Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 166–184
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184
EDN: FPXSDA

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

В. Е. Федоров, А. Д. Годова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Исследуется класс уравнений в банаховых пространствах с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля с операторнозначным ядром свертки. Исследованы свойства k-разрешающих операторов таких уравнений, определен класс $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ линейных замкнутых операторов, принадлежность которому необходима и в случае коммутирования оператора с ядром свертки достаточна для существования аналитических в секторе k-разрешающих семейств операторов исследуемого уравнения. При некоторых дополнительных условиях на ядро свертки доказаны теоремы об однозначной разрешимости неоднородного линейного уравнения рассматриваемого класса в случае непрерывной в норме графика оператора из уравнения или гельдеровой неоднородности. Доказана теорема о достаточных условиях на аддитивное возмущение оператора класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ для того, чтобы возмущенный оператор также принадлежал такому классу. Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для системы уравнений в частных производных с несколькими дробными производными Римана—Лиувилля по времени разных порядков и для уравнения с дробной производной Прабхакара по времени.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, банаховы пространства, оператор Римана—Лиувилля, однозначная разрешимость, дробные производные Римана—Лиувилля, дробная производная Прабхакара

Для цитирования: *В. Е. Федоров, А. Д. Годова.* Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 166–184. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184

Введение

В последние десятилетия дробное интегро-дифференциальное исчисление все чаще используется при решении как теоретических, так и прикладных задач во многих областях математического моделирования [21, 25, 27, 28]. При этом регулярно появляются все новые конструкции дробных производных или просто интегро-дифференциальных операторов, представляющие собой композицию оператора дифференцирования целого порядка и оператора свертки [11, 14, 23], но не со степенной функцией, как при построении наиболее распространенных дробных производных Римана—Лиувилля и Герасимова—Капуто.

Исследование выполнено за счет гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

В данной работе будет исследован класс уравнений с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля (сначала действие оператором свертки, затем — дифференцирование) высокого порядка в банаховом пространстве, при этом будут рассматриваться операторы свертки с операторнозначной функцией ядра K. Это усложняет абстрактную задачу, но дает дополнительные возможности при приложении полученных результатов к конкретным уравнениям и системам уравнений, в частности, позволяет рассматривать системы уравнений, содержащие дробные производные различных порядков в рамках абстрактного интегро-дифференциального уравнения.

Ранее авторы исследовали линейные уравнения в банаховых пространствах, разрешенные относительно интегро-дифференциального оператора типа Римана—Лиувилля и типа Герасимова—Капуто высокого порядка, с ограниченным оператором при искомой функции [17]. При некоторых условиях на операторнозначное ядро K была доказана однозначная разрешимость начальных задач для таких уравнений, а также для уравнений с вырожденным линейным оператором при интегро-дифференциальном операторе в случае относительной ограниченности пары операторов в таком уравнении. В данной работе с использованием техники преобразования Лапласа исследуются разрешенные относительно интегро-дифференциального оператора типа Римана—Лиувилля линейные уравнения в банаховых пространствах с неограниченным оператором при искомой функции. Для некоторого класса таких уравнений исследованы свойства разрешающих семейств операторов, доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши, т. е. задачи с начальными условиями Коши для свертки искомой функции.

Настоящая работа построена следующим образом. В первом разделе вводится понятие k-разрешающего семейства интегро-дифференциального уравнения порядка $m \in \mathbb{N}$, исследуются свойства таких семейств и их соотношения при различных $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Второй раздел содержит доказательство теоремы о необходимых и достаточных условиях на преобразование Лапласа аналитической в секторе функции. В третьем разделе эти условия использованы для задания класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ линейных замкнутых операторов A, для которых при λ из некоторого сектора вида $S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geqslant 0$, существуют обратные операторы $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$, нормы которых не превосходят величины $C|\lambda|^{\chi - m}$ в S_{θ_0,a_0}. Доказана необходимость и достаточность (в случае коммутирования операторов $K(s)$ и A) условия $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}$ для существования аналитических в секторе k-разрешающих семейств однородного уравнения исследуемого вида. Этот результат, в частности, дает достаточные условия однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейного однородного интегро-дифференциального уравнения. В следующем разделе при некоторых дополнительных условиях на ядро свертки доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения исследуемого вида с правой частью, непрерывной в норме графика оператора A или гельдеровой норме. Пятый раздел посвящен доказательству теоремы о возмущении операторов класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$, т. е. о достаточных условиях на аддитивное возмущение такого оператора, при котором возмущенный оператор также содержится в $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$. Полученные абстрактные результаты о разрешимости неоднородного уравнении и о возмущении операторов класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ в шестом разделе использованы для доказательства однозначной разрешимости начально-краевой задачи для системы уравнений с несколькими дробными производными Римана—Лиувилля различных порядков по времени, с самосопряженным эллиптическим оператором высокого порядка по пространственным переменным в каждом уравнении. В последнем разделе аналогичным образом исследовано уравнение с дробной производной Прабхакара по времени.

1. Разрешающие семейства интегро-дифференциальных уравнений

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, область определения D_A оператора A снабжена нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int_0^t K(t-s)z(s)ds$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля

$$(D^{m,K} z)(t) := D^m (J^K z)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)z(s)ds,$$

где D^m — производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 1.1. При $K(t) = \dfrac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} I$ интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля является производной Римана—Лиувилля D^α порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим начальную задачу

$$(D^{k,K} z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.1}$$

для уравнения

$$(D^{m,K} z)(t) = Az(t), \ t > 0. \tag{1.2}$$

Решением задачи (1.1), (1.2) называется такая функция $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что $J^K z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1.1) и равенство (1.2) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 1.2. По аналогии с тем, как задача Коши для дробного интеграла Римана—Лиувилля от неизвестной функции (т. е. для ее свертки со степенной функцией) при исследовании уравнений с производной Римана—Лиувилля называется задачей типа Коши [21], задачу Коши для абстрактной свертки искомой функции (1.1) будем также называть *задачей типа Коши.*

Для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ обозначим преобразование Лапласа через $\widehat{h}$ или через $\mathfrak{L}[h]$, если выражение для h слишком длинное. Обратное преобразование Лапласа для функции $H(\lambda)$ будем обозначать $\mathfrak{L}^{-1}[H]$.

Сформулируем следующее условие.

($\widehat{K}$) *Пусть при некоторых* $\theta_K \in (\pi/2, \pi)$, $a_K \geqslant 0$ *существует однозначная аналитическая функция* $\widehat{K} : S_{\theta_K, a_K} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_K)| < \theta_K, \, \mu \neq a_K\} \to \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — *преобразование Лапласа для* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

Определение 1.1. При $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ множество операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *семейством k-разрешающих операторов* уравнения (1.2), если выполняются следующие условия:

(i) $S_k(\cdot)$ сильно непрерывно на $\mathbb{R}_+$;

(ii) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ $S_k(t)[D_A] \subset D_A$, $S_k(t)Az_0 = AS_k(t)z_0$ при каждом $z_0 \in D_A$;

(iii) для любого $z_k \in D_A$ функция $S_k(t)z_k$ является решением задачи $D^{k,K}z(0) = z_k$, $D^{l,K}z(0) = 0$, $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \setminus \{k\}$, для уравнения (1.2).

Лемма 1.1. *Пусть* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* ($\widehat{K}$), *при некотором* $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ *существует k-разрешающее семейство операторов* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *уравнения* (1.2) *такое, что при всех* $t > 0$ $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^\beta$ *при некоторых* $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. *Тогда при* $\mathrm{Re}\lambda > a$ *имеем* $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$,

$$\widehat{S}_k(\lambda) = \lambda^{m-1-k}(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}, \tag{1.3}$$

и k-разрешающее семейство уравнения (1.2) *единственно.*

Доказательство. В силу свойств преобразования Лапласа, пунктов (ii) и (iii) определения 1.1 при любых $z_k \in D_A$, $\mathrm{Re}\lambda > a$ $\lambda^m \widehat{K}(\lambda)\widehat{S}_k(\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = A\widehat{S}_k(\lambda)z_k = \widehat{S}_k(\lambda)Az_k$. Поэтому оператор $\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A : D_A \to \mathcal{Z}$ обратим и выполняется равенство (1.3). Поскольку $\widehat{S}_k(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ при $\mathrm{Re}\lambda > a$, имеем $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Из (1.3) и единственности обратного преобразования Лапласа следует единственность k-разрешающего семейства операторов уравнения (1.2). $\square$

Лемма 1.2. *Пусть $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, существует 0-разрешающее семейство $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ уравнения (1.2) такое, что при всех $t > 0$ $\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^{\beta}$ при некоторых $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. Тогда при любом $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ существует единственное k-разрешающее семейство $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$. При этом для всех $t > 0$ $S_k(t) \equiv J^k S_0(t)$ и $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_k e^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}$ при некотором $C_k > 0$.*

Доказательство. Поскольку $\beta > -1$, определим при $k = 1, 2, \dots, m-1$ семейства $\{S_k(t) := J^k S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$. По построению они удовлетворяют условию (i) определения 1.1. При $x \in D_A$, $t > 0$

$$J^k S_0(t)Ax = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} S_0(s)Axds = AJ^k S_0(t)x,$$

так как $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ удовлетворяет условию (ii) определения 1.1, а оператор A замкнут. Поэтому условие (ii) выполняется и для $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$, $k = 1, 2, \dots, m-1$.

При всех $t > 0$

$$\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{as}s^{\beta}ds \leqslant \frac{Ce^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}B(k,\beta+1)}{\Gamma(k)} =$$

$$= \frac{Ce^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+k+1)} = C_k e^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}.$$

При $z_k \in D_A$ умножим равенство $\lambda^m \widehat{K}(\lambda)\widehat{S}_0(\lambda)z_k - \lambda^{m-1}z_k = A\widehat{S}_0(\lambda)z_k$, следующее из условия (iii) определения 0-разрешающего семейства операторов, на λ^{-k} и, принимая во внимание коммутирование операторов свертки J^K и J^k, получим равенство $\lambda^m\mathfrak{L}[J^k J^K S_0](\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = \lambda^m\mathfrak{L}[J^K J^k S_0](\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = A\widehat{J^k S_0}(\lambda)z_k$, т. е. $\lambda^m\widehat{K}(\lambda)\widehat{S}_k(\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = A\widehat{S}_k(\lambda)z_k$. Последнее равенство в силу леммы 1.1 и единственности обратного преобразования Лапласа означает, что $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ — k-разрешающее семейство (1.2). □

Следствие 1.1. *Пусть $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, существует 0-разрешающее семейство $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ уравнения (1.2) такое, что при всех $t > 0$ $\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^{\beta}$ при некоторых $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. Тогда для $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ k-разрешающее семейство $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ удовлетворяет равенствам*

$$D^{l,K}S_k(t) = D^{0,K}S_{k-l}(t), \quad t > 0, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Доказательство. При доказательстве леммы 1.2 было показано, что при $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ $S_k(t) = J^k S_0(t)$, $J^K S_k(t) = J^k J^K S_0(t)$. Отсюда следует, что для $l = 0, 1, \dots, k$

$$D^{l,K}S_k(t) := D^l J^K S_k(t) = D^l J^k J^K S_0(t) = J^{k-l}J^K S_0(t) = J^K S_{k-l}(t) = D^{0,K}S_{k-l}(t).$$

□

Теорема 1.1. *Пусть $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$; для всех $t > 0$ $\|K(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_K e^{a_K t}$ при некоторых $C_K > 0$, $a_K \in \mathbb{R}$; существуют обратные операторы $\widehat{K}(\lambda_n)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ при таких $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\lambda_n = +\infty$; существует 0-разрешающее семейство операторов $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ уравнения (1.2), такое, что для всех $t > 0$ $\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^{\beta}$ при некоторых $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. Если предел $\lim\limits_{t\to 0+} J^K S_0(t) = I$ существует в норме $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, то $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Обратное верно при дополнительных условиях: $\widehat{K}(\lambda)$ определены и непрерывно обратимы при $\lambda \in \Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > R_0, \arg\mu \in (-\pi, \pi)\}$, при этом*

$$\exists c > 0 \quad \exists \chi > -m \quad \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \geqslant c|\lambda|^{\chi}. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу леммы 1.1 при $\mathrm{Re}\lambda > a$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}(J^K S_0(t) - I)dt = \lambda^{m-1}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - \lambda^{-1}I.$$

Пусть функция $\eta(t) := \|J^K S_0(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и $\eta(0) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ возьмем такое $\delta > 0$, что $\eta(t) \leqslant \varepsilon$ при всех $t \in [0, \delta]$, тогда

$$\left\|\lambda^{m-1}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - \lambda^{-1} I\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \int\limits_0^\delta e^{-\lambda t}\eta(t)dt + \int\limits_\delta^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\mathrm{Re}\lambda \to +\infty$, так как

$$\|J^K S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant CC_K \int\limits_0^t e^{a_K(t-s)} e^{as} s^\beta ds \leqslant C_1 e^{a_1 t}$$

при некоторых $C_1 > 0$, $a_1 \in \mathbb{R}$ и поэтому $\eta(t) \leqslant C_1 e^{a_1 t} + 1$ для $t \geqslant 0$. Следовательно, при достаточно больших $\mathrm{Re}\lambda > a$ $\left\|\lambda^m \widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - I\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < 1$ и оператор $\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$ непрерывно обратим. С учетом непрерывной обратимости оператора $\widehat{K}(\lambda_n)$ при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ получим, что $\lambda_n^m \widehat{K}(\lambda_n) - A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, а значит, и $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $R > \max\{R_0, 2(c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^{1/(m+\chi)}\}$, $\Gamma_R := \Gamma_{1,R} \cup \Gamma_{2,R} \cup \Gamma_{3,R}$, где $\Gamma_{1,R} := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\Gamma_{2,R} := \{re^{i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $\Gamma_{3,R} := \{re^{-i\pi} : r \in [R, \infty)\}$. При $t > 0$ получаем

$$J^K S_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \lambda^{m-1}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \lambda^{-1} A(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda =$$

$$= I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{\lambda}\sum_{l=1}^\infty \lambda^{-ml}(A\widehat{K}(\lambda)^{-1})^l e^{\lambda t} d\lambda.$$

В силу условия (1.4) выполнено $\|\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant c^{-1}|\lambda|^{-\chi}$ при всех $\lambda \in \Omega_{R_0}$. При малых $t > 0$ возьмем $R = 1/t$ и получим

$$\|J^K S_0(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^\infty \int\limits_{\Gamma_{k,R}} \frac{\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}|d\lambda|}{|\lambda|^{ml+1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{l=1}^\infty \frac{(c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^l}{R^{(m+\chi)l}} \leqslant C_3 t^{m+\chi}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \to 0$$

при $t \to 0+$, так как $m + \chi > 0$. $\square$

Замечание 1.3. Результат, аналогичный теореме 1.1, хорошо известен для разрешающих полугрупп операторов уравнений 1-го порядка (см., например, [22]). Для разрешающих семейств операторов уравнения с производной Герасимова—Капуто подобный результат был доказан в работе [12], для других типов уравнений с дробными производными — в работах [8, 13, 16, 18–20, 26].

2. Преобразование Лапласа аналитической в секторе функции

Теорема 2.1. *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, задано отображение $H : (a, \infty) \to \mathcal{X}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическая функция $F : \Sigma_{\theta_0 - \pi/2} \to \mathcal{X}$, для которой при любом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $c(\theta) > 0$, что при всех $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$ выполняется неравенство $\|F(t)\|_{\mathcal{X}} \leqslant c(\theta)|t|^\beta e^{a_0 \mathrm{Re}\, t}$; $\widehat{F}(\lambda) = H(\lambda)$ при $\lambda > a_0$.*

(ii) *Отображение H аналитически продолжимо на S_{θ_0, a_0}; при каждом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $C(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a_0}$ $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)|\lambda - a_0|^{-1-\beta}$.*

Доказательство. Пусть справедливо утверждение (i), $\pi/2 < \theta < \theta_0 \leqslant \pi$, $\delta > 0$, $\gamma_\pm^\delta = (0,\delta] \cup \{\delta + re^{\pm i(\theta-\pi/2)} : r \in (0,\infty)\}$. По теореме Коши при всех $\lambda > a_0$

$$\widehat{F}(\lambda) = \int\limits_0^\infty F(t)e^{-\lambda t}dt = \int\limits_{\gamma_\pm^\delta} F(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\delta F(t)e^{-\lambda t}dt + e^{\pm i(\theta-\pi/2)}\int\limits_0^\infty F(\delta + re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda(\delta+re^{\pm i(\theta-\pi/2)})}dr.$$

Устремим $\delta \to 0+$, тогда

$$\widehat{F}(\lambda) = e^{\pm i(\theta-\pi/2)}\int\limits_0^\infty F(re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda re^{\pm i(\theta-\pi/2)}}dr := H_\pm(\lambda),$$

поскольку $\|F(\delta + re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda(\delta+re^{\pm i(\theta-\pi/2)})}\|_\mathcal{X} \leqslant c(\theta)c_1r^\beta e^{(a_0-\lambda)r\cos(\theta-\pi/2)}$ при $\delta \in [0,1]$,

$$\left\|\int\limits_0^\delta F(t)e^{-\lambda t}dt\right\|_\mathcal{X} \leqslant c_2\delta^{1+\beta} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0+.$$

Возьмем такие $\varepsilon \in (0, \theta_0 - \pi/2)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\arg(\lambda - a_0) \in (-\theta+\varepsilon, \pi-\theta-\varepsilon)$; тогда выполняется включение $\arg((\lambda - a_0)e^{i(\theta-\pi/2)}) \in (-\pi/2+\varepsilon, \pi/2-\varepsilon)$, следовательно, справедливы неравенства $\mathrm{Re}((\lambda - a_0)e^{i(\theta-\pi/2)}) \geqslant |\lambda - a_0|\sin\varepsilon$, $\|F(re^{i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda re^{i(\theta-\pi/2)}}\|_\mathcal{X} \leqslant c(\theta)r^\beta e^{-r|\lambda-a_0|\sin\varepsilon}$. Поэтому интеграл $H_+(\lambda)$ абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию в секторе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a_0) \in (-\theta+\varepsilon, \pi-\theta-\varepsilon),\ \lambda \neq a_0\}$, в котором

$$\|H_+(\lambda)\|_\mathcal{X} \leqslant c(\theta)\int\limits_0^\infty r^\beta e^{-r|\lambda-a_0|\sin\varepsilon}dr = \frac{c(\theta)\sin^{-\beta-1}\varepsilon\,\Gamma(1+\beta)}{|\lambda-a_0|^{1+\beta}} := \frac{C(\theta)}{|\lambda-a_0|^{1+\beta}}.$$

Аналогично может быть показано, что $H_-(\lambda)$ определяет аналитическую функцию в секторе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a_0) \in (-\pi+\theta+\varepsilon, \theta-\varepsilon),\ \lambda \neq a_0\}$, в котором выполняется неравенство $\|H_-(\lambda)\|_\mathcal{X} \leqslant C(\theta)|\lambda-a_0|^{-\beta-1}$. Так как H_+ и H_- являются аналитическими продолжениями функции $\widehat{F}$, определенной на $(a_0, +\infty)$, по теореме об аналитическом продолжении они определяют аналитическую функцию H на $S_{\theta-\varepsilon,a_0}$, удовлетворяющую неравенству $\|H(\lambda)\|_\mathcal{X} \leqslant C(\theta)|\lambda - a_0|^{-\beta-1}$. Так как $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ и $\varepsilon \in (0, \theta_0 - \pi/2)$ произвольны, утверждение (ii) выполняется.

Пусть выполняется утверждение (ii). Возьмем $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\delta > 0$ и ориентированный контур $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$, где $\Gamma_\pm := \{a_0 + re^{\pm i\theta} : r \in [\delta,\infty)\}$, $\Gamma_0 := \{a_0 + \delta e^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta,\theta)\}$. При $\varepsilon \in (0, \theta-\pi/2)$, $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2-\varepsilon}$, $\lambda \in \Gamma_\pm$ имеем $\mathrm{Re}(\lambda t) = a_0\mathrm{Re}\,t + r|t|\cos(\arg t \pm \theta) \leqslant a_0\mathrm{Re}\,t - r|t|\sin\varepsilon$. Поэтому $\|H(\lambda)e^{\lambda t}\|_\mathcal{X} \leqslant C(\theta)r^{-\beta-1}e^{a_0\mathrm{Re}\,t}e^{-r|t|\sin\varepsilon}$, интеграл

$$F(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda$$

абсолютно сходится, равномерно на компактных подмножествах множества $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$. Следовательно, интеграл определяет аналитическую функцию в секторе $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Возьмем $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0)$, $\theta = (\theta_0+\theta_1)/2$, $\varepsilon = \theta - \theta_1 = (\theta_0-\theta_1)/2$, $t \in \Sigma_{\theta_1-\pi/2}$, $\delta = |t|^{-1}$, тогда

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right\|_\mathcal{X} \leqslant \frac{C(\theta)|t|^\beta e^{a_0\mathrm{Re}t}}{2\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{\cos(\arg t+\varphi)}d\varphi \leqslant C(\theta)|t|^\beta e^{1+a_0\mathrm{Re}t},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right\|_\mathcal{X} \leqslant \frac{C(\theta)e^{a_0\mathrm{Re}t}}{2\pi}\int\limits_{1/|t|}^\infty r^{-\beta-1}e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(\theta)e^{a_0\mathrm{Re}t}|t|^{1+\beta}}{2\pi}\int\limits_{1/|t|}^{\infty} e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr = \frac{C(\frac{\theta_0+\theta_1}{2})}{2\pi\sin\frac{\theta_0-\theta_1}{2}}|t|^{\beta}e^{a_0\mathrm{Re}t},$$

поэтому $\|F(t)\|_{\mathcal{X}} \leqslant c(\theta_1)|t|^{\beta}e^{a_0\mathrm{Re}t}$ при всех $t\in\Sigma_{\theta_1-\pi/2}$.

По теореме Фубини и теореме о вычетах при $\lambda > a_0$

$$\widehat{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} = H(\lambda) - \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\Gamma_R^0}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} - \int\limits_{\Gamma_R^+}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} - \int\limits_{\Gamma_R^-}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right),$$

где $\Gamma_R^0 := \{a_0+Re^{i\varphi} : \varphi\in(-\theta,\theta)\}$, $\Gamma_R^{\pm} := \{a_0+re^{\pm i\theta} : r\in[R,\infty)\}$. При этом

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_R^0}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{R^{-\beta}C(\theta)d\varphi}{|a_0+Re^{i\varphi}-\lambda|}\to 0,$$

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_R^{\pm}}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \int\limits_{R}^{\infty}\frac{r^{-\beta-1}C(\theta)dr}{|a_0+re^{\pm i\theta}-\lambda|} \leqslant C_1\int\limits_{R}^{\infty}r^{-\beta-2}dr\to 0,$$

при $R\to\infty$, поскольку $\beta>-1$. Таким образом, $\widehat{F}\equiv H$. ☐

Замечание 2.1. Понятно, что из условия (ii) следует, что при всех $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$, $\varepsilon>0$ существует такое $C_1(\theta)>0$, что для всех $\lambda\in S_{\theta,a_0+\varepsilon}$ $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}}\leqslant C_1(\theta)|\lambda|^{-1-\beta}$. Обратно, из неравенства $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}}\leqslant C_1(\theta)|\lambda|^{-1-\beta}$ в S_{θ,a_0} при каждом $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$ следует неравенство $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}}\leqslant C(\theta)|\lambda-a_0|^{-1-\beta}$ в том же секторе S_{θ,a_0}

Замечание 2.2. При $a_0=\beta=0$ это утверждение совпадает с теоремой 0.1 из [24], при $\theta_0=\pi/2$, $\beta>0$ — с теоремой 2.6.1 из [10]. При $\beta\in(-1,0)$ такая теорема была доказана в работе [16].

3. Аналитические разрешающие семейства

k-Разрешающее семейство операторов при $k\in\{0,1,\dots,m-1\}$ называется *аналитическим*, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0\in(0,\pi/2]$. Аналитическое k-разрешающее семейство операторов $\{S_k(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t>0\}$ имеет тип (ψ_0,a_0,β) при некоторых $\psi_0\in(0,\pi/2]$, $a_0\in\mathbb{R}$, $\beta>-1$, если для любого $\psi\in(0,\psi_0)$ существует такое $c(\psi)$, что при всех $t\in\Sigma_{\psi}$ выполняется неравенство $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant c(\psi)e^{a_0\mathrm{Re}\,t}|t|^{\beta}$.

Определение 3.1. Пусть $m\in\mathbb{N}$, $K\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $\theta_0\in(\pi/2,\theta_K]$, $a_0\geqslant a_K\geqslant 0$, $\chi<1$. Через $\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$ обозначим класс операторов $A\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) для любого $\lambda\in S_{\theta_0,a_0}$ существует оператор $(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$;

(ii) для любого $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$ найдется такое $C=C(\theta)>0$, что

$$\forall\lambda\in S_{\theta,a_0}\quad \|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{C(\theta)}{|\lambda|^{m-\chi}}.$$

Иногда для удобства будем сокращать обозначение класса операторов $\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$ до $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$, когда значения параметров θ_0 и a_0 не играют роли.

Лемма 3.1. *Пусть $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $K\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$ и существует такое $c>0$, что при всех $\lambda\in S_{\theta_K,a_K}$ $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\geqslant c|\lambda|^{-\chi}$. Тогда $\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$.*

Доказательство. Действительно,

$$\|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \|\lambda^{-m}\widehat{K}(\lambda)^{-1}(I-\lambda^{-m}A\widehat{K}(\lambda)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{2c^{-1}}{|\lambda|^{m-\chi}}$$

при достаточно больших $|\lambda|$, т. е. при выборе достаточно большого $a_0>0$. ☐

Замечание 3.1. Подробно задача (1.1), (1.2) с ограниченным оператором A исследована в работе [17].

Лемма 3.2. *Пусть $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, $\gamma \in \mathbb{R}$,*

$$Z_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a_0 + re^{\pm i\theta},\ r \in [\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a_0 + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ *при некоторых $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. Тогда Z_γ допускает аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$ и при всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $C_\gamma = C_\gamma(\theta)$, что для всех $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$*

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_\gamma(\theta) e^{a_0 \mathrm{Re} t}(|t|^{-1} + a_0)^{\chi - \gamma}, \quad \gamma \leqslant \chi - 1, \tag{3.1}$$

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_\gamma(\theta) e^{a_0 \mathrm{Re} t}|t|^{\gamma - \chi}, \quad \gamma > \chi - 1. \tag{3.2}$$

При этом

$$\frac{d^k}{dt^k} Z_\gamma = Z_{\gamma - k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

$$\lim_{t \to 0+} Z_\gamma(t) = 0 \quad \text{при } \gamma > \chi. \tag{3.4}$$

Доказательство. Для $\varepsilon \in (0, \theta - \pi/2)$, $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2 - \varepsilon}$, $\mu \in \Gamma_\pm$ имеем

$$\mathrm{Re}(\mu t) = a_0 \mathrm{Re} t + r|t|\cos(\arg t \pm \theta) \leqslant a_0 \mathrm{Re} t - r|t| \sin\varepsilon,$$

а в случае $\mu \in \Gamma_0$ $\mathrm{Re}(\mu t) = a_0 \mathrm{Re} t + \delta|t|\cos(\arg t \pm \varphi)$, поэтому в силу определения 3.1 при $\gamma \leqslant \chi - 1$

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0 \mathrm{Re} t}}{\pi}\int\limits_\delta^\infty (r + a_0)^{\chi - \gamma - 1} e^{-r|t|\sin\varepsilon} dr + \frac{Ce^{a_0 \mathrm{Re} t}\delta(\delta + a_0)^{\chi - \gamma - 1}}{2\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{\delta|t|\cos(\arg t \pm \varphi)} d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ce^{a_0 \mathrm{Re} t}}{\pi}\int\limits_\delta^\infty (r + a_0)^{\chi - \gamma - 1} e^{-r|t|\sin\varepsilon} dr + \frac{Ce^{\delta|t| + a_0 \mathrm{Re} t}(\delta + a_0)^{\chi - \gamma}\theta}{\pi}.$$

При $\gamma > \chi - 1$ аналогичная оценка будет иметь следующий вид:

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0 \mathrm{Re} t}c^{\chi - \gamma - 1}}{\pi}\int\limits_\delta^\infty r^{\chi - \gamma - 1} e^{-r|t|\sin\varepsilon} dr + \frac{Ce^{\delta|t| + a_0 \mathrm{Re} t}c^{\chi - \gamma - 1}\delta^{\chi - \gamma}\theta}{\pi}.$$

При этом использовано неравенство $|\mu| \geqslant c|\mu - a_0|$, очевидно справедливое при некотором $c = c(\theta) > 0$ для всех $\mu \in \Gamma$. Таким образом, при любом $\gamma \in \mathbb{R}$ соответствующий интеграл сходится равномерно на любом компактном подмножестве сектора $\Sigma_{\theta - \pi/2}$, а значит, определяет в нем аналитическую функцию переменной t. Отсюда сразу следуют равенства (3.3).

Возьмем $\delta = |t|^{-1}$, тогда при $\gamma \leqslant \chi - 1$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{1 + a_0 \mathrm{Re} t}(|t|^{-1} + a_0)^{\chi - \gamma}\theta}{\pi},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm} \mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0 \mathrm{Re} t}|t|^{-1}}{2\pi}\int\limits_1^\infty (r|t|^{-1} + a_0)^{\chi - \gamma - 1} e^{-r\sin\varepsilon} dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ce^{a_0 \mathrm{Re} t}(|t|^{-1} + a_0)^{\chi - \gamma}}{2\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi - \gamma - 1} e^{-r\sin\varepsilon} dr.$$

Таким образом, выполняется неравенство (3.1) при

$$C_\gamma(\theta - \varepsilon) = \frac{C(\theta)\theta e}{\pi} + \frac{C(\theta)}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi - \gamma - 1} e^{-r\sin\varepsilon} dr.$$

Переобозначим $\theta_1 = \theta - \varepsilon \in (\pi/2, \theta_0)$, выберем $\varepsilon = \dfrac{\theta_0 - \theta_1}{2}$, тогда $\theta = \theta_1 + \varepsilon = \dfrac{\theta_0 + \theta_1}{2}$. Вернувшись к обозначению $\theta := \theta_1$, получим

$$C_\gamma(\theta) = \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})(\theta_0+\theta)e}{2\pi} + \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

При $\delta = |t|^{-1}$, $\gamma > \chi - 1$ получим неравенства

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{1+a_0\mathrm{Re}t}c^{\chi-\gamma-1}|t|^{\gamma-\chi}\theta}{\pi},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm}\mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}c^{\chi-\gamma-1}|t|^{\gamma-\chi}}{2\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr,$$

из которых следует неравенство (3.2) при

$$C_\gamma(\theta-\varepsilon) = \frac{C(\theta)c(\theta)^{\chi-\gamma-1}\theta e}{\pi} + \frac{C(\theta)c(\theta)^{\chi-\gamma-1}}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

Рассуждая, как в конце предыдущего раздела, получим

$$C_\gamma(\theta) = \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})c(\frac{\theta_0+\theta}{2})^{\chi-\gamma-1}(\theta_0+\theta)e}{2\pi} + \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})c(\frac{\theta_0+\theta}{2})^{\chi-\gamma-1}}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

Из (3.2) следуют равенства (3.4). □

Теорема 3.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$.

(i) *Если при некотором* $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ *существует аналитическое* k*-разрешающее семейство операторов типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0, -\chi + k)$ *для уравнения* (1.2)*, то* $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$.

(ii) *Если* $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$*, для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$*, то при каждом* $k = 0, 1, \ldots, m-1$ *существует единственное аналитическое* k*-разрешающее семейство операторов* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *типа* $(\theta_0 - \pi/2, \max\{a_0, 0\}, -\chi + k)$ *уравнения* (1.2)*. При этом* $S_k \equiv Z_k \equiv J^k Z_0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Доказательство. Утверждение (i) сразу следует из леммы 1.1 и теоремы 2.1.

Если $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, то в силу леммы 1.1 и теоремы 2.1 при $\mathcal{X} = \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ семейство операторов $\{Z_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ при $l = 0, 1, \ldots, m-1$ аналитично и имеет тип $(\theta_0 - \pi/2, a_0, l - \chi)$. Отсюда следует условие (i) определения 1.1. Из коммутирования операторов $K(t)$ и A при всех $t > 0$ следует коммутирование $\widehat{K}(\lambda)$ и A, а значит, и коммутирование операторов A и $(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$. Учитывая вид $Z_l(t)$, получаем условие (ii) определения 1.1.

Поскольку при $l = 0, 1, \ldots, m-1$ $\widehat{J^K Z_l(t)} = \widehat{K}(\lambda)\lambda^{m-1-l}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$, то при $z_l \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$D^k J^K Z_l(t) z_l = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{m-1-l+k}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda z_l =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{k-1-l}e^{\lambda t}d\lambda z_l + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{k-1-l}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda A z_l,$$

$$\|\lambda^{k-1-l}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|^{m-\chi-k+1+l}}, \quad m - \chi - k + 1 + l \geqslant 2 - \chi > 1,$$

поэтому $D^{k,K} Z_l(0) z_l = 0$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \setminus \{l\}$, $D^{l,K} Z_l(0) z_l = z_l$. Кроме того, при $t > 0$

$$D^m J^K Z_l(t) z_l = D^m \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{m-1-l}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}z_l d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \lambda^{2m-1-l} \widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} z_l d\lambda = AZ_l(t) z_l,$$

так как $m - 1 - l \geqslant 0$. Таким образом, $\{Z_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ — l-разрешающее семейство уравнения (1.2). По лемме 1.2 получаем требуемое. □

Замечание 3.2. Аналогичное теореме 3.1 утверждение для уравнений первого порядка называется теоремой Соломяка—Иосиды о порождении аналитических полугрупп операторов [2,4,5,9]. Эта теорема была обобщена на случай эволюционных интегральных уравнений [24], уравнений с дробной производной Герасимова—Капуто [12], Римана—Лиувилля [1, 7], Джрбашяна—Нерсесяна [19], с распределенными производными [8, 16, 26], для уравнений с несколькими дробными производными [13, 20].

Следствие 3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, функция ядра $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, для любых $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$. Тогда для любых $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in D_A$ функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k$$

является единственным решением задачи (1.1), (1.2). *Это решение аналитично в $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$.*

Доказательство. После теоремы 3.1 остается доказать единственность решения. Если существует два решения y_1, y_2 задачи (1.1), (1.2), то их разность $y = y_1 - y_2$ является решением уравнения (1.2), удовлетворяющим начальным условиям

$$D^{k,K} y(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1. \tag{3.5}$$

Переопределим y на (T, ∞) при некотором $T > 0$ нулем. Полученная функция y_T удовлетворяет уравнению (1.2) на положительной полуоси, кроме, возможно, точки T. Подействуем преобразованием Лапласа на обе части уравнения (1.2), учитывая условия (3.5), и получим равенство $\lambda^m \widehat{K}(\lambda) \widehat{y}_T(\lambda) = A \widehat{y}_T(\lambda)$. Так как существует ограниченный оператор $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$ при каждом $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$, имеем $\widehat{y}_T(\lambda) = (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} 0 \equiv 0$. Поэтому $y_T \equiv 0$. В силу произвольности $T > 0$ получаем $y \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$, и решение задачи (1.1), (1.2) единственно. □

4. Задача типа Коши для неоднородного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$D^{m,K} z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{4.1}$$

где $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. Функция $z \in C((0, T]; D_A)$ называется решением задачи типа Коши

$$D^{k,K} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1, \tag{4.2}$$

для уравнения (4.1), если $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, равенство (4.1) справедливо при всех $t \in (0, T]$ и выполняются условия (4.2).

Лемма 4.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, для любых $t > 0$, $x \in D_A$ выполнено $K(t)Ax = AK(t)x$, $t^\beta K(t) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ при некотором $\beta < 2 - \chi$, $f \in C([0, T]; D_A)$. Тогда функция*

$$z_f(t) = \int\limits_0^t Z_{m-1}(t - s) f(s) ds \tag{4.3}$$

является единственным решением задачи

$$D^{k,K} z(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1, \tag{4.4}$$

для уравнения (4.1).

Доказательство. В силу коммутирования операторов $K(t)$ и A, а значит, и операторов $(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}$ и A, а также с учетом замкнутости оператора A и условия $f\in C([0,T];D_A)$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^t AZ_{m-1}(t-s)f(s)ds=\int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s)Af(s)ds.$$

Действительно, с учетом теоремы 3.1

$$\left\|\int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s)Af(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\leqslant Ce^{|a|t}\|f\|_{C([0,T];D_A)}\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1},$$

поэтому $z_f(t)\in D_A$ и $Az_f(t)=z_{Af}(t)$ при $t>0$.

Известно, что $D^kZ_{m-1}(0)=0$ при всех $k=0,1,\ldots,m-2$, поэтому

$$D^kz_f(t)=\int\limits_0^t D^kZ_{m-1}(t-s)f(s)ds=\int\limits_0^t Z_{m-1-k}(t-s)f(s)ds,\quad k=0,1,\ldots,m-1,$$

и в силу леммы 3.2

$$\|D^kz_f(t)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant C_{m-1-k}e^{|a|T}\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}\int\limits_0^t(t-s)^{-\chi+m-1-k}ds=c\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}t^{m-k-\chi}\to 0 \tag{4.5}$$

при $t\to 0+$ для $k=0,1,\ldots,m-1$, так как $\chi<1$.

Далее, при $k=0,1,\ldots,m$

$$D^{k,K}z_f(t)=D^k\int\limits_0^t K(s)z_f(t-s)ds=\int\limits_0^t K(s)D^kz_f(t-s)ds=J^KD^kz_f(t),$$

в силу неравенства (4.5) для $k=0,1,\ldots,m-1$

$$\|D^{k,K}z_f(t)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\int\limits_0^t\|K(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|D^kz_f(t-s)\|_{\mathcal{Z}}ds\leqslant C\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}\int\limits_0^t(t-s)^{m-k-\chi}s^{-\beta}ds\leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}t^{m-k+1-\chi-\beta}B(m-k+1-\chi,1-\beta)\leqslant C_1t^{2-\chi-\beta}\to 0$$

при $t\to 0+$, поскольку $\beta<2-\chi$. Поэтому

$$\widehat{D^{m,K}z_f}=\lambda^m\widehat{K}(\lambda)\widehat{z_f}(\lambda)=\lambda^m\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda)=\widehat{f}(\lambda)+A(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda).$$

Отсюда с учетом замкнутости A получаем

$$D^{m,K}z_f(t)-f(t)=\mathfrak{L}^{-1}[A(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda)]=Az_f(t).$$

Единственность доказывается так же, как для однородного уравнения. □

Из следствия 3.1 и леммы 4.1 сразу получаем теорему об однозначной разрешимости.

Теорема 4.1. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, функция $K\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A\in\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$, для любых $t>0$, $x\in D_A$ выполнено $K(t)Ax=AK(t)x$, $t^\beta K(t)\in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ при некотором $\beta<2-\chi$, $f\in C([0,T];D_A)$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\ldots,m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (4.1), (4.2), *при этом оно имеет вид*

$$z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}Z_k(t)z_k+\int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds.$$

При $\gamma\in(0,1]$ обозначим через $C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ множество всех функций $f:[0,T]\to\mathcal{Z}$, удовлетворяющих условию Гельдера:

$$\exists C>0\quad\forall s,t\in[0,T]\quad\|f(s)-f(t)\|_{\mathcal{Z}}\leqslant C|s-t|^\gamma.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$, $t^\beta K(t) \in C([0,T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при некотором* $\beta < 2 - \chi$,

$$\forall \theta \in (\pi/2, \theta_0) \ \exists C = C(\theta) > 0 \ \forall \lambda \in S_{\theta,a_0} \ \|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C(\theta)}{|\lambda|^m}, \tag{4.6}$$

$f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ *при некотором* $\gamma \in (0,1]$. *Тогда функция* (4.3) *является единственным решением задачи* (4.1), (4.4).

Доказательство. Так как оператор A замкнут, при $t > 0$

$$AZ_{m-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^m \widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

при этом $\|\lambda^m \widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C$. Поэтому $\|AZ_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = O(t^{-1})$ при $t \to 0+$. Тогда при $s, t \in (0, T]$

$$\|AZ_{m-1}(t-s)(f(s) - f(t))\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_1 |t-s|^{\gamma-1}, \tag{4.7}$$

$$\int_0^t AZ_{m-1}(t-s) f(s) ds = \int_0^t AZ_{m-1}(t-s)(f(s) - f(t)) ds + \int_0^t D^{m,K} Z_{m-1}(t-s) f(t) ds.$$

Предпоследний интеграл сходится в силу неравенства (4.7), последний — поскольку

$$\int_0^t D^{m,K} Z_{m-1}(t-s) f(t) ds = (D^{m-1,K} Z_{m-1}(t) - D^{m-1,K} Z_{m-1}(0)) f(t) = D^{m-1,K} Z_{m-1}(t) f(t) - f(t).$$

Таким образом, с учетом замкнутости оператора A получаем, что $z_f(t) \in D_A$ при $t > 0$.

Остальная часть доказательства такая же, как в лемме 4.2. □

Следствие 3.1 и лемма 4.2 влекут следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, *функция* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$, $t^\beta K(t) \in C([0,T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при некотором* $\beta < 2 - \chi$, *выполняется условие* (4.6), $f \in C^\gamma([0,T]; \mathcal{Z})$ *при некотором* $\gamma \in (0,1]$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (4.1), (4.2), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) ds.$$

5. Теорема о возмущении

Обозначим через $C_A(\theta)$ максимум из констант $C(\theta)$ из определения 3.1 и условия (4.6).

Теорема 5.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, *функция* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$, *выполняется условие* (4.6), $B \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, *для всех* $x \in D_A \subset D_B$

$$\|Bx\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \beta \|Ax\|_{\mathcal{Z}} + \delta \|x\|_{\mathcal{Z}}, \tag{5.1}$$

где $\beta \in [0,1)$, $\delta \geqslant 0$, *для всех* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *выполнено* $\beta\,(1 + C_A(\theta)) \leqslant q$ *при некотором* $q \in (0,1)$. *Тогда* $A + B \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_1)$ *при достаточно большом* $a_1 > a_0$.

Если к тому же $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_K |\lambda|^{-\chi}$ *в секторе* S_{θ_0,a_1}, *то для* $A + B$ *выполняется условие* (4.6).

Доказательство. Выберем $l \geqslant 1$, $\lambda \in S_{\theta,la_0} \subset S_{\theta,a_0}$ при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, тогда из (5.1) следует, что

$$\|B(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \beta \|A(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \delta \|(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant$$

$$\leqslant \beta \left\| \lambda^m \widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - I \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \frac{\delta C_A(\theta)}{|\lambda|^{m-\chi}} \leqslant \beta\,(1 + C_A(\theta)) + \frac{\delta C_A(\theta)}{|\lambda|^{m-\chi}} \leqslant q + \frac{\delta C_A(\theta)}{(la_0 \sin\theta_0)^{m-\chi}} < 1$$

при достаточно большом l. Поэтому

$$(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A - B)^{-1} = (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}(I - B(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1})^{-1} =$$

$$= (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [B(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}]^k,$$

$$\|(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C_A(\theta)}{\left(1 - q - \frac{\delta C_A(\theta)}{(la_0 \sin\theta_0)^{m-\chi}}\right)|\lambda|^{m-\chi}}.$$

Следовательно, $A + B \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_1)$ при $a_1 = la_0$. При выполнении условия $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_K|\lambda|^{-\chi}$ имеем

$$\|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C_K C_A(\theta)}{\left(1 - q - \frac{\delta C_A(\theta)}{(la_0 \sin\theta_0)^{m-\chi}}\right)|\lambda|^{m}}.$$

□

Замечание 5.1. Любой оператор $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ удовлетворяет условию (5.1) при $\beta = 0$, $\delta = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$.

Замечание 5.2. Теорема 5.1 обобщает теорему о порождении инфинитезимальных генераторов аналитических полугрупп операторов [3]. Аналогичные результаты для уравнений с распределенными производными получены в работах [15,26], а для уравнений с производной Джрбашяна—Нерсесяна — в [19].

6. Приложение к начально-краевой задаче для системы уравнений

Возьмем $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $m_{ij} - 1 < \alpha_{ij} \leqslant m_{ij} \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, 2$, $m := \max\limits_{i,j=1,2} m_{ij}$,

$$K(s) := \begin{pmatrix} b_{11}\dfrac{s^{m-\alpha_{11}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{11})} & b_{12}\dfrac{s^{m-\alpha_{12}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{12})} \\ b_{21}\dfrac{s^{m-\alpha_{21}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{21})} & b_{22}\dfrac{s^{m-\alpha_{22}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{22})} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

тогда

$$D^{m,K} = \begin{pmatrix} b_{11}D^{\alpha_{11}} & b_{12}D^{\alpha_{12}} \\ b_{21}D^{\alpha_{21}} & b_{22}D^{\alpha_{22}} \end{pmatrix}.$$

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ заданы операторы

$$(\Lambda u)(s) := \sum_{|q| \leqslant 2r} a_q(s) \frac{\partial^{|q|} u(s)}{\partial s_1^{q_1} \partial s_2^{q_2} \ldots \partial s_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(s) := \sum_{|q| \leqslant r_l} b_{lq}(s) \frac{\partial^{|q|} u(s)}{\partial s_1^{q_1} \partial s_2^{q_2} \ldots \partial s_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \ldots, r,$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|q| = q_1 + \cdots + q_d$. Предположим, что пучок операторов $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптичен (см. определение в [6]) и определим оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{v \in H^{2r}(\Omega) : B_l v(s) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, r,\ s \in \partial\Omega\},$$

действующий по правилу $\Lambda_1 u := \Lambda u$. Пусть оператор Λ_1 самосопряжен, тогда его спектр $\sigma(\Lambda_1)$ действителен, дискретен и конечнократен [6]. Предположим, кроме того, что спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, обозначим через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций оператора Λ_1, занумерованную в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратностей.

Положим $\mathcal{Z} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega) \times L_2(\Omega))$, $D_A = D_{\Lambda_1} \times D_{\Lambda_1}$, ядро $K(s)$ задано формулой (6.1).

Лемма 6.1. *Пусть в условиях данного раздела* $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{21} = 0$, $m_{11} = m_{22} = m \in \{1, 2\}$, $\alpha_{12} \leqslant \max\{\alpha_{11}, \alpha_{12}\} < 2$, $\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} < 2$. *Тогда* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$; $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$, $\chi < 1$; $t^\beta K(t) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при некотором* $\beta < 2-\chi$; *выполняется условие* (4.6); *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$.

Доказательство. Из вида оператора A и того факта, что A действует на пространственные переменные, а $K(s)$ — на временные, следует коммутирование A и $K(s)$.

Заметим, что

$$\widehat{K}(\lambda) := \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-m} & b_{12}\lambda^{\alpha_{12}-m} \\ 0 & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-m} \end{pmatrix},$$

поэтому выполняется условие $(\widehat{K})$ при любых $\theta_K \in (\pi/2, \pi)$, $a_K \geqslant 0$. Обозначим $\delta := \max\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\} < 2$, возьмем $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\delta)$, $a_0 = \lambda_1 + 1$, где λ_1 — собственное значение оператора Λ_1. Тогда при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\lambda \in S_{\theta,a_0}$

$$\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A = \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \Lambda_1 & b_{12}\lambda^{\alpha_{12}} \\ 0 & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \Lambda_1 \end{pmatrix},$$

Обозначим $D_k := (b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)$, тогда

$$(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)/D_k & -b_{12}\lambda^{\alpha_{12}}/D_k \\ 0 & (b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)/D_k \end{pmatrix} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k) & -b_{12}\lambda^{\alpha_{12}}/D_k \\ 0 & 1/(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k) \end{pmatrix} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$\|(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{C \sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^\varepsilon},$$

где $\varepsilon := \min\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\}$. При этом $\chi = m - \varepsilon < 1$ в силу условий на α_{ij}. Таким образом, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$.

Далее

$$\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-m}/(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k) & -b_{12}\lambda^{\alpha_{12}-m}\lambda_k/D_k \\ 0 & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-m}/(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k) \end{pmatrix} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Имеем при $\lambda \in S_{\theta,a_0}$

$$\left| \frac{b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-m}}{b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k} \right| = \frac{|\lambda|^{-m}}{|1 - b_{11}^{-1}\lambda_k\lambda^{-\alpha_{11}}|} \leqslant \frac{\sin^{-1}(\alpha_{11}\theta)}{|\lambda|^m}, \qquad \left| \frac{b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-m}}{b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k} \right| \leqslant \frac{\sin^{-1}(\alpha_{22}\theta)}{|\lambda|^m}.$$

По условиям леммы $\alpha_{12} \leqslant \alpha_{11}$ или $\alpha_{12} \leqslant \alpha_{22}$. В первом случае

$$\left| \frac{-b_{12}\lambda^{\alpha_{12}-m}\lambda_k}{(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)} \right| = \frac{|b_{12}||\lambda|^{\alpha_{12}-m}}{|b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k||b_{22}\lambda^{\alpha_{22}}\lambda_k^{-1} - 1|} \leqslant \frac{C \sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^{m+\alpha_{11}-\alpha_{12}}} \leqslant \frac{C_1(\theta)}{|\lambda|^m}.$$

Во втором случае изменения в рассуждениях очевидны, в итоге

$$\|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{C_2(\theta)}{|\lambda|^m},$$

т. е. выполняется условие (4.6).

Понятно, что $t^\beta K(t) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ при

$$\beta = 1 - m + \max\{\alpha_{11}, \alpha_{22}\} = 2 - \chi - 1 - \min\{\alpha_{11}, \alpha_{22}\} + \max\{\alpha_{11}, \alpha_{22}\} < 2 - \chi,$$

так как $\alpha_{ii} \in (m - 1, m]$, $i = 1, 2$. ☐

Пусть для определенности $m = 2$, рассмотрим начально-краевую задачу

$$b_{11}J_t^{2-\alpha_{11}}v(\xi, 0) + b_{12}J_t^{2-\alpha_{12}}w(\xi, 0) = v_0(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.2}$$

$$b_{22}J_t^{2-\alpha_{22}}w(\xi, 0) = w_0(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.3}$$

$$b_{11}D_t^{\alpha_{11}-1}v(\xi, 0) + b_{12}D_t^{\alpha_{12}-1}w(\xi, 0) = v_1(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.4}$$

$$b_{22}D_t^{\alpha_{22}-1}w(\xi, 0) = w_1(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.5}$$

$$B_l v(\xi,t) = B_l w(\xi,t) = 0, \ \ l = 1,2,\dots,r, \ \ (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{6.6}$$

$$b_{11} D_t^{\alpha_{11}} v(\xi,t) + b_{12} D_t^{\alpha_{12}} w(\xi,t) = \Lambda v(\xi,t) + a_1(\xi) v(\xi,t) + a_2(\xi) w(\xi,t) + g(\xi,t), \ \ (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{6.7}$$

$$b_{22} D_t^{\alpha_{22}} w(\xi,t) = \Lambda w(\xi,t) + a_3(\xi) v(\xi,t) + a_4(\xi) w(\xi,t) + h(\xi,t), \ (\xi,t) \in \Omega \times (0,T]. \tag{6.8}$$

Здесь D_t^δ — дробная производная Римана—Лиувилля порядка $\delta \geqslant 0$ по переменной t или дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка $\delta < 0$ по переменной t. Эта задача путем произведенного выше выбора пространства $\mathcal{Z}$ и операторов A, $K(s)$ редуцируется к задаче (4.1), (4.2) с $f(t) = (g(\cdot,t), h(\cdot,t))$, $z_k = (v_k(\cdot), w_k(\cdot))$, $k = 0,1$.

Теорема 6.1. *Пусть* $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{21} = 0$, $m_{11} = m_{22} = 2$, $\alpha_{12} \leqslant \max\{\alpha_{11}, \alpha_{12}\} < 2$, $\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} < 2$, $a_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1,2,3,4$, $v_0, v_1, w_0, w_1 \in D_{\Lambda_1}$, $g, h \in C([0,T]; D_{\Lambda_1}) \cap C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (6.2)–(6.8).

Доказательство. В силу леммы 6.1 $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$. Оператор B, задаваемый матрицей

$$B = \begin{pmatrix} a_1(\xi) & a_2(\xi) \\ a_3(\xi) & a_4(\xi) \end{pmatrix},$$

ограничен в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, поэтому по теореме 5.1 $A + B \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_1)$ при некотором $a_1 > 0$. В силу леммы 6.1 выполняются все условия теорем 4.1, 4.2, из которых следует однозначная разрешимость исследуемой задачи. □

Замечание 6.1. Понятно, что без всяких проблем можно добавить, например, интегральные по пространственным переменным операторы с ядрами из $L_2(\Omega\times\Omega)$ в уравнения (6.7), (6.8) и аналогично с использованием леммы 6.1 и теорем 5.1, 4.1, 4.2 доказать однозначную разрешимость полученной задачи.

7. Начально-краевая задача для уравнения с производной Прабхакара

Напомним определение обобщенной функции Миттаг-Леффлера $E^\varepsilon_{\alpha,\delta}$ и ядра Прабхакара $e^\varepsilon_{\alpha,\delta,\omega}$ (см. [23]):

$$E^\varepsilon_{\alpha,\delta}(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\varepsilon+n) t^n}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(\alpha n + \delta) n!}, \quad e^\varepsilon_{\alpha,\delta,\omega}(t) = t^{\delta-1} E^\varepsilon_{\alpha,\delta}(\omega t^\alpha).$$

Пусть $\alpha, \varepsilon, \omega \in \mathbb{R}$, для определенности $1 < \delta \leqslant 2$. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения с производной Прабхакара по времени

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_0^t (t-s)^{1-\delta} E^\varepsilon_{\alpha,2-\delta}(\omega(t-s)^\alpha) v(\xi,s) ds \Big|_{t=0} = v_k(\xi), \quad k = 0,1, \ \xi \in \Omega, \tag{7.1}$$

$$B_l v(\xi,t) = 0, \ \ l = 1,2,\dots,r, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t (t-s)^{2-\delta-1} E^\varepsilon_{\alpha,2-\delta}(\omega(t-s)^\alpha) v(\xi,s) ds = \Lambda v(\xi,t) + a(\xi) v(\xi,t) + \int_\Omega \kappa(\xi,\eta) v(\eta) d\eta + g(\xi,t) \tag{7.3}$$

при $(\xi,t) \in \Omega \times (0,T]$. Здесь производная Прабхакара, действующая как

$$D^\varepsilon_{\alpha,\delta,\omega} h(t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t (t-s)^{1-\delta} E^\varepsilon_{\alpha,2-\delta}(\omega(t-s)^\alpha) h(s) ds,$$

является интегро-дифференциальным оператором Римана—Лиувилля с ядром $K(s) = e^\varepsilon_{\alpha,2-\delta,\omega}(s)$.

Возьмем $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)$, $A = \Lambda_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $D_A = D_{\Lambda_1}$.

Лемма 7.1. *Пусть в условиях данного раздела* $1 < \delta \leqslant 2$, $\alpha, \varepsilon, \omega \in \mathbb{R}$. *Тогда* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$; $A \in \mathcal{A}_{2,K,2-\delta}(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$; $t^{\delta-1} K(t) \in C([0,T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$; *выполняется условие* (4.6); *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$.

Доказательство. Известно [23], что

$$\widehat{K}(\lambda)=\mathfrak{L}[e^{\varepsilon}_{\alpha,2-\delta,\omega}(s)](\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha\varepsilon+\delta-2}}{(\lambda^{\alpha}-\omega)^{\varepsilon}},$$

поэтому условие $(\widehat{K})$ выполняется при любом $a_K>|\omega|^{1/\alpha}$ и θ_K, зависящем от a_K. При достаточно большом $a_0>\lambda_1$ возьмем подходящее $\theta_0\in(\pi/2,\pi/\delta)$, любое $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$, тогда при $\lambda\in S_{\theta,a_0}$

$$\lambda^2\widehat{K}(\lambda)-A=\frac{\lambda^{\alpha\varepsilon+\delta}}{(\lambda^{\alpha}-\omega)^{\varepsilon}}-A.$$

Поскольку при больших $|\lambda|$ имеем $\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon}\sim\lambda^{\delta}$, то, выбрав достаточно большое a_0, получим для $\lambda\in S_{\theta,a_0}$ включение $\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon}\in S_{\theta,a_0/2}$, при этом $|\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon}-\lambda_k|\geqslant C_1|\lambda^{\delta}-\lambda_k|\geqslant C_1|\lambda^{\delta}-a_0|\sin(\delta\theta)$ для всех $k\in\mathbb{N}$, поэтому существует обратный оператор

$$(\lambda^2\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon}-\lambda_k},$$

$$\|(\lambda^2\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))}\leqslant\frac{C_2\sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^{\delta}},$$

при этом $\chi=2-\delta<1$. Следовательно, $A\in\mathcal{A}_{2,K,2-\delta}(\theta_0,a_0)$. Очевидно, что $t^{\delta-1}K(t)\in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, при этом $\delta-1<\delta=2-\chi$.

Кроме того,

$$\widehat{K}(\lambda)(\lambda^2\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-2}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{1-\lambda_k\lambda^{-\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{\varepsilon}},$$

$$\|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))}\leqslant\frac{C_2\sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^{2}},$$

т. е. выполняется условие (4.6).

Коммутирование $K(t)$ и Λ_1 очевидно. □

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 6.1, с использованием леммы 7.1 и теорем 5.1, 4.1 и 4.2 получим следующий результат.

Теорема 7.1. *Пусть* $1<\delta\leqslant 2$, $\alpha,\varepsilon,\omega\in\mathbb{R}$, $a\in L_2(\Omega)$, $\kappa\in L_2(\Omega\times\Omega)$, $v_0,v_1\in D_{\Lambda_1}$, $g\in C([0,T];D_{\Lambda_1})\cap C^{\gamma}([0,T];L_2(\Omega))$, $\gamma\in(0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7.1)–(7.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авилович А. С., Гордиевских Д. М., Федоров В. Е.* Вопросы однозначной разрешиомсти и приближенной управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гельдеровой правой частью// Челяб. физ.-мат. ж. — 2020. — *5*, № 1. — С. 5–21.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992.
5. *Соломяк М. З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха// Докл. АН СССР. — 1958. — *122*, № 6. — С. 766–769.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
7. *Федоров В. Е., Авилович А. С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана—Лиувилля в секториальном случае// Сиб. мат. ж. — 2019. — *60*, № 2. — С. 461–477.
8. *Федоров В. Е., Филин Н. В.* Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 2. — С. 264–280.
9. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
10. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Springer, 2011.
11. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model// Thermal Sci. — 2016. — *20*. — С. 763–769.

12. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces// Канд. дисс. — Eindhoven: Eindhoven Univ. of Technology, 2001.
13. *Boyko K. V., Fedorov V. E.* The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov—Caputo derivatives// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 6. — С. 1293–1302.
14. *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel// Prog. Fract. Differ. Appl. — 2015. — *1*, № 2. — С. 1–13.
15. *Fedorov V. E.* Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations// Mathematics. — 2020. — *8*, № 8. — С. 1306.
16. *Fedorov V. E., Du W.-S., Kostic M., Abdrakhmanova A. A.* Analytic resolving families for equations with distributed Riemann—Liouville derivatives// Mathematics. — 2022. — *10*, № 5. — С. 681.
17. *Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T.* Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — № 2. — С. 93–107.
18. *Fedorov V. E., Filin N. V.* On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations// Fractal and Fractional. — 2021. — *5*, № 1. — С. 20.
19. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M.* Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan—Nersesyan fractional derivative// Fractal and Fractional. — 2022. — *6*, № 10. — С. 541.
20. *Fedorov V. E., Turov M. M.* Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 6. — С. 1502–1512.
21. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam—Boston—Heidelberg: Elsevier, 2006.
22. *Pazy A.* Semigroups and linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
23. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag—Leffler function in the kernel// Yokohama Math. J. — 1971. — *19*. — С. 7–15.
24. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. — Basel: Springer, 1993.
25. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1993.
26. *Sitnik S. M., Fedorov V. E., Filin N. V., Polunin V. A.* On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral// Mathematics. — 2022. — *10*, № 16. — С. 2979.
27. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. — New York: Springer, 2011.
28. *Uchaikin V. V.* Fractional derivatives for physicists and engineers. Vol. I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.

В. Е. Федоров
Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru

А. Д. Годова
Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
E-mail: sashka_1997_godova55@mail.ru

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184
EDN: FPXSDA

Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators

V. E. Fedorov and A. D. Godova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

We study a class of equations in Banach spaces with a Riemann–Liouville-type integro-differential operator with an operator-valued convolution kernel. The properties of k-resolving operators of such equations are studied and the class $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ of linear closed operators is defined such that the belonging to this class is necessary and, in the case of commutation of the operator with the convolution kernel, is sufficient for the existence of analytic in the sector k-resolving families of operators of the equation under study. Under certain additional conditions on the convolution kernel, we prove theorems on the unique solvability of the nonhomogeneous linear equation of the class under consideration if the nonhomogeneity is continuous in the norm of the graph of the operator from the equation or Hölder continuous. We obtain the theorem on sufficient conditions on an additive perturbation of an operator of the class $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ in order that the perturbed operator also belong to such a class. Abstract results are used in the study of initial-boundary value problems for a system of partial differential equations with several fractional Riemann–Liouville derivatives of different orders with respect to time and for an equation with a fractional Prabhakar derivative with respect to time.

Keywords: integro-differential equations, Banach spaces, Riemann–Liouville operator, unique solvability, Riemann–Liouville fractional derivatives, Prabhakar fractional derivative

For citation: V. E. Fedorov, A. D. Godova, "Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 166–184. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184

REFERENCES

1. A. S. Avilovich, D. M. Gordievskikh, and V. E. Fedorov, "Voprosy odnoznachnoy razreshiomsti i priblizhennoy upravlyaemosti dlya lineynykh uravneniy drobnogo poryadka s gel'derovoy pravoy chast'yu" [Questions of unique solvability and approximate controllability for linear equations of fractional order with a Hölder right-hand side], *Chelyab. fiz.-mat. zh.* [Chelyabinsk Phys. Math. J.], 2020, **5**, No. 1, 5–21 (in Russian).
2. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
4. Ph. P. J. E. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, C. J. van Duijn, and B. de Pagter, *Odnoparametricheskie polugruppy* [One-Parameter Semigroups], Mir, Moscow, 1992 (Russian translation).
5. M. Z. Solomyak, "Primenenie teorii polugrupp k issledovaniyu differentsial'nykh uravneniy v prostranstvakh Banakha" [Application of semigroup theory to the study of differential equations in Banach spaces], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **122**, No. 6, 766–769 (in Russian).
6. H. Tribel, *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory* [Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
7. V. E. Fedorov and A. S. Avilovich, "Zadacha tipa Koshi dlya vyrozhdennogo uravneniya s proizvodnoy Rimana—Liuvillya v sektorial'nom sluchae" [Cauchy-type problem for a degenerate equation with a

Riemann–Liouville derivative in the sectorial case], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2019, **60**, No. 2, 461–477 (in Russian).

8. V. E. Fedorov and N. V. Filin, "Lineynye uravneniya s diskretno raspredelennoy drobnoy proizvodnoy v banakhovykh prostranstvakh" [Linear equations with discretely distributed fractional derivative in Banach spaces], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2021, **27**, No. 2, 264–280 (in Russian).
9. D. Henry, *Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations], Mir, Moscow, 1985 (Russian translation).
10. W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-valued laplace transforms and Cauchy problems*, Springer, Basel, 2011.
11. A. Atangana and D. Baleanu, "New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model," *Thermal Sci.*, 2016, **20**, 763–769.
12. E. G. Bajlekova, "Fractional evolution equations in Banach spaces," *PhD Thesis*, Eindhoven Univ. of Technology, Eindhoven, 2001.
13. K. V. Boyko and V. E. Fedorov, "The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov—Caputo derivatives," *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 6, 1293–1302.
14. M. Caputo and M. Fabrizio, "A new definition of fractional derivative without singular kernel," *Prog. Fract. Differ. Appl.*, 2015, **1**, No. 2, 1–13.
15. V. E. Fedorov, "Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations," *Mathematics*, 2020, **8**, No. 8, 1306.
16. V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. Kostic, and A. A. Abdrakhmanova, "Analytic resolving families for equations with distributed Riemann—Liouville derivatives," *Mathematics*, 2022, **10**, No. 5, 681.
17. V. E. Fedorov, A. D. Godova, and B. T. Kien, "Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces," *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, No. 2, 93–107.
18. V. E. Fedorov and N. V. Filin, "On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations," *Fractal and Fractional*, 2021, **5**, No. 1, 20.
19. V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, and E. M. Izhberdeeva, "Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan—Nersesyan fractional derivative," *Fractal and Fractional*, 2022, **6**, No. 10, 541.
20. V. E. Fedorov and M. M. Turov, "Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part," *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 6, 1502–1512.
21. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam—Boston—Heidelberg, 2006.
22. A. Pazy, *Semigroups and linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, New York, 1983.
23. T. R. Prabhakar, "A singular integral equation with a generalized Mittag—Leffler function in the kernel," *Yokohama Math. J.*, 1971, **19**, 7–15.
24. J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Springer, Basel, 1993.
25. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, Gordon and Breach, Philadelphia, 1993.
26. S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, N. V. Filin, and V. A. Polunin, "On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral," *Mathematics*, 2022, **10**, No. 16, 2979.
27. V. E. Tarasov, *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Springer, New York, 2011.
28. V. V. Uchaikin, *Fractional derivatives for physicists and engineers. Vol. I, II*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.

V. E. Fedorov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: `kar@csu.ru`

A. D. Godova
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: `sashka_1997_godova55@mail.ru`