Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 134–151
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.97
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151
EDN: FNYJWO

L^2-ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ КОРРЕКТОРОВ

С. Е. Пастухова

МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

Рассматриваются параболические уравнения второго порядка с ограниченными измеримыми ε-периодическими коэффициентами. Для решения задачи Коши в слое $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ с неоднородным уравнением получены приближения в норме $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$ с остаточным членом порядка ε^2 при $\varepsilon \to 0$.

Ключевые слова: параболические уравнения, усреднение решений, погрешность усреднения, корректор

Для цитирования: *С. Е. Пастухова.* L^2-оценки погрешности усреднения параболических уравнений с учетом корректоров// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 134–151. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151

1. Введение. Постановка задачи

1.1. Рассмотрим параболический оператор с измеримыми ограниченными быстро осциллирующими коэффициентами

$$L_\varepsilon = \partial_t + A_\varepsilon, \quad A_\varepsilon = -\mathrm{div}\,(a^\varepsilon(x)\nabla), \quad a^\varepsilon(x) = a(y)|_{y=\varepsilon^{-1}x}, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ — малый параметр, $\nabla = \nabla_x = (D_1, \dots, D_d)$ — градиент по пространственной переменной $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{div} = \nabla^*$, а 1-периодическая вещественная матрица $a(y) = \{a_{ij}(y)\}_{i,j=1}^d$ измерима, ограничена и удовлетворяет неравенствам

$$a_{ij}(\cdot)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \lambda^{-1} \tag{1.2}$$

с некоторой положительной константой λ. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование от 1 до d, если не оговорено противное.

Пусть $u^\varepsilon(x,t) \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ есть слабое решение задачи Коши

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u^\varepsilon &= f \qquad \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u^\varepsilon &= h \qquad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $f \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ и $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$. В теории усреднения хорошо известно [1, 2, 9, 20], что $u^\varepsilon(x,t)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ слабо в $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ и сильно в $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)) = L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ к слабому решению усредненной задачи

$$\begin{aligned} L_0 u &= f \qquad \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u &= h \qquad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где оператор

$$L_0 = \partial_t + A_0, \quad A_0 = -\mathrm{div}\,(a^0\nabla), \tag{1.5}$$

того же типа, что (1.1), но с постоянной матрицей коэффициентов a^0, определяемой через решения вспомогательных задач на ячейке периодичности — единичном кубе $Y = [-1/2, 1/2)^d$ (см. (2.1), (2.3)).

С самого начала существования теории усреднения ставился вопрос, насколько u^ε близко к u в различных нормах с оценкой по параметру ε. Долгое время оценки погрешности усреднения удавалось получить только при завышенных условиях регулярности на данные задачи (к ним относим коэффициенты оператора, правую часть в уравнении или начальные функции для эволюционных уравнений). По этой причине оценкам погрешности нельзя было придать операторный смысл, т. е. переформулировать их в естественной операторной норме, например, для разности резольвент исходного и усредненного эллиптических операторов или для разности полугрупп (операторных экспонент) соответствующих параболических уравнений.

Оценки погрешности усреднения, относящиеся к операторному типу, можно найти в работах В. В. Жикова 80-х годов (см. статью [7] и её изложение в [2, гл. II]). Будучи востребованы в приложениях к теории вероятностей и теории диффузии, это были оценки для параболических уравнений в L^∞-нормах. Для их доказательства использовался спектральный подход, основанный на блоховском представлении фундаментального решения. Прежде всего доказывались поточечная и интегральная оценка для фундаментального решения — ядра интегрального оператора полугруппы, отвечающей нестационарному уравнению диффузии. А уже из этих оценок, как простое следствие, в [7] выводилась оценка погрешности усреднения в L^∞-норме, и эта оценка имела операторный смысл. Позже в [10] было показано, что из оценок для фундаментального решения, установленных в [7], вытекает не только L^∞-оценка усреднения, но и аналогичные оценки в L^s-нормах для любого $1 \leqslant s \leqslant \infty$ с единой константой в правой части, а именно,

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\|h\|_{L^s(\mathbb{R}^d)}, \quad C = \mathrm{const}(d,\lambda). \tag{1.6}$$

Здесь $u^\varepsilon(x,t)$ и $u(x,t)$ — решения задач (1.3) и (1.4) с однородным уравнением и симметричной матрицей коэффициентов $a(y)$. Запишем решения через операторные экспоненты:

$$u^\varepsilon(x,t) = \exp(-tA_\varepsilon)h(x), \quad u(x,t) = \exp(-tA_0)h(x).$$

Тогда из (1.6) при $s = 2$ получаем оценку в L^2-операторной норме

$$\forall t > 0 \quad \|\exp(-tA_\varepsilon) - \exp(-tA_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}, \quad C = \mathrm{const}(d,\lambda). \tag{1.7}$$

Отсюда (поскольку резольвента есть преобразование Лапласа от полугруппы) вытекает оценка для разности резольвент

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (A_0 + 1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon, \quad c = \mathrm{const}(d,\lambda). \tag{1.8}$$

Этот вывод дан в [10].

Повышенный интерес к операторным оценкам типа (1.7) и (1.8) возник в нулевые годы после появления работы [3] М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной, давшей новый толчок спектральному направлению в теории усреднения. В [3] с помощью предложенного авторами теоретико-операторного подхода доказаны L^2-операторные оценки усреднения типа (1.8) для широкого класса самосопряженных матричных эллиптических операторов. Как продолжение этой деятельности, в последующие годы Т. А. Суслиной и её учениками изучены различные аспекты параболического усреднения, связанные с операторными оценками для экспонент операторов из класса, введенного в [3] (см., например, [5, 6, 11, 12, 19, 23, 24, 36, 37]). В частности, в [19] (см. также подробную версию [36]) впервые установлена L^2-оценка типа (1.7). В последние годы много интересных результатов в параболическом усреднении получено китайскими коллегами. Особо надо отметить их исследования для операторов с коэффициентами, зависящими от времени (см., например, [21, 22, 25] и указанную там библиографию).

1.2. Данная публикация продолжает линию работ, идущую от [8, 38], где были сформулированы основные идеи так называемого *метода сдвига* (иначе этот подход можно назвать модифицированным методом первого приближения, что отражает его близость по духу к анзацу Бахвалова [1]) для получения операторных оценок усреднения. В этой серии среди работ [13, 17, 27, 39], посвященных параболическому усреднению, выделим статью [39], где для задачи Коши с однородным уравнением (т. е. $f = 0$ в (1.3)) и симметричной матрицей $a(y)$ доказана оценка

$$\|u^\varepsilon - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant c_0\varepsilon^2(\ln(T+1) + 2\ln(1/\varepsilon))\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{1.9}$$

с константой c_0, зависящей лишь от размерности d и константы λ из условия (1.2). Оценка (1.9) получалась как следствие (интегрированием по $t \in (0,T)$) из L^2-оценки по сечениям $t = \mathrm{const}$

$$\forall t > 0 \quad \|u^\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_0\frac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon^2}\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad c = \mathrm{const}(d,\lambda), \tag{1.10}$$

которая впервые в [39] была доказана не спектральным методом, основанным на блоховском разложении фундаментального решения или операторной экспоненты, а методом сдвига.

Теперь нас интересует противоположная ситуация. Пусть, в отличие от [39], уравнение в (1.3) неоднородное, а однородно данное Коши, т. е. $h = 0$, но f — ненулевая функция, более точно $f \in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. Кроме того, пусть матрица коэффициентов $a(y)$ необязательно несимметрична. Наша цель — указать в этих условиях приближение для решения u^ε сначала в норме $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ с точностью порядка ε, а уже потом, опираясь на этот результат, найти приближение в норме $L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ с точностью порядка ε^2. В итоге придём к оценкам

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \tag{1.11}$$

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \tag{1.12}$$

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon\tilde{U}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\varepsilon^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{1.13}$$

Здесь и всюду далее (если не оговорено специально) обозначаем через C константу, зависящую лишь от d, T и постоянной λ из условия (1.2). В оценках (1.11) и (1.13) появляются дополняющие нулевое приближение $u(x,t)$ двухмасштабные корректоры $U^\varepsilon(x,t)$ и $\tilde{U}^\varepsilon(x,t)$, зависящие от медленной и быстрой переменных x и x/ε, которые, вообще говоря, нельзя отбросить. Точный вид корректоров описан в теореме 4.1. При этом корректор U^ε входит составной частью в $\tilde{U}^\varepsilon$ и для него верны оценки

$$\begin{gathered}\|U^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))},\\ \|\varepsilon\nabla U^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Поскольку $\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)))} = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$, неравенство (1.12) легко выводится из (1.11) в силу оценки $(1.14)_1$. Построение на основе оценки (1.11) аппроксимации $u + \varepsilon\tilde{U}^\varepsilon$ для решения u^ε с указанной в (1.13) погрешностью не столь очевидно. Этому посвящена существенная часть данной статьи, а именно, раздел 4. Лежащая в основе наших построений оценка (1.11) доказана в разделе 3. В разделе 2 введены вспомогательные задачи на ячейке. В разделе 5 приведены свойства сглаживания, которые использованы в доказательствах. Раздел 6 посвящен некоторым замечаниям, прямо не связанным с доказательством основных результатов; в частности, обсуждаются возможные обобщения основных результатов.

1.3. Оценки (1.11)–(1.13) с указанными в них приближениями не являются совершенно новыми и уже приводились ранее в определенных вариантах и контекстах. Например, в работе [36] дана оценка типа (1.12), но с логарифмическим дефектом в мажоранте, т. е. с мажорантой порядка $\varepsilon\ \ln^{1/2}(1/\varepsilon)$, как в (1.9). Оценка типа (1.11) следует из поточечных по t оценок, доказанных в [37], где изучалось неоднородное параболическое уравнение, однако, с несколько более регулярной по t, чем в (1.3), правой частью, а именно, $f \in \mathcal{H}_p(T) := L^p(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ с показателем $p \in (2,\infty]$. При этом мажоранта в оценке оказывается порядка $\varepsilon^{\kappa(p)}$, $0 < \kappa(p) < 1$, если $2 < p < \infty$, и порядка ε, если $p = \infty$. Наконец, улучшенные по сравнению с (1.12) L^2-оценки по слою с учетом корректоров можно извлекать из соответствующих поточечных по t оценок, доказанных в [5]. Но тогда возникает мажоранта меньшего порядка малости по параметру ε, чем в (1.13). При этом наибольшая точность аппроксимации достигается в предположении, что $f \in \mathcal{H}_p(T)$, $p = \infty$. Проведённое здесь сопоставление результатов относится только к самосопряженному случаю, который охвачен в [5, 36, 37].

1.4. Сделаем замечания о методе доказательства и выборе класса функций для правых частей уравнения.

Замечание 1.1. Предложенный в [8, 38] метод сдвига для получения оценок погрешности усреднения позволяет снимать проблемы, связанные с минимальной регулярностью данных задачи, введением дополнительного параметра интегрирования. Это можно осуществить за счет непосредственного сдвига по быстрой переменной в построенном двухмасштабном приближении, как в [8], либо за счет его сглаживания (например, по Стеклову) по медленной переменной, как в [38]. Заметим, что сглаживание можно расценивать как обобщенный сдвиг. В данной статье выбрана версия метода сдвига, использующая сглаживание по Стеклову и его итерации.

Замечание 1.2. Усреднение задачи (1.3) можно рассматривать при более общей правой части в уравнении, например, из пространства $L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))$. Если правая часть вида $f+\operatorname{div}F$, где $f\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ и $F\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))^d$, то для решения задачи Коши с нулевым начальным условием справедлива энергетическая оценка

$$|||u^\varepsilon|||_{0,T}^2 := \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|^2+\int\limits_0^T\|\nabla u^\varepsilon(\cdot,t)\|^2\,dt\leqslant C\int\limits_0^T(\|f(\cdot,t)\|^2+\|F(\cdot,t)\|^2)\,dt. \tag{1.15}$$

Здесь и далее

$$\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

без различия в обозначении для L^2-пространств скалярных и векторных функций. Мы сужаем класс правых частей в задаче (1.3), преследуя цель получить оценки погрешности усреднения прежде всего в норме $|||\cdot|||_{0,T}$, определенной в (1.15). Для этого необходимо иметь несколько повышенную регулярность решения усредненной задачи (1.4), так чтобы $u\in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))$ и $\partial_t u\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$, что обеспечено, если в (1.3) (и, как следствие, в (1.4)) имеем правую часть $f\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ и нулевое начальное условие (см. оценку (2.4)). Такая повышенная регулярность решения усредненной задачи наблюдается и при ненулевом начальном условии, если начальная функция $h\in H^1(\mathbb{R}^d)$, что обыгрывалось в доказательствах [39] как промежуточный момент. В данной статье в основной части эта ситуация не затрагивается.

2. Задачи на ячейке

Введём задачи на ячейке

$$N_j\in\mathcal{W},\quad \operatorname{div}(a(\nabla N_j+e_j))=0,\quad j=1,\dots,d, \tag{2.1}$$

где $e_1,\dots,e_d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{W}=\{\varphi\in H^1_{\rm per}(Y):\langle\varphi\rangle=0\}$ — соболевское пространство периодических функций ($Y=\Big[-\dfrac12,\dfrac12\Big)^d$ — ячейка периодичности) с нулевым средним

$$\langle\varphi\rangle=\int\limits_Y\varphi(y)\,dy.$$

По неравенству Пуанкаре норму в пространстве $\mathcal{W}$ можно задать равенством $\|\varphi\|_{\mathcal{W}}=\langle\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\rangle^{1/2}$. Решения задач (2.1) понимаются в смысле распределений в $\mathbb{R}^d$ или, что эквивалентно, в смысле интегрального тождества по ячейке Y на пробных функциях из $C^\infty_{\rm per}(Y)$. Последнее по замыканию распространяется на все функции из энергетического пространства $\mathcal{W}$, то есть

$$\langle a\nabla N_j\cdot\nabla\varphi\rangle=-\langle ae_j\cdot\nabla\varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{W}.$$

Отсюда легко следует разрешимость задачи (2.1) и оценка

$$\|N_j\|_{\mathcal{W}}\leqslant c,\quad c=\mathrm{const}(\lambda). \tag{2.2}$$

Двоякая точка зрения на уравнение (2.1) переносится и на другие подобные дифференциальные соотношения для периодических функций (например, $(2.6)_1$ и $(2.7)_1$).

Матрица коэффициентов a^0 для оператора (1.5) определяется соотношениями

$$a^0e_j=\langle a(e_j+\nabla N_j)\rangle,\quad j=1,\dots,d, \tag{2.3}$$

и принадлежит классу (1.2).

Ввиду постоянства и эллиптичности матрицы a^0 для решения усредненной задачи (1.4) с нулевым начальным условием (т. е. $h=0$) верна оценка

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))}+\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}\leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{2.4}$$

Введём векторы

$$g_j=a(e_j+\nabla N_j)-a^0e_j,\quad j=1,\dots,d. \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{div} g_j=0,\quad \langle g_j\rangle=0. \tag{2.6}$$

Тогда к векторам g_j применимо следующее утверждение, доказанное в [9].

Лемма 2.1. *Пусть* $g\in L^2_{\mathrm{per}}(Y)^d$, $\langle g\rangle=0$ *и* $\operatorname{div} g=0$. *Тогда найдётся кососимметрическая матрица* $G\in H^1_{\mathrm{per}}(Y)^{d\times d}$ *такая, что* $\langle G\rangle=0$, $\operatorname{Div} G=g$, $\|G\|_{H^1}\leqslant c\|g\|_{L^2}$.

Здесь и далее обозначаем через $\operatorname{Div} G$ дивергенцию от матрицы $G=\{G_{st}\}_{s,t=1}^d$, вычисляемую построчно, так что $\operatorname{Div} G$ есть вектор $\{D_tG_{st}\}_{s=1}^d$. По лемме 2.1 векторам g_j из (2.5), в силу свойств (2.6), сопоставляются кососимметрические матрицы G_j, такие что

$$\operatorname{Div} G_j=g_j,\quad \langle G_j\rangle=0,\quad \|G_j\|_{H^1}\leqslant c\|g_j\|_{L^2},\quad j=1,\dots,d. \tag{2.7}$$

3. О приближении в энергетической норме

Первоначально в качестве приближения к решению исходной задачи (1.3) возьмём двухмасштабную функцию

$$w^\varepsilon(x,t)=u^{,\varepsilon}(x,t)+\varepsilon U^\varepsilon(x,t). \tag{3.1}$$

Здесь

$$u^{,\varepsilon}(x,t)=\Theta^\varepsilon u(x,t) \tag{3.2}$$

есть сглаженное решение $u(x,t)$ усредненной задачи (1.4) с подходящим оператором сглаживания Θ^ε по пространственной переменной x (см. ниже), а корректор строится по формуле

$$U^\varepsilon(x,t)=N(x/\varepsilon)\cdot\nabla u^{,\varepsilon}(x,t)=N_j(x/\varepsilon)D_ju^{,\varepsilon}(x,t), \tag{3.3}$$

где $N_j(y)$, $j=1,\dots,d$ суть решения задач (2.1). Оператор сглаживания Θ^ε должен иметь достаточно регулярное ядро сглаживания. Для определенности возьмём в качестве Θ^ε итерации оператора сглаживания по Стеклову S^ε, а именно, $\Theta^\varepsilon=S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$. Наконец, сам оператор сглаживания S^ε определяется как

$$(S^\varepsilon\varphi)(x)=\int\limits_Y\varphi(x-\varepsilon\omega)\,d\omega,\quad Y=[-1/2,1/2)^d, \tag{3.4}$$

для любой $\varphi\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Присутствие сглаживания в корректоре U^ε (в силу свойств сглаживания, см. лемму 5.1) обеспечивает принадлежность функции w^ε пространству $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ при условии, что решение $u(x,t)$ усредненной задачи (1.4) имеет второй градиент $\nabla^2u\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. Такая повышенная регулярность решения усредненной задачи (1.4) наблюдается, например, в случае нулевого начального условия.

Лемма 3.1.

(i) *Определенная в* (3.1)–(3.3) *функция* w^ε *имеет невязку в уравнении* (1.3) *вида*

$$L_\varepsilon w^\varepsilon-f=f^{,\varepsilon}-f+\varepsilon\operatorname{div} r_\varepsilon+\varepsilon r^0_\varepsilon=:F^\varepsilon, \tag{3.5}$$

где $f^{,\varepsilon}=\Theta^\varepsilon f$ *и* $\Theta^\varepsilon=S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$ *— тройное сглаживание по Стеклову,*

$$r^0_\varepsilon(x,t)=N_j(x/\varepsilon)\partial_tD_ju^{,\varepsilon}(x,t), \tag{3.6}$$

$$r_\varepsilon(x,t)=G_j(x/\varepsilon)\nabla D_ju^{,\varepsilon}(x,t)-a(x/\varepsilon)N_j(x/\varepsilon)\nabla D_ju^{,\varepsilon}(x,t) \tag{3.7}$$

и матрица $G_j(y)$ *та же, что в* (2.7).

(ii) *Для правой части* F^ε *равенства* (3.5) *справедлива оценка*

$$\|F^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))}\leqslant C\varepsilon(\|\nabla^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}+\|\partial_tu\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}+\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}) \tag{3.8}$$

с константой $C=\mathrm{const}(d,T,\lambda)$. *Здесь* T *можно заменить на любое* $\tau\in(0,T)$.

Доказательство. Далее для 1-периодической функции $b(y)$ используем обозначение
$$b^\varepsilon(x) := b(x/\varepsilon). \tag{3.9}$$
Например, $N_j^\varepsilon(x) = N_j(x/\varepsilon)$, $(a\nabla N_j)^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)(\nabla N_j)(x/\varepsilon)$ и т. д.

(i) Проведём простые вычисления:
$$\nabla w^\varepsilon = \nabla u^{,\varepsilon} + (\nabla N_j)^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon} + \varepsilon N_j^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon}, \tag{3.10}$$
$$\begin{aligned} a^\varepsilon(\nabla u^{,\varepsilon} + (\nabla N_j)^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}) = (a(e_j + \nabla N_j))^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon} &\overset{(2.3),\,(2.5)}{=} g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon} + a^0 \nabla u^{,\varepsilon} = \\ &\overset{(2.7)}{=} \mathrm{Div}(\varepsilon G_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}) - \varepsilon G_j^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon} + a^0 \nabla u^{,\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.11}$$
где учли представление $g_j^\varepsilon = \mathrm{Div}(\varepsilon G_j^\varepsilon)$ и правило взятия дивергенции от произведения матрицы G на скаляр φ, а именно, $\mathrm{Div}(G\varphi) = \varphi \mathrm{Div}\, G + G\nabla\varphi$. Вектор $\mathrm{Div}(\varepsilon G_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon})$ соленоидален в силу кососимметричности матрицы G_j^ε. Тогда, учитывая структуру операторов L_ε и L_0, имеем
$$\begin{aligned} L_\varepsilon w^\varepsilon - f = L_\varepsilon w^\varepsilon - L_0 u^{,\varepsilon} + (f^{,\varepsilon} - f) = (\partial_t + A_\varepsilon)(u^{,\varepsilon} + \varepsilon\, U^\varepsilon) - (\partial_t + A_0) u^{,\varepsilon} + (f^{,\varepsilon} - f) = \\ = A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon\, U^\varepsilon) - A_0 u^{,\varepsilon} + \varepsilon \partial_t U^\varepsilon + (f^{,\varepsilon} - f) = \\ = -\mathrm{div}(\varepsilon (a N_j)^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon} - \varepsilon G_j^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon}) + \varepsilon N_j^\varepsilon \partial_t D_j u^{,\varepsilon} + (f^{,\varepsilon} - f), \end{aligned}$$
и указанное в (3.5)–(3.7) представление получено.

(ii) Справедливы оценки
$$\begin{aligned} \|r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} &\leqslant C \|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))}, \\ \|r_\varepsilon^0\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} &\leqslant C \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))}. \end{aligned} \tag{3.12}$$
В самом деле, доказывая оценку $(3.12)_1$, используем лемму 5.1, а также энергетические неравенства для решений $N_j(y)$ и $G_j(y)$ периодических задач (см. (2.2) и (2.7)). Чтобы доказать оценку $(3.12)_2$, используем лемму 5.2, считая $\varphi = \varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon \Phi$ и $\Phi = \partial_t D_j u = D_j(\partial_t u)$. По лемме 5.5
$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \overset{(5.10)}{\leqslant} \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))}. \tag{3.13}$$
Отсюда ввиду (5.4) (учитывая $\langle N_j \rangle = 0$) имеем
$$\|N_j^\varepsilon S^\varepsilon \varphi\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leqslant \varepsilon \langle |N_j|^2 \rangle^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \overset{(2.2),\ (3.13)}{\leqslant} \varepsilon C \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))},$$
что обеспечивает $(3.12)_2$, так как
$$\varepsilon r_\varepsilon^0 = \varepsilon N_j^\varepsilon \partial_t D_j u^{,\varepsilon} \overset{(3.2)}{=} \varepsilon N_j^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon \partial_t D_j u = N_j^\varepsilon S^\varepsilon(\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon D_j(\partial_t u)) = N_j^\varepsilon S^\varepsilon \varphi.$$
Наконец, используя оценку типа (5.3) для сглаживания Θ^ε, получаем
$$\|f^{,\varepsilon} - f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))}, \tag{3.14}$$
что вместе с (3.12) даёт оценку (3.8). □

Замечание 3.1. Наряду с (3.14) имеем следующее соотношение:
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (f^{,\varepsilon} - f)\psi\, dx\, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(\psi^{,\varepsilon} - \psi)\, dx\, dt$$
и, значит,
$$\int_0^T \langle (f^{,\varepsilon} - f), \psi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)} dt \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))} \|\nabla\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \quad \forall \psi \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)).$$
Аналогично можно уточнить оценку $(3.12)_2$, анализируя применение леммы 5.2 для её доказательства, а именно,
$$\int_0^T \langle \varepsilon r_\varepsilon^0, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)} dt \leqslant C\varepsilon \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))} \|\nabla\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \quad \forall \psi \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)).$$

Лемма 3.2. *Пусть* u^ε *— решение задачи* (1.3), *а* w^ε *определена в* (3.1)-(3.2). *Тогда*

$$\forall \tau \in (0,T) \quad \int_0^\tau \langle (\partial_t + A_\varepsilon)(u^\varepsilon - w^\varepsilon), \psi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)} dt \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon (\|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,\tau))} + \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,\tau))} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,\tau))}) \|\nabla\psi\|_{L^2(0,\tau;L^2(\mathbb{R}^d))} \tag{3.15}$$

для любой $\psi \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ *с константой* $C = \mathrm{const}(d,T,\lambda)$.

Доказательство. Заметим, что

$$(\partial_t + A_\varepsilon)(u^\varepsilon - w^\varepsilon) = L_\varepsilon u^\varepsilon - L_\varepsilon w^\varepsilon \overset{(1.3)}{=} f - L_\varepsilon w^\varepsilon \overset{(3.5)}{=} -F^\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая структуру F^ε (см. (3.5)–(3.7)), оценку (3.8) и её уточнение в замечании 3.1, получаем (3.15). □

Теорема 3.1. *Пусть* u^ε *— решение задачи* (1.3) *с нулевым начальным данным* (*т. е.* $h = 0$), *а* w^ε *определена в* (3.1)-(3.2). *Тогда для разности* $z^\varepsilon := u^\varepsilon - w^\varepsilon$ *верна оценка в энергетической норме*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 dt \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \quad C = \mathrm{const}(d,T,\lambda). \tag{3.16}$$

Доказательство. Полагая в (3.15) $\psi = z^\varepsilon$, легко вывести (3.16), поскольку

$$\int_0^\tau \langle A_\varepsilon z^\varepsilon(\cdot,t), z^\varepsilon(\cdot,t)\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)} dt = \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} a^\varepsilon(x)\nabla z^\varepsilon(x,t)\cdot\nabla z^\varepsilon(x,t) dx\, dt \tag{3.17}$$

и

$$2\int_0^\tau \langle \partial_t z^\varepsilon(\cdot,t), z^\varepsilon(\cdot,t)\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)} dt = \|z^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 - \|z^\varepsilon(\cdot,0)\|^2 = \|z^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2. \tag{3.18}$$

На последнем шаге в (3.18) учли, что $u^\varepsilon(\cdot,0) = w^\varepsilon(\cdot,0) = 0$ в силу нулевого данного Коши в задачах (1.3) и (1.4). □

Замечание 3.2. В условиях теоремы 3.1 из неравенства (3.15) при $\psi = z^\varepsilon = u^\varepsilon - w^\varepsilon$, учитывая (3.17) и (3.18), можно получить также оценку

$$\|u^\varepsilon - w^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \quad C = \mathrm{const}(d,T,\lambda). \tag{3.19}$$

Видим, что в этой L^2-оценке при фиксированном $T > 0$ мажоранта имеет больший порядок малости по отношению к $\varepsilon \to 0$, нежели в (1.9).

Замечание 3.3. В силу свойств сглаживания, неравенства (3.16) и (3.19) останутся в силе, если в аппроксимации w^ε первое слагаемое $u^{\cdot\varepsilon}$ заменить на u (т. е. снять в нём сглаживание).

Замечание 3.4. Анализируя преобразования в (3.11), видим, что есть другое представление члена r_ε из (3.7), удобное для дальнейшего. Оно получается, если, не переходя к матричным потенциалам G_j для векторов g_j, удовлетвориться равенством

$$r_\varepsilon(x,t) = -\varepsilon^{-1} g_j(x/\varepsilon) D_j u^{\cdot\varepsilon}(x,t) - a(x/\varepsilon) N_j(x/\varepsilon) \nabla D_j u^{\cdot\varepsilon}(x,t) \tag{3.20}$$

4. О приближении в L^2-норме

4.1. Далее рассматриваем задачу (1.3) с нулевым начальным условием, т. е.

$$\begin{aligned} (\partial_t + A_\varepsilon)u^\varepsilon &= f \qquad \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u^\varepsilon &= 0 \qquad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $f \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$. Введём сопряженную к ней задачу

$$\begin{aligned} (-\partial_t + A^*_\varepsilon)v^\varepsilon &= h \qquad \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ v^\varepsilon &= 0 \qquad \text{при } t = T, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $h \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ и оператор $A^*_\varepsilon = -\mathrm{div}(a^*(x/\varepsilon)\nabla)$ имеет матрицу $a^*(y)$, сопряженную к $a(y)$, т. е. $a^*_{ij}(y) = a_{ji}(y)$. Известно, что усредненной для (4.2) будет задача

$$\begin{aligned} (-\partial_t + A^*_0)v = h \qquad & \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ v = 0 \qquad & \text{при } t = T, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $A^*_0 = -\mathrm{div}((a^0)^*\nabla)$ имеет матрицу, сопряженную к усредненной матрице a^0 из (1.5). Справедлива оценка

$$\|v\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} + \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{4.4}$$

Для решения $v^\varepsilon(x,t)$ аналогом приближения (3.1) будет

$$\begin{aligned} v^{,\varepsilon}(x,t) + \varepsilon V^\varepsilon(x,t), \qquad & \text{где } v^{,\varepsilon}(x,t) = \Theta^\varepsilon v(x,t), \\ V^\varepsilon(x,t) = \tilde{N}(x/\varepsilon)\cdot\nabla v^{,\varepsilon}(x,t) = \tilde{N}_j(x/\varepsilon)&D_j v^{,\varepsilon}(x,t), \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\Theta^\varepsilon = S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$ — тройное сглаживание по Стеклову и $\tilde{N}_j(y)$ суть решения сопряженных задач на ячейке (аналоги задач (2.1) с сопряженной матрицей $a^*(y)$).

Справедлива оценка, аналогичная (3.16), если в ней положить $z^\varepsilon = v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon$, из которой, в частности, выводим

$$\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \quad C = \mathrm{const}(d,T,\lambda). \tag{4.6}$$

4.2. Будем использовать следующие упрощенные обозначения:

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \quad (\cdot,\cdot)_T = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}.$$

Наша цель — найти для аппроксимации из оценки (3.19) дополнительные корректоры, чтобы добиться погрешности приближения в норме $\|\cdot\|_T$ порядка ε^2. Для этого изучим форму

$$I := (u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon, h)_T \tag{4.7}$$

с произвольной $h \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, сопоставляя h решение v^ε задачи (4.2). Тогда

$$\begin{aligned} (u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon, h)_T &= (u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon, (-\partial_t + A^*_\varepsilon)v^\varepsilon)_T = \\ = ((\partial_t + A_\varepsilon)(u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon)_T &= (f - (\partial_t + A_\varepsilon)(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon)_T = \\ \overset{(3.5)}{=} (-F^\varepsilon, v^\varepsilon)_T &\overset{(4.5)}{=} (-F^\varepsilon, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon)_T + (-F^\varepsilon, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T, \end{aligned}$$

где

$$|(-F^\varepsilon, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon)_T| \leqslant C\|F^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))}\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2\|f\|_T\|h\|_T$$

в силу (3.8), (2.4) и (4.6). Таким образом, форма (4.7) имеет представление

$$I \simeq (-F^\varepsilon, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T. \tag{4.8}$$

Здесь и далее знак «$\simeq$» обозначает приближенное равенство, полученное из точного равенства отбрасыванием слагаемых I_j, допускающих оценку

$$|I_j| \leqslant C\varepsilon^2\|f\|_T\|h\|_T;$$

сами такие слагаемые называем *несущественными.*

Учитывая структуру F^ε, указанную в (3.5), можно записать

$$I \overset{(4.8)}{\simeq} \varepsilon(r_\varepsilon, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon))_T - \varepsilon(r^0_\varepsilon, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T + (f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T := I_1 + I_2 + I_3, \tag{4.9}$$

где каждую из форм I_j надлежит проанализировать.

1°. Учитывая выражение (3.20), имеем

$$I_1 := \varepsilon(r_\varepsilon, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon))_T = -(g^\varepsilon_j D_j u^{,\varepsilon} + \varepsilon a^\varepsilon N^\varepsilon_j \nabla D_j u^{,\varepsilon}, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon))_T,$$

где использовали обозначение (3.9) для ε-периодических функций. Вычисления, подобные (3.10)-(3.11), дают

$$\nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon) \overset{(4.5)}{=} \nabla v^{,\varepsilon} + (\nabla\tilde{N}_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon} + \varepsilon\tilde{N}^\varepsilon_k \nabla D_k v^{,\varepsilon} = (e_k + \nabla\tilde{N}_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon} + \varepsilon\tilde{N}^\varepsilon_k \nabla D_k v^{,\varepsilon}$$

и, значит,

$$
\begin{aligned}
-I_1 = (g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}, (e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T + \varepsilon(g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}, \tilde N_k^\varepsilon \nabla D_k v^{,\varepsilon})_T +\\
+\varepsilon(a^\varepsilon N_j^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon}, (e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T + \varepsilon^2(a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, \tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon})_T.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

По лемме 5.1 имеем

$$
(a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, \tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon})_T \leqslant \|a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}\|_T\|\tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon}\|_T \leqslant C\|\nabla^2 u\|_T\|\nabla^2 v\|_T,
$$

если учесть условие (1.2), неравенство (2.2) и его аналог для $\tilde N_k$. Отсюда в силу (2.4) и (4.4) получаем несущественность последней формы в (4.10). Кроме того, аналогичные соображения по лемме 5.3 дают

$$
(g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}, (e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T \simeq 0,
$$

так как $\langle g_j\cdot(e_k+\nabla\tilde N_k)\rangle = 0$ по свойствам векторов g_j (см. (2.6)) и $D_j u, D_k v\in L^2(0,T;H^1(\mathbb R^d))$; а по лемме 5.4

$$
\varepsilon(g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}, \tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon})_T \simeq \varepsilon(D_j\varphi, \langle\tilde N_k g_j\rangle\cdot\nabla D_k\psi)_T \overset{(5.2)}{\simeq} \varepsilon(D_j u, \langle\tilde N_k g_j\rangle\cdot\nabla D_k v)_T,
$$

где $\varphi = S^\varepsilon S^\varepsilon u$ и $\psi = S^\varepsilon S^\varepsilon v$. Подобным образом после некоторых преобразований, основанных на соотношениях

$$
a^*(e_k+\nabla\tilde N_k) = \tilde g_k + (a^0)^* e_k, \quad k=1,\dots,d,
$$

аналогичных (2.5), получаем также представление

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, (e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T &= \varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, a^{*\varepsilon}(e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T =\\
&= \varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, \tilde g_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T + \varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, (a^0)^* e_k D_k v^{,\varepsilon})_T \simeq\\
&\simeq \varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, \tilde g_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T \overset{(5.8),\,(5.2)}{\simeq} \varepsilon(\langle\tilde g_k N_j\rangle\nabla D_j u, D_k v)_T,
\end{aligned}
$$

где на предпоследнем шаге отброшено слагаемое $\varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}, (a^0)^* e_k D_k v^{,\varepsilon})_T \simeq 0$ — его несущественность показываем по лемме 5.2 с учетом того, что $\langle N_j\rangle = 0$.

В итоге после анализа всех слагаемых в (4.10) имеем представление

$$
-I_1 \simeq \varepsilon(D_j u, \langle\tilde N_k g_j\rangle\cdot\nabla D_k v)_T + \varepsilon(\langle\tilde g_k N_j\rangle\cdot\nabla D_j u, D_k v)_T. \tag{4.11}
$$

2°. Учитывая выражение (3.6), имеем

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= -\varepsilon(r_\varepsilon^0, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T = -\varepsilon(N_j^\varepsilon\partial_t D_j u^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon}+\varepsilon V^\varepsilon)_T =\\
&\overset{(4.5)}{=} \varepsilon(D_j u^{,\varepsilon}, N_j^\varepsilon\partial_t v^{,\varepsilon})_T - \varepsilon^2(N_j^\varepsilon(D_j\partial_t u^{,\varepsilon}), \tilde N_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

где, интегрируя по частям по переменной t, используем независимость N_j от t, а также нулевые данные Коши: $u(x,0)=0$ и $v(x,T)=0$. Покажем несущественность обоих слагаемых в полученном представлении.

По лемме 5.2

$$
\varepsilon(D_j u^{,\varepsilon}, N_j^\varepsilon\partial_t v^{,\varepsilon})_T \simeq 0, \tag{4.13}
$$

так как $\langle N_j\rangle = 0$, $\partial_t v\in L^2(\mathbb R^d\times(0,T))$, $D_j u\in L^2(0,T;H^1(\mathbb R^d))$ и есть необходимое присутствие сглаживания.

По лемме 5.6 (полагая $\varphi = \partial_t u\in L^2(\mathbb R^d\times(0,T))$ и $\psi = (S^\varepsilon)^2 D_k v\in L^2(0,T;H^1(\mathbb R^d))$) без суммирования по повторяющимся индексам имеем

$$
\begin{aligned}
&|\varepsilon^2(N_j^\varepsilon(D_j\partial_t u^{,\varepsilon}), \tilde N_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T - \varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2 D_j\varphi,\psi)_T| \leqslant\\
&\overset{(5.12)}{\leqslant} C\varepsilon^2\langle|N_j|^2\rangle^{1/2}\langle|\tilde N_k|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|_T\|\nabla\psi\|_T \leqslant C\varepsilon^2\|\partial_t u\|_T\|\nabla^2 v\|_T,
\end{aligned}
$$

где мажоранта представляет собой несущественный член ввиду оценок (2.4) и (4.4) для решений усредненных задач и оценок для решений задач на ячейке типа (2.2). Поэтому

$$
\begin{aligned}
I_2 \overset{(4.12),\,(4.13)}{\simeq} -\varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2 D_j\varphi,\psi)_T &= \varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2\varphi, D_j\psi)_T =\\
&= \varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2\partial_t u, D_j D_k v)_T \simeq 0,
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

где под конец вспомнили выражения φ и ψ через u и v, а также снова учли оценки для решений усредненных задач и задач на ячейке.

3°. Покажем, что

$$I_3 := (f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T = (f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon})_T + \varepsilon(f, V^\varepsilon)_T - \varepsilon(f^{,\varepsilon}, V^\varepsilon)_T \simeq \simeq \varepsilon(f, V^\varepsilon)_T \overset{(4.5)}{=} \varepsilon(f, \tilde{N}^\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon})_T. \tag{4.15}$$

В самом деле, вспоминая, что $f^{,\varepsilon} = \Theta^\varepsilon f$, имеем

$$(f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon})_T = (f, v^{,\varepsilon} - \Theta^\varepsilon v^{,\varepsilon})_T \overset{(5.6),\ (5.1)}{\leqslant} C\varepsilon^2 \|f\|_T \|\nabla^2 v\|_T \overset{(4.4)}{\leqslant} C\varepsilon^2 \|f\|_T \|h\|_T.$$

Следовательно, $(f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon})_T \simeq 0$. Кроме того, по лемме 5.2

$$\varepsilon(f^{,\varepsilon}, V^\varepsilon)_T \overset{(4.5)}{=} \varepsilon(f^{,\varepsilon}, \tilde{N}^\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon})_T \simeq 0.$$

4.3. Подведём итоги. Из (4.7), (4.9), (4.11), (4.14) и (4.15) следует, что имеет место равенство

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h)_T \simeq \varepsilon(f, V^\varepsilon)_T - \varepsilon(D_j u, \langle \tilde{N}_k g_j \rangle \cdot \nabla D_k v)_T - \varepsilon(\langle \tilde{g}_k N_j \rangle \cdot \nabla D_j u, D_k v)_T, \tag{4.16}$$

где в форме (4.7) функция $u^{,\varepsilon} = \Theta^\varepsilon u$ заменена на u, что допустимо в силу свойства сглаживания типа (5.6) и оценки (2.4).

Введём разрешающие операторы для задачи (4.1), для её усредненной задачи, а также для задачи (4.3):

$$u^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} f, \quad u = L_0^{-1} f, \quad v = (L_0^*)^{-1} h. \tag{4.17}$$

Введём также корректирующие операторы

$$U^\varepsilon \overset{(3.3)}{=} N^\varepsilon \cdot \Theta^\varepsilon \nabla L_0^{-1} f =: \mathcal{K}_\varepsilon f, \quad V^\varepsilon \overset{(4.5)}{=} \tilde{N}^\varepsilon \cdot \Theta^\varepsilon \nabla (L_0^*)^{-1} h =: \tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon h, \tag{4.18}$$

где участвуют $\Theta^\varepsilon = (S^\varepsilon)^3$ — тройной оператор сглаживания по Стеклову и векторы N, $\tilde{N}$, составленные из решений задач на ячейке (2.1), а также сопряженных к ним задач.

Сумму двух последних слагаемых в (4.16) запишем короче как

$$\varepsilon((\tilde{c}^m_{jk} - c^m_{jk}) D_j D_k D_m u, v)_T = \varepsilon(Bu, v)_T = \varepsilon(B L_0^{-1} f, (L_0^*)^{-1} h)_T = = \varepsilon(L_0^{-1} B L_0^{-1} f, h)_T = \varepsilon(\mathcal{K} f, h)_T, \tag{4.19}$$

где

$$c^m_{jk} = \langle \tilde{N}_k g^m_j \rangle, \quad \tilde{c}^m_{jk} = \langle \tilde{g}^m_k N_j \rangle \tag{4.20}$$

и введён дифференциальный оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$B = (\tilde{c}^m_{jk} - c^m_{jk}) D_j D_k D_m. \tag{4.21}$$

Соотношениями (4.19)–(4.21) определён третий корректирующий оператор $\mathcal{K}$ наряду с двумя другими из (4.18).

Используя введенные выше разрешающие и корректирующие операторы, записываем равенство (4.16) в виде

$$(L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f - \varepsilon (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f - \varepsilon \mathcal{K} f, h)_T \simeq 0,$$

где $(\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^*$ — сопряженный оператор, что по соглашению о знаке «$\simeq$» (см. фрагмент после (4.8)) означает

$$|(L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f - \varepsilon (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f - \varepsilon \mathcal{K} f, h)|_T \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|_T \|h\|_T.$$

Отсюда в силу произвольности $h \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0, T))$ заключаем, что

$$\|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f - \varepsilon (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f - \varepsilon \mathcal{K} f\|_T \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|_T, \tag{4.22}$$

т. е. для решения задачи (4.1) получена искомая аппроксимация $u + \varepsilon \tilde{U}^\varepsilon$ с оценкой (1.13), где корректор имеет трехчастную структуру $\tilde{U}^\varepsilon = \mathcal{K}_\varepsilon f + (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f + \mathcal{K} f$. В тех же терминах основной результат раздела 3 формулируется в виде оценок (см. теорему 3.1 и замечание 3.2)

$$\|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f\|_T \leqslant C\varepsilon \|f\|_T, \tag{4.23}$$

$$\|\nabla (L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f)\|_T \leqslant C\varepsilon \|f\|_T. \tag{4.24}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $u^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} f$, $u = L_0^{-1} f$ *— решения задачи Коши* (4.1) *и соответствующей усредненной задачи. Пусть корректирующие операторы* $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon$ *определены в* (4.18), *а корректирующий оператор* $\mathcal{K}$ *— в* (4.19)–(4.21), *при этом в соотношениях* (4.18) *и* (4.20) *участвуют решения* N_j, $\tilde{N}_k$ *задачи на ячейке* (2.1) *и сопряженной к ней, а также их производные — вектор-функции* g_j, $\tilde{g}_k$, *определённые равенствами типа* (2.5).

Тогда имеют место оценки (4.23), (4.24) *и* (4.22) *в* L^2*-норме* $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$ *по слою* $\mathbb{R}^d \times (0,T)$. *Константы в правых частях оценок зависят от размерности* d, *ширины слоя* T *и постоянной эллиптичности* λ *из условия* (1.2).

Замечание 4.1. В случае, когда матрица коэффициентов $a(y)$ симметрична, оператор B из (4.21) равен нулю, так как $c_{jk}^m = \tilde{c}_{jk}^m$ (соответствующее вычисление проведено, например, в [29] или [32]). Как следствие, в силу (4.19) корректор $\mathcal{K}$ равен нулю и указанная в (4.22) L^2-аппроксимация для решения $u^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} f$ упрощается. Подобное наблюдение в эллиптической теории сделано раньше в [4] и связано в полной мере с тремя факторами: уравнение скалярное, притом с матрицей коэффициентов вещественной и симметричной. Таким образом, это эффект «скалярного вещественного самосопряженного» случая.

5. О сглаживании

Для упрощения формул обозначаем норму и скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}^d)$, не различая пространства скалярных и векторных функций, как

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

5.1. Сглаживание по Стеклову. Для сглаживания по Стеклову (см. определение (3.4)) приведём сначала наиболее простые и известные свойства:

$$\|S^\varepsilon\varphi\| \leqslant \|\varphi\|, \tag{5.1}$$

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\| \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon\|\nabla\varphi\| \quad \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d) \tag{5.2}$$

и как следствие по двойственности

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon\|\varphi\| \quad \forall\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{5.3}$$

Отметим также очевидное свойство $S^\varepsilon(\nabla\varphi) = \nabla(S^\varepsilon\varphi)$, которое систематически используется.

В нашем методе ключевыми оказываются следующие свойства сглаживания, доказанные, например, в [10, 38].

Лемма 5.1. *Если* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $b \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$ *и* $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, *то* $b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$\|b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi\| \leqslant \langle|b|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|. \tag{5.4}$$

Лемма 5.2. *Если* $b \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $\langle b\rangle = 0$, $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *и* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$|(b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \psi)| \leqslant C\varepsilon\langle|b|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.5}$$

Приведённые выше оценки малости уточняются в условиях большей регулярности. В отношении (5.2) имеем уточнение

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\| \leqslant C\varepsilon^2\|\nabla^2\varphi\| \quad \forall\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d), \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.6}$$

Оценка (5.5) имеет следующее обобщение и уточнение.

Лемма 5.3. *Если* $\alpha, \beta \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $\langle\alpha\beta\rangle = 0$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$ *и* $\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi)| \leqslant C\varepsilon^2\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\nabla\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.7}$$

Ослабим условия на периодические функции в предыдущих леммах, не требуя равенства нулю для средних.

Лемма 5.4. *Если* $\alpha, \beta \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$ *и* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle(\varphi,\psi)| \leqslant C\varepsilon\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.8}$$

Доказательство свойств (5.7), (5.8) можно найти в [14, 29, 30, 32].

5.2. Сглаживание с произвольным ядром. Рассмотрим оператор сглаживания

$$\Theta^\varepsilon \varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - \varepsilon\omega)\theta(\omega)\, d\omega. \tag{5.9}$$

Пусть ядро сглаживания $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет компактный носитель, $\theta \geqslant 0$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \theta(x)dx = 1$.

Оценки (5.1)–(5.4), сформулированные для оператора сглаживания Стеклова, остаются в силе для общего оператора сглаживания (5.9) с единственной оговоркой, что в правой части появятся константы, зависящие не только от размерности d, но и от ядра θ. Если ядро θ четно, то сглаживание Θ^ε обладает также свойством типа (5.6).

Следующие свойства оператора (5.9) или их аналоги отмечены в [26, 30].

Лемма 5.5. *Пусть ядро сглаживания θ есть липшицева функция, и пусть $b \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon)$ и $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда*

$$\|\Theta^\varepsilon \nabla\varphi\| \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\varphi\|, \quad C = \mathrm{const}(\theta, d), \tag{5.10}$$

$$\|b_\varepsilon \Theta^\varepsilon \nabla\varphi\| \leqslant C\varepsilon^{-1}\langle |b|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|, \quad C = \mathrm{const}(\theta, d). \tag{5.11}$$

5.3. Итерации сглаживания по Стеклову. Очевидно, что оператор сглаживания Стеклова S^ε задаётся по формуле (5.9) с ядром сглаживания — характеристической функцией $\theta_1(x)$ куба $Y = [-1/2, 1/2)^d$. Двойное сглаживание по Стеклову $(S^\varepsilon)^2 = S^\varepsilon S^\varepsilon$ есть оператор вида (5.9) с ядром сглаживания, равным свёртке $\theta_2 = \theta_1 * \theta_1$. Аналогично, тройное сглаживание по Стеклову $(S^\varepsilon)^3 = S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$ есть оператор вида (5.9) с ядром сглаживания, равным свёртке $\theta_3 = \theta_2 * \theta_1$. В [30] ядра θ_2 и θ_3 вычислены. Во-первых, это липшицевы функции и, как следствие, для сглаживания $\Theta^\varepsilon = (S^\varepsilon)^2$ или $\Theta^\varepsilon = (S^\varepsilon)^3$ верны свойства (5.10) и (5.11). Во-вторых, θ_2 и θ_3 — четные функции и поэтому для $(S^\varepsilon)^2$ и $(S^\varepsilon)^3$ справедливо свойства (5.6).

Следствием из лемм 5.4 и 5.5 является ещё одна лемма.

Лемма 5.6. *В условиях леммы* 5.4 *справедлива оценка*

$$|(\alpha_\varepsilon (S^\varepsilon)^3 D_i\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle((S^\varepsilon)^2 D_i\varphi, \psi)| \leqslant C\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\| \tag{5.12}$$

для любой обобщенной производной $D_i\varphi$, $1 \leqslant i \leqslant d$, с константой $C = \mathrm{const}(d)$.

Доказательство. Эта лемма доказана в [15], но ввиду важности её при выводе оценок в нашем изложении приведём и здесь её доказательство. По лемме 5.5 обе L^2-формы, стоящие в левой части (5.12), корректно определены и имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$. В самом деле, ядра сглаживания для операторов $(S^\varepsilon)^3$ и $(S^\varepsilon)^2$ липшицевы и, как следствие, в обоих случаях сглаживание обобщенной производной $D_i\varphi$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^d)$ с оценкой L^2-нормы в силу (5.10). Применяя лемму 5.4 к паре функций $\Phi = \varepsilon(S^\varepsilon)^2 D_i\varphi$ и ψ, запишем

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\Phi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle(\Phi, \psi)| \leqslant C\varepsilon\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\Phi\|\,\|\nabla\psi\|,$$

где $\|\Phi\| = \|\varepsilon(S^\varepsilon)^2 D_i\varphi\| \leqslant C\|\varphi\|$ по лемме 5.5. Подставляя сюда выражение для Φ, имеем

$$|\varepsilon(\alpha_\varepsilon (S^\varepsilon)^3 D_i\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \varepsilon\langle\alpha\beta\rangle((S^\varepsilon)^2 D_i\varphi, \psi)| \leqslant C\varepsilon\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|,$$

что после деления на ε даёт (5.12). Лемма 5.6 доказана. □

6. Некоторые замечания

Замечание 6.1. Рассмотрим задачу (1.3), предполагая $f \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0, T))$ и $h \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда решение усредненной задачи имеет свойства: $u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^d))$ и $\partial_t u \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0, T))$, что было основным условием при выводе оценок из разделов 3 и 4. В оценку (3.16) из теоремы 3.1 надо внести следующие коррективы. Поскольку в этой ситуации функция $z^\varepsilon = u^\varepsilon - w^\varepsilon$ имеет ненулевое данное Коши

$$z^\varepsilon(x, 0) = h(x) - h^{,\varepsilon}(x) - \varepsilon N^\varepsilon(x)\cdot\nabla h^{,\varepsilon}(x), \quad h^{,\varepsilon}(x) = \Theta^\varepsilon h(x),$$

в правой части неравенства (3.18) появится дополнительное слагаемое $\|z^\varepsilon(\cdot, 0)\|^2$, имеющее оценку

$$\|z^\varepsilon(\cdot, 0)\|^2 \leqslant (\|h - h^{,\varepsilon}\|^2 + \varepsilon^2\langle|N|^2\rangle\|\nabla h\|^2) \leqslant C\varepsilon^2\|\nabla h\|^2$$

по свойствам сглаживания. Таким образом, вместо (3.18) получим

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2+\int\limits_0^T\|\nabla z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2dt\leqslant C\varepsilon^2(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}+\|h\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}),\quad C=\mathrm{const}(d,T,\lambda).$$

При ненулевом данном Коши в задаче (1.3) в доказательство оценки типа (4.22) надо внести более существенные коррективы, и здесь мы это не уточняем.

Замечание 6.2. Рассмотрим векторный аналог оператора (1.1) с комплексными коэффициентами. Для этого введём комплекснозначный 1-периодический тензор четвёртого порядка

$$a(y)=\{a^{\alpha\beta}_{jk}(y)\}^{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}_{1\leqslant j,k\leqslant d},$$

действующий как линейный оператор в пространстве $(n\times d)$-матриц. Функции $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^n$ сопоставим $(n\times d)$-матрицу градиента $Du=\{D_ku^\beta\}_{\beta,k}$, где $D=-i\nabla$ ($i^2=-1$), а также $(n\times d)$-матрицу потока $aDu=\{a^{\alpha\beta}_{jk}D_ku^\beta\}_{\alpha,j}$. Здесь и далее подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам: от 1 до d, если индексы латинские, и от 1 до n, если индексы греческие. В пространстве функций $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^n$ действует дифференциальный оператор второго порядка с ε-периодическими комплексными коэффициентами

$$A_\varepsilon u=D^*(a(x/\varepsilon)Du)=\{D_j(a^{\alpha\beta}_{jk}(x/\varepsilon)D_ku^\beta)\}_{1\leqslant\alpha\leqslant n}.\tag{6.1}$$

Относительно тензора $a(y)=\{a^{\alpha\beta}_{jk}(y)\}$ предполагаем условия ограниченности и коэрцитивности

$$\|a^{\alpha\beta}_{jk}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant\lambda_1\quad\forall j,k,\alpha,\beta,\tag{6.2}$$

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{aD}\varphi,\mathrm{D}\varphi)\geqslant\lambda_0\|\mathrm{D}\varphi\|^2\quad\forall\varphi\in\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{d},\mathbb{C}^\mathrm{n})\tag{6.3}$$

с некоторыми константами $\lambda_0,\lambda_1>0$, где $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ суть упрощенные обозначения для скалярного произведения и нормы в пространствах $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{n\times d})$.

Действуя подобно тому, как в скалярном случае, для векторной задачи (4.1) с оператором A_ε из (6.1), удовлетворяющим условиям (6.2) и (6.3), можно получить аппроксимации решения, аналогичные тем, что приведены в теоремах 3.1 и 4.1. Необходимые атрибуты усреднения подробно описаны, например, в [28]. Рассматривая в разделах 1–4 скалярные уравнения, мы специально не опирались на их специфические свойства, не имеющие аналогов в векторном случае. Например, нигде не ссылались на ограниченность решений (в силу принципа максимума) основной задачи на ячейке. Это свойство позволяет на заключительном этапе записать корректоры в (4.22) и (4.24) более простыми без сглаживания. Поскольку подобное упрощение неоднократно проделано (см. [10] или [16]), здесь оно опускается.

Замечание 6.3. Предложенный подход позволяет получить аналог теоремы 4.1 для оператора A_ε с локально периодическими коэффициентами. Приближения резольвенты таких операторов с точностью порядка ε^2 при $\varepsilon\to0$ построены методом сдвига в [31]. Можно говорить о других обобщениях оценок погрешности усреднения из разделов 3 и 4, если перенести результаты по эллиптическим операторам из работ [14,30,32,33] (операторы в перфорированном пространстве, операторы сингулярно возмущенные или с неограниченной матрицей коэффициентов) на параболический случай.

Замечание 6.4. Рассуждения, дающие ключевую для нашего метода оценку (1.11), имеют общее с рассуждениями из [21]: аппроксимируя в L^2-норме по слою решение $u^\varepsilon(x,t)$ вместе с его пространственным градиентом $\nabla u^\varepsilon(x,t)$, строим двухмасштабное разложение типа анзаца Бахвалова [1], но сглаженное по медленной переменной. Однако в конструкции из (1.11) это разложение удаётся брать более коротким за счет привлечения дополнительных свойств сглаживания. Проведённое сопоставление относится только к случаю не зависящих от t коэффициентов, в то время как в [21] охвачен более общий случай, допускающий такую зависимость.

Рассуждения для вывода оценки (1.13) из оценки (1.11) пересекаются с рассуждениями из работ [18,34,35] для доказательства аналогичных оценок с корректорами в эллиптической теории: существенным моментом являются соображения двойственности. Именно в [18, 34] этот приём впервые предложен для получения улучшенных резольвентных L^2-аппроксимаций с остаточным членом порядка ε^2 и применён в частности в локально периодическом усреднении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами// Докл. АН СССР. — 1975. — *221*, № 3. — С. 516–519.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. — М.: Наука, 1984.
3. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 3. — С. 1–108.
4. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 6. — С. 1–104.
5. *Василевская Е. С.* Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора// Алгебра и анализ. — 2009. — *21*, № 1. — С. 3–60.
6. *Василевская Е. С., Суслина Т. А.* Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров// Алгебра и анализ. — 2012. — *24*, № 2. — С. 1–103.
7. *Жиков В. В.* Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 44–50.
8. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 3. — С. 305–308.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 3–98.
11. *Мешкова Ю. М., Суслина Т. А.* Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности// Алгебра и анализ. — 2017. — *29*, № 9. — С. 99–158.
12. *Милослова А. А., Суслина Т. А.* Усреднение параболических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами// Совр. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 1. — С. 130–191.
13. *Пастухова С. Е.* Аппроксимация экспоненты оператора диффузии с многомасштабными коэффициентами// Функц. анализ и его прилож. — 2014. — *48*, № 3. — С. 34–51.
14. *Пастухова С. Е.* L^2-аппроксимации резольвенты эллиптического оператора в перфорированном пространстве// Совр. мат. Фундам. направл. — 2020. — *66*, № 2. — С. 314–334.
15. *Пастухова С. Е.* Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвёртого порядка// Алгебра и анализ. — 2022. — *34*, № 4. — С. 74–106.
16. *Пастухова С. Е.* Об улучшенных аппроксимациях резольвенты в усреднении операторов второго порядка с периодическими коэффициентами// Функц. анализ и его прилож. — 2022. — *56*, № 4. — С. 93–104.
17. *Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н.* Оценки локально периодического и повторного усреднения: параболические уравнения// Докл. РАН. — 2009. — *428*, № 2. — С. 166–170.
18. *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов// Функц. анализ и его прилож. — 2017. — *51*, № 2. — С. 92–96.
19. *Суслина Т. А.* Об усреднении периодических параболических систем// Функц. анализ и его прилож. — 2004. — *38*, № 4. — С. 86–90.
20. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam—New York: North Holland Publishing Co., 1978.
21. *Geng J., Shen Z.* Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients// J. Funct. Anal. — 2017. — *272*. — С. 2092–2113.
22. *Geng J., Shen Z.* Homogenization of parabolic equations with non-self-similar scales// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2020. — *236*, № 8. — С. 145–188.
23. *Meshkova Y.* Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$// J. Evol. Equ. — 2021. — *21*. — С. 763–769.
24. *Meshkova Yu. M., Suslina T. A.* Homogenization of initial boundary value problem for parabolic systems with periodic coefficients// Appl. Anal. — 2016. — *95*, № 8. — С. 1736–1775.
25. *Niu W., Xu Y.* Convergence rates in homogenization of higher-order parabolic systems// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2018. — *38*, № 8. — С. 4203–4229.
26. *Niu W., Yuan Y.* Convergence rate in homogenization of elliptic systems with singular perturbations// J. Math. Phys. — 2019. — *60*. — 111509.

27. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients// Asymptot. Anal. — 2010. — *66*, № 3-4. — C. 207-228.
28. *Pastukhova S. E.* Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2017. — 226, № 4. — C. 445–461.
29. *Pastukhova S. E.* L^2-estimates for homogenization of elliptic operators// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — *244*, № 4. — C. 671–685.
30. *Pastukhova S. E.* Homogenization estimates for singularly perturbed operators// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — *251*, № 5. — C. 724–747.
31. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — C. 818–838.
32. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients// Appl. Anal. — 2022. — *101*, № 13. — C. 4453–4474.
33. *Pastukhova S. E.* L^2-estimates for homogenization of diffusion operators with unbounded nonsymmetric matrices// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2022. — *268*, № 4. — C. 473–492.
34. *Senik N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder// SIAM J. Math. Anal. — 2017. — *49*, № 2. — C. 874–898.
35. *Senik N.* Homogenization for locally periodic elliptic operators// J. Math. Anal. Appl. — 2022. — *505*, № 2. — 125581.
36. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem// В сб.: «Nonlinear equations and spectral theory». — Providence: Am. Math. Soc., 2007. — C. 201–233.
37. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space// Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — *5*, № 4. — C. 390–447.
38. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — C. 515–524.
39. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *12*, № 2. — C. 224–237.

С. Е. Пастухова
МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия
E-mail: pas-se@yandex.ru

UDC 517.97
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151
EDN: FNYJWO

L^2-estimates of error in homogenization of parabolic equations with correctors taken into account

S. E. Pastukhova

MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

We consider second-order parabolic equations with bounded measurable ε-periodic coefficients. To solve the Cauchy problem in the layer $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ with the nonhomogeneous equation, we obtain approximations in the norm $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$ with remainder of order ε^2 as $\varepsilon \to 0$.

Keywords: parabolic equations, homogenization of solutions, homogenization error, corrector

For citation: S. E. Pastukhova, "L^2-estimates of error in homogenization of parabolic equations with correctors taken into account," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 134–151. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151`

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov, "Osrednenie differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsientami" [Homogenization of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **221**, No. 3, 516–519 (in Russian).
2. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Homogenization of Processes in Periodic Media. Mathematical Problems of Mechanics of Composite Materials], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Periodicheskie differentsial'nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva usredneniya" [Periodic second-order differential operators. Threshold properties of homogenization], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 3, 1–108 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Usrednenie periodicheskikh ellipticheskikh differentsial'nykh operatorov s uchetom korrektora" [Homogenization of periodic elliptic differential operators with the account of a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 6, 1–104 (in Russian).
5. E. S. Vasilevskaya, "Usrednenie parabolicheskoy zadachi Koshi s periodicheskimi koeffitsientami pri uchete korrektora" [Homogenization with a corrector for a parabolic Cauchy problem with periodic coefficients], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2009, **21**, No. 1, 3–60 (in Russian).
6. E. S. Vasilevskaya and T. A. Suslina, "Usrednenie parabolicheskikh i ellipticheskikh periodicheskikh operatorov v $L_2(\mathbb{R}^d)$ pri uchete pervogo i vtorogo korrektorov" [Homogenization of parabolic and elliptic periodic operators in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with the first and second correctors taken into account], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2012, **24**, No. 2, 1–103 (in Russian).
7. V. V. Zhikov, "Spectral approach to asymptotic diffusion problems," *Differ. Equ.*, 1989, **25**, No. 1, 33–39.
8. V. V. Zhikov, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305–308 (in Russian).
9. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
10. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 3–98 (in Russian).

11. Yu. M. Meshkova and T. A. Suslina, “Usrednenie pervoy nachal’no-kraevoy zadachi dlya parabolicheskikh sistem: operatornye otsenki pogreshnosti” [Homogenization of the first initial-boundary value problem for parabolic systems: operator error estimates], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2017, **29**, No. 9, 99–158 (in Russian).
12. A. A. Miloslova and T. A. Suslina, “Usrednenie parabolicheskikh uravneniy vysokogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami” [Homogenization of higher-order parabolic equations with periodic coefficients], *Sovr. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 1, 130–191 (in Russian).
13. S. E. Pastukhova, “Approksimatsiya eksponenty operatora diffuzii s mnogomasshtabnymi koeffitsientami” [Approximation of the exponent of the diffusion operator with multiscale coefficients], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2014, **48**, No. 3, 34–51 (in Russian).
14. S. E. Pastukhova, “L^2-approksimatsii rezol’venty ellipticheskogo operatora v perforirovannom prostranstve” [Resolvent approximations in L^2-norm for elliptic operators acting in a perforated space], *Sovr. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2020, **66**, No. 2, 314–334 (in Russian).
15. S. E. Pastukhova, “Uluchshennye L^2-approksimatsii rezol’venty v usrednenii operatorov chetvertogo poryadka” [Improved L^2-approximations of the resolvent in homogenization of fourth-order operators], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2022, **34**, No. 4, 74–106 (in Russian).
16. S. E. Pastukhova, “Ob uluchshennykh approksimatsiyakh rezol’venty v usrednenii operatorov vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami” [Improved resolvent approximations in homogenization of second order operators with periodic coefficients], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2022, **56**, No. 4, 93–104 (in Russian).
17. S. E. Pastukhova and R. N. Tikhomirov , “Otsenki lokal’no periodicheskogo i povtornogo usredneniya: parabolicheskie uravneniya” [Estimates of locally periodic and reiterated homogenization for parabolic equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **428**, No. 2, 166–170 (in Russian).
18. N. N. Senik, “Ob usrednenii nesamosopryazhennykh lokal’no periodicheskikh ellipticheskikh operatorov” [On homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2017, **51**, No. 2, 92–96 (in Russian).
19. T. A. Suslina, “On homogenization of periodic parabolic systems,” *Funct. Anal. Appl.*, 2004, **38**, No. 4, 309–312.
20. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland Publishing Co., Amsterdam—New York, 1978.
21. J. Geng and Z. Shen, “Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients,” *J. Funct. Anal.*, 2017, **272**, 2092–2113.
22. J. Geng and Z. Shen, “Homogenization of parabolic equations with non-self-similar scales,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2020, **236**, No. 8, 145–188.
23. Y. Meshkova, “Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$,” *J. Evol. Equ.*, 2021, **21**, 763–769.
24. Yu. M. Meshkova and T. A. Suslina, “Homogenization of initial boundary value problem for parabolic systems with periodic coefficients,” *Appl. Anal.*, 2016, **95**, No. 8, 1736–1775.
25. W. Niu and Y. Xu, “Convergence rates in homogenization of higher-order parabolic systems,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, **38**, No. 8, 4203–4229.
26. W. Niu and Y. Yuan, “Convergence rate in homogenization of elliptic systems with singular perturbations,” *J. Math. Phys.*, 2019, **60**, 111509.
27. S. E. Pastukhova, “Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients,” *Asymptot. Anal.*, 2010, **66**, No. 3-4, 207-228.
28. S. E. Pastukhova, “Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2017, 226, No. 4, 445–461.
29. S. E. Pastukhova, “L^2-estimates for homogenization of elliptic operators,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **244**, No. 4, 671–685.
30. S. E. Pastukhova, “Homogenization estimates for singularly perturbed operators,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **251**, No. 5, 724–747.
31. S. E. Pastukhova, “On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients,” *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 818–838.
32. S. E. Pastukhova, “On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients,” *Appl. Anal.*, 2022, **101**, No. 13, 4453–4474.
33. S. E. Pastukhova, “L^2-estimates for homogenization of diffusion operators with unbounded nonsymmetric matrices,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2022, **268**, No. 4, 473–492.
34. N. Senik, “Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2017, **49**, No. 2, 874–898.

35. N. Senik, "Homogenization for locally periodic elliptic operators," *J. Math. Anal. Appl.*, 2022, **505**, No. 2, 125581.
36. T. A. Suslina, "Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem," In: *Nonlinear equations and spectral theory*, Am. Math. Soc., Providence, 2007, pp. 201–233.
37. T. A. Suslina, "Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, **5**, No. 4, 390–447.
38. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "On operator estimates for some problems in homogenization theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.
39. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients," *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **12**, No. 2, 224–237.

S. E. Pastukhova
MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia
E-mail: `pas-se@yandex.ru`