Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 116–133
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133
EDN: ECHRHE

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

**В. В. Малыгина, К. М. Чудинов**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия*

Исследуется устойчивость систем линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. В основе исследования лежит известное представление решения в виде интегрального оператора, ядром которого является функция Коши исследуемого уравнения. Определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической и экспоненциальной устойчивости сформулированы в терминах соответствующих свойств функции Коши, что позволило без потери общности уточнить ряд традиционных понятий. Наряду с понятием асимптотической устойчивости вводится новое понятие сильной асимптотической устойчивости.

Основные результаты связаны с устойчивостью по начальной функции из пространств суммируемых функций. В частности, установлено, что сильная асимптотическая устойчивость при начальных данных из пространства $L_1$ равносильна экспоненциальной оценке функции Коши и, более того, экспоненциальной устойчивости по начальным данным из пространств $L_p$ для любого $p \geqslant 1$.

**Ключевые слова:** функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа, функция Коши, устойчивость Ляпунову, экспоненциальная устойчивость, асимптотическая устойчивость, сильная асимптотическая устойчивость

**Для цитирования:** *В. В. Малыгина, К. М. Чудинов.* Об асимптотических свойствах решений дифференциальных уравнений нейтрального типа// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 116–133. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133

## Введение

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства решений линейного функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} A_k \dot{x}(t-kh) = \sum_{j=0}^{J} B_j x(t-jh), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

где $h>0$, $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $A_k$ и $B_j$ — вещественные $n\times n$-матрицы.

В настоящее время количество работ, посвященных уравнениям нейтрального типа, продолжает расти, однако некоторые принципиальные вопросы, связанные с определениями относящихся к уравнению понятий, включая вопрос определения решения, остаются нерешенными или не имеют общепринятого решения. Несогласованность основных используемых понятий обусловливает разрозненность результатов исследований уравнений нейтрального типа, в том числе исследований

Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

асимптотических свойств решений. Даже по отношению к автономному уравнению (1) определения устойчивости из разных работ часто не могут быть формально сопоставлены, поскольку требующие согласования понятия не определены.

Прежде чем описать цели настоящей работы и ее результаты, обратим внимание на следующее. Для корректности записи (1) требуется доопределить значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ при $t < 0$. Для этого вводятся *начальные функции* $\varphi, \psi\colon [-\omega, 0) \to \mathbb{R}^n$, где $\omega = \max\{Kh, Jh\}$, и при $t < 0$ полагается $x(t) = \varphi(t)$ и $\dot{x}(t) = \psi(t)$. Устойчивость решений уравнения (1) относительно начальных условий естественно определять как непрерывную зависимость (в том или ином смысле) решений от функций $\varphi$ и $\psi$. Но эти функции рассматриваются как элементы некоторых множеств, выбирать которые можно по-разному и снабжать разными нормами. В определениях устойчивости зависимость от выбора класса начальных функций должна быть отражена явно.

В настоящей работе:

- устойчивость уравнения (1) определяется как свойство, зависящее от класса начальных функций: вводится понятие $\mathbb{X}$-*устойчивости* — устойчивости относительно функций из множества $\mathbb{X}$;
- определяются несколько видов $\mathbb{X}$-устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость; при этом выясняется, что понятие асимптотической $\mathbb{X}$-устойчивости требует уточнения и выделения нового понятия *сильной асимптотической* $\mathbb{X}$-*устойчивости*;
- проясняются связи между различными подходами к исследованию устойчивости ФДУ нейтрального типа и результатами их применения;
- на основе известной формулы представления решения исследуются виды $L_p$-устойчивости;
- описаны виды $L_p$-устойчивости, которые реализуются на представителях класса уравнений вида (1).

Под решением уравнения (1) мы понимаем абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке вектор-функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$. В работах, где под решением ФДУ понимается непрерывное продолжение начальной функции (например, [5,8,13]), которая в таком случае считается непрерывной, предполагается также «непрерывная стыковка» $x(0) = \varphi(0)$ и условие $\psi = \dot{\varphi}$. Мы не отрицаем этих условий, но и не предполагаем, что они обязательно выполняются.

Работа структурирована следующим образом. Первый раздел посвящен представлению решений уравнения (1) через его фундаментальное решение $X$ и функцию Коши $Y$. Во втором разделе вводятся несколько видов $\mathbb{X}$-устойчивости и показывается, что они могут рассматриваться как свойства функций $X$ и $Y$. В третьем разделе задача $L_p$-устойчивости уравнения (1) сводится к исследованию свойств только его функции Коши. Четвёртый раздел посвящен исследованию связи между асимптотической и экспоненциальной $L_p$-устойчивостями уравнения (1); сделан ряд принципиальных выводов об асимптотическом поведении его решений. В пятом разделе полученные результаты иллюстрируются описанием асимптотического поведения решений конкретного класса уравнений.

## 1. Представление решения и свойства матрицы Коши

**1.1. Обозначения.** Нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных $n$-мерных вектор-столбцов и $n \times n$-матриц обозначаются одинарными линиями $|\cdot|$, при этом норма в $\mathbb{R}^n$ везде евклидова, а норма в $\mathbb{R}^{n\times n}$ согласована с ней: для $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеем $|A| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$, где $x \in \mathbb{R}^n$.

Норма в функциональном пространстве $\mathbb{X}$ обозначается символом $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$.

Для измеримого множества $S \subseteq \mathbb{R}_+$ через $L_p(S)$ обозначаются пространства вектор-функций, действующих из $S$ в $\mathbb{R}^n$ и суммируемых со степенью $p$, где $1 \leqslant p < \infty$, а через $L_\infty(S)$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на множестве $S$ вектор-функций. Нормы в этих функциональных пространствах традиционны.

Символами $\Theta$ и $E$ будем обозначать соответственно нулевую и единичную $n \times n$-матрицы, символом $I$ — тождественный оператор, действующий в функциональных пространствах.

Открытый и замкнутый круги в $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ и $B[a, r] = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$.

**1.2. Формула Коши.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} A_k \dot{x}(t-kh) = \sum_{j=0}^{J} B_j x(t-jh), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

где $h > 0$, $K \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_k, B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Обозначим через $S$ *оператор сдвига*, действующий в пространствах вектор-функций и матриц-функций следующим образом:

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases}$$

и рассмотрим наряду с уравнением (1.2) неоднородное уравнение

$$\dot{x} - \sum_{k=1}^{K} A_k (S^k \dot{x}) = \sum_{j=0}^{J} B_j (S^j x) + f. \tag{1.3}$$

Под решением $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ уравнения (1.3) будем понимать локально (т. е. на каждом конечном отрезке) абсолютно непрерывную вектор-функцию; будем считать оператор $S$ действующим из пространства локально абсолютно непрерывных функций в пространство локально суммируемых функций и предполагать функцию внешнего возмущения $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ локально суммируемой. Уравнение (1.2) с заданными начальными функциями $\varphi$ и $\psi$ представляется в виде (1.3), если положить

$$f(t) = \sigma(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \psi(t-kh)\chi_k(t) + \sum_{j=1}^{J} B_j \varphi(t-jh)\chi_j(t), \quad t \in \mathbb{R}_+; \tag{1.4}$$

здесь $\chi_m(t)$ — характеристические функции множеств $(-\infty, mh)$. В соответствии со сказанным решение уравнения (1.3) удовлетворяет равенству (1.2) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Таким образом, в дальнейшем будем по определению отождествлять решение уравнения (1.2) с решением уравнения (1.3).

В указанных условиях, как известно [1, с. 84], уравнение (1.3) с заданным начальным значением $x(0) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешимо, и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s) f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.5}$$

Представление (1.5) по аналогии с известным представлением решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) называют *формулой Коши*. Матрица-функция $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — *функцией Коши* уравнения (1.3). На отрицательной полуоси фундаментальное решение и функцию Коши доопределим нулевой матрицей. Матрицы-функции $X$ и $Y$ не зависят ни от начального значения $x(0)$, ни от внешнего возмущения $f$.

**1.3. Выражение фундаментального решения через функцию Коши.** В работе [14] показано, что фундаментальное решение уравнения (1.3) выражается через функцию Коши следующим образом:

$$X(t) = Y(t) - \sum_{k=1}^{K} (S^k Y)(t) A_k, \tag{1.6}$$

а для производной фундаментального решения выполняется соотношение

$$\dot{X}(t) = \sum_{m=0}^{M} (S^m Y)(t) B_m. \tag{1.7}$$

Таким образом, решение уравнения (1.3) задается формулой (1.5), где фундаментальное решение $X$ выражается через функцию Коши $Y$, поэтому асимптотическое поведение решений уравнения (1.3) определяется свойствами матрицы Коши, которую, следовательно, можно выбрать основным объектом исследования при изучении асимптотических свойств решений уравнения (1.2).

## 2. $\mathbb{X}$-устойчивость

Обозначим $\omega = \max\{Kh, Jh\}$.

Введем определения устойчивости решений уравнения (1.2). Начальные условия для уравнения (1.2) задаются на множестве $[-\omega, 0]$. Функции $\varphi$ и $\psi$ в силу (1.4) и (1.5) не выходят из $L_1[-\omega, 0]$, но могут принадлежать более узкому множеству $\mathbb{X} \subset L_1[-\omega, 0]$, снабженному собственной нормой. Применительно к введенной выше функции $\sigma$ это означает выбор аналогичного подмножества пространства $L_1[0, \omega]$.

Обозначим $K_t\sigma = \int\limits_0^t Y(t-s)\sigma(s)\,ds$.

Рассмотрим семейство линейных вектор-функционалов $\{K_t\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n\}_{t\geqslant 0}$ и семейство линейных преобразований $\{X_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{t\geqslant 0}$, определенных равенствами $X_t\alpha = X(t)\alpha$. Нормы функционалов $K_t$ и $X_t$ определим традиционно: $\|K_t\| = \sup\limits_{\|\sigma\|=1} |K_t\sigma|$, $\|X_t\| = \sup\limits_{|\alpha|=1} |X_t\alpha|$.

Решение $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ уравнения (1.2), определяемое значением $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и начальной функцией $\sigma \in \mathbb{X}$, будем называть *соответствующим* данным $x_0$ и $\sigma$. Для него из формулы (1.5) получаем:

$$x(t) = X_t x_0 + K_t\sigma, \quad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что для всех $t \geqslant \omega$ имеем

$$K_t\sigma = \int\limits_0^\omega Y(t-s)\sigma(s)\,ds. \tag{2.2}$$

Пусть $\mathbb{X} \subseteq L_1[0, \omega]$ — нормированное множество (естественно считать его линейным пространством) измеримых на множестве $[0, \omega]$ функций.

**Определение 2.1.** Уравнение (1.2) называется $\mathbb{X}$-*устойчивым* (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$, таких что $|x_0| < \delta$ и $\|\sigma\|_{\mathbb{X}} < \delta$, для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (1.2) справедлива оценка $\sup\limits_{t\geqslant 0} |x(t)| < \varepsilon$.

**Определение 2.2.** Уравнение (1.2) называется *асимптотически* $\mathbb{X}$-*устойчивым*, если оно $\mathbb{X}$-устойчиво и для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ соответствующее решение $x = x(t)$ уравнения (1.2) обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$.

**Определение 2.3.** Уравнение (1.2) называется *экспоненциально* $\mathbb{X}$-*устойчивым*, если существуют такие постоянные $N, \gamma > 0$, что для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (1.2) справедлива оценка $|x(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}\left(|x_0| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}}\right)$.

**Замечание 2.1.** Выбор пространства $\mathbb{X} \subseteq L_1[0, \omega]$ произволен. В большинстве работ (например, в монографиях [8, 12, 13]) полагается $\mathbb{X} = C[0, \omega]$. В работах [6, 17] используется техника гильбертовых пространств, поэтому $\mathbb{X} = L_2[0, \omega]$. В работе [11] $\mathbb{X} = L_1[0, \omega]$, в работе [4] рассматривались случаи $\mathbb{X} = L_p[0, \omega]$ для всех $p \geqslant 1$.

Укажем несколько эквивалентных переформулировок определений 2.1–2.3.

**Теорема 2.1.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *уравнение* (1.2) $\mathbb{X}$-*устойчиво*;
2) *существует такое* $N > 0$, *что для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{X}$ *и* $t \geqslant 0$ *для соответствующего решения* $x = x(t)$ *уравнения* (1.2) *справедлива оценка* $|x(t)| \leqslant N\left(|x_0| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}}\right)$;
3) $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| < \infty$ *и* $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|K_t\| < \infty$.

*Доказательство.* Проведем его по цепочке 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1).

1) ⇒ 2). В силу определения 2.1 линейные функционалы $X_t$ и $K_t$ ограничены равномерно по $t$. Остается применить формулу (2.1).

2) ⇒ 3). Используем формулу (2.1). Пусть $\sigma = 0$. Тогда ограниченность фундаментального решения очевидна из неравенства $|X(t)x_0| \leqslant N|x_0|$. Пусть теперь $x_0 = 0$. Тогда $|K_t\sigma| \leqslant N\|\sigma\|_{\mathbb{X}}$, т. е. $\|K_t\| \leqslant N$.

3) ⇒ 1). Следует из формулы (2.1) непосредственно. □

В классическом определении асимптотической устойчивости [7, с. 68] решения ОДУ предполагается, что асимптотически устойчивое решение устойчиво по Ляпунову. Вообще говоря, это требование существенно, однако для линейных уравнений оно излишне. Разберем вопрос о необходимости устойчивости по Ляпунову для асимптотической устойчивости применительно к уравнению (1.2).

**Лемма 2.1.** *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство. Если для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ решение уравнения* (1.2) *обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, то уравнение* (1.2) *$\mathbb{X}$-устойчиво.*

*Доказательство.* Из формулы (2.1) вытекает, что условие $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ выполняется для всех решений уравнения (1.2) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$ и для любого $\sigma \in \mathbb{X}$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$. В таком случае $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| < \infty$ и для любого $\sigma \in \mathbb{X}$ имеем $\sup\limits_{t\geqslant 0} |K_t\sigma| < \infty$. В силу теоремы Банаха—Штейнхауса [9, с. 116], получаем, что $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|K_t\| < \infty$. Ссылка на теорему 2.1 завершает доказательство. □

**Теорема 2.2.** *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:
1) *уравнение* (1.2) *асимптотически $\mathbb{X}$-устойчиво*;
2) *для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ соответствующее решение $x = x(t)$ уравнения* (1.2) *обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$*;
3) $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$ *и для любого $\sigma \in \mathbb{X}$ имеем* $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$.

*Доказательство.* Как и доказательство теоремы 2.1, нетрудно провести по цепочке 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1), опираясь на представление решения (2.1). □

Обратим внимание на вывод условия 3) из условия 2). Из условия 2) следует $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)x_0 = 0$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$ для любого $\sigma \in \mathbb{X}$. Первое из этих следствий равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$, что можно интерпретировать как сходимость семейства вектор-функционалов $X_t$ по норме $\|X_t\|$, т. е. как *равномерную* сходимость. Однако второе следствие не равносильно равномерной сходимости $\lim\limits_{t\to+\infty} \|K_t\| = 0$ семейства функционалов $\{K_t\}$ по норме $\|K_t\|$. В связи с этим введем новое понятие.

**Определение 2.4.** Назовем уравнение (1.2) *сильно асимптотически $\mathbb{X}$-устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$.

После того как различие между асимптотической и сильной асимптотической устойчивостями формально зафиксировано с помощью определения семейства функционалов $\{K_t\}$, оно становится очевидным. Традиционно в исследованиях асимптотической устойчивости линейных ФДУ речь идет именно о сильной асимптотической устойчивости в смысле определения 2.4, что не всегда согласуется с формальными определениями вследствие их неточности или даже отсутствия. Обоснованием введения нового определения служат примеры уравнений, для которых понятия асимптотической и сильной асимптотической устойчивости не эквивалентны. Один из таки примеров будет рассмотрен в разделе 5.

Определение экспоненциальной устойчивости также переформулируем в терминах свойств фундаментального решения и функционалов $K_t$.

**Теорема 2.3.** *Уравнение* (1.2) *экспоненциально $\mathbb{X}$-устойчиво, если и только если существуют такие $N, \gamma > 0$, что для всех $t \geqslant 0$ имеем $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$ и $\|K_t\| \leqslant Ne^{-\gamma t}$.*

*Доказательство.* Следует из формулы (2.1). □

Таким образом, равномерная по $t$ ограниченность норм функционалов семейства $\{K_t\}$ заложена в определениях 2.1 и 2.3, но не в определении 2.2. Определение 2.4 включает, как и определения 2.1 и 2.3, оценку нормы $\|K_t\|$, поэтому устойчивость по Ляпунову и экспоненциальная устойчивость можно считать по определению сильными. Можно также ввести понятия, формально относящиеся к устойчивости по Ляпунову и экспоненциальной устойчивости так же, как асимптотическая устойчивость относится к сильной асимптотической устойчивости, но если пространство $\mathbb{X}$ банахово, то эти понятия в силу теоремы Банаха—Штейнхауса совпадают с введенными в определениях 2.1 и 2.3.

## 3. $L_p$-устойчивость как свойство функции Коши

Итак, устойчивость уравнения (1.2) естественно рассматривать как $\mathbb{X}$-устойчивость, где $\mathbb{X} \subseteq L_1[0,\omega]$. В этом разделе мы получим критерии $L_p$-устойчивости (по Ляпунову, сильной асимптотической и экспоненциальной) для всех $p$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) в терминах свойств функции Коши.

**3.1. Нормы вектор-функционалов $L_p \to \mathbb{R}^n$.** В случае $n = 1$ общий вид функционала $F\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}$, где $p \geqslant 1$, определяется (см. [9, с. 150–154]) функцией $\alpha \in L_q[0,\omega]$, где $1/p+1/q = 1$, и формулой $Fx = \int\limits_0^\omega \alpha(s)x(s)\,ds$; его норма $\|F\| = \sup\limits_{|x|=1} |Fx|$ в случае $p > 1$ равна $\|F\| = \left(\int\limits_0^\omega |\alpha(s)|^q\,ds\right)^{1/q}$, а в случае $p = 1$ равна $\|F\| = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{s\in[0,\omega]} |\alpha(s)| = \inf\limits_{\mu E=0} \sup\limits_{s\in[0,\omega]\setminus E} |\alpha(s)|$. Заметим, что формула нормы справедлива и в случае $p = \infty$ (тогда $q = 1$). Отсюда получаем вид вектор-функционала $F\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$:

$$Fx = \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_0^\omega \alpha_{1i}(s)x_i(s)\,ds, \ldots, \sum_{i=1}^n \int\limits_0^\omega \alpha_{ni}(s)x_i(s)\,ds\right),$$

где компоненты матрицы-функции $A(t) = (\alpha_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ принадлежат $L_p[0,\omega]$. В силу согласованности норм в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ в случае $p > 1$

$$\|F\| = \sup_{|x|=1} |Fx| = \left(\int\limits_0^\omega |A(s)|^q\,ds\right)^{1/q}, \tag{3.1}$$

а в случае $p = 1$

$$\|F\| = \sup_{|x|=1} |Fx| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,\omega]} |A(s)|. \tag{3.2}$$

**3.2. Устойчивость по Ляпунову.** Покажем, что ограниченность интеграла функции Коши уравнения (1.2) на отрезке длины $\omega$ влечет ограниченность фундаментального решения на полуоси $\mathbb{R}_+$.

**Лемма 3.1.** *Если* $\sup\limits_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\,ds < \infty$, *то* $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| < \infty$.

*Доказательство.* Из соотношений (1.6) и (1.7) и условий леммы следует, что

$$\sup_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |X(s)|\,ds = N_1 < \infty, \qquad \sup_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |\dot X(s)|\,ds = N_2 < \infty. \tag{3.3}$$

Предположим, что $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| = \infty$. Тогда найдется такое $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|X(t_0)| > \frac{N_1}{\omega} + N_2.$$

Значит, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ имеем

$$|X(t) - X(t_0)| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} |\dot X(s)|\,ds \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |\dot X(s)|\,ds \leqslant N_2.$$

Таким образом, для всех $t \in [t_0, t_0 + \omega]$ справедлива оценка $|X(t)| > \dfrac{N_1}{\omega}$. Следовательно, $\int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\, ds > N_1$, что противоречит первому из соотношений (3.3). □

Теперь получим критерий устойчивости по Ляпунову в терминах функции Коши.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда уравнение* (1.2) $L_p$*-устойчиво, если и только если*

$$\sup_{t \geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds < \infty,$$

*где* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

*Доказательство.* В силу (2.2) и (3.1) для каждой фиксированной точки $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t \colon L_p[0, \omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\|K_t\| = \left( \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds \right)^{1/q}. \tag{3.4}$$

Отсюда в силу теоремы 2.1 получаем доказательство теоремы в части необходимости. Учитывая неравенство Гёльдера и лемму 3.1, получаем достаточность. □

Случай $p = 1$ рассмотрим отдельно.

**Теорема 3.2.** *Уравнение* (1.2) $L_1$*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{t \geqslant 0} |Y(t)| < \infty$.

*Доказательство.* В силу (2.2) и (3.2) для каждой фиксированной точки $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t \colon L_1[0, \omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\|K_t\| = \operatorname*{ess\,sup}_{s \in [0, \omega]} |Y(s)|. \tag{3.5}$$

Остается применить теорему 2.1 и лемму 3.1. □

Из теорем 3.1 и 3.2 получаем следствие.

**Следствие 3.1.** *Если функция Коши уравнения* (1.2) *ограничена, то уравнение* (1.2) $L_p$*-устойчиво для всех* $p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

В последующих двух пунктах статьи получим теоремы, аналогичные теоремам 3.1 и 3.2, для двух других видов устойчивости.

### 3.3. Сильная асимптотическая устойчивость.

**Лемма 3.2.** *Если* $\lim\limits_{t \to \infty} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\, ds = 0$, *то* $\lim\limits_{t \to \infty} X(t) = \Theta$.

*Доказательство.* Пусть $\lim\limits_{t \to \infty} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\, ds = 0$. Тогда в силу соотношений (1.6) и (1.7) имеем

$$\lim_{t \to \infty} \int\limits_t^{t+\omega} |X(s)|\, ds = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \int\limits_t^{t+\omega} |\dot{X}(s)|\, ds = 0. \tag{3.6}$$

Предположим, что при этом $X(t)$ не стремится к $\Theta$ при $t \to \infty$. Тогда существует такие $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, что $|X(t_n)| \geqslant \varepsilon$.

В соответствии со вторым из соотношений (3.6) возьмем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$

$$\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |\dot{X}(s)|\, ds < \varepsilon/2.$$

Рассмотрим произвольные $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [t_n, t_n + \omega]$. Имеем

$$|X(t) - X(t_n)| \leqslant \int\limits_{t_n}^{t} |\dot{X}(s)|\, ds \leqslant \int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |\dot{X}(s)|\, ds < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $|X(t)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $t \in [t_n, t_n + \omega]$ и, значит, $\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |X(s)|\, ds \geqslant \dfrac{\varepsilon\omega}{2} > 0$ для всех $n \geqslant N$, что противоречит первому из соотношений (3.6). $\square$

**Теорема 3.3.** *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* $L_p$*-устойчиво, если и только если для его функции Коши* $Y$ *имеем*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds = 0,$$

*где* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

*Доказательство.* Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t \colon L_p[0, \omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.4). Следовательно, если $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds = 0$, что доказывает теорему в части необходимости. Достаточность получаем из (3.4), неравенства Гёльдера и леммы 3.2. $\square$

**Теорема 3.4.** *Уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* $L_1$*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$.

*Доказательство.* Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t \colon L_1[0, \omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.5), из которой следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$, если и только если $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$. Остается заметить, что в силу (1.6) из $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$. $\square$

Из теорем 3.3 и 3.4 получаем следствие.

**Следствие 3.2.** *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$, *то уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* $L_p$*-устойчиво для всех* $p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

### 3.4. Экспоненциальная устойчивость.

**Лемма 3.3.** *Если* $\int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|\, ds \leqslant Ne^{-\gamma t}$, *то* $|X(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}$.

*Доказательство.* Из соотношений (1.6) и (1.7) следует, что если условия леммы выполнены, то для всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеют место соотношения

$$\int\limits_{t}^{t+\omega} |X(s)|\, ds \leqslant M_1 e^{-\gamma t}, \qquad \int\limits_{t}^{t+\omega} \left|\dot{X}(s)\right| ds \leqslant M_2 e^{-\gamma t}. \tag{3.7}$$

Предположим, что существует такое $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|X(t_0)e^{\gamma t_0}| > e^{\gamma\omega} \left(\gamma M_1 + \frac{M_1}{\omega} + M_2\right).$$

Тогда для произвольного $t \in [t_0, t_0 + \omega]$ имеем

$$\left|X(t)e^{\gamma t} - X(t_0)e^{\gamma t_0}\right| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(X(s)e^{\gamma s})\, ds\right| \leqslant \gamma \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)e^{\gamma s}|\, ds + \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} \left|\dot{X}(s)e^{\gamma s}\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \gamma e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\,ds + e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} \left|\dot{X}(s)\right| ds \leqslant \gamma e^{\gamma\omega} M_1 + e^{\gamma\omega} M_2.$$

Следовательно, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ справедлива оценка $\left|X(t)e^{\gamma t}\right| > \dfrac{M_1 e^{\gamma\omega}}{\omega}$. Значит,

$$e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\,ds \geqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)e^{\gamma s}|\,ds > M_1 e^{\gamma\omega},$$

что противоречит первому из соотношений (3.7). □

**Теорема 3.5.** *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_p$*-устойчиво, если и только если найдутся такие* $N, \gamma > 0$, *что*

$$\int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds \leqslant N e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

*где* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

*Доказательство.* Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.4). В силу теоремы 2.3 это доказывает теорему в части необходимости. Достаточность получаем из (3.4), неравенства Гёльдера и леммы 3.3. □

**Теорема 3.6.** *Уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_1$*-устойчиво, если и только если найдутся такие* $N, \gamma > 0$, *что его функция Коши подчинена экспоненциальной оценке*

$$|Y(t)| \leqslant N^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.8}$$

*Доказательство.* Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.5). Следовательно, $\|K_t\| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, если и только если $|Y(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$. Остается сослаться на соотношение (1.6). □

Из теорем 3.5 и 3.6 получаем следствие.

**Следствие 3.3.** *Если функция Коши уравнения* (1.2) *подчинена экспоненциальной оценке* (3.8), *то уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_p$*-устойчиво для всех* $p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

## 4. $L_p$-устойчивость и асимптотика функции Коши

**4.1. Скачки функции Коши.** В работе [15] показано, что все компоненты матрицы-функции $Y$ абсолютно непрерывны на любом отрезке $[mh, mh+h)$, $m \in \mathbb{N}_0$, и имеют в точках $mh$ конечные скачки $H(m)$, при этом функция $H\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ является решением следующей задачи для матричного линейного разностного уравнения:

$$\begin{aligned} &H(m) = \sum_{k=1}^{K} H(m-k)A_k, \quad m \in \mathbb{N}; \\ &H(0) = E; \quad H(m) = \Theta, \qquad m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В связи с этим изучим некоторые свойства линейных автономных разностных систем.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} &y(m) = \sum_{k=1}^{K} A_k^T y(m-k) + f(m), && m \in \mathbb{N}, \\ &y(-p) = 0, && p = 0, 1, \ldots, K-1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

относительно функции $y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

**Лемма 4.1.** *Решение задачи* (4.2) *при любой функции* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$ *представимо в виде*

$$y(m)=\sum_{\nu=1}^{m}H^T(m-\nu)f(\nu),\quad m\in\mathbb{N},\tag{4.3}$$

*где функция* $H:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}^{n\times n}$ *определяется задачей* (4.1).

*Доказательство.* Очевидно, решение задачи (4.2) существует и единственно. Подставим (4.3) в уравнение (4.2) и используем свойства функции $H$, определяемые задачей (4.1):

$$\sum_{k=1}^{K}A_k^Ty(m-k)+f(m)=$$
$$=A_1^T\sum_{\nu=1}^{m-1}H^T(m-\nu-1)f(\nu)+\ldots+A_K^T\sum_{\nu=1}^{m-K}H^T(m-\nu-K)f(\nu)+f(m)=$$
$$=\left(\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(A_1^TH^T(m-\nu-1)+\ldots+A_K^TH^T(m-\nu-K)\right)\right)f(\nu)+f(m)=$$
$$=\left(\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(H(m-\nu-1)A_1+\ldots+H(m-\nu-K)A_K\right)\right)^Tf(\nu)+f(m)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{m-1}H^T(m-\nu)f(\nu)+f(m)=\sum_{\nu=1}^{m}H^T(m-\nu)f(\nu)=y(m).$$

Уравнение (4.2) обратилось в тождество, что и доказывает лемму. □

Приведенная ниже лемма описывает принцип известного переноса на разностные уравнения в рамках подхода пермской школы исследования ФДУ к определению решения уравнения [1, 2].

Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\begin{aligned}&u(m)=\sum_{k=1}^{K}A_k^Tu(m-k), && m\in\mathbb{N},\\ &u(-p)=\varphi(p), && p=0,1,2,\ldots,K-1.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Положим

$$f(m)=\begin{cases}\sum\limits_{k=m}^{K}A_k^T\varphi(k-m), & \text{если } m=1,\ldots,K;\\ 0, & \text{если } m=K+1,K+2,\ldots;\end{cases}\tag{4.5}$$

и сопоставим решения задач (4.2) и (4.4). Нетрудно убедиться непосредственно, что *решения задач* (4.2) *и* (4.4) *при условии* (4.5) *совпадают*: $u(m)=y(m)$ *при всех* $m\in\mathbb{N}$.

**Лемма 4.2.** *Если* $\lim\limits_{m\to\infty}H(m)=\Theta$, *то для решения* $u\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$ *задачи* (4.4) *выполняется* $\lim\limits_{m\to\infty}u(m)=0$ *при любом выборе начальных условий* $u(-p)$, $p=\overline{0,K-1}$.

*Доказательство.* Перепишем уравнение (4.4) в виде (4.2) по схеме, приведенной выше. Очевидно, что

$$|f(m)|\leqslant\sum_{k=m}^{K}\left|A_k^T\right||\varphi(k-m)|\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant K-1}|\varphi(k)|\sum_{k=0}^{K}\left|A_k^T\right|=\alpha<\infty.$$

Учитывая, что $f(m)=0$ при $m\geqslant K+1$, и применяя лемму 4.1, получаем:

$$|u(m)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{K}\left|H^T(m-\nu)\right||f(\nu)|\leqslant\alpha\sum_{\nu=1}^{K}|H(m-\nu)|\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Лемма доказана. □

**4.2. Известные критерии наличия экспоненциальных оценок функций $X$ и $Y$.** Определим полиномы от комплексной переменной $z$ с матричными коэффициентами

$$P_A(z) = E - \sum_{k=1}^{K} A_k z^k, \quad P_B(z) = \sum_{j=0}^{J} B_j z^j.$$

Для всех точек $z \in \mathbb{C}$, кроме таких, что $\det P_A(z) = 0$, определим функцию

$$Q(z) = \exp(hP_A^{-1}(z)P_B(z)).$$

**Теорема 4.1** (см. [15]). *Для того чтобы функция Коши уравнения* (1.2) *имела при некоторых* $N, \gamma > 0$ *экспоненциальную оценку* (3.8)*, необходимо и достаточно, чтобы*

- *все корни полинома* $\det P_A(z)$ *лежали вне круга* $B[0,1]$;
- *все корни уравнения* $\det(E - zQ(z)) = 0$ *лежали вне круга* $B[0,1]$.

Из результатов раздела 3 работы [15] следуют также необходимые и достаточные условия наличия экспоненциальной оценки фундаментального решения уравнения (1.2).

**Теорема 4.2.** *Для того чтобы фундаментальное решение уравнения* (1.2) *имело при некоторых* $N, \gamma > 0$ *экспоненциальную оценку* $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, *необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения* $\det(E - zQ(z)) = 0$ *лежали вне круга* $B[0,1]$.

**4.3. Характер стремления функции Коши к нулю.**

**Лемма 4.3.** *Если* $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = \Theta$, *то все корни полинома* $\det P_A(z)$ *лежат вне круга* $B[0,1]$.

*Доказательство.* Предположим, что существует корень $z_0$ полинома $\det P_A(z)$, лежащий в круге $B[0,1]$. Тогда число $1/z_0$ является корнем характеристического многочлена $\det(z^K E - \sum\limits_{k=1}^{K} A_k^T z^{K-k})$ системы (4.4) и представимо в виде $1/z_0 = e^{\alpha + i\beta}$, где $\alpha \geqslant 0$.

Обозначим через $\xi_0 = \zeta + i\eta$ нетривиальное решение системы

$$(e^{(\alpha+i\beta)K}E - \sum_{k=1}^{K} A_k^T e^{(\alpha+i\beta)(K-k)})\xi = 0.$$

Возьмем в (4.4) в качестве начальных функций

$$\varphi(p) = e^{-\alpha p}(\zeta \cos \beta p + \eta \sin \beta p), \quad \varphi(p) = e^{-\alpha p}(\eta \cos \beta p - \zeta \sin \beta p), \quad p = 0, 1, 2, \ldots, K-1.$$

Легко видеть, что им соответствуют решения системы (4.4)

$$v(m) = e^{\alpha m}(\zeta \cos \beta m - \eta \sin \beta m), \quad w(m) = e^{\alpha m}(\eta \cos \beta m + \zeta \sin \beta m).$$

Из леммы 4.2 следует, что если $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty} v(m) = 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} w(m) = 0$, что невозможно, так как при $\alpha \geqslant 0$ и $m \in \mathbb{N}$

$$|v(m)|^2 + |w(m)|^2 = e^{2\alpha m}|\zeta|^2 + |\eta|^2 = e^{2\alpha m}|\xi_0|^2 \geqslant |\xi_0|^2 > 0.$$

Лемма доказана. □

**Лемма 4.4.** *Если* $Y(t)$ *имеет предел при* $t \to \infty$, *то* $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = \Theta$.

*Доказательство.* Допустим, что $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) \neq \Theta$. Тогда из леммы 4.3 следует, что найдутся число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что $|H(m_k)| \geqslant \varepsilon$. Пусть $t_k = hm_k$ — точка, в которой матрица-функция $Y$ имеет скачок величиной $H(m_k)$. Тогда

$$\left| Y(t_k) - \lim_{\delta\to+0} Y(t_k - \delta) \right| = |H(m_k)| \geqslant \varepsilon,$$

откуда следует, что $Y$ не может иметь предела при $t \to +\infty$. □

**Следствие 4.1.** *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$, *то все корни полинома* $\det P_A(z)$ *лежат вне круга* $B[0,1]$.

Обозначим

$$G(\lambda) = \lambda(E - G_A(\lambda)) - G_B(\lambda), \quad G_A(\lambda) = \sum_{k=1}^{K} e^{-\lambda hk} A_k, \quad G_B(\lambda) = \sum_{j=0}^{J} e^{-\lambda hj} B_j.$$

Уравнение $\det G(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением* для уравнения (1.2).

Функция $\det G(\lambda)$ является аналитической, а уравнение $\det G(\lambda) = 0$ имеет в комплексной плоскости счетный набор корней.

Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ — корень характеристического уравнения. Тогда существует ненулевой вектор $\xi_0 = \zeta + i\eta$ такой, что $G(\lambda_0)\xi_0 = 0$. Выбрав для уравнения (1.2) в качестве начальных функций при $\tau \in [-\omega, 0)$ функции

$$\varphi(\tau) = e^{\alpha\tau}(\zeta\cos(\beta\tau) - \eta\sin(\beta\tau)), \quad \psi(\tau) = \dot{\varphi}(\tau),$$

получим, что функция

$$v(t) = e^{\alpha t}(\zeta\cos(\beta t) - \eta\sin(\beta t)), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

есть решение уравнения (1.2). Аналогично, если положить

$$\varphi(\tau) = e^{\alpha\tau}(\eta\cos(\beta\tau) + \zeta\sin(\beta\tau)), \quad \psi(\tau) = \dot{\varphi}(\tau),$$

то найдем другое решение уравнения (1.2):

$$w(t) = e^{\alpha t}(\eta\cos(\beta t) + \zeta\sin(\beta t)), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

**Теорема 4.3.** *Функция Коши обладает свойством* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$, *если и только если она имеет экспоненциальную оценку* (3.8).

*Доказательство.* Очевидно, что в доказательстве нуждается только необходимость. В соответствии с теоремой 4.1 надо убедиться, что все корни уравнений $\det P_A(z) = 0$ и $\det(E - zQ(z)) = 0$ лежат вне круга $B[0,1]$. Следствие 4.1 утверждает, что для уравнения $\det P_A(z) = 0$ это верно. Допустим, что уравнение $\det(E - zQ(z)) = 0$ имеет корень $z_0$, принадлежащий кругу $B[0,1]$. Тогда число $1/z_0$ представимо в виде $1/z_0 = e^{\lambda_0 h}$, где $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha \geqslant 0$, и с учетом определения функции $Q(z)$ имеем:

$$\det(\exp(hP_A^{-1}(e^{-\lambda_0 h})P_B(e^{-\lambda_0 h})) - e^{\lambda_0 h}E) = 0.$$

Следовательно, среди собственных чисел матрицы $P_A^{-1}(e^{-\lambda_0 h})P_B(e^{-\lambda_0 h})$ присутствует число $\lambda_1 = \alpha + i\gamma$.

Из определения $G(\lambda)$ получаем:

$$P_A^{-1}(e^{-\lambda_1 h})G(\lambda_1) = \lambda_1 E - P_A^{-1}(e^{-h\lambda_1})P_B(e^{-h\lambda_1}),$$

откуда следует, что $\det G(\lambda_1) = 0$.

В силу приведенных перед доказываемой теоремой рассуждений функции

$$v(t) = e^{\alpha t}(\zeta\cos(\gamma t) - \eta\sin(\gamma t)), \quad w(t) = e^{\alpha t}(\eta\cos(\gamma t) + \zeta\sin(\gamma t)),$$

где $|\zeta|^2 + |\eta|^2 > 0$, являются решениями уравнения (1.2).

Из теоремы 3.4 следует, что $\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$, что невозможно, так как при $\alpha \geqslant 0$

$$|v(t)|^2 + |w(t)|^2 = e^{2\alpha t}(|\zeta|^2 + |\eta|^2) \geqslant |\zeta|^2 + |\eta|^2 > 0.$$

Теорема доказана. □

Непосредственно из теорем 3.4 и 4.3 вытекает следствие.

**Следствие 4.2.** *Уравнение* (1.2) *сильно* $L_1$*-асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда функция Коши имеет экспоненциальную оценку* (3.8).

**Замечание 4.1.** Таким образом, для уравнений нейтрального типа сохранилось свойство функции Коши, хорошо известное для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа: если функция Коши стремится к нулю, то со скоростью не ниже экспоненциальной. Но это не означает совпадения асимптотических свойств *решений* уравнений! Для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа любое решение может стремиться к нулю только по экспоненциальному закону. Напротив, для уравнения (1.2) бесконечное множество решений (в том числе фундаментальное решение) могут стремиться к нулю медленнее экспоненты — например, как степенная функция [16]. Причина становится понятной, если обратиться к формуле (2.1), определяющей любое решение уравнения (1.2). Для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа справедливо равенство $X(t) = Y(t)$; для уравнения (1.2) это равенство не выполняется (имеет место более сложная зависимость (1.6)), и в формуле (2.1) интегральное слагаемое может стремиться к нулю в случае, когда функция $Y$ не имеет нулевого предела.

**Замечание 4.2.** Получение критериев устойчивости по Ляпунову для уравнения (1.2) представляет собой самостоятельную технически сложную задачу. Очевидно, что если выполнены условия теоремы 4.1, то функция $Y$ ограничена, а уравнение (1.2) $L_p$-устойчиво при любом $p \geqslant 1$. Но этими условиями не исчерпываются классы уравнений с ограниченной функцией Коши: в работах [4, 18] указаны классы уравнений, для которых ограниченность функции $Y$ сохраняется в случае, когда уравнения $\det P_A(z) = 0$ и $\det(E - zQ(z)) = 0$ имеют нули на границе круга $B[0,1]$; более того, возможна ситуация, когда этих нулей бесконечно много.

Неизвестно, существуют ли примеры $L_p$-устойчивых уравнений, функция Коши которых была бы неограничена.

**4.4. Экспоненциальная $L_p$-устойчивость.** В силу теоремы 3.6 экспоненциальная $L_1$-устойчивость уравнения (1.2) эквивалентна экспоненциальной оценке функции Коши. Так как при $p > 1$ справедливо включение $L_p[0,\omega] \subset L_1[0,\omega]$, то оценка (3.8) влечет экспоненциальную $L_p$-устойчивость уравнения (1.2) при всех $p > 1$. Интересен вопрос, существуют ли экспоненциально $L_p$-устойчивые уравнения, функция Коши которых не имеет экспоненциальной оценки?

**Лемма 4.5.** *Пусть* $\lambda_0$ — *корень уравнения* $\det(1-G_A(\lambda)) = 0$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется корень* $\mu_0$ *того же уравнения такой, что* $\operatorname{Re}\lambda_0 = \operatorname{Re}\mu_0$, *а в круге* $B(\mu_0,\varepsilon)$ *есть корень уравнения* $\det G(\lambda) = 0$.

*Доказательство.* Обозначим $\eta(z) = \det(E - G_A(\lambda_0 + z))$. Поскольку функция $\det(E - G_A(\lambda))$ аналитическая, ее нули изолированы, значит, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $\eta$ имеет в круге $B(0,\varepsilon)$ единственный нуль $z = 0$. На границе $|z| = \varepsilon$ имеем $\min\limits_{|z|=\varepsilon} |\eta(z)| = m > 0$. Пусть $\lambda_k = \lambda_0 + \dfrac{2\pi k i}{h}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $e^{\lambda_0 h} = e^{\lambda_k h}$, следовательно, $G_A(\lambda_k + z) = G_A(\lambda_0 + z)$, $G_B(\lambda_k+z) = G_B(\lambda_0+z)$. Матрицы-функции $G_A(\lambda_0+z)$ и $G_B(\lambda_0+z)$ непрерывны и, следовательно, ограничены в круге $B[0,\varepsilon]$; значит, при $|z| = \varepsilon$ справедливо равенство

$$\det\left(E - G_A(\lambda_0 + z) + \frac{G_B(\lambda_0 + z)}{\lambda_k + z}\right) = \eta(z) + \frac{R(\lambda_k + z)}{\lambda_k + z},$$

причем найдется такое $M > 0$, что $|R(\lambda_k + z)| \leqslant M$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Положим $\xi_k(z) = \dfrac{R(\lambda_k + z)}{\lambda_k + z}$; легко видеть, что при $|z| = \varepsilon$ справедлива оценка $|\xi_k(z)| \leqslant \dfrac{Mh}{\sqrt{\lambda_0^2 h^2 + 4\pi^2 k^2} - h\varepsilon}$, а значит, можно выбрать $k = k_0 \in \mathbb{Z}$ таким, что $|\xi_{k_0}(z)| < m$.

Обозначим $\xi_{k_0}(z) = \xi(z)$, $\lambda_{k_0} = \mu_0$. С учетом приведенных выше оценок получаем, что при $|z| = \varepsilon$ выполнены неравенства $|\eta(z)| \geqslant m > |\xi(z)|$, и по теореме Руше функции $\eta(z) + \xi(z)$ и $\eta(z)$ имеют в круге $B(0,\varepsilon)$ одинаковое число нулей. Так как в этом круге есть нуль у функции $\eta(z)$, то при некотором $z_0 \in B(0,\varepsilon)$

$$\eta(z_0) + \xi(z_0) = \det(E - G_A(\mu_0 + z_0) + \frac{G_B(\mu_0 + z_0)}{\mu_0 + z_0}) = 0.$$

Так как

$$\det G(\mu_0 + z_0) = (\mu_0 + z_0)^n \det\left(E - G_A(\mu_0 + z_0) + \frac{G_B(\mu_0 + z_0)}{\mu_0 + z_0}\right) = 0,$$

$\operatorname{Re}\mu_0 = \operatorname{Re}\lambda_0$, а $\mu_0 + z_0 \in B(\mu_0,\varepsilon)$, то лемма доказана. $\square$

**Лемма 4.6.** *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Если уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_p$*-устойчиво, то все корни многочлена* $P_A(z)$ *лежат вне круга* $B[0,1]$.

*Доказательство.* Пусть $z_0$ — корень уравнения многочлена $P_A(z)$. Допустим, что $z_0 \in B[0,1]$, т. е. $z_0 = e^{-\alpha - i\beta}$, где $\alpha \geqslant 0$. Тогда уравнение $\det(E - G_A(\lambda)) = 0$ имеет корень $\lambda_0 = \alpha + i\beta$. Выберем $\varepsilon < \alpha + \gamma$, где $\gamma$ — показатель экспоненты в определении экспоненциальной $L_p$-устойчивости, и найдем, в соответствии с леммой 4.5, корень $\mu_0$ уравнения $\det(E - G_A(\lambda)) = 0$ такой, что $\operatorname{Re}\mu_0 = \alpha$, а в круге $B(\mu_0, \varepsilon)$ есть корень функции $\det G(\lambda)$, который обозначим через $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$. По построению, $|\alpha_1 - \alpha| < \varepsilon < \alpha + \gamma$, следовательно, $\alpha_1 + \gamma > 0$. Корню $\lambda_1$ соответствует нетривиальное решение $\xi_0 = \zeta + i\eta$ системы $G(\lambda_1)\xi = 0$ и решения уравнения (1.2)

$$x(t) = e^{\alpha_1 t}(\eta \cos\beta_1 t - \zeta \sin\beta_1 t), \quad y(t) = e^{\alpha_1 t}(\eta\cos\beta_1 t + \zeta \sin\beta_1 t),$$

для которых сумма

$$|x(t)|^2 e^{2\gamma t} + |y(t)|^2 e^{2\gamma t} = e^{2(\alpha_1+\gamma)t}\left(|\eta|^2 + |\zeta|^2\right) = e^{2(\alpha_1+\gamma)t}|\xi_0|^2$$

является неограниченной функцией, что противоречит экспоненциальной $L_p$-устойчивости уравнения (1.2). □

**Теорема 4.4.** *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_p$*-устойчиво тогда и только тогда, когда для функции Коши справедлива оценка* (3.8).

*Доказательство.* Очевидно, что в доказательстве нуждается только необходимость. Пусть уравнение (1.2) экспоненциально $L_p$-устойчиво. Из леммы 4.6 следует, что все корни многочлена $\det P_A(z)$ лежат вне круга $B(0,1)$. Далее, если уравнение (1.2) экспоненциально $L_p$-устойчиво, то его фундаментальное решение имеет экспоненциальную оценку, и из теоремы 4.2 следует, что все корни уравнения $\det(E - zQ(z)) = 0$ также лежат вне круга $B(0,1)$. Применение теоремы 4.1 завершает доказательство. □

**Следствие 4.3.** *Если уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_{p_0}$*-устойчиво хотя бы при одном* $p_0 \geqslant 1$, *то оно экспоненциально* $L_p$*-устойчиво при всех* $p \geqslant 1$.

Таким образом, в шкале пространств $L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ экспоненциальную устойчивость достаточно исследовать при каком-то одном $p$. Наиболее удобными, по-видимому, являются пространства $L_1$, $L_2$ или $L_\infty$.

Наиболее важные результаты раздела 4 соединим в одной теореме.

**Теорема 4.5.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

- *уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* $L_1$*-устойчиво*;
- *уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_p$*-устойчиво при любом* $p \geqslant 1$;
- *уравнение* (1.2) *экспоненциально* $L_p$*-устойчиво хотя бы при одном* $p \geqslant 1$;
- $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$;
- *при некоторых* $N, \gamma > 0$ *справедлива оценка* $|Y(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

## 5. Пример

Покажем, что все введенные выше виды устойчивости реализуются на конкретных представителях уравнений вида (1.2).

Рассмотрим уравнение нейтрального типа

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = bx(t) - cx(t-1), && t \geqslant 0,\\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), && \xi < 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $a$, $b$, $c$ — произвольные вещественные числа. Для уравнения (5.1) в работе [4] была построена область устойчивости. Приведем ее здесь.

В пространстве $Ouvw$ зададим поверхность $\Gamma$:

$$u = \cos\theta + v\frac{\cos\theta}{\theta}, \quad w = -\theta\sin\theta + v\cos\theta,$$

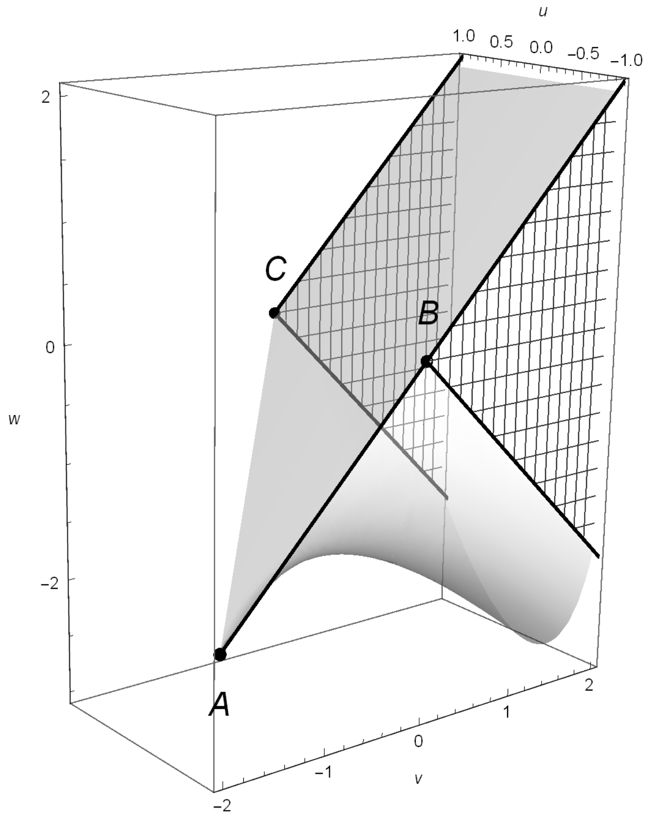


Рис. 1. Область $D$
Fig. 1. Domain $D$

считая, что $\theta \in (\theta_1, \pi)$ при $v \geqslant 0$, где $\theta_1$ — наименьший положительный корень уравнения $\cos\zeta + v\dfrac{\sin\zeta}{\zeta} = -1$, и $\theta \in (0, \theta_2)$ при $v \in (-2, 0)$, где $\theta_2$ — наименьший положительный корень уравнения $\cos\zeta + v\dfrac{\sin\zeta}{\zeta} = 1$.

Вместе с тремя плоскостями $v = w$ и $u = \pm 1$ поверхность $\Gamma$ ограничивает в пространстве $Ouvw$ область $D$, приведенную на рис. 1 (границы не принадлежат $D$).

Пусть $|a| < 1$. В работе [4] показано, что функция Коши уравнения (5.1) имеет экспоненциальную оценку (3.8), если и только если $(a, b, c) \in D$. В силу теоремы 4.5 наличие экспоненциальной оценки можно заменить любым из четырех оставшихся утверждений. При попадании точки $(a, b, c)$ на поверхность $\Gamma$ или плоскость $v = w$ (кроме отрезка $AC$) уравнение (5.1) теряет асимптотическую устойчивость, но остается $L_p$-устойчивым при любом $p \geqslant 1$. Таким образом, при $|a| < 1$ асимптотические свойства уравнения (5.1) не отличаются от свойств ФДУ запаздывающего типа.

Пусть теперь $|a| = 1$. При попадании точки $(a, b, c)$ на границы $u = \pm 1$ уравнение (5.1) теряет экспоненциальную устойчивость, но не обязательно теряет асимптотическую устойчивость. В работе [10] показано, что если $|a| = 1$, а $|c| < b$, то уравнение (5.1) сильно асимптотически $L_p$-устойчиво при всех $p > 1$. При $p = 1$ сильная асимптотическая устойчивость теряется, но уравнение (5.1) остается асимптотически $L_1$-устойчивым. Таким образом, при $|a| = 1$ обнаруживаются специфические свойства уравнений нейтрального типа: несмотря на то, что уравнение (5.1) является автономным, для него асимптотическая устойчивость не совпадает с экспоненциальной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. *Андрианов Д. Л.* Краевые задачи и вопросы управления для линейных разностных уравнений с последействием// Изв. вузов. Сер. мат. — 1993. — № 5. — С. 3–16.

3. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа// Изв. вузов. Сер. мат. — 2007. — № 7. — С. 17–27.
4. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа// Мат. тр. — 2020. — *23*, № 2. — С. 3–49.
5. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
6. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Макс Пресс, 2016.
7. *Демидович Б. П.* Введение в математическую теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
8. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
9. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982.
10. *Малыгина В. В., Баландин А. С.* Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа// Сиб. мат. ж. — 2021. — *62*, № 1. — С. 106–116.
11. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1997. — № 6. — С. 37–49.
12. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
13. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
14. *Balandin A.* On relation between the fundamental and Cauchy matrices of linear autonomous functional differential equations of neutral type// Func. Differ. Equ. — 2020. — *27*, № 3-4. — С. 61–70.
15. *Balandin A., Chudinov K.* On the asymptotic behavior of linear autonomous functional differential equations of neutral type// Func. Differ. Equ. — 2008. — *15*, № 1-2. — С. 5–15.
16. *Hahn W.* Zur stabilität der lösungen von linearen differential-differenzengliechungen mit konstanten koeffizienten// Math. Ann. — 1956. — *131*. — С. 151–166.
17. *Junca S., Lombard B.* Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation// J. Differ. Equ. — 2014. — *256*, № 7. — С. 2368–2391.
18. *Malygina V., Chudinov K.* On the asymptotic behavior of solutions to linear autonomous neutral functional differential equations// Func. Differ. Equ. — 2020. — *27*, № 3-4. — С. 103–123.

В. В. Малыгина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
E-mail: `mavera@list.ru`

К. М. Чудинов
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
E-mail: `cyril@list.ru`

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133
EDN: ECHRHE

## On asymptotic properties of solutions for differential equations of neutral type

**V. V. Malygina and K. M. Chudinov**

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia*

The stability of systems of linear autonomous functional differential equations of neutral type is studied. The study is based on the well-known representation of the solution in the form of an integral operator, the kernel of which is the Cauchy function of the equation under study. The definitions of Lyapunov, asymptotic, and exponential stability are formulated in terms of the corresponding properties of the Cauchy function, which allows us to clarify a number of traditional concepts without loss of generality. Along with the concept of asymptotic stability, a new concept of strong asymptotic stability is introduced.

The main results are related to the stability with respect to the initial function from the spaces of summable functions. In particular, it is established that strong asymptotic stability with initial data from the space $L_1$ is equivalent to the exponential estimate of the Cauchy function and, moreover, exponential stability with respect to initial data from the spaces $L_p$ for any $p \geqslant 1$.

**Keywords:** neutral-type functional differential equations, Cauchy function, Lyapunov stability, exponential stability, asymptotic stability, strong asymptotic stability

**For citation:** V. V. Malygina, K. M. Chudinov, "On asymptotic properties of solutions for differential equations of neutral type," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 116–133. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133

### REFERENCES

1. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatullina, *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
2. D. L. Andrianov, "Kraevye zadachi i voprosy upravleniya dlya lineynykh raznostnykh uravneniy s posledeystviem" [Boundary-value problems and control for linear difference equations with aftereffect], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1993, No. 5, 3–16 (in Russian).
3. A. S. Balandin and V. V. Malygina, "Ob eksponentsial'noy ustoychivosti lineynykh differentsial'no-raznostnykh uravneniy neytral'nogo tipa" [On the exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2007, No. 7, 17–27 (in Russian).
4. A. S. Balandin and V. V. Malygina, "Asimptoticheskie svoystva resheniy odnogo klassa differentsial'nykh uravneniy neytral'nogo tipa" [Asymptotic properties of solutions for a class of differential equations of neutral type], *Mat. tr.* [Math. Proc.], 2020, **23**, No. 2, 3–49 (in Russian).
5. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], Maks Press, Moscow, 2016 (in Russian).
7. B. P. Demidovich, *Vvedenie v matematicheskuyu teoriyu ustoychivosti* [Introduction to the Mathematical Theory of Stability], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).

8. V. B. Kolmanovskiy and V. R. Nosov, *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeystviem* [Stability and Periodic Regimes of Regulated Systems with Aftereffect], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
9. L. A. Lyusternik and V. I. Sobolev, *Kratkiy kurs funktsional'nogo analiza* [Short Course in Functional Analysis], Vysshaya Shkola, Moscow, 1982 (in Russian).
10. V. V. Malygina and A. S. Balandin, "Asimptoticheskaya ustoychivost' odnogo klassa uravneniy neytral'nogo tipa" [Asymptotic stability of one class of equations of neutral type], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2021, **62**, No. 1, 106–116 (in Russian).
11. P. M. Simonov and A. V. Chistyakov, "Ob eksponentsial'noy ustoychivosti lineynykh differentsial'no-raznostnykh sistem" [On the exponential stability of linear differential-difference systems], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1997, No. 6, 37–49 (in Russian).
12. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
13. L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
14. A. Balandin, "On relation between the fundamental and Cauchy matrices of linear autonomous functional differential equations of neutral type," *Func. Differ. Equ.*, 2020, **27**, No. 3-4, 61–70.
15. A. Balandin and K. Chudinov, "On the asymptotic behavior of linear autonomous functional differential equations of neutral type," *Func. Differ. Equ.*, 2008, **15**, No. 1-2, 5–15.
16. W. Hahn, "Zur stabilität der lösungen von linearen differential-differenzengliechungen mit konstanten koeffizienten," *Math. Ann.*, 1956, **131**, 151–166.
17. S. Junca and B. Lombard, "Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation," *J. Differ. Equ.*, 2014, **256**, No. 7, 2368–2391.
18. V. Malygina and K. Chudinov, "On the asymptotic behavior of solutions to linear autonomous neutral functional differential equations," *Func. Differ. Equ.*, 2020, **27**, No. 3-4, 103–123.

V. V. Malygina
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
E-mail: mavera@list.ru

K. M. Chudinov
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
E-mail: cyril@list.ru