Bull. Math. Biol.*, 1979, **41**, No. 6, 835–840.
14. U. M. Ascher, S. J. Ruuth, and B. T. Wetton, “Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations,” *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, **32**, 797–823.
15. J. Crank and P. Nicolson, “A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heatconduction type,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1947, **49**, 50–67.
16. S. J. Ruuth, “Implicit-explicit methods for reaction–diffusion problems in pattern formation,” *J. Math. Biol.*, 1995, **34**, No. 2, 148–176.

S. I. Bezrodnykh

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

S. V. Pikulin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

E-mail: spikulin@gmail.com