Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 2 (2023). С. 201–207
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.927.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207
EDN: CUFAAP

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия

Аннотация. В работе с помощью теоремы о неподвижной точке в частично упорядоченных множествах получены достаточные условия существования единственного положительного решения краевой задачи типа Штурма—Лиувилля для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения; приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: конус, положительное решение, неподвижная точка оператора, функция Грина.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма—Лиувилля для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 2. С. 201–207. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207

1. Постановка задачи

Вопросам разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений посвящено немало работ, в частности, работы зарубежных математиков [5, 7, 8, 11–15]. В основном, в них рассмотрены вопросы существования положительного решения, его поведения и асмиптотики и др. Работ, посвященных получению условий, обеспечивающих единственность положительного решения краевых задач типа Штурма—Лиувилля для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, немного; отметим, например, [1–4, 9]. Из цитируемых выше работ близкими по тематике данному исследованию являются статьи [4, 9], в которых рассмотрены нелинейные краевые задачи с аналогичными краевыми условиями. В [9] получены достаточные условия существования положительных решений нелинейной краевой задачи с тремя видами различных краевых условий с помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусе. В [4] с помощью метода линейных преобразований Ц. На установлены достаточные условия существования единственного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения четного порядка и, кроме того, предложен эффективный численный алгоритм построения такого решения. В данной статье авторами предпринята попытка обобщить

© Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова, 2023
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

упомянутые выше результаты и устранить соответствующие пробелы с помощью теоремы о неподвижной точке в частично упорядоченных множествах. В заключении приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(n)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x'(0) = x''(0) = \ldots x^{(n-2)}(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$x(1) = 0, \tag{1.3}$$

где $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, функция $f(t, u)$ неотрицательна, непрерывна на $[0, 1] \times [0, \infty)$ и не убывает по второму аргументу.

Определение 1.1. Под *положительным решением* задачи (1.1)–(1.3) будем понимать функцию $x \in \mathbb{C}^n_{[0,1]}$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_0^1 G(t, s) f(s, x(s))\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.4}$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}(1-s)^{n-1} - (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ \dfrac{t^{n-1}(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{если } t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Замечание 1.1. Несложно показать, что $G(t, s) > 0$, $t, s \in (0, 1)$.

2. Основные результаты

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения о неподвижной точке [6].

Теорема 2.1. *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, и предположим, что существует метрика d в X такая, что (X, d) — полное метрическое пространство. Предположим, что X удовлетворяет следующему условию:*

Если x_n неубывающая последовательность в X такая, что $x_n \to x$, то $x_n \leqslant x$, $n \in \mathbb{N}$. (2.1)

Пусть $T : X \to X$ — такое неубывающее отображение, что

$$d(Tx, Ty) \leqslant d(x, y) - \psi(d(x, y)), \quad x \geqslant y,$$

где $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — непрерывная и неубывающая функция такая, что ψ положительна на $(0, \infty)$, $\psi(0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$.

Если существует $x_0 \in X$ такое, что $x_0 \leqslant Tx_0$, то оператор T имеет неподвижную точку.

Более того, если $(X, \leqslant)$ удовлетворяет условию

для любых $x, y \in X$ существует $z \in X$, сравнимое с x и y, (2.2)

то справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *При выполнении условия* (2.2), *помимо условий теоремы* 2.1, *имеет место единственность неподвижной точки оператора T.*

В качестве X рассмотрим пространство $\mathbb{C}_{[0,1]}$ с метрикой $d(x, y) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \{|x(t) - y(t)|\}$.

Более того, введем в этом пространстве частичный порядок следующим образом:

$$x, y \in \mathbb{C}_{[0,1]}, \quad x \leqslant y \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t), \quad t \in [0, 1].$$

В [10] доказано, что $(\mathbb{C}_{[0,1]}, \leqslant)$ с определенной выше метрикой удовлетворяет условию (2.1) теоремы 2.1. Кроме того, поскольку функция $\max(x, y) \in \mathbb{C}_{[0,1]}$, $x, y \in \mathbb{C}_{[0,1]}$, множество $(\mathbb{C}_{[0,1]}, \leqslant)$ удовлетворяет условию (2.2).

Обозначим через $\mathcal{F}$ класс функций $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих свойствами, указанными в теореме 2.1, а через $\mathcal{J}$, соответственно, класс непрерывных и неубывающих функций $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющих условию $I - \varphi \in \mathcal{F}$, где I — тождественное отображение на $[0,\infty)$.

Лемма 2.1. $\max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 G(t,s)\,ds = \dfrac{1}{n!}\left[\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n}\right].$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^1 G(t,s)\,ds = \int\limits_0^t G(t,s)\,ds + \int\limits_t^1 G(t,s)\,ds =$$
$$= \int\limits_0^t \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1} - (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds + \int\limits_t^1 \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds - \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{t^{n-1}}{n} - \frac{t^n}{n}\right] = \frac{1}{n!}\big(t^{n-1} - t^n\big).$$

Несложно убедиться, что наибольшее значение функции $h(t) = t^{n-1} - t^n$ достигается в точке $t_0 = \dfrac{n-1}{n}$. Таким образом,

$$\max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 G(t,s)\,ds = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\right].$$

□

В дальнейшем для удобства выкладок положим $A = \dfrac{1}{n!}\left[\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n}\right]$.

Теорема 2.3. *Предположим, что существует число* $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{A}\right]$ *такое, что для всех* $x, y \in [0,\infty)$, $y \geqslant x$

$$f(t,y) - f(t,x) \leqslant \lambda\varphi(y-x), \quad t \in [0,1],$$

где $\varphi \in \mathcal{J}$.

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) *имеет единственное неотрицательное решение.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{K}$ конус неотрицательных функций пространства $\mathbb{C}_{[0,1]}$. Очевидно, $(\tilde{K}, d)$ с метрикой $d(x,y) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\{|x(t) - y(t)|\}$ является полным метрическим пространством, удовлетворяющим условиям (2.1) и (2.2).

Оператор A, определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f(s,x(s))ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и оставляет инвариантным конус $\tilde{K}$.

Далее проверим выполнение условий теоремы 2.2.

Вначале покажем монотонность оператора A.

Действительно, в силу монотонности f по второму аргументу, для $u, v \in \tilde{K}$ и $u \geqslant v$ имеем

$$(Au)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \geqslant \int\limits_0^1 G(t,s)f(s,v(s))ds = (Av)(t), \quad t \in [0,1].$$

Докажем теперь, что A удовлетворяет стягивающему условию теоремы 2.1. Действительно, с учетом условий настоящей теоремы, для $u, v \in \tilde{K}$ и $u \geqslant v$ имеем

$$d(Au, Av) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\{|Au(t) - Av(t)|\} = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\{(Au(t) - Av(t))\} =$$
$$= \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_0^1 G(t,s)(f(s,u(s)) - f(s,v(s)))ds \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_0^1 G(t,s)\lambda\varphi(u(s) - v(s))ds.$$

Ввиду $\varphi \in \mathcal{J}$ с учетом условий данной теоремы и леммы 2.1 имеем

$$d(Au, Av) \leqslant \lambda\varphi(d(u,v)) \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_0^1 G(t,s)ds =$$
$$= \lambda\varphi(d(u,v))A \leqslant \varphi(d(u,v)) = d(u,v) - (d(u,v) - \varphi(d(u,v))).$$

Положим $\psi(x) = x - \varphi(x)$. Из $\varphi \in \mathcal{J}$ следует, что $\psi \in \mathcal{F}$, и соответственно из последнего неравенства получим

$$d(Au, Av) \leqslant d(u,v) - \psi(d(u,v)).$$

Это доказывает, что A удовлетворяет стягивающему условию теоремы 2.1.

Наконец, неотрицательность функций $G(t,s)$ и $f(t,x)$ дает нам

$$(A0)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)f(s,0)ds \geqslant 0,$$

где 0 обозначает нулевую функцию.

Следовательно, в силу теоремы 2.2 оператор A имеет единственную неотрицательную неподвижную точку, что равносильно существованию единственного неотрицательного решения краевой задачи (1.1)–(1.3). □

Приведем теперь достаточные условия существования и единственности положительного решения (см. определение 1.1) задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 2.4. *При выполнении условий теоремы* 2.3 *и условия* $f(t_0, 0) \neq 0$ *для некоторого* $t_0 \in [0,1]$ *краевая задача* (1.1)–(1.3) *имеет единственное положительное решение.*

Доказательство. Докажем вначале, что неотрицательное решение $x(t)$ задачи (1.1)–(1.3), существование которого гарантирует теорема 2.3, является положительным.

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) уравнение (1.4). Предположим, что существует число $0 < t^* < 1$ такое, что $x(t^*) = 0$. Тогда

$$x(t^*) = \int\limits_0^1 G(t^*,s)f(s,x(s))\,ds = 0.$$

В силу неотрицательности $x(t)$, монотонности функции $f(t,u)$ по второму аргументу и неотрицательности функции Грина получим

$$0 = x(t^*) = \int\limits_0^1 G(t^*,s)f(s,x(s))\,ds \geqslant \int\limits_0^1 G(t^*,s)f(s,0)\,ds \geqslant 0.$$

Таким образом,

$$x(t^*) = \int\limits_0^1 G(t^*,s)f(s,0)\,ds = 0.$$

Очевидно, последнее соотношение возможно, если

$$G(t^*,s)f(s,0) = 0.$$

Но, с другой стороны, $G(t^*, s) \neq 0$. Следовательно,

$$f(s, 0) = 0. \tag{2.3}$$

В то же время, по условию теоремы $f(t_0, 0) \neq 0$, $t_0 \in [0, 1]$, неотрицательность $f(t, u)$, соответственно, влечет $f(t_0, 0) > 0$. Ввиду непрерывности $f(t, u)$ можно указать подмножество $\Omega \subset [0, 1]$ с $t_0 \in \Omega$, $\mu(\Omega) > 0$, где μ — мера Лебега и $f(t, 0) > 0$ для любого $t \in \Omega$. Это противоречит (2.3).

Поэтому $x(t) > 0$, $t \in (0, 1)$. □

Теперь приведем пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$x''(t) + \alpha + \lambda\sqrt{x(t)} = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{2.4}$$

$$x'(0) = 0, \tag{2.5}$$

$$x(1) = 0, \tag{2.6}$$

где $\alpha, \lambda > 0$.

Здесь $n = 2$ и $f(t, x) = \alpha + \lambda\sqrt{x}$. Легко видеть, что $f(t, x)$ неотрицательна, непрерывна на $[0, 1] \times [0, \infty)$ и не убывает по второму аргументу. Более того, положив $\varphi(u) = \sqrt{u}$, несложно убедиться, что $f(t, u)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.

Таким образом, для $u \geqslant v$ справедливо

$$f(t, u) - f(t, v) = \lambda(\sqrt{u} - \sqrt{v}) \leqslant \lambda(\sqrt{u - v}).$$

Докажем, что $\varphi(u) = \sqrt{u}$ принадлежит $\mathcal{J}$. Очевидно, $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ является непрерывной и неубывающей функцией. Кроме того, $\psi(u) = u - \varphi(u) = u - \sqrt{u}$ также непрерывна, не убывает и удовлетворяет условиям: $\psi(u) > 0$ при $u > 0$ и $\psi(0) = 0$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{J}$.

Наконец, $f(t, 0) = \alpha + \sqrt{0} = \alpha > 0$. Таким образом, на основании теоремы 2.4 задача (2.4)–(2.6) имеет единственное положительное решение при

$$0 < \lambda \leqslant \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right)^{-1} = 8.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдурагимов Э. И.* Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения// Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. — 2010. — *76*, № 2. — С. 5–12.
2. *Абдурагимов Э. И.* Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка// Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. — 2014. — *121*, № 10. — С. 9–16.
3. *Абдурагимов Э. И., Абдурагимова П. Э., Гаджиева Т. Ю.* Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения// Вестн. Даг. гос. ун-та. Сер. 1: Естеств. науки. — 2019. — № 3. — С. 79–85.
4. *Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М. М.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка// Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2021. — *25*, № 136. — С. 341–347.
5. *Cabada A., Iglesias J.* Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions// Bound. Value Probl. — 2021. — *66*. — С. 1–19.
6. *Harjani J., Sadarangani K.* Fixed point theorems for weakly concractive mappings in partially ordered sets// Nonlinear Anal. — 2009. — *71*. — С. 3403–3410.
7. *Li Z., Shu X.-B., Miao T.* The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems// Bound. Value Probl. — 2022. — *97*. — С. 1–23.
8. *Liu Y.* Multiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations// Appl. Math. Lett. — 2004. — *4*. — С. 747–757.
9. *Moustafa El-S.* Positive solutions of boundary value problems for nth-order ordinary differential equations// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2008. — *1*. — С. 1–9.
10. *Nietto J. J., Rodriguez-Lopez R.* Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations// Order. — 2005. — *22*. — С. 223–239.
11. *Talib I., Abdeljawad T., Abdulah M. A.* New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems// Adv. Differ. Equ. — 2021. — *368*. — С. 1–22.

12. *Wang F., Ding R.* On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight// Bound. Value Probl. — 2021. — *96*. — С. 1–17.
13. *Yang Z.* Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative// Adv. Differ. Equ. — 2021. — *313*. — С. 1–16.
14. *Ying H.* Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems// Adv. Pure Math. — 2014. — *4*. — С. 480–486.
15. *Zhang Y., Abdella K., Feng W.* Positive solutions for second-order differential equations with singularities and separated integral boundary condition// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2020. — *75*. — С. 1–12.

Г. Э. Абдурагимов
Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия
E-mail: gusen_e@mail.ru

П. Э. Абдурагимова
Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия
E-mail: abpatuka@mail.ru

М. М. Курамагомедова
Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия
E-mail: madina19.12@mail.ru

UDC 517.927.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207
EDN: CUFAAP

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary-value problem of the Sturm–Liouville type for a nonlinear ordinary differential equation

G. È. Abduragimov, P. È. Abduragimova, and M. M. Kuramagomedova

Daghestan State University, Makhachkala, Russia

Abstract. Using the fixed point theorem in partially ordered sets, we obtain sufficient conditions for the existence of a unique positive solution to a boundary-value problem of the Sturm–Liouville type for a nonlinear ordinary differential equation, and give an example illustrating the results obtained.

Keywords: cone, positive solution, operator fixed point, Green's function.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: G. È. Abduragimov, P. È. Abduragimova, M. M. Kuramagomedova, "On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary-value problem of the Sturm–Liouville type for a nonlinear ordinary differential equation," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 201–207. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207

© G. È. Abduragimov, P. È. Abduragimova, M. M. Kuramagomedova, 2023
This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

REFERENCES

1. È. I. Abduragimov, "Polozhitel'noe reshenie dvukhtochechnoy kraevoy zadachi dlya odnogo ODU chetvertogo poryadka i chislennyy metod ego postroeniya" [A positive solution of a two-point boundary-value problem for one fourth-order ODE and a numerical method for its construction], *Vestn. SamU. Estestvennonauchn. ser.* [Bull. Samara Univ. Ser. Natur. Sci.], 2010, **76**, No. 2, 5–12 (in Russian).
2. È. I. Abduragimov, "Sushchestvovanie polozhitel'nogo resheniya dvukhtochechnoy kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo ODU chetvertogo poryadka" [Existence of a positive solution to a two-point boundary-value problem for one nonlinear fourth-order ODE], *Vestn. SamU. Estestvennonauchn. ser.* [Bull. Samara Univ. Ser. Natur. Sci.], 2014, **121**, No. 10, 9–16 (in Russian).
3. È. I. Abduragimov, P. È. Abduragimova, and T. Yu. Gadzhieva, "Dvukhtochechnaya kraevaya zadacha dlya odnogo nelineynogo ODU 4-go poryadka. Sushchestvovanie, edinstvennost' polozhitel'nogo resheniya i chislennyy metod ego postroeniya" [Two-point boundary-value problem for one 4th-order nonlinear ODE. Existence, uniqueness of a positive solution, and a numerical method for its construction], *Vestn. Dag. gos. un-ta. Ser. 1: Estestv. nauki* [Bull. Dagestan State Univ. Ser. 1. Natur. Sci.], 2019, No. 3, 79–85 (in Russian).
4. G. È. Abduragimov, P. È. Abduragimova, and M. M. Kuramagomedova, "O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya kraevoy zadachi dlya nelineynogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya chetnogo poryadka" [On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary-value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order], *Vestn. ros. un-tov. Mat.* [Bull. Rus. Univ. Math.], 2021, **25**, No. 136, 341–347 (in Russian).
5. A. Cabada and J. Iglesias, "Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions," *Bound. Value Probl.*, 2021, **66**, 1–19.
6. J. Harjani and K. Sadarangani, "Fixed point theorems for weakly concractive mappings in partially ordered sets," *Nonlinear Anal.*, 2009, **71**, 3403–3410.
7. Z. Li, X.-B. Shu, and T. Miao, "The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems," *Bound. Value Probl.*, 2022, **97**, 1–23.
8. Y. Liu, "Multiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations," *Appl. Math. Lett.*, 2004, **4**, 747–757.
9. Moustafa El-S., "Positive solutions of boundary value problems for nth-order ordinary differential equations," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2008, **1**, 1–9.
10. J. J. Nietto and R. Rodriguez-Lopez, "Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations," *Order*, 2005, **22**, 223–239.
11. I. Talib, T. Abdeljawad, and M. A. Abdulah, "New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems," *Adv. Differ. Equ.*, 2021, **368**, 1–22.
12. F. Wang and R. Ding, "On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight," *Bound. Value Probl.*, 2021, **96**, 1–17.
13. Z. Yang, "Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative," *Adv. Differ. Equ.*, 2021, **313**, 1–16.
14. H. Ying, "Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems," *Adv. Pure Math.*, 2014, **4**, 480–486.
15. Y. Zhang, K. Abdella, and W. Feng, "Positive solutions for second-order differential equations with singularities and separated integral boundary condition," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2020, **75**, 1–12.

G. È. Abduragimov
Daghestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: `gusen_e@mail.ru`

P. È. Abduragimova
Daghestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: `abpatuka@mail.ru`

M. M. Kuramagomedova
Daghestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: `madina19.12@mail.ru`