Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 185–200
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 515.124+515.126.4+515.126.83
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200
EDN: FQFZEV

МЕТОД ПОИСКОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И СОВПАДЕНИЙ

Т. Н. Фоменко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Статья содержит обзор ряда результатов, содержащихся в работах автора, а также автора и Ю. Н. Захаряна, о существовании и аппроксимации нулей однозначных и многозначных (α, β)-поисковых функционалов, о сохранении, при изменении числового параметра, существования нулей таких функционалов. Приводятся следствия из этих результатов в теории неподвижных точек и точек совпадения однозначных и многозначных отображений метрических пространств. Проводится сравнение с известными результатами других авторов. В завершающей части статьи исследуется проблема существовании непрерывной по параметру однозначной ветви нулей у параметрического семейства поисковых функционалов. Доказана теорема о существовании решения этой задачи.

Ключевые слова: поисковые функционалы, существование нулей, неподвижные точки, точки совпадения

Для цитирования: *Т. Н. Фоменко.* Метод поисковых функционалов и его применения в теории неподвижных точек и совпадений// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 185–200. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200

1. Введение

Статья содержит обзор ряда результатов автора о существовании и аппроксимации нулей однозначных и многозначных (α, β)-поисковых функционалов [6–8, 12], а также результатов автора и Ю. Н. Захаряна [14] о сохранении, при изменении числового параметра, существования нулей у параметрического семейства таких функционалов. Приводятся некоторые следствия из этих результатов в теории неподвижных точек и точек совпадения однозначных и многозначных отображений метрических пространств. Проводится сравнение с известными результатами других авторов. В завершающей части статьи исследуется проблема существования непрерывной по параметру однозначной ветви нулей у параметрического семейства поисковых функционалов. Доказана теорема о существовании решения этой задачи.

Статья состоит из 4 разделов и списка литературы и организована следующим образом.

В разделе 2 содержится обзор ранее полученных результатов о поиске нулей неотрицательных (α, β)-поисковых функционалов $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ на метрическом пространстве (X, ρ), то есть таких точек ξ, где $\varphi(\xi) = 0$. Понятие (α, β)-поискового функционала и метод поиска нулей таких функционалов были предложены автором в работах 2009–2013 годов [6–8, 12]. Сначала рассматривались однозначные, затем многозначные поисковые функционалы. Поиск нулей однозначных функционалов осуществлялся по метрическому пространству (X, ρ). Для многозначных (α, β)-поисковых функционалов более удобным оказался метод поиска их нулей, то есть таких точек

$\xi \in X$, что $0 \in \varphi(\xi)$, по графику заданного функционала. В теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических пространств поиск и аппроксимация неподвижных точек и точек совпадения связаны с тем, что расстояние между точкой и её образом или между образами двух либо нескольких отображений стремится к нулю. Отсюда очевидна связь с проблемой поиска и аппроксимации нулей функционалов.

Ниже формулируются несколько версий принципа поиска нулей (α, β)-поисковых функционалов как в однозначном, так и в многозначном случае. Приводятся полученные с их помощью обобщения известных результатов, связанных с проблемой существования неподвижных точек и совпадений отображений метрических пространств.

Подчеркнем, что мы не копируем определения и формулировки более ранних работ, а приводим их некоторое развитие, слегка ослабляя условия теорем и приводя более оптимальные определения и терминологию.

В разделе 3 представлен обзор совместных результатов автора и Ю. Н. Захаряна [14] о сохранении, при изменении параметра, существования нулей у параметрического семейства поисковых функционалов. Приводятся следствия о сохранении, при изменении параметра, существования неподвижных точек и точек совпадения у семейств многозначных отображений метрического пространства и сравнения с известными результатами других авторов.

В разделе 4 рассматривается важная для приложений задача о существовании параметрической непрерывной кривой в множестве нулей параметрического семейства многозначных поисковых функционалов. Доказывается основной результат статьи — теорема о существовании такой непрерывной ветви нулей.

2. Существование нулей поисковых функционалов в метрическом пространстве и некоторые следствия

Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства. Ниже будем использовать следующие обозначения. Пусть $H \subset Y$ — замкнутое подпространство. Его полный прообраз при действии отображения $f : X \to Y$ обозначим через $f^{-1}(H)$. $\mathrm{Coin}(f_1, \ldots, f_n) := \{x \in X | f_1(x) = \ldots = f_n(x)\} \subseteq X$ обозначает множество точек совпадения отображений $f_1, \ldots, f_n : X \to Y (n \geqslant 2)$, $\mathrm{Comfix}(f_1, \ldots, f_n) := \{x \in X | f_1(x) = \ldots = f_n(x) = x\} \subset X$ — множество общих неподвижных точек отображений $f_1, \ldots, f_n : X \to X$ $(n \geqslant 1)$. Если задан однозначный или многозначный неотрицательный функционал $\varphi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$, то множество его нулей будем обозначать через $\mathrm{Nil}(\varphi) := \{x \in X | 0 \in \varphi(x)\}$.

Рассматриваются задачи построения аппроксимационных последовательностей в X, начинающихся из любой заданной точки $x_0 \in X$ и сходящихся к точке заданного множества $A \neq \varnothing$, где $A \subseteq X$ совпадает с одним из указанных выше подмножеств $f^{-1}(H)$, $\mathrm{Coin}(f_1, \ldots, f_n)$, $\mathrm{Comfix}(f_1, \ldots, f_n)$ пространства X.

Отметим, что рассматриваемые задачи и полученные ниже результаты удобно формулируются в терминах дискретных динамических систем.

Под дискретной динамической системой с фазовым пространством X и полугруппой сдвигов $(Z_{\geqslant 0}, +)$ понимают произвольное действие этой полугруппы на X, то есть когда на X задана полугруппа неотрицательных итераций $\{G^n\}_{n=0,1,\ldots}$ отображения $G : X \to X$, где $G^0 := \mathrm{id}_X$. Такая динамическая система называется *каскадом*[1] на X. Здесь мы будем использовать термин *мультикаскад*, имея в виду его многозначный вариант (то есть когда отображение $G : X \rightrightarrows X$ многозначно). Отображение (оператор сдвига) $G = G^1 : X \to X$, представляющее образующий элемент $1 \in Z_{\geqslant 0}$, называется *генератором* каскада. В случае мультикаскада этот оператор, вообще говоря, многозначен.

Таким образом, фактически задача, сформулированная выше, — это задача построения мультикаскада на пространстве X с заданным предельным множеством A. Иными словами, построение мультикаскада означает задание некоторого, вообще говоря, неоднозначного, отображения (генератора каскада) $G : X \rightrightarrows X$, итерации которого, примененные к любой точке $x \in X$, задают начинающиеся из x сходящиеся последовательности, пределы которых суть элементы предельного множества этого каскада, то есть заданного подмножества A.

[1] Удачный термин *каскад* предложен Д. В. Аносовым.

Для решения таких задач применяется метод так называемых (α,β)-поисковых неотрицательных функционалов на пространстве X.

Опишем понятие (α,β)-поискового функционала и принцип каскадного поиска нулей таких функционалов. Вначале рассмотрим однозначную версию этого принципа. Затем принцип каскадного поиска будет применён для аналогичных случаев предельного множества A, касающихся многозначных отображений.

В некотором смысле можно сказать, что предлагаемый метод каскадного поиска является дискретным аналогом в метрическом пространстве хорошо известного метода градиентного спуска.

Определения и терминология многозначных отображений имеются в книге [3]. Тем не менее, для удобства, кроме ссылок на литературу, будут приведены все необходимые определения и обозначения.

Приведем общий результат, который мы называем однозначным *принципом каскадного поиска нулей*. Покажем, что из этого принципа получаются обобщения целого ряда известных теорем, в том числе известного принципа неподвижной точки Банаха [11] (см. также [5, с. 70])

Следующие определения имеются в [8, 12].

Определение 2.1. Пусть $f : X \to Y$ — однозначное (или многозначное, $f : X \rightrightarrows Y$) отображение между метрическими пространствами (X,d) и (Y,ρ), и его график $\mathrm{Graph}(f) := \{(x,y) \in X \times Y | y \in f(x)\} \subseteq X \times Y$. Будем говорить, что для некоторого непустого подмножества $A \subset Y$, график $\mathrm{Graph}(f)$ является *A-замкнутым*, если он содержит все свои предельные точки вида $(x,y) \in X \times Y$, где $y \in A$.

Определение 2.2. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(f)$ является *A-полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n, y_n\}_{n=0,1,\dots} \subseteq \mathrm{Graph}(f)$, где $\rho(y_n, A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, сходится к некоторой паре $(\xi,\eta) \in \mathrm{Graph}(f)$, где $\eta \in A$, и следовательно, $\eta \in f(\xi) \cap A$.

Определение 2.3. Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный однозначный функционал на метрическом пространства (X,ρ), $0 \leqslant \beta < \alpha$. Скажем, что функционал φ является *(α,β)-поисковым* на X, если для любого $x \in X$ существует $x' \in X$ такой, что $\rho(x.x') \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\alpha}$ и $\varphi(x') \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x)$.

Для однозначных (α,β)-поисковых функционалов на метрическом пространстве (X,ρ), исходя из их определения, из любой точки $x_0 \in X$ можно построить так называемую *поисковую последовательность* $\{x_n\} \subseteq X$, то есть такую, что $\rho(x_n.x_{n+1}) \leqslant \dfrac{\varphi(x_n)}{\alpha}$ и $\varphi(x_{n+1}) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x_n)$.

Следующая теорема является небольшой модификацией теоремы из [12]. Для полноты изложения приведем её с доказательством. Вместо более сильных условий $\{0\}$-полноты и $\{0\}$-замкнутости графика (α,β)-поискового функционала мы используем следующие понятия.

Определение 2.4. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ (α,β)-поискового функционала *поисково-полон*, если любая его поисковая последовательность сходится к элементу графика. Будем называть график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *поисково-замкнутым*, если он содержит пределы всех его поисковых последовательностей.

Теорема 2.1 (однозначный принцип каскадного поиска). *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный однозначный (α,β)-поисковый функционал на X, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Предположим, что либо его график поисково-полон, либо пространство X полно и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут. Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством $\mathrm{Nil}(\varphi)$ и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и предельной точкой любой поисковой последовательности, начинающейся из x_0, не превышает $\dfrac{\varphi(x_0)}{\alpha-\beta}$.*

Доказательство. Рассуждения вполне стандартны. Рассмотрим любую точку $x_0 \in X$. Сходящаяся поисковая последовательность строится по индукции. Пусть $x_1 = x'$ — точка, существующая согласно условию теоремы. Далее, если точка x_m уже выбрана и $\varphi(x_m) = 0$, то есть $x_m \in A$, то положим $x_j = x_m$ для всех $j > m$. Если $\varphi(x_m) > 0$, то согласно условиям теоремы снова существует точка x_{m+1}, для которой $\rho(x_m, x_{m+1}) \leqslant \dfrac{\varphi(x_m)}{\alpha}$ и $\varphi(x_{m+1}) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x_m)$.

Получаем последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$. Она очевидно фундаментальна, так как

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leqslant \frac{\varphi(x_m)}{\alpha} \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^m \cdot \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Кроме того, из этих неравенств видно, что $\varphi(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, последовательность элементов графика $\{(x_m, \varphi(x_m))\}_{m=0,1,\dots}$ фундаментальна. Так как по условию либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-полон, или пространство X полно и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут, в обоих случаях получается, что эта последовательность сходится к некоторому элементу $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\varphi)$. Это означает, что $\varphi(\xi) = 0$, то есть $\xi \in \mathrm{Nil}(\varphi)$.

Оценим расстояние $\rho(x_0, \xi)$. Имеем:

$$\rho(x_0, \xi) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_0, x_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \rho(x_{k-1}, x_k) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (\frac{\beta}{\alpha})^{k-1} \cdot \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha - \beta}.$$

□

Приведем примеры однозначных поисковых функционалов.

Пример 2.1. $\varphi(x) := \rho(x, H)$, где H — замкнутое подпространство в Y. Функционал φ является $(1,0)$-поисковым. В самом деле, при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ имеем: для любого $x \in X$ существует $x' \in H$ такое, что $\rho(x, x') = \varphi(x)$, $\varphi(x') = \rho(x', H) = 0$.

Пример 2.2. Если $f : X \to X$ — λ-сжимающее отображение, то есть

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda \cdot \rho(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in X, \quad 0 < \lambda < 1,$$

то функционал $\psi(x) := \rho(x, f(x))$ является (α, β)-поисковым при $\alpha = 1$, $\beta = \lambda$. Действительно, для любого $x \in X$ возьмем $x' = f(x) \in X$. Тогда $\rho(x, x') = \rho(x, f(x)) = \psi(x)$, $\psi(x') = \rho(x', f(x')) = \rho(f(x), f^2(x) \leqslant \lambda \cdot \rho(x, f(x)) = \lambda \cdot \psi(x)$.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 2.1, в которых используются данные выше определения поисковой замкнутости и поисковой полноты графика.

Приближение к прообразу замкнутого подпространства. Пусть (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства. Пусть H — замкнутое подпространство в Y. Обозначим через $\overline{B_r(x)}$ замкнутый шар радиуса $r = r(x)$ с центром в точке $x \in X$ по метрике ρ.

Теорема 2.2. *Пусть в описанных условиях задано отображение $F : X \to Y$ и существуют числа α, β, $0 \leqslant \beta < \alpha$ такие, что функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$, где $\varphi(x) = d(F(x), H)$, является (α, β)-поисковым на X. Кроме того, пусть либо пространство X полно и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ поисково-замкнут, либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-полон.*

Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством $F^{-1}(H) \neq \varnothing$, причём расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки ξ этого мультикаскада не превышает $\dfrac{\rho(F(x_0), H)}{\alpha - \beta}$.

Другими словами, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из неё сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (вообще говоря, не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ такая, что её предел $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \xi \in X, F(\xi) \in H$, причём $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{\rho(F(x_0), H)}{\alpha - \beta}$.

Доказательство этой теоремы представлено в [6] (в её первоначальной версии), а также в [12].

В частности, если подпространство $H = \{h\}$ — это фиксированная точка $h \in Y$, то теорема 2.2 дает достаточные условия для приближения к корням уравнения: $F(x) = h$.

Приближение к точкам совпадения n отображений ($n > 1$). Важным частным случаем рассмотренной задачи о приближении к прообразу подпространства является проблема приближения к точкам совпадения заданного набора n отображений $f_1, \dots, f_n : X \to Y$. На самом деле эта задача равносильна задаче о приближении к диагонали $\Delta_n := \{y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n | y_1 = \dots = y_n\} \subset \underbrace{Y \times \dots \times Y}_{n} = Y^n$ для отображения $F = f_1 \times \dots \times f_n : X \to Y^n$. Сформулируем в виде теоремы этот частный вариант теоремы 2.2, полагая метрику D в $X \times Y$ заданной по формуле $D(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$.

Теорема 2.3. *Пусть заданы отображения $f_1, \dots, f_n : X \to Y$, и существуют числа α, β, $0 < \beta < \alpha$ такие, что функционал $\varphi(x) := D(F(x), \Delta_n)$ является (α, β)-поисковым, где*

$$\Delta_n := \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n | y_1 = \dots = y_n\}, \quad F = (f_1, \dots, f_n).$$

Пусть также либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *функционала φ поисково-полон, либо X — полное пространство и график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *поисково-замкнут.*

Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством $A = \mathrm{Coin}(f_1, \dots, f_n) \neq \varnothing$, причём расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мультикаскада $\xi \in A$ не превышает $\dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из неё сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ такая, что её предел $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = \xi \in X$, $f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi)$, причём $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Доказательство этого утверждения (в его первоначальной форме) содержится в [12].

С точки зрения теоремы 2.3 представляет интерес отыскание достаточных условий на отображения $f_1, \dots, f_n$, обеспечивающих условие теоремы. Поэтому полезно получить оценки на расстояние до диагонали от любой точки $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$. Приведем такие оценки в следующей лемме, доказательство которой вполне стандартно [12].

Лемма 2.1. *Для произвольного элемента $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$, $n \geqslant 2$, обозначим $\tilde{D}(y) = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(y_i, y_j)$. Справедлива следующая оценка:*

$$\tilde{D}(y) \leqslant D(y, \Delta_n) \leqslant \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(y). \tag{2.1}$$

Заметим, что при $n = 2$ из приведенной в лемме 2.1 оценки следует очевидное равенство: $D(y, \Delta_2) = \tilde{D}(y) = d(y_1, y_2)$.

Следует отметить, что при $n = 2$ из теоремы 2.3 вытекает следующая теорема А. В. Арутюнова. Подробное обоснованное сравнение этих теорем приведено в [7].

Теорема 2.4 (см. [1, теорема 1])**.** *Пусть X, Y — метрические пространства, причём пространство X полно. Пусть $f_1, f_2 : X \to Y$ — произвольные отображения, причём f_1 непрерывно и является λ-накрывающим (то есть для некоторого $\lambda > 0$ верно включение: $B_{\lambda r}(F(x)) \subseteq F(B_r(x))$, $\forall r > 0, \forall x \in X$), а отображение f_2 удовлетворяет условию Липшица с константой γ (то есть $\rho(f_2(x), f_2(x')) \leqslant \gamma \rho(x, x')$, $\forall x, x' \in X$), где $0 \leqslant \gamma < \lambda$. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что $f_1(\xi) = f_2(\xi)$, и справедлива оценка:*

$$\rho(x_0, \xi) \leqslant \frac{\rho(f_1(x_0), f_2(x_0))}{\lambda - \gamma}. \tag{2.2}$$

Стоит сказать, что теорема 2.3 является существенным обобщением теоремы 2.4 в том смысле, что из условий теоремы 2.3 при $n = 2$ не следует ни одно из условий теоремы 2.4. В [7] приводится соответствующий пример.

Если в теореме 2.3 положить $X = Y$ и одно из отображений $f_1, \dots, f_n$ положить равным тождественному, то получается теорема о существовании общих неподвижных точек у конечного набора отображений в себя пространства X.

Если все отображения $f_1, \dots, f_n$ при $n > 1$ совпадают, или $n = 1$, то в качестве ещё одного следствия из теоремы 2.3 получается следующее обобщение хорошо известного *принципа Банаха—Каччиополи сжимающих отображений* [11] (см. также, например, [5, с. 70]).

Теорема 2.5. *Пусть X — полное метрическое пространство, $f : X \to Y$ — заданное отображение с замкнутым графиком. Пусть существует такое число α, $0 < \alpha < 1$, что для любой точки $x \in X$ выполнено неравенство: $\rho(f(x), f^2(x)) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, f(x))$. Тогда на X существует каскад, генератор которого совпадает с отображением f, с предельным множеством $A = \mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, причём расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки каскада $\xi \in A$ не превышает $\dfrac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}$. Иначе говоря, тогда из любой точки $x_0 \in X$ можно построить последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, где $x_m = f^m(x_0)$, имеющую предел $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \xi \in X$, причём $\xi = f(\xi)$, и $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}$.*

Отметим, что в отличие от принципа сжимающих отображений, теорема 2.5 не гарантирует единственности неподвижной точки, однако применима к более широкому классу отображений.

Можно предложить и такой вариант обобщения принципа сжимающих отображений.

Теорема 2.6. *Пусть X — метрическое пространство, $f : X \to X$ заданное отображение. Пусть α, $0 < \alpha < 1$, таково, что функционал $\varphi(x) := \rho(x, f(x))$, $x \in X$, является $(1, \alpha)$-поисковым на X. Предположим также, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ поисково-полон. Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством $\mathrm{Fix}(f)$, и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и любой соответствующей предельной точкой не превышает $\dfrac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}$.*

Приведем несколько простых замечаний.

Замечание 2.1. Отметим, что генератор каждого из построенных мультикаскадов в приведенных теоремах задается отображением (вообще говоря, неоднозначным) $G : X \to X$, $G(x) = x' = x'(x)$, где существование соответствующей (вообще говоря, не единственной) точки $x'(x) \in X$ с нужными свойствами обеспечивается условиями каждой из теорем. Все построенные в доказательствах теорем последовательности $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ являются, конечно, *итерационными относительно действия именно такого генератора G.*

Замечание 2.2. Отметим, что предложенные здесь результаты объединены общей идеей, похожей на метод градиентного спуска. Для построения на пространстве X мультикаскада с предельным множеством A, $A \subset X$, на X задается некоторый метрический функционал φ с нуль-пространством $\{x \in X \mid \varphi(x) = 0\} = A$. Значение такого функционала в каждой точке $x \in X$ определяет (с помощью вспомогательных параметров) некоторое «направляющее» множество, где должны существовать точки «спуска» этого функционала, то есть уменьшения его значения с коэффициентом, меньшим единицы. Переход в такую точку «спуска» и задает действие генератора искомого каскада. Стремление такого функционала к нулю означает в точности приближение к заданному предельному множеству A.

Перейдем теперь к рассмотрению многозначных функционалов.

Каскадный поиск нулей многозначного (α, β)-поискового функционала. Определения и терминология теории многозначных отображений имеются, например, в книге [3]. Приведем необходимые определения и формулировку принципа поиска нулей (см. [8, 12]).

Определение 2.5. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный функционал на X. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ является $\{0\}$-*замкнутым*, если для всякой последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi)$, сходящейся к некоторому элементу $(\xi, 0)$, верно, что $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, то есть $0 \in \Phi(\xi)$.

Замечание 2.3. Фундаментальность и сходимость последовательностей элементов графика рассматриваются относительно метрики $D : (X \times \mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$, где $D((x', c'), (x'', c'')) = d(x', x'') + |c' - c''|$.

Определение 2.6. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ называется (α, β)-*поисковым на* X, если для любой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существует точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leqslant \frac{1}{\alpha} c$ и $c' \leqslant \frac{\beta}{\alpha} c$.

Определение 2.7. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный (α, β)-поисковый функционал на X. График $\mathrm{Graph}(\Phi) := \{(x, c) \in X \times \mathbb{R}_+ \mid c \in \Phi(x)\}$ функционала Φ называется *поисково-полным*, если всякая (α, β)-поисковая последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi)$ (то есть такая, что $\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{c_n}{\alpha}$ и $c_{n+1} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot c_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), сходится к некоторому элементу $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, то есть $0 \in \Phi(\xi)$.

График многозначного (α, β)-поискового функционала называется *поисково-замкнутым*, если он содержит пределы всех поисковых последовательностей.

Предыдущий вариант следующей теоремы с доказательством содержится в [8].

Теорема 2.7. *Пусть* (X, d) — *метрическое пространство,* $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — *многозначный* (α, β)-*поисковый функционал на* X *с поисково-полным графиком,* $0 \leqslant \beta < \alpha$. *Тогда для каждой пары* $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ *существует точка* $\xi \in X$ *такая, что* $0 \in \Phi(\xi)$ *и* $d(x_0, \xi) \leqslant \frac{c_0}{\alpha - \beta}$. *При этом, очевидно, что если* $c_0 \leqslant R \cdot (\alpha - \beta)$, *то* $\xi \in B_R(x_0)$.

Обозначения. $(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства, H — замкнутое подпространство в Y, $F : X \to C(Y)$ — многозначное отображение, где $C(Y)$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств в Y. $\overline{B_r(M)}$ — замкнутая r-окрестность ($r > 0$) множества M (в соответствующей метрике). В частности, если $M = x$ — точка, то это замкнутый шар радиуса r с центром в точке x. Метрику D в пространстве Y^n определим так: $D(y, z) := \sum\limits_{i=1}^{n} d(y_i, z_i)$, где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in Y^n$. Δ_n — диагональ в Y^n, $n \geqslant 2$. $\Delta_n(H) := \{\tilde{h} = (h, \ldots, h) \in \Delta_n \mid h \in H\}$ — часть диагонали «над подпространством H». Расстояние от элемента $y \in Y$ до подмножества $A \subset Y$ определяется стандартным образом: $d(y, A) := \inf\limits_{z \in A} d(y, z)$.

Определение 2.8. Многозначное отображение F называется α-*накрывающим* в X, если для любой точки $x \in X$ и для любого $r > 0$ верно, что $B_{\alpha r}(F(x)) \subseteq F(B_r(x))$.

Определение 2.9. Многозначное отображение F называется β-*липшицевым*, если для любых $x, x' \in X$ верно, что $h(F(x), F(x')) \leqslant \beta \rho(x, x')$, где $h : C(Y) \times C(Y) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — (расширенная) метрика Хаусдорфа.

Теорема 2.8 (см. [12]). *Пусть* $F : X \to C(Y)$ — *многозначное отображение, и* $\mathrm{Graph}(F)$ H-*поисково-полон, где* $H \subset Y$ — *замкнутое подпространство в* Y. *Пусть* $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, *и для каждой пары* $(x, y) \in \mathrm{Graph}(F)$ *существует пара* $(x', y') \in \mathrm{Graph}(F)$, *для которой* $\rho(x, x') \leqslant \frac{d(y, H)}{\alpha}$, $d(y, y') \leqslant \gamma \cdot d(y, H)$ *и* $d(y', H) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, H)$. *Тогда на* X *существует мультикаскад с предельным множеством* $F^{-1}(H)$, *причём расстояние от любой начальной точки* x_0 *до всякой соответствующей предельной точки не больше* $\frac{d(y_0, H)}{\alpha - \beta}$, *где* $y_0 \in F(x_0)$.

Применим теорему 2.8 к задаче каскадного поиска множества точек совпадений конечного набора многозначных отображений. Верно следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$, $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$, *причём* $\mathrm{Graph}(F)$ *поисково-*Δ_n*-замкнут, и хотя бы один из графиков* $\mathrm{Graph}(F_i), i = 1, \ldots, n$, *полон. Пусть числа* $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, *таковы, что для каждого* $x \in X$ *и каждого* $y \in F(x)$ *существуют точки* $x' \in X$ *и* $y' \in F(x')$, *для которых* $\rho(x, x') \leqslant \frac{d(y, \Delta_n)}{\alpha}$, $d(y, y') \leqslant \gamma \cdot d(y, \Delta_n)$, $d(y', \Delta_n) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, \Delta_n)$. *Тогда на* X *существует мультикаскад с предельным множеством* $\mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n) := \{x \in X \mid F_1(x) \cap \ldots \cap F_n(x) \neq \varnothing\}$, *причём расстояние от любой начальной точки* $x_0 \in X$ *до любой* *соответствующей предельной точки $\xi \in X$ зависит от выбранного значения $y_0 \in F(x_0)$ и не превышает* $\dfrac{d(y_0,\Delta_n)}{\alpha-\beta}$.

Как показано в [12], из теоремы 2.9 при $n = 2$ следует, в частности, [1, теорема 2].

Определение 2.10. Точка $\xi \in X$ называется *точкой совпадения* многозначных отображений $F_1,\ldots,F_n : X \to C(Y)$, если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i(\xi) \neq \varnothing$. Множество всех точек совпадения называется *множеством совпадений* и обозначается $\mathrm{Coin}(F_1,\ldots,F_n)$.

Определение 2.11. Многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x, для которой $F(U(x)) \subset V$. Отображение F является полунепрерывным сверху на X, если оно является таковым в каждой точке $x \in X$.

Определение 2.12. Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \to Y$ является *секвенциально полунепрерывным сверху* в точке ξ, если для любой сходящейся последовательности $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$, где $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, всякая последовательность $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$, где $y_k \in F(x_k)$, удовлетворяет условию: $\lim\limits_{k\to\infty} d(y_k, F(\xi)) = 0$. Многозначное отображение F называется секвенциально полунепрерывным сверху на X, если оно является таковым в любой точке X.

Заметим, что если отображение полунепрерывно сверху, то оно и секвенциально полунепрерывно сверху. Однако, вообще говоря, обратное неверно. Нетрудно привести соответствующий пример.

Определение 2.13. Назовём график $\mathrm{Graph}(F)$ многозначного отображения $F : X \rightrightarrows Y$ *H-(α,β)-поисково-полным*, если любая (α,β)-поисковая последовательность $\{(x_m,y_m)\}_{m=o,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$, то есть такая, что $\rho(x_n,x_{n+1}) \leqslant \dfrac{d(y_m,H)}{\alpha}$, $d(y_{n+1},H) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} d(y_m,H)$, сходится и имеет предел $(\xi,\eta) \in \mathrm{Graph}(F)$, то есть $\eta \in F(\xi) \cap H$.

График $\mathrm{Graph}(F)$ будем называть *H-(α,β)-поисково-замкнутым*, если он содержит пределы всех своих (α,β)-поисковых последовательностей.

Введем следующие обозначения. Расширенный прообраз подпространства H при отображении F — это множество $F_+^{-1}(H) = \{x \in X \mid d(F(x),H) = 0\}$. Расширенное множество совпадений набора многозначных отображений $F_1,\ldots,F_n$ — это множество $\mathrm{Coin}_+(F_1,\ldots,F_n) = \{x \in X \mid D((F_1 \times \ldots \times F_n)(x),\Delta_n) = 0\}$.

Следующая теорема (предыдущая версия её имеется в [12]) решает проблему каскадного поиска расширенного прообраза и полного прообраза замкнутого подпространства при действии многозначного отображения. Отметим, что всюду здесь компактные метрические пространства рассматриваются как пространства, в которых у всякой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.

Теорема 2.10. *Пусть $(X,\rho),(Y,d)$ — метрические пространства, $F : X \to C(Y)$ секвенциально полунепрерывное сверху многозначное отображение, и $H \subset Y$ замкнутое подпространство в Y. Предположим, что многозначный функционал $d_{(F,H)}(x) := \{d = d(y,H) \mid y \in F(x)\}$, $x \in X$, является (α,β)-поисковым на X для некоторых α,β, $0 < \beta < \alpha$, и выполнено одно из следующих двух условий*:

(a) *X полно*;

(b) *H компактно и график $\mathrm{Graph}(F)$ H-(α,β)-поисково-полон.*

Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством A, где либо $A = F_+^{-1}(H)$ (в случае (a)), либо $A = F^{-1}(H)$ (в случае (b)), и в обоих случаях расстояние между начальной точкой $x_0 \in X$ и каждой соответствующей предельной точкой из множества A не превышает $\dfrac{d(F(x_0),H)}{\alpha-\beta}$.

Из теоремы 2.10 получаются следующие теоремы о расширенном и обычном множествах совпадений конечного набора многозначных отображений.

Теорема 2.11. *Пусть X — полное метрическое пространство, $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$ — многозначные секвенциально полунепрерывные сверху отображения, и $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$. Пусть существуют числа $0 < \beta < \alpha$ такие, что многозначный функционал $\Psi(x) := \{\psi = D(y, \Delta_n) \mid y \in F(x)\}$ является (α, β)-поисковым на X.*

Тогда существует мультикаскад на X с предельным множеством $\mathrm{Coin}_+(F_1, \ldots, F_n)$, и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и каждой соответствующей ей предельной точкой не превышает $\dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Иначе говоря, для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots}$ (вообще говоря, не единственная), начинающаяся с x_0, итерационная относительно генератора этого мультикаскада $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi \in X$, такая, что $\xi \in \mathrm{Coin}_+(F_1, \ldots, F_n)$ и $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Теорема 2.12. *Пусть $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$ — многозначные секвенциально полунепрерывные сверху отображения, и $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$. Пусть многозначный функционал $\Psi(x) := \{\psi = D(y, \Delta_n) \mid y \in F(x)\}$ является (α, β)-поисковым на X, где $0 < \beta < \alpha$. Пусть Y компактно, и хотя бы один из графиков $\mathrm{Graph}(F_1), \ldots, \mathrm{Graph}(F_n)$ полон.*

Тогда существует мультикаскад на X с предельным множеством $\mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n)$, и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и любой соответствующей ей предельной точкой не превышает $\dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Иначе говоря, для каждой начальной точки $x_0 \in X$ имеется последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots}$ (вообще говоря, не единственная), начинающаяся с x_0, итерационная относительно генератора этого мультикаскада, такая, что $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi \in X$, $\xi \in \mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n)$ и $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Отметим, что, как показано в [12], из теоремы 2.12 при $n = 2$ следует утверждение [1, теорема 3 и примечание 1].

На этом заканчиваем небольшой обзор результатов о существовании нулей (α, β)-поискового функционала в метрическом пространстве. Отметим ещё, что в недавних работах [9, 10] принцип поиска нулей (α, β)-поискового функционала распространён на некоторые квази-метрические пространства (где неравенство треугольника в определении метрики заменено более общим условием). В этих работах получены результаты, обобщающие некоторые теоремы из [2, 4].

3. Проблема сохранения существования нулей у параметрического семейства функционалов в метрическом пространстве. Сравнение с известными результатами

В этом разделе рассматривается проблема сохранения, при изменении числового параметра, существования нулей у однопараметрического семейства многозначных (α, β)-поисковых функционалов на некотором открытом подмножестве метрического пространства. В статье [14] доказана теорема, где найдены достаточные условия для решения этой задачи. Представлены также следствия из этой теоремы: о сохранении существования прообразов данного замкнутого подпространства у параметрического семейства многозначных отображений метрических пространств, о сохранении существования точек совпадения у конечного набора из двух и более семейств многозначных отображений метрических пространств, о сохранении существования общих неподвижных точек у набора семейств многозначных отображений в себя метрического пространства.

В качестве простого частного случая из полученных результатов вытекает теорема М. Фригон и А. Гранаса [15, 16] (1994 г.) о неподвижных точках сжимающего семейства многозначных отображений.

Стоит отметить, что сжимающее семейство, рассматриваемое в упомянутых работах М. Фригон и А. Гранаса, является непрерывной гомотопией. В отличие от него, семейство многозначных отображений, изучаемое в [14], гомотопией, вообще говоря, не является, поскольку не обладает свойством непрерывности.

Теоремы о существовании неподвижной точки сжимающих отображений имеют многочисленные применения в самых разных областях математики и являются основополагающими результатами в теории неподвижных точек, так как они, кроме существования и единственности неподвижной точки, представляют аппроксимационный процесс её отыскания и оценку расстояния до неё от любой начальной точки.

Самостоятельный интерес представляет задача о сохранении, при изменении числового параметра, существования неподвижных точек на заданном подмножестве метрического пространства у однопараметрического семейства многозначных сжимающих отображений. Эта задача, как уже говорилось, рассматривалась в [15, 16].

В этом разделе будут использованы следующие обозначения.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Будем обозначать $\mathrm{C}(X)$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств X, $\mathrm{CB}(X)$ — совокупность непустых замкнутых и ограниченных подмножеств X, $\mathrm{Com}(X)$ — совокупность непустых компактных подмножеств X. Для любых непустых подмножеств A, B множества X будем обозначать $d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ — расстояние между подмножествами A и B, $d(a, B) := \inf\{d(a, b) | b \in B\} = d(\{a\}, B)$ — расстояние от точки a до подмножества B, $h(A, B) := \sup\limits_{a \in A} d(a, B)$ — отклонение подмножества A от подмножества B, $H(A, B) := \max\{h(A, B), h(B, A)\}$ — расстояние Хаусдорфа между подмножествами A и B. Через $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leqslant r\}$, как обычно, будем обозначать замкнутый шар радиуса r с центром в точке $a \in X$. Символом «$\subset$» («$\subseteq$») будем обозначать отношение строгого (нестрогого) включения.

Следующее определение дано в [15].

Определение 3.1. Пусть (X, ρ) и (Y, d) — метрические пространства. Семейство $T = \{T_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}$ многозначных отображений с параметром $t \in [0; 1]$ называется *λ-сжимающим*, если:

1) для некоторого λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, верно, что $H(T_t(x'), T_t(x'')) \leqslant \lambda\rho(x', x'')$ для всех $t \in [0; 1]$ и $x', x'' \in X$;
2) существует непрерывная возрастающая функция $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ такая, что $H(T_{t'}(x), T_{t''}(x)) \leqslant |\theta(t') - \theta(t'')|$ для всех $x \in X$ и $t', t'' \in [0; 1]$.

В [15] изучен вопрос о сохранении существования неподвижных точек у λ-сжимающего семейства отображений, определенных на некотором открытом подмножестве полного метрического пространства, и доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1 (см. [15, 16]). *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество, и $\{T_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(X)\}$ — λ-сжимающее семейство отображений, не имеющих неподвижных точек на границе ∂U. Тогда если T_0 имеет неподвижную точку в U, то T_1 также имеет неподвижную точку в U.*

Основным результатом работы [14] является теорема (см. теорему 3.3 ниже) о сохранении существования нулей при изменении параметра у однопараметрического семейства (α, β)-поисковых функционалов на открытом подмножестве метрического пространства.

Ниже вводится более общее понятие многозначного функционала, *(α, β)-поискового на некотором подмножестве* метрического пространства (X, d), и доказывается теорема о существовании и поиске нуля такого функционала на этом подмножестве.

Для непрерывной возрастающей функции $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ вводится понятие *θ-непрерывного однопараметрического семейства (α, β)-поисковых функционалов.*

Определение 3.2. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ называется *(α, β)-поисковым на Y*, если для любой пары $(x, c) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, где $x \in Y$, $c \in \Phi(x)$, $c \leqslant (\alpha - \beta)r$ и $\overline{B_r(x)} \subset Y$, существует пара $(x', c') \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, для которой $d(x, x') \leqslant \dfrac{1}{\alpha}c$, $c' \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha}c$.

Верна следующая теорема о существовании нулей в Y у функционала, который является (α, β)-*поисковым на Y*.

Теорема 3.2. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$, $\Phi : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный функционал, являющийся (α, β)-поисковым на Y, с поисково-полным графиком, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Пусть заданы $x_0 \in Y$, $c_0 \in \Phi(x_0)$ и $r > 0$ такие, что*

1) $\overline{B(x_0, r)} \subseteq Y$,
2) $c_0 \leqslant \alpha\Big(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\Big)r$.

Тогда существует точка $\xi \in \overline{B(x_0, r)}$ такая, что $0 \in \Phi(\xi)$.

Доказательство. Доказательство данной теоремы вполне аналогично доказательству [14, теорема 4]. Приведем его кратко.

Начиная с точки x_0, с помощью индукции легко построить последовательности $\{x_n\} \subseteq \overline{B(x_0, r)}$ и $\{c_n\}$ такие, что для любого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполнены условия:

$$c_n \in \Phi(x_n); \quad d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{\alpha} c_n;$$

$$c_{n+1} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} c_n \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^{n+1} c_0 \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^{n+1} \alpha (1 - \frac{\beta}{\alpha}) r = \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^n}(1 - \frac{\beta}{\alpha}) r,$$

откуда следует, что верна оценка: $d(x_n, x_0) \leqslant \Big(1 - \dfrac{\beta^n}{\alpha^n}\Big) r < r$.

Поэтому ясно, что каждая точка x_n ($n \geqslant 1$) этой последовательности лежит в шаре $B(x_0, r)$. Кроме того, понятно, что последовательность $\{x_n\}$ является поисковой. Следовательно,так как график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ поисково-полон, существует точка $\xi \in Y$ такая, что $x_n \to \xi$ и $0 \in \Phi(\xi)$. Остается лишь заметить, что в силу замкнутости $B(x_0, r)$, $\xi \in B(x_0, r)$. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о сохранении существования нулей при изменении параметра у некоторого специального однопараметрического семейства поисковых функционалов. Нам понадобится следующее простое вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть A, B — непустые замкнутые ограниченные множества в метрическом пространстве (X, d). Тогда для любого $q > 1$ верно, что для каждого $x \in A$ существует такое $z \in B$, что $d(x, z) \leqslant qH(A, B)$.*

Определение 3.3. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Однопараметрическое семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t \in [0;1]}$ будем называть *θ-непрерывным* на Y, если для каждого $x \in Y$, любых $t', t'' \in [0; 1]$ и любого $c' \in \Phi_{t'}(x)$ существует такое значение $c'' \in \Phi_{t''}(x)$, что $|c' - c''| \leqslant |\theta(t') - \theta(t'')|$.

Для любых подмножеств Z, Y, где $Z \subseteq Y \subseteq X$, и семейства $\Phi = \{\Phi_t : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t \in [0;1]}$ многозначных функционалов определим следующее множество:

$$M_Z(\Phi) := \{(x, t) \in Z \times [0; 1] \mid 0 \in \Phi_t(x)\}. \tag{3.1}$$

В пространстве $X \times [0; 1]$ (и, в частности, в $Y \times [0; 1]$) рассматривается метрика $D : (X \times [0; 1])^2 \to \mathbb{R}_+$, определяемая по правилу $D((x', t'), (x'', t'')) = d(x', x'') + |t' - t''|$ для любых $x', x'' \in X$ и любых $t', t'' \in [0; 1]$. Сходимость в этой метрике, очевидно, эквивалентна покомпонентной сходимости.

Верно следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X, $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Пусть на $\overline{U}$ задано однопараметрическое θ-непрерывное семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t \in [0;1]}$ многозначных функционалов, причём для каждого $t \in [0; 1]$ график $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ является (α, β)-поисково-полным. Тогда, если $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$, то $M_U(\Phi)$ замкнуто.*

Доказательство этого утверждения стандартно, и его можно найти в [14].

Определение 3.4. Будем говорить, что параметрическое семейство Φ многозначных функционалов *θ-непрерывно на множестве* $M_U(\Phi)$, если для любой пары $(x, t) \in M_U(\Phi)$ (то есть где $0 \in \Phi_t(x)$) и любого $t' \in [0; 1]$ верно, что существует $c' \in \Phi_{t'}$ такое, что $c' \leqslant |\theta(t) - \theta(t')|$.

Теорема 3.3 (см. [14]). *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть задано $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t\in[0;1]}$ — θ-непрерывное на множестве $M_U(\Phi)$ параметрическое семейство (α, β)-поисковых на $\overline{U}$ многозначных функционалов с поисково-полными графиками, причём множество $M = M_U(\Phi)$ непусто и замкнуто. Пусть $\preceq$ — отношение частичного порядка на M, заданное по правилу:*

$$(x', t') \preceq (x'', t'') \Leftrightarrow \begin{cases} t' \leqslant t'', \\ d(x', x'') \leqslant \dfrac{1}{\alpha - \beta}(\theta(t'') - \theta(t')). \end{cases}$$

Тогда в $(M, \preceq)$ имеется максимальный элемент. Причем для любой пары $(x, c) \in M$ существует максимальный элемент $(\xi, \bar{t})$ такой, что $(x, t) \preceq (\xi, \bar{t})$.

Теорема 3.4. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество в X, $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Пусть задано однопараметрическое семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t\in[0;1]}$ многозначных (α, β)-поисковых на $\overline{U}$ функционалов, и либо их графики поисково-полны, либо, если X полно, их графики $\{0\}$-замкнуты. Пусть множество $M = M_U(\Phi)$ замкнуто и семейство Φ θ-непрерывно на M. Тогда, если существует элемент вида $(x_0, 0) \in M$, то существует и элемент вида $(x_1, 1) \in M$.*

Доказательство этой теоремы практически совпадает с доказательством её первоначальной версии в [14].

В качестве приложений этой теоремы в [14] рассматривалась задача продолжения по параметру существования прообразов замкнутого подпространства у заданного параметрического семейства многозначных отображений, проблема сохранения существования, при изменении параметра, точек совпадения, а также общих неподвижных точек у параметрического семейства многозначных отображений.

Приведем необходимые определения и некоторые из этих теорем.

Определение 3.5. Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства, $Q \subseteq Y$ — замкнутое подпространство в Y, $Z \subseteq X$ — подмножество в X. Пусть $F : Z \to C(Y)$ — многозначное отображение. График $\mathrm{Graph}(F) := \{(x, y) \in Z \times Y | y \in F(x)\}$ отображения F называется Q-полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$, где $d(y_n, Q) \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(F)$, где $\eta \in Q$.

Теорема 3.5. *Пусть (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства, $Q \subseteq Y$ — замкнутое подпространство в Y, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t\}_{t\in[0;1]}$ — однопараметрическое семейство многозначных отображений $T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)$. Пусть для некоторых чисел α, β, $0 \leqslant \beta < \alpha$, непрерывной возрастающей функции $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ и любого $t \in [0; 1]$ выполнены следующие условия* 1)–3):

1) *график* $\mathrm{Graph}(T_t)$ *является* $-Q$*-полным;*
2) *для любого $x \in \overline{U}$ и любых $r > 0$, $y \in T_t(x)$ таких, что $B(x; r) \subseteq \overline{U}$ и $c = d(y, Q) \leqslant (\alpha - \beta)r$, существуют такие точка $x' \in B(x; c/\alpha)$ и значение $y' \in T_t(x')$, что $c' = d(y', Q) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha}c$;*
3) *множество $M := \{(x, t) \in U \times [0; 1] | x \in T_t^{-1}(Q)\}$ замкнуто.*

Пусть, кроме того, для любой пары $(x, t) \in M$ и любого $t' \in [0; 1]$ верно неравенство $H(T_t(x), T_{t'}(x)) \leqslant |\theta(t') - \theta(t)|$.

Тогда, если $T_0^{-1}(Q) \cap U \neq \varnothing$, то $T_1^{-1}(Q) \cap U \neq \varnothing$.

В данной формулировке, с учетом замечаний в статье [14], ослаблены условия 1) и 3) теоремы и условие на последнее неравенство. Доказательство этой версии теоремы практически дословно совпадает с доказательством её версии в [14].

На основе теоремы 3.4 в [14] получены также теоремы о сохранении существования совпадений у конечного набора параметрических семейств многозначных отображений метрических пространств, а также о сохранении существования общих неподвижных точек у конечного набора таких семейств.

Приведем ниже частный случай теоремы о сохранении существования совпадений, а именно, теорему о сохранении совпадений *у двух параметрических семейств* многозначных отображений.

Отметим, что в приводимой формулировке условие 5) ослаблено по сравнению с версией этой теоремы в [14] в соответствии с тем, что условие θ-непрерывности семейства функционалов в теореме 3.4 заменено на условие его θ-непрерывности на множестве M.

Теорема 3.6. *Пусть (X,ρ), (Y,d) — метрические пространства, $U\subset X$ — открытое подмножество X. Пусть заданы два параметрических семейства отображений $T=\{T_t\mid T_t:\overline{U}\to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ и $S=\{S_t\mid S_t:X\to\mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}$. Пусть также заданы числа α,β,q, $0\leqslant\beta<\alpha$, $1<q<\dfrac{\alpha}{\beta}$, непрерывная возрастающая функция $\theta:[0;1]\to\mathbb{R}$, и выполнены следующие условия:*

1) *для любого $t\in[0;1]$ график $\mathrm{Graph}(S_t|_{\overline{U}})$ является полным и $T_t(\overline{U})\subseteq S_t(X)$;*
2) *для любого $t\in[0;1]$ и для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\}\subseteq\overline{U}$, всякая последовательность $\{y_n\}$, где $y_n\in S_t(x_n)$, является фундаментальной;*
3) *для любого $t\in[0;1]$ и для любых $x',x''\in\overline{U}$ верно, что $H(T_t(x'),T_t(x''))\leqslant\dfrac{\beta}{q\alpha}d(S_t(x'),S_t(x''))$;*
4) *для любого $t\in[0;1]$ и для любых $x',x''\in X$ верно неравенство $\rho(x',x'')\leqslant\dfrac{1}{\alpha}d(S_t(x'),S_t(x''))$;*
5) *для любой пары (x,t) такой, что $x\in\mathrm{Coin}(T_t,S_t)$ и любого $t'\in[0;1]$ справедливо неравенство*
$$H(T_t(x),T_{t'}(x))+H(S_t(x),S_{t'}(x)\leqslant|\theta(t')-\theta(t)|. \tag{3.2}$$
6) *Для любого $t\in[0;1]$ $\mathrm{Coin}(T_t,S_t)\cap\partial U=\varnothing$.*

Тогда если $\mathrm{Coin}(T_0,S_0)\neq\varnothing$, то $\mathrm{Coin}(T_1,S_1)\neq\varnothing$.

Доказательство этой теоремы практически полностью совпадает с доказательством её первоначальной версии в [14].

4. Основные результаты. Проблема непрерывности по параметру множества нулей у параметрического семейства функционалов

В данном пункте рассмотрим проблему существования непрерывной однозначной ветви нулей исходного однопараметрического семейства многозначных функционалов. Для отыскания условий, которые нужно добавить к условиям теоремы 3.4 для решения данной задачи, нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и утверждения.

Определение 4.1. Пусть (Z,μ) — метрическое пространство, $0\leqslant\beta<\alpha$, и задан функционал $\varphi:Z\to\mathbb{R}_+$. Будем говорить, что функционал φ *слабо (α,β)-поисковый* на Z, если для любой точки $z\in Z$ и любого $r>0$, таких, что $o<\varphi(z)\leqslant r$, существует точка $z'\in Z$, для которой $\varphi(z')\leqslant\dfrac{\beta}{\alpha}r$, $\mu(z,z')\leqslant r+\varphi(z')$.

В [13] доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть X — топологическое пространство, (Y,d) — полное (ограниченное) метрическое пространство, и $C(X,Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y. Определим метрику μ на $C(X,Y)$, $\mu(f,g):=\sup\limits_{x\in X}d(f(x),g(x))$. Пусть $F:X\rightrightarrows Y$ — многозначное отображение с замкнутыми образами. Определим функционал $\varphi:C(X,Y)\to\mathbb{R}_+$, полагая $\varphi(f)=\mu(f,F):=\sup\limits_{x\in X}d(f(x),F(x))$, $f\in C(X,Y)$, где $d(f(x),F(x)):=\inf\limits_{y\in F(x)}d(f(x),y)$. Предположим, что для некоторых $\alpha,\beta,0\leqslant\beta<\alpha$, функционал φ является слабо (α,β)-поисковым на $C(X,Y)$. Пусть также либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-полон, либо $C(X,Y)$ — полное пространство и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут.*

Тогда для любого $f\in C(X,Y)$, $0<\varphi(f)\leqslant r$, существует непрерывное сечение $\zeta\in C(X,Y)$ отображения F, причём $\mu(f,\zeta)\leqslant\dfrac{(\alpha+\beta)r}{\alpha-\beta}$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующую теорему, которая представляет основной результат данной статьи.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3.4, *подмножество* U *ограничено, пространство* X *полно и графики* $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ *функционалов* $\Phi_t, t \in [0;1]$, $\{0\}$*-замкнуты. Рассмотрим многозначное отображение* $N : I = [0;1] \rightrightarrows X$, *где* $N(t) = N_t = \mathrm{Nil}(\Phi_t) \cap U$. *Зададим в множестве* $C(I, X)$ *непрерывных отображений из* $I = [0;1]$ *в* X *метрику* μ, *полагая, для любых* $f, g \in C(I, X)$, $\mu(f, g) := \sup\limits_{t \in I} \rho(f(t), g(t))$. *Определим функционал* $\varphi : C(I, X) \to \mathbb{R}_+$, *полагая* $\varphi(f) = \mu(f, N) := \sup\limits_{t \in I} \rho(f(t), N(t))$, $f \in C(I, X)$, *где* $\rho(f(t), N(t)) := \inf\limits_{x \in N(t)} \rho(f(t), x)$. *Предположим, что для некоторых* $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0 \leqslant \bar{\beta} < \bar{\alpha}$, *функционал* φ *является слабо* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$*-поисковым на* $C(I, X)$. *Пусть его график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *поисково-замкнут.*

Тогда для любого $f \in C(I, X)$, $0 < \varphi(f) \leqslant r$, *существует непрерывное сечение* $\zeta \in C(I, X)$ *отображения* N, *причём* $\mu(f, \zeta) \leqslant \dfrac{(\bar{\alpha} + \bar{\beta})r}{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}$. *Иными словами, существует непрерывная по* t, $t \in [0;1]$, *ветвь нулей семейства функционалов* $\Phi = \{\Phi_t\}_{t \in [0;1]}$.

Доказательство. В силу теоремы 3.4 имеем $N(t) \neq \varnothing$ для любого $t \in [0;1]$. Кроме того, так как множество U ограничено, то образы $N(t)$ отображения N тоже ограничены, следовательно, метрика μ корректно определена. В силу условия о том, что графики всех функционалов Φ_t являются $\{0\}$-замкнутыми, множество $N(t)$ замкнуто для любого $t \in [0;1]$. В самом деле, пусть $\{x_n\}$ — какая-нибудь сходящаяся последовательность в $N(t)$, $x_n \to x_0$. Тогда последовательность $\{(x_n, 0)\} \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi_t)$, очевидно, сходится к элементу $(x_0, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi_t)$. Так как пространство (X, ρ) полно и в множестве $C(I, X)$ непрерывных отображений задана равномерная метрика μ, то пространство $(C(I, X), \mu)$ также полно. Далее, по условию график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут. Итак, в данной ситуации для многозначного отображения N выполнены все условия теоремы 4.1. В силу теоремы 4.1 существует нуль функционала φ в $C(I, X)$, то есть такое непрерывное отображение $\zeta \in C(I, X)$, что $\varphi(\zeta) = \mu(\zeta, N) = 0$. Это означает, что для любого $t \in I = [0;1]$ верно, что $\rho(\zeta(t), N(t)) = 0$. Поскольку образы $N(t)$ замкнуты, то это означает, что $\zeta(t) \in N(t)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки// Докл РАН. — 2007. — *416*, № 2. — С. 151–155.
2. *Арутюнов А. В., Грешнов А. В.* (q1, q2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2018. — *82*, № 2. — С. 3–32.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: ЛИБРОКОМ, 2011.
4. *Жуковский Е. С.* Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 6. — С. 1338–1350.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
6. *Фоменко Т. Н.* О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 1. — С. 110–125.
7. *Фоменко Т. Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 2. — С. 276–281.
8. *Фоменко Т. Н.* Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии// Мат. заметки. — 2013. — *93*, № 1. — С. 127–143.
9. *Фоменко Т. Н.* Поиск нулей функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений в квазиметрических пространствах// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — № 6. — С. 14–22.
10. *Фоменко Т. Н.* Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f-квазиметрическом пространстве// Мат. заметки. — 2021. — *110*, № 4. — С. 598–609.
11. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales// Fund. Math. — 1922. — *3*. — С. 133–181.
12. *Fomenko T. N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings// Topology Appl. — 2010. — *157*. — С. 760–773.
13. *Fomenko T. N.* Zeros of functionals and a parametric version of Michael selection theorem// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — С. 1314–1321.
14. *Fomenko T. N., Zakharyan Ju. N.* Preservation of the existence of zeros in a family of set-valued functionals and some consequences// Math. Notes. — 2020. — *108*, № 6. — С. 802–813.

15. *Frigon M.* On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings// В сб.: «Recent advances on metric fixed point theory». — Sevilla: Univ. of Sevilla, 1996. — С. 19–30.
16. *Frigon M., Granas A.* Resultats du type de Leray—Schauder pour des contractions multivoques// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 1994. — *4*. — С. 197–208.

Т. Н. Фоменко
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: `tn-fomenko@yandex.ru`

UDC 515.124+515.126.4+515.126.83
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200
EDN: FQFZEV

Method of search functionals and its applications in fixed point and coincidence theory

T. N. Fomenko

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

The paper contains a survey of several results from the author's papers and joint papers by the author and Yu. N. Zakharyan, both on the zero existence and approximation for single-valued and multi-valued (α, β)-search functionals, and also on the zero existence preservation for parametric family of such functionals, under the parameter changing. Some corollaries of these results in the fixed point and coincidence theory of single-valued and multi-valued mappings of metric spaces are also given. The comparison is provided with some known results by other authors. In the concluding part of the paper, we investigate the problem on the existence of a parameter-continuous single-valued branch of zeros for a parametric family of search functionals. A theorem on the existence of solution of this problem is proved.

Keywords: search functionals, existence of zeros, fixed points, coincidence points

For citation: T. N. Fomenko, “Method of search functionals and its applications in fixed point and coincidence theory,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 185–200. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200`

REFERENCES

1. A. V. Arutyunov, “Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki” [Covering mappings in metric spaces and fixed points], *Dokl RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **416**, No. 2, 151–155 (in Russian).
2. A. V. Arutyunov and A. V. Greshnov, “(q1, q2)-kvazimetricheskie prostranstva. Nakryvayushchie otobrazheniya i tochki sovpadeniya” [(q1, q2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2018, **82**, No. 2, 3–32 (in Russian).
3. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, and V. V. Obukhovskiy, *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions], LIBROKOM, Moscow, 2011 (in Russian).
4. E. S. Zhukovskiy, “Nepodvizhnye tochki szhimayushchikh otobrazheniy f-kvazimetricheskikh prostranstv” [Fixed points of contraction mappings of f-quasimetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2018, **59**, No. 6, 1338–1350 (in Russian).

5. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
6. T. N. Fomenko, "O priblizhenii k tochkam sovpadeniya i obshchim nepodvizhnym tochkam nabora otobrazheniy metricheskikh prostranstv" [Approximation of coincidence points and common fixed points of a collection of mappings of metric spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 1, 110–125 (in Russian).
7. T. N. Fomenko, "K zadache kaskadnogo poiska mnozhestva sovpadeniy nabora mnogoznachnykh otobrazheniy" [Cascade search of the coincidence set of collections of multivalued mappings], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 2, 276–281 (in Russian).
8. T. N. Fomenko, "Kaskadnyy poisk proobrazov i sovpadeniy: global'naya i lokal'naya versii" [Cascade search for preimages and coincidences: global and local versions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **93**, No. 1, 127–143 (in Russian).
9. T. N. Fomenko, "Poisk nuley funktsionalov, nepodvizhnye tochki i sovpadeniya otobrazheniy v kvazimetricheskikh prostranstvakh" [Search for zeros of functionals, fixed points, and mappings coincidence in quasimetric spaces], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2019, No. 6, 14–22 (in Russian).
10. T. N. Fomenko, "Sushchestvovanie nuley mnogoznachnykh funktsionalov, sovpadeniya i nepodvizhnye tochki v f-kvazimetricheskom prostranstve" [The existence of zeros of multivalued functionals, coincidence points, and fixed points in f-quasimetric spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2021, **110**, No. 4, 598–609 (in Russian).
11. S. Banach, "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales," *Fund. Math.*, 1922, **3**, 133–181.
12. T. N. Fomenko, "Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings," *Topology Appl.*, 2010, **157**, 760–773.
13. T. N. Fomenko, "Zeros of functionals and a parametric version of Michael selection theorem," *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 3, 1314–1321.
14. T. N. Fomenko and Yu. N. Zakharyan, "Preservation of the existence of zeros in a family of set-valued functionals and some consequences," *Math. Notes*, 2020, **108**, No. 6, 802–813.
15. M. Frigon, "On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings," In: *Recent advances on metric fixed point theory*, Univ. of Sevilla, Sevilla, 1996, pp. 19–30.
16. M. Frigon and A. Granas, "Resultats du type de Leray—Schauder pour des contractions multivoques," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**, 197–208.

T. N. Fomenko
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: tn-fomenko@yandex.ru