Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 98–115
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115
EDN: EBRPUC

ЭНТРОПИЙНЫЕ И РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА—ОРЛИЧА

Л. М. Кожевникова[1,2]

[1] *Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия*
[2] *Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия*

В работе установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений эллиптических уравнений второго порядка с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака—Орлича, и правой частью из пространства $L_1(\Omega)$. В нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева доказаны существование и единственность как энтропийных, так и ренормализованных решений задачи Дирихле в областях с липшицевой границей.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение второго порядка, энтропийное решение, ренормализованное решение, пространство Музилака—Орлича—Соболева, существование и единственность решений

Для цитирования: *Л. М. Кожевникова.* Энтропийные и ренормализованные решения нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака—Орлича// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 98–115. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115

1. Введение

В работе рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + b(\mathrm{x}, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.2}$$

в строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$, с конечной мерой. Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \dots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеют рост, определяемый функцией Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$. При этом на функцию M и сопряженную к ней функцию $\overline{M}$ не требуется никакое условие роста по переменной z. Предполагается, что по переменной $\mathrm{x} \in \Omega$ функция M подчиняется условию log-гельдеровской непрерывности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака—Орлича.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры и, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$. В работе [18] доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1.3}$$

с неоднородной анизотропной функцией Музилака—Орлича. Кроме того, в работе [15] авторы доказали существование и единственность ренормализованных решений эллиптических включений с многозначным оператором в условиях нерефлексивных и несепарабельных пространств Музилака—Орлича.

Авторы работ [7, 17] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\mathrm{div}\,(\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+\mathrm{c}(u))+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

с функцией $\mathrm{c}\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

В работах [16, 21], а также [8] (при $a_0\equiv 0$) доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\mathrm{div}\,(\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+\mathrm{c}(\mathrm{x},u))+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

с каратеодориевой функцией $\mathrm{c}(\mathrm{x},s_0):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, подчиняющейся условию роста по переменной s_0.

В работе [22] в пространствах Музилака—Орлича доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (1.3), (1.2), установлена их эквивалентность.

В настоящей статье получены некоторые свойства, доказаны единственность ренормализованного и существование энтропийного решений задачи Дирихле (1.1), (1.2) в нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева. Кроме того, доказана эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений рассматриваемой задачи. Заметим, что область Ω с конечной мерой может быть неограниченной. Ранее в работе [4] Л. М. Кожевниковой и А. П. Кашниковой аналогичный результат получен для решения уравнения (1.1) с более жесткими ограничениями на функцию $\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})$.

2. Пространства Музилака—Орлича—Соболева

В этом разделе будут приведены необходимые сведения из теории обобщенных N-функций и пространств Музилака—Орлича (см. [5, 13, 20]).

Определение 2.1. Пусть функция $M(\mathrm{x},z):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\mathrm{x},\cdot)$ — N-функция по $z\in\mathbb{R}$, то есть она является выпуклой вниз, неубывающей при $z\in\mathbb{R}_+$, четной, непрерывной, $M(\mathrm{x},0)=0$ для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и

$$\inf_{\mathrm{x}\in\Omega} M(\mathrm{x},z)>0\quad\text{для всех}\quad z\neq 0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{z\to 0}\sup_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=0,\qquad \lim_{z\to\infty}\inf_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=\infty; \tag{2.2}$$

2) $M(\cdot,z)$ — измеримая функция по $\mathrm{x}\in\Omega$ для любых $z\in\mathbb{R}$.

Такая функция $M(\mathrm{x},z)$ называется *функцией Музилака—Орлича*, или *обобщенной N-функцией*.

Сопряженная функция $\overline{M}(\mathrm{x},\cdot)$ к функции Музилака—Орлича $M(\mathrm{x},\cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $z\geqslant 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\mathrm{x},z)=\sup_{y\geqslant 0}\left(yz-M(\mathrm{x},y)\right).$$

Отсюда следует неравенство Юнга:

$$|zy|\leqslant M(\mathrm{x},z)+\overline{M}(\mathrm{x},y),\quad z,y\in\mathbb{R},\quad \mathrm{x}\in\Omega. \tag{2.3}$$

Функция Музилака—Орлича M удовлетворяет Δ_2-*условию*, если существуют константы $c>0$, $z_0\geqslant 0$ и функция $H\in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $|z|\geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$M(\mathrm{x},2z)\leqslant cM(\mathrm{x},z)+H(\mathrm{x}).$$

Δ_2-условие эквивалентно выполнению для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $|z|\geqslant z_0$ неравенства

$$M(\mathrm{x},lz)\leqslant c(l)M(\mathrm{x},z)+H_l(\mathrm{x}),\quad H_l\in L_1(\Omega),$$

где l — любое больше единицы, $c(l)>0$.

Существуют три класса Музилака—Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\Omega)$ — обобщенный класс Музилака—Орлича, состоящий из измеримых функций $v:\Omega\to\mathbb{R}$ таких, что
$$\varrho_{M,\Omega}(v)=\int\limits_\Omega M(\mathrm{x},v(\mathrm{x}))d\mathrm{x}<\infty;$$
2) $L_M(\Omega)$ — обобщенное пространство Музилака—Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга
$$\|v\|_{M,\Omega}=\inf\left\{\lambda>0 \;\Big|\; \varrho_{M,\Omega}\left(\frac{v}{\lambda}\right)\leqslant 1\right\};$$
3) $E_M(\Omega)$ — наибольшее линейное пространство, содержащееся в классе $\mathcal{L}_M(\Omega)$.

Очевидно, $E_M(\Omega)\subset\mathcal{L}_M(\Omega)\subset L_M(\Omega)$. Заметим, что для любого $v\in E_M(\Omega)$ и любого $\mu>0$ справедливо неравенство $\varrho_{M,\Omega}(v/\mu)<\infty$. Кроме того, для любого $v\in L_M(\Omega)$ найдется $\lambda>0$ такое, что $\varrho_{M,\Omega}(v/\lambda)<\infty$ (см. [20, п. 7.4]).

Ниже, в обозначениях $\|\cdot\|_{M,Q}$, $\varrho_{M,Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{\infty,Q}$ будем опускать индекс Q, если $Q=\Omega$. Для $v\in L_M(\Omega)$ справедливо неравенство:
$$\|v\|_M\leqslant\varrho_M(v)+1. \tag{2.4}$$

Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака—Орлича $M(\mathrm{x},z)$.

$(M1)$ *Функция* $M(\mathrm{x},z)$ *интегрируема, т. е.*
$$\varrho_M(z)=\int\limits_\Omega M(\mathrm{x},z)d\mathrm{x}<\infty,\quad\forall z\in\mathbb{R}.$$

$(M2)$ *Функция* $M(\mathrm{x},z)$ *удовлетворяет log-гельдеровой непрерывности по* x, *а именно: существуют константы* $c>0$, $b\geqslant 1$ *такие, что для всех* $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\Omega$, $|\mathrm{x}-\mathrm{y}|<\dfrac{1}{2}$, $z\in\mathbb{R}$ *и выполняется неравенство*
$$M(\mathrm{x},z)\leqslant\max\left\{|z|^{-c/\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|},b^{-c/\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|}\right\}M(\mathrm{y},z).$$

Пусть M и $\overline{M}$ подчиняются условию $(M1)$, тогда пространство $E_M(\Omega)$ сепарабельно и $(E_M(\Omega))^*=L_{\overline{M}}(\Omega)$. Если дополнительно M удовлетворяет Δ_2-условию, то $E_M(\Omega)=\mathcal{L}_M(\Omega)=L_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ сепарабельно. Пространство $L_M(\Omega)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда функции Музилака—Орлича M и $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}\in L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v\in L_M(\Omega)$ ($v^j\underset{j\to\infty}{\overset{M}{\to}}v$), если существует константа $\lambda>0$ такая, что
$$\lim_{j\to\infty}\varrho_M\left(\frac{v^j-v}{\lambda}\right)=0.$$
Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Для двух сопряженных функций Музилака—Орлича M и $\overline{M}$, если $u\in L_M(\Omega)$ и $v\in L_{\overline{M}}(\Omega)$, то выполняется неравенство Гельдера:
$$\left|\int\limits_\Omega u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})d\mathrm{x}\right|\leqslant 2\|u\|_M\|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака—Орлича—Соболева
$$W^1L_M(\Omega)=\{v\in L_M(\Omega)\;\big|\;\nabla v\in(L_M(\Omega))^n\}$$
с нормой
$$\|v\|_M^1=\|v\|_M+\||\nabla v|\|_M.$$

Для краткости введем обозначения $(L_M(\Omega))^n=\mathrm{L}_M(\Omega)$, $(L_M(\Omega))^{n+1}=\mathbf{L}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^n=\mathrm{E}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^{n+1}=\mathbf{E}_M(\Omega)$. Пространство $W^1L_M(\Omega)$ отождествляется с подпространством произведения $\mathbf{L}_M(\Omega)$ и является замкнутым по топологии $\sigma(\mathbf{L}_M,\mathbf{E}_{\overline{M}})$.

Пространство $\mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_M)$ в $W^1 L_M(\Omega)$. Пространство $\mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ банахово (см. [20, Theorem 10.2]).

Положим

$$\mathring{V}_M(\Omega) = \{u \in \mathring{W}_1^1(\Omega) : \nabla u \in \mathrm{L}_M(\Omega)\};$$

очевидно, что $\mathring{W}^1 L_M(\Omega) \subset \mathring{V}_M(\Omega)$.

3. Предположения и формулировка результатов

Предполагается, что функции

$$b(\mathrm{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

входящие в уравнение (1.1), измеримы по $\mathrm{x} \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$ и выполнено следующее условие.

(M) *Существуют неотрицательные функции* $\psi \in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $\phi \in L_1(\Omega)$ *и положительные константы* $\widehat{a}, \overline{a}, d$ *такие, что для п.в.* $\mathrm{x} \in \Omega$ *и для любых* $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$ *справедливы неравенства*:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a} M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|) - \phi(\mathrm{x}); \tag{3.1}$$

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})| \leqslant \psi(\mathrm{x}) + \widehat{a}\overline{M}^{-1} M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|); \tag{3.2}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0. \tag{3.3}$$

Здесь функция Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ *подчиняется условиям* $(M1)$, $(M2)$, *сопряженная к* M *функция* $\overline{M}(\mathrm{x}, z)$ *удовлетворяет условию* $(M1)$, $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i t_i$, $|\mathrm{s}| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2\right)^{1/2}$.

Предполагается, что функция $b(\mathrm{x}, s_0)$ — неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\mathrm{x}, 0) = 0$ для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, поэтому для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\mathrm{x}, s_0) s_0 \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Сформулируем дополнительное условие, которое используется в теореме существования. Будем считать, что для любого $k > 0$

$$\sup_{|s_0| \leqslant k} |b(\mathrm{x}, s_0)| = \Phi_k(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega). \tag{3.5}$$

Заметим, что в работах [4, 22] вместо условий (3.1), (3.2) на функцию $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})$ накладывается более сильное условие:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a}(M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) + \overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}|)), \quad \overline{a} \in (0, 1).$$

Условию (M) удовлетворяют, например, функции

$$a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) \frac{s_i}{|\mathrm{s}|^2} + \psi_i(\mathrm{x}), \quad \psi_i \in E_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \mathring{V}_M(\Omega)$ при любом $k > 0$. Заметим, что, как следствие из [9, лемма 2.1], для каждой функции $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ существует единственная измеримая функция $Z_u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega : |u| < k|\}} Z_u \quad \text{для почти каждого } \mathrm{x} \in \Omega \text{ и для каждого } k > 0,$$

где χ_Q — характеристическая функция измеримого множества Q. Обозначим через $Z_u = \nabla u$ обобщенный градиент u.

Таким образом, для любой функции $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ и любого $k > 0$ имеем:

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega : |u| < k\}} \nabla u \in \mathrm{L}_M(\Omega). \tag{3.6}$$

Введем обозначение $\langle u \rangle = \int\limits_{\Omega} u d\mathrm{x}$.

Определение 3.1. *Энтропийным решением* задачи (1.1), (1.2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что

1) $b(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega)$;

2) $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \in \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega)$ при всех $k > 0$;
3) при всех $k > 0$ и $\xi \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)T_k(u - \xi)\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi)\rangle \leqslant 0. \tag{3.7}$$

Определение 3.2. *Ренормализованным решением* задачи (1.1), (1.2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что

1) $b(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega)$;
2) $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \in \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega)$ при всех $k > 0$;
3) имеется предел

$$\lim_{h\to\infty} \int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<h+1\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} = 0; \tag{3.8}$$

4) для любой функции $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ и любой функции $\xi \in C_0^1(\Omega)$ справедливо равенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)S(u)\xi\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi\nabla u + S(u)\nabla\xi)\rangle = 0. \tag{3.9}$$

Основными результатами работы являются теоремы 3.1–3.3, в которых предполагается, что область Ω липшицева и выполнено условие (M).

Теорема 3.1. *Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ является ренормализованным решением задачи* (1.1), (1.2) *тогда и только тогда, когда эта функция — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2)*. При этом в интегральном неравенстве* (3.7) *имеет место знак равенства*

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)T_k(u - \xi)\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi)\rangle = 0. \tag{3.7*}$$

Теорема 3.2. *Если u^1, u^2 — ренормализованные или энтропийные решения задачи* (1.1), (1.2)*, то $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.*

Теорема 3.3. *Пусть дополнительно выполнено условие* (3.5)*, тогда существует энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2)*.*

Из теорем 3.1–3.3 следуют эквивалентность, существование и единственность энтропийного и ренормализованного решений задачи (1.1), (1.2).

4. Подготовительные сведения

В этом разделе будут установлены некоторые свойства энтропийного и ренормализованного решений задачи (1.1), (1.2) и приведены вспомогательные леммы. Предполагается, что область Ω липшицева и выполнено условие (M). Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Пользуясь выпуклостью функции $\overline{M}$, из (3.2) выводим оценку:

$$\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})|}{2\widehat{a}}\right) \leqslant \frac{1}{2}M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|) + \frac{1}{2}\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{\psi}{\widehat{a}}\right) = \frac{1}{2}M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|) + \frac{1}{2}\Psi(\mathrm{x}) \tag{4.1}$$

с функцией $\Psi \in L_1(\Omega)$.

Предложение 4.1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримая функция такая, что при всех $k \geqslant 1$ имеем $M(\mathrm{x}, d|\nabla T_k(v)|) \in L_1(\Omega)$ и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{\Omega:|v|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla v|)d\mathrm{x} \leqslant C_1 k. \tag{4.2}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $k_0(C_1, n)$, $h_0(C_1, n)$ такие, что справедливы неравенства

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |v| \geqslant k\}) < \varepsilon, \quad k \geqslant k_0, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |\nabla v| \geqslant h\}) < \varepsilon, \quad h \geqslant h_0. \tag{4.4}$$

Соотношение (4.3) доказано в [22, Proposition 3.1], а (4.4) устанавливается аналогично в [22, Theorem 1.6].

Лемма 4.1. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *тогда*

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |u| \geqslant k\}) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.5}$$

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |\nabla u| \geqslant h\}) \to 0, \quad h \to \infty. \tag{4.6}$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} = 0. \tag{4.7}$$

Доказательство. Неравенство (3.7) при $\xi = 0$ принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} b(\mathrm{x}, u)T_k(u)d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} fT_k(u)d\mathrm{x}.$$

Учитывая неравенства (3.1), (3.4), выводим оценку

$$\overline{a} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |f||T_k(u)|d\mathrm{x} + \|\phi\|_1 \leqslant k\|f\|_1 + \|\phi\|_1. \tag{4.8}$$

Отсюда, применяя предложение 4.1, устанавливаем (4.5), (4.6). □

Перепишем неравенство (4.8) в виде

$$\frac{\overline{a}}{k} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |f|\frac{|T_k(u)|}{k}d\mathrm{x} + \frac{\|\phi\|_1}{k}. \tag{4.9}$$

Поскольку $\dfrac{|T_k(u)|}{k} \leqslant 1$, $\dfrac{T_k(u)}{k} \to 0$ п.в. в Ω при $k \to \infty$ и $f \in L_1(\Omega)$, то по теореме Лебега имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} |f|\frac{|T_k(u)|}{k}d\mathrm{x} = 0. \tag{4.10}$$

Соединяя (4.9) и (4.10), выводим (4.7).

Лемма 4.2 (см. [10, Lemma 2]). *Пусть функции $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_M(\Omega)$ таковы, что*

$$\|v^j\|_M \leqslant C, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$v^j \to v \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Тогда $v \in L_M(\Omega)$ и $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, в топологии $\sigma(L_M, E_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$.

Приведем теорему Витали в следующей форме (см. [1, гл. III, § 6, теорема 15]).

Лемма 4.3. *Пусть последовательность $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_1(\Omega)$, и*

$$v^j \to v \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Тогда для сходимости

$$v^j \to v \quad \textit{сильно в} \quad L_1(\Omega), \quad j \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие равномерной интегрируемости:

$$\lim_{\operatorname{meas}(Q)\to 0} \int\limits_{Q} |v^j(\mathrm{x})|d\mathrm{x} = 0 \quad \textit{равномерно по} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Следствием теоремы Витали является следующая лемма.

Лемма 4.4 (см. [6, Lemma 2]). *Пусть v, $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_M(\Omega)$ и*

$$v^j \overset{M}{\to} v \quad \textit{модулярно в} \quad L_M(\Omega), \quad j \to \infty.$$

Тогда $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, в топологии $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$.

Лемма 4.5. *Пусть функции $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_\infty(\Omega)$ таковы, что $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ограничена в $L_\infty(\Omega)$ и*

$$v^j \to v \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j\to\infty.$$

Тогда $v \in L_\infty(\Omega)$ и $v^j \rightharpoonup v$, $j\to\infty$, в топологии $\sigma(L_\infty, L_1)$ пространства $L_\infty(\Omega)$.

Если, кроме того, $g \in L_M(\Omega)(E_M(\Omega))$, то

$$v^j g \to vg \quad \text{модулярно (сильно) в} \quad L_M(\Omega)(E_M(\Omega)), \quad j\to\infty.$$

Доказательство леммы 4.5 следует из теоремы Лебега.

Лемма 4.6. *Если u — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *то неравенство* (3.7) *справедливо для любой функции $\xi \in \mathring{V}_M(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.*

Доказательство аналогично [4, лемма 8].

Лемма 4.7. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *тогда при всех $k>0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{h\to\infty} \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |u|<h+k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} = 0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Положив в неравенстве (3.7) $\xi = T_h(u)$, будем иметь

$$\int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |u|<k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\cdot \nabla u d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |u|\}} b(\mathrm{x}, u) T_k(u - T_h(u))d\mathrm{x} \leqslant k \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |u|\}} |f| d\mathrm{x}.$$

Ввиду (3.4) справедливо неравенство

$$b(\mathrm{x}, u)T_k(u - T_h(u)) \geqslant 0.$$

Учитывая (3.1), для любого $k>0$ устанавливаем:

$$\overline{a} \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |u|<k+h\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |u|\}} (k|f| + \phi)d\mathrm{x}.$$

Отсюда, ввиду того, что $f, \phi \in L_1(\Omega)$, применяя (4.5) и переходя к пределу при $h\to\infty$, выводим соотношение (4.11). $\square$

Лемма 4.8. *Если u является ренормализованным решением задачи* (1.1), (1.2), *то равенство* (3.9) *справедливо для любой функции $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ и любой функции $\xi \in \mathring{V}_M(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.*

Доказательство аналогично [4, лемма 9].

Лемма 4.9. *Пусть u — ренормализованное решение задачи* (1.1), (1.2), *тогда справедливы соотношения* (4.5)–(4.7).

Доказательство. Зафиксируем $k>0$ и пусть $\sigma > k$. Определим функцию $S_\sigma \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $S_\sigma(r) = 1$, $|r| \leqslant \sigma$, $S_\sigma(r) = 0$, $|r| \geqslant \sigma+1$, $0\leqslant S_\sigma \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. Очевидно, что $\operatorname{supp} S_\sigma \subset [-\sigma-1, \sigma+1]$ и $\operatorname{supp} S'_\sigma \subset [-\sigma-1, -\sigma]\cup[\sigma, \sigma+1]$. Положим в (3.9) $S = S_\sigma$, $\xi = T_k(u)$, получим

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 + J_3 = \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) S_\sigma(u) \cdot \nabla T_k(u)\rangle + \left\langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) S'_\sigma(u)\cdot \nabla u T_k(u)\right\rangle +\\ + \langle b(\mathrm{x}, u) S_\sigma(u) T_k(u)\rangle = \langle f S_\sigma(u) T_k(u)\rangle. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Оценим каждый интеграл:

$$J_1 = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) S_\sigma(u)\cdot \nabla T_k(u) d\mathrm{x} = \int\limits_{\{\Omega: |u|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\cdot \nabla u d\mathrm{x}, \tag{4.13}$$

$$|J_2| \leqslant C_0 \int\limits_{\{\Omega: \sigma\leqslant |u|\leqslant \sigma+1\}} |T_k(u)||\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\cdot \nabla u| d\mathrm{x} \leqslant C_2 k \int\limits_{\{\Omega: \sigma\leqslant |u|\leqslant \sigma+1\}} |\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)||\nabla u| d\mathrm{x}. \tag{4.14}$$

Используя (3.4), выводим неравенство

$$J_3 = \int\limits_\Omega b(\mathrm{x}, u) S_\sigma(u) T_k(u) d\mathrm{x} \geqslant 0. \tag{4.15}$$

Соединяя (4.12)–(4.15), установим неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega}|f||T_k(u)|d\mathrm{x} + C_0 k \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|\leqslant\sigma+1\}} |\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)||\nabla u|d\mathrm{x}.$$

Далее, применяя неравенство (2.3), используя оценки (3.1), (4.1), установим соотношения:

$$\overline{a}\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x},d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega}|f||T_k(u)|d\mathrm{x} + \|\phi\|_1 + \frac{\widehat{a}}{d}C_2 k \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|\leqslant\sigma+1\}} \left(3M(\mathrm{x},d|\nabla u|)+\Psi\right)d\mathrm{x}. \tag{4.16}$$

Учитывая условие 3) определения 3.2, перейдем к пределу при $\sigma\to\infty$, получим неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x},d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant C_3 + C_4 k \leqslant C_5 k, \quad k\geqslant 1.$$

Отсюда, согласно предложению 4.1, устанавливаем (4.5), (4.6).

Теперь, снова применяя условие 3) определения 3.2 и (4.5), перейдем к пределу в (4.16) при $\sigma\to\infty$, установим неравенство (4.8). Соотношение (4.7) является следствием неравенства (4.8) (см. лемму 4.1). □

Лемма 4.10 (см. [12, лемма 2]). *Пусть* $(X,\mathcal{T},\mathrm{meas})$ — *измеримое пространство такое, что* $\mathrm{meas}(X)<\infty$. *Пусть* $\gamma: X\to[0,+\infty]$ — *измеримая функция такая, что* $\mathrm{meas}(\{\mathrm{x}\in X:\gamma(\mathrm{x})=0\})=0$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$ *такое, что неравенство*

$$\int\limits_{Q}\gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x}<\delta$$

влечет $\mathrm{meas}\,(Q)<\varepsilon$.

Лемма 4.11 (см. [19, Lemma A.4]). *Пусть* $v^j:\Omega\to\mathbb{R},\ j\in\mathbb{N}$ — *измеримые функции такие, что*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} M(\mathrm{x},v^j)d\mathrm{x}<\infty.$$

Тогда последовательность $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *равномерно интегрируема в* $L_1(\Omega)$.

Замечание 4.1. Пусть $v^j,\ v:\Omega\to\mathbb{R},\ j\in\mathbb{N}$ — измеримые функции такие, что $v^j\to v$ п.в. в Ω, $j\to\infty$. Тогда $\chi_{\{\Omega:|v^j|\leqslant k\}}\to\chi_{\{\Omega:|v|\leqslant k\}}$ п.в. на Ω, $j\to\infty$ для таких k, что

$$\mathrm{meas}(\{\Omega:|v|=k\})=0. \tag{4.17}$$

Для области Ω с конечной мерой таких k, для которых условие (4.17) не выполнено, может быть не более, чем счетное число (см. [14, Lemma 9]). Положительные числа k, для которых выполнено условие (4.17), будем называть «*правильными*» для функции v.

5. Эквивалентность энтропийного и ренормализованного решений

Для уравнения (1.3) со степенной нелинейностью[1] эквивалентность энтропийного и ренормализованного решений доказана А. А. Ковалевским в работе [3, гл. I, теорема 1.1.6].

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $u\in\mathring{\mathcal{T}}^1_M(\Omega)$ — ренормализованное решение задачи (1.1), (1.2). Зафиксируем произвольные $\varphi\in\mathring{V}_M(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ и $k>0$. Пусть $\widehat{k}=k+\|\varphi\|_\infty$, тогда справедливо неравенство

$$|\nabla T_k(u-\varphi)|\leqslant|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|+|\nabla\varphi| \quad \text{для п.в. } \mathrm{x}\in\Omega.$$

Поскольку $T_{\widehat{k}}(u)\in\mathring{V}_M(\Omega)$, то имеем:

$$T_k(u-\varphi)\in\mathring{V}_M(\Omega), \tag{5.1}$$

$$\nabla T_k(u-\varphi)=(\nabla u-\nabla\varphi)\chi_{\{\Omega:|u-\varphi|<k\}} \quad \text{для п.в. } \mathrm{x}\in\Omega.$$

[1]функция а удовлетворяет условиям (3.1), (3.2) при $M(\mathrm{x},z)=|z|^p,\ p\in(1,n)$

Определим функцию $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ такую, что $h(r)=1$ при $|r|\leqslant 1$, $h(r)=0$ при $|r|\geqslant 2$, $0\leqslant h\leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. Для любого $\sigma>0$ положим $h_\sigma(r)=h(r/\sigma),\ r\in\mathbb{R}$.

Запишем (3.9) с $S(r)=h_\sigma(r)$, $\xi=T_k(u-\varphi)$:

$$I_1+I_2=\langle \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u h'_\sigma(u)T_k(u-\varphi)\rangle+\langle(\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)+(b(\mathrm{x},u)-f)T_k(u-\varphi))h_\sigma(u)\rangle=0. \tag{5.2}$$

Используя свойства функции h_σ, для любого $\sigma>0$ устанавливаем

$$|I_1|\leqslant C_1\frac{k}{\sigma}\int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|<2\sigma\}}|\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)||\nabla u|d\mathrm{x}.$$

Применяя (2.3), (4.1), выводим неравенство

$$|I_1|\leqslant C_2\frac{k}{\sigma}\int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|<2\sigma\}}(M(\mathrm{x},d|\nabla u|)+\Psi(\mathrm{x}))\,d\mathrm{x}.$$

Отсюда благодаря (4.7) заключаем, что

$$\lim_{\sigma\to\infty}I_1=0.$$

Поскольку $f,\ b(\mathrm{x},u),\ \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<\widehat{k}\}}\cdot\nabla T_k(u-\varphi)\in L_1(\Omega)$ (см. (5.1) и пункты 1), 2) определения 3.2), то в интеграле I_2 согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при $\sigma\to\infty$. В итоге выводим интегральное тождество

$$\langle(\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\varphi)+(b(\mathrm{x},u)-f)T_k(u-\varphi)\rangle=0.$$

Следовательно, u — энтропийное решение задачи (1.1), (1.2).

Пусть $u\in\mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ — энтропийное решение задачи (1.1), (1.2) и $S\in C_0^1(\mathbb{R})$, $\varphi\in\mathring{V}_M(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$. Существуют числа $L,L_1>0$ такие, что $\operatorname{supp}S\subset[-L,L]$ и $|S(r)|\leqslant L_1$ для любых $r\in\mathbb{R}$. Зафиксируем $k>L_1\|\varphi\|_\infty$, и пусть $m\in\mathbb{N},\ m>L$. Положим

$$\varphi_m=T_m(u)-S(T_m(u))\varphi\in\mathring{V}_M(\Omega)\cap L_\infty(\Omega),$$

имеем

$$\nabla\varphi_m=(\nabla u-S'(u)\varphi\nabla u-S(u)\nabla\varphi)\chi_{\{\Omega:|u|<m\}}\quad\text{п.в. на}\quad\Omega. \tag{5.3}$$

Положим в (3.7) $\xi=\varphi_m$, получим

$$\int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot(\nabla u-\nabla\varphi_m)d\mathrm{x}+\int\limits_\Omega(b(\mathrm{x},u)-f)T_k(u-\varphi_m)d\mathrm{x}\leqslant 0.$$

Если $|u(\mathrm{x})|<m$, то для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ верно неравенство $|u-\varphi_m|=|S(u)||\varphi(\mathrm{x})|\leqslant\|\varphi\|_\infty L_1<k$. Следовательно, для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ имеет место вложение:

$$\{\Omega:|u|<L\}\subset\{\Omega:|u|<m\}\subset\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}.$$

Тогда, используя (5.3) установим

$$\int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x}+\int\limits_{\{\Omega:|u|<L\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\big(\nabla u\varphi S'(u)+\nabla\varphi S(u)\big)\,d\mathrm{x}+$$
$$+\int\limits_\Omega(b(\mathrm{x},u)-f)T_k(u-\varphi_m)d\mathrm{x}=I_m^1+I_m^2+I_m^3\leqslant 0. \tag{5.4}$$

Учитывая то, что $S(r)=S'(r)=0$ для $|r|\geqslant L$, получаем

$$I_m^2=\int\limits_\Omega\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\big(\nabla u\varphi S'(u)+\nabla\varphi S(u)\big)\,d\mathrm{x}. \tag{5.5}$$

Далее, применяя (3.1), выводим

$$I_1^m=\int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x}=$$

$$= \int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u+\phi)\,(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x} - \int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}} \phi(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x} \geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_{\Omega} \phi(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x}. \tag{5.6}$$

Соединяя (5.4), (5.5), (5.6), устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\big(\nabla u\varphi S'(u)+\nabla\varphi S(u)\big)\,d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\Omega}(b(\mathrm{x},u)-f)T_k(u-T_m(u)+S(T_m(u))\varphi)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega}\phi(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x}. \tag{5.7}$$

Учитывая принадлежность $b(\mathrm{x},u), f, \phi \in L_1(\Omega)$ и применяя теорему Лебега, в неравенстве (5.7) перейдем к пределу $m\to\infty$, получим

$$\langle \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\big(\nabla u\varphi S'(u)+\nabla\varphi S(u)\big)\rangle + \langle (b(\mathrm{x},u)-f)S(u)\varphi\rangle \leqslant 0.$$

Очевидно, что такое же неравенство справедливо для $-\varphi$. Следовательно, для u выполняется равенство (3.9). Из леммы 4.7 следует справедливость соотношения (3.8). Таким образом, доказано, что u — ренормализованное решение задачи (1.1), (1.2). □

6. Единственность энтропийного и ренормализованного решений

Доказательство теоремы 3.2. Единственность энтропийного решения доказывается аналогично доказательству [4, теорема 4].

Пусть u^1, u^2 — ренормализованные решения задачи (1.1), (1.2). Запишем (3.9) для u^1 и u^2 с $S=h_\sigma$, $\xi=T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^2)$ и $\xi=T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)$, соответственно, затем вычтем из первого второе, получим равенство

$$\begin{aligned} J_1+J_2+J_3+J_4 = \big\langle\big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\big\rangle+\\ +\big\langle\big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla u^1 T_k(u^1-u^2)h'_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\big\rangle+\\ +\big\langle\big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla u^2 T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h'_\sigma(u^2)\big\rangle+\\ +\big\langle\big(B^1-B^2\big)\,T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\big\rangle=0.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь $\mathrm{A}^i(\mathrm{x})=\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^i),\ B^i(\mathrm{x})=b(\mathrm{x},u^i),\ i=1,2.$

Оценим каждый интеграл $J_k,\ k=1,2,3,4$. Учитывая (2.3), (4.1), выводим неравенство

$$|J_2| \leqslant 2C_1\frac{k}{\sigma}\Big(\big\|\overline{M}\left(\mathrm{x},|\mathrm{A}^1|/(2\widehat{a})\right)\big\|_{1,\{\Omega:\sigma\leqslant|u^1|<2\sigma\}}+\big\|\overline{M}\left(\mathrm{x},|\mathrm{A}^2|/(2\widehat{a})\right)\big\|_{1,\{\Omega:|u^2|<2\sigma\}}+$$

$$+\,2\,\big\|M(\mathrm{x},d|\nabla u^1|)\big\|_{1,\{\Omega:\sigma\leqslant|u^1|<2\sigma\}}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_1\frac{k}{\sigma}\left(5\|M(\mathrm{x},d|\nabla u^1|)\|_{1,\{\Omega:|u^1|<2\sigma\}}+2\|\Psi\|_1+\|M(\mathrm{x},d|\nabla u^2|)\|_{1,\{\Omega:|u^2|<2\sigma\}}\right).$$

Благодаря (4.7) имеем:

$$\lim_{\sigma\to\infty}|J_2|=0. \tag{6.2}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\sigma\to\infty}|J_3|=0. \tag{6.3}$$

Пользуясь монотонностью функции $b(\mathrm{x},s_0)$, выводим

$$J_4\geqslant 0. \tag{6.4}$$

Соединяя (6.1), (6.4), устанавливаем неравенство

$$J_1=\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}\big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)d\mathrm{x}\leqslant|J_2|+|J_3|.$$

Пользуясь леммой Фату и соотношениями (6.2), (6.3), выполняя в последнем неравенстве предельный переход при $\sigma \to \infty$, устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^1) - \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^2)\cdot\nabla(u^1-u^2)d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Это противоречит условию (3.3), поэтому $\nabla(u^1-u^2) = 0$ п.в. в $\{\Omega : |u^1-u^2| < k\}$ при любом $k > 0$. Следовательно, $\nabla T_k(u^1-u^2) = 0$ п.в. в Ω. Отсюда, ввиду принадлежностей $T_k(u^1), T_k(u^2) \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$, заключаем, что $T_k(u^1-u^2) = 0$ п.в. в Ω для любого $k > 0$. Ввиду произвольности k устанавливаем, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω. □

7. Существование энтропийного решения

Доказательство теоремы 3.3. Запишем доказательство теоремы для неограниченной области Ω.

Шаг 1. Энтропийное решение строится как предел последовательности слабых решений аппроксимационной задачи для уравнения

$$-\mathrm{div}\ \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u) + b^m(\mathrm{x},u) = f^m(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x}\in\Omega(m), \quad m\in\mathbb{N}, \tag{7.1}$$

с функциями

$$f^m(\mathrm{x}) = T_m f(\mathrm{x})\chi_{\Omega(m)}, \quad b^m(\mathrm{x},s_0) = T_m b(\mathrm{x},s_0)\chi_{\Omega(m)}.$$

Несложно показать, что

$$f^m \to f \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m\to\infty, \tag{7.2}$$

и при этом

$$|f^m(\mathrm{x})| \leqslant |f(\mathrm{x})|, \quad |f^m(\mathrm{x})| \leqslant m\chi_{\Omega(m)}, \quad \mathrm{x}\in\Omega, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{7.3}$$

Очевидно, что

$$|b^m(\mathrm{x},s_0)| \leqslant |b(\mathrm{x},s_0)|, \quad |b^m(\mathrm{x},s_0)| \leqslant m\chi_{\Omega(m)}, \quad \mathrm{x}\in\Omega, \quad s_0\in\mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Кроме того, применяя (3.4), устанавливаем неравенство

$$b^m(\mathrm{x},s_0)s_0 \geqslant 0, \quad \mathrm{x}\in\Omega, \quad s_0\in\mathbb{R}. \tag{7.5}$$

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ существует обобщенное решение $u^m \in \mathring{V}_M(\Omega(m))$ уравнения (7.1) (см. [11, Theorem 13]). Продолжим u^m нулем на $\Omega\setminus\Omega(m)$, тогда для любой функции $v \in \mathring{V}_M^1(\Omega(l)) \cap L_\infty(\Omega(l))$, $l \leqslant m$, выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(\mathrm{x},u^m) - f^m(\mathrm{x}))\, v\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)\cdot\nabla v\rangle = 0, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Шаг 2. В этом шаге установим априорные оценки для последовательности $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Положив в (7.6) $v = T_{k,h}(u^m) = T_k(u^m - T_h(u^m))$, $h,k>0$, будем иметь

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)\cdot\nabla u^m d\mathrm{x} + \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} b^m(\mathrm{x},u^m)T_{k,h}(u^m)d\mathrm{x} \leqslant k \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} |f^m|d\mathrm{x}. \tag{7.7}$$

Благодаря (7.5) на множестве $\{\Omega : h \leqslant |u^m|\}$ справедливо неравенство

$$b^m(\mathrm{x},u^m)T_{k,h}(u^m) \geqslant 0.$$

Учитывая это, из (7.7), применяя (7.3), выводим неравенство

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)\cdot\nabla u^m d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k+h\}} |b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x} \leqslant k \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} |f|d\mathrm{x}.$$

Отсюда, используя (3.1), устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k+h\}} |b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}} (|f| + \phi)\, d\mathrm{x}, \quad k\geqslant 1, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{7.8}$$

Теперь в качестве пробной функции в (7.6) возьмем $T_k(u^m)$. Выполняя аналогичные преобразования, устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla u^m d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant C_1 k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, применяя (3.1), выводим

$$\overline{a} \int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u^m|) d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant C_1 k + C_2. \tag{7.9}$$

И наконец, благодаря (7.4), (3.5), устанавливаем:

$$\sup_{|u^m|\leqslant k} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| \leqslant \sup_{|u^m|\leqslant k} |b(\mathrm{x}, u^m)| = \Phi_k(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{7.10}$$

Из оценок (7.9), (7.10) имеем:

$$\int\limits_{\Omega} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} \Phi_k(\mathrm{x}) d\mathrm{x} + \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant C_3(k). \tag{7.11}$$

Кроме того, из (7.9) следует оценка

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u^m|) d\mathrm{x} = \int\limits_{\Omega} M(\mathrm{x}, d|\nabla T_k(u^m)|) d\mathrm{x} \leqslant C_4 k, \quad k \geqslant 1. \tag{7.12}$$

Соединяя (4.1), (7.12) выводим оценку

$$\int\limits_{\Omega} \overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m)|}{2\widehat{a}}\right) d\mathrm{x} \leqslant C_5(k). \tag{7.13}$$

Шаг 3. Из оценки (7.12), применяя предложение 4.1, имеем:

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |u^m| \geqslant k\}) \to 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad k \to \infty, \tag{7.14}$$

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |\nabla u^m| \geqslant h\}) \to 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad h \to \infty. \tag{7.15}$$

Теперь установим сходимость по подпоследовательности:

$$u^m \to u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{7.16}$$

Из оценки (7.12) следует ограниченность множества $\{\nabla T_k(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L_M(\Omega)$, а следовательно в $L_1(\Omega)$. Тогда $\{T_k(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathring{W}_1^1(\Omega)$ ограничена в пространстве $\mathring{W}_1^1(\Omega)$.

Отсюда для любого фиксированного $k > 0$ следует сходимость $T_k(u^m) \to v_k$ в $L_1(\Omega)$, а также сходимость по подпоследовательности $T_k(u^m) \to v_k$ почти всюду в Ω. Далее, сходимость (7.16) устанавливается так же, как в работе [2, п. 5.3]. Из сходимости (7.16) следует, что для любого $k > 0$

$$T_k(u^m) \to T_k(u) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty.$$

В силу доказанного справедлива сходимость

$$T_k(u^m) \to T_k(u) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{7.17}$$

Докажем, что

$$b^m(\mathrm{x}, u^m) \to b(\mathrm{x}, u) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{7.18}$$

Учитывая сходимость (7.16), имеем:

$$b^m(\mathrm{x}, u^m) \to b(\mathrm{x}, u) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{7.19}$$

Из (7.8) при $k = 1$ для любого $h > 0$ получаем:

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h+1\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} (|f| + \phi) d\mathrm{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ввиду того, что $f,\phi\in L_1(\Omega)$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, учитывая (7.14), для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать достаточно большое $h(\varepsilon)>1$ такое, что:

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}}|b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x}<\frac{\varepsilon}{2},\quad m\in\mathbb{N}. \tag{7.20}$$

Пусть E — произвольное измеримое подмножество в Ω. Применяя (7.10), имеем:

$$\int\limits_E|b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x}\leqslant\int\limits_E\Phi_h(\mathrm{x})d\mathrm{x}+\int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}}|b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x}. \tag{7.21}$$

Из принадлежности $\Phi_h\in L_1(\Omega)$ имеем:

$$\int\limits_E\Phi_h(\mathrm{x})d\mathrm{x}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7.22}$$

для любого E такого, что meas $(E)<\alpha(\varepsilon)$.

Объединяя (7.20)–(7.22), устанавливаем

$$\int\limits_E|b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x}<\varepsilon\quad\forall\ E\quad\text{такого, что meas }(E)<\alpha(\varepsilon),\quad m\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, установлена равномерная интегрируемость последовательности $\{b^m(\mathrm{x},u^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Учитывая сходимость (7.19), применяя лемму 4.3, устанавливаем сходимость (7.18).

Шаг 4. Докажем сходимость:

$$\nabla u^m\to\nabla u\quad\text{п.в. в}\quad\Omega,\quad m\to\infty. \tag{7.23}$$

Из сходимости (7.16) следует сходимость по мере, а значит и фундаментальность u^m по мере:

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega:|u^m-u^l|\geqslant\nu\})\to0\quad\text{при}\quad m,l\to\infty\quad\text{для любого}\quad\nu>0. \tag{7.24}$$

Сначала установим сходимость:

$$\nabla u^m\to\nabla u\quad\text{по мере},\quad m\to\infty. \tag{7.25}$$

Для $\nu,\theta,h>0$ рассмотрим множество

$$E_{\nu,\theta,h}=\{\Omega:|u^l-u^m|<\nu,\ |\nabla u^l|\leqslant h,\ |\nabla u^m|\leqslant h,\ |u^l|<h,\ |u^m|<h,\ |\nabla(u^l-u^m)|\geqslant\theta\}.$$

Поскольку справедливо включение

$$\{\Omega:|\nabla(u^l-u^m)|\geqslant\theta\}\subset\{\Omega:|\nabla u^l|>h\}\cup\{\Omega:|\nabla u^m|>h\}\cup$$
$$\cup\{\Omega:|u^l-u^m|\geqslant\nu\}\cup\{\Omega:|u^l|\geqslant h\}\cup\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}\cup E_{\nu,\theta,h},$$

то, в силу (7.14), (7.15), выбором h добьемся неравенств

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega:|\nabla(u^l-u^m)|\geqslant\theta\})<4\varepsilon+\mathrm{meas}\,(E_{\nu,\theta,h})+\mathrm{meas}\,(\{\Omega:|u^l-u^m|\geqslant\nu\}),\quad m,l\in\mathbb{N}. \tag{7.26}$$

По условию монотонности (3.3) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(\mathrm{x})>0$ п.в. в Ω такая, что при $|\mathrm{s}|\leqslant h$, $|\mathrm{t}|\leqslant h$, $|\mathrm{s}-\mathrm{t}|\geqslant\theta$ с достаточно малым θ справедливо неравенство

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})-\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{t}))\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{t})\geqslant\gamma(\mathrm{x})\quad\text{п.в. в}\quad\Omega. \tag{7.27}$$

Введем обозначение $A_0^m(\mathrm{x})=f^m(\mathrm{x})+b^m(\mathrm{x},u^m)$. Из (7.3), (7.11) следует ограниченность последовательности $\{A_0^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Запишем (7.6) дважды для u^m и u^l и вычтем из первого второе, получим

$$\int\limits_\Omega\Big(\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)-\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^l)\Big)\cdot\nabla v d\mathrm{x}+\int\limits_\Omega(A_0^m-A_0^l)v d\mathrm{x}=0.$$

Подставляя пробную функцию $v = T_\nu(u^m - u^l)$, устанавливаем соотношение

$$\int\limits_\Omega \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big)\cdot \nabla T_\nu(u^m - u^l) d\mathrm{x} = -\int\limits_\Omega (A_0^m - A_0^l) T_\nu(u^m - u^l) d\mathrm{x} \leqslant C_6\nu, \quad m, l \in \mathbb{N}. \tag{7.28}$$

Далее, применяя (7.27), выводим

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \gamma(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big) \cdot \nabla(u^m - u^l) d\mathrm{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\{\Omega: |u^m - u^l| < \nu\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)) \nabla(u^m - u^l) d\mathrm{x}. \tag{7.29}$$

Соединяя (7.29), (7.28), получаем

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \gamma(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leqslant C_6\nu.$$

Отсюда для произвольного $\delta > 0$ при фиксированном h выбором ν устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \gamma(\mathrm{x}) d\mathrm{x} < \delta.$$

Применяя лемму 4.10, для любого $\varepsilon > 0$ выводим

$$\mathrm{meas}\,(E_{\nu,\theta,h}) < \varepsilon. \tag{7.30}$$

Ввиду того, что $\mathrm{meas}\,(E_{\nu,\theta,h}) = 0$ для достаточно больших θ, то неравенство (7.30) справедливо для любых $\theta > 0$.

Кроме того, согласно (7.24), можно выбрать $m_0(\nu, \varepsilon)$ такое, что

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |u^l - u^m| \geqslant \nu\}) < \varepsilon, \quad m, l \geqslant m_0. \tag{7.31}$$

Соединяя (7.26), (7.30), (7.31), в итоге для любого $\theta > 0$ выводим неравенство

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |\nabla(u^l - u^m)| \geqslant \theta\}) < 6\varepsilon, \quad m, l \geqslant m_0.$$

Отсюда следует фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, это влечет сходимость (7.25), а также сходимость (7.23) по подпоследовательности.

Так как $\nabla u = 0$ на множестве, где $|u| = k$, то из сходимости (7.23) заключаем:

$$\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega: |u^m| < k\}}(\nabla u^m - \nabla u) +$$
$$+ \left(\chi_{\{\Omega: |u^m| < k\}} - \chi_{\{\Omega: |u| < k\}}\right) \nabla u \to 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{7.32}$$

Кроме того, благодаря оценке (7.12), пользуясь леммой 4.11 устанавливаем равномерную интегрируемость последовательности $\{\nabla T_k(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Отсюда по теореме Витали устанавливаем сходимость

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{7.33}$$

Следствием (7.17), (7.33) является принадлежность $T_k(u) \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$.

Далее, применяя (2.4) из (7.12), (7.13) выводим оценки

$$\|\nabla T_k(u^m)\|_M \leqslant C_7(k), \quad \|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m))\|_{\overline{M}} \leqslant C_8(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, пользуясь сходимостью (7.32) по лемме 4.2 устанавливаем

$$\nabla T_k(u^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_M, \mathrm{E}_{\overline{M}}) \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_M(\Omega), \quad m \to \infty,$$
$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u)) \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_{\overline{M}}, \mathrm{E}_M) \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{7.34}$$

Шаг 5. Пусть $\xi \in C_0^1(\Omega)$, $\mathrm{supp}\,\xi \subset \Omega(l)$, $l \geqslant l_0$. Чтобы доказать неравенство (3.7), в тождестве (7.6) возьмем пробную функцию $v = T_k(u^m - \xi)$, получим соотношение

$$\langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi)\rangle + \langle (b^m(\mathrm{x}, u^m) - f^m)\, T_k(u^m - \xi)\rangle = I^m + J^m, \quad m \geqslant l_0. \tag{7.35}$$

Положим $\widehat{k} = k + \|\xi\|_\infty$. Если $|u^m - \xi| < k$, то $|u^m| < \widehat{k}$, поэтому $\{\Omega : |u^m - \xi| < k\} \subseteq \{\Omega : |u^m| < \widehat{k}\}$, следовательно,

$$I^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi) d\mathrm{x} = \int\limits_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla (u^m - \xi) d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u^m) d\mathrm{x} - \int\limits_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla \xi d\mathrm{x} = I_1^m - I_2^m. \qquad (7.36)$$

Применяя (7.16), (7.32), по лемме Фату для правильных k (таких, что $\mathrm{meas}(\{\Omega : |u - \xi| = k\}) = 0$) имеем сходимость:

$$\liminf_{m\to\infty} I_1^m = \liminf_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u^m) \chi_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} d\mathrm{x} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\{\Omega:|u-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u) d\mathrm{x}. \qquad (7.37)$$

Используя (7.16), по лемме 4.5 для правильных k имеем сходимость:

$$\nabla \xi \chi_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} \to \nabla \xi \chi_{\{\Omega:|u-\xi|<k\}} \quad \text{сильно в} \quad \mathrm{E}_M(\Omega), \quad m \to \infty.$$

Отсюда, учитывая сходимость (7.34), выводим

$$\lim_{m\to\infty} I_2^m = \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla \xi \chi_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} d\mathrm{x} = \int\limits_{\{\Omega:|u-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla \xi d\mathrm{x}. \qquad (7.38)$$

Соединяя (7.36)–(7.38), устанавливаем

$$\liminf_{m\to\infty} I^m \geqslant \int\limits_{\{\Omega:|u-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u) d\mathrm{x} - \int\limits_{\{\Omega:|u-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla \xi d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_{\{\Omega:|u-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla (u - \xi) d\mathrm{x}. \qquad (7.39)$$

Из сходимости (7.16) по лемме 4.5 имеем:

$$T_k(u^m - \xi) \rightharpoonup T_k(u - \xi) \text{ в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \text{ пространства } L_\infty(\Omega), \quad m \to \infty.$$

Отсюда, используя (7.18), (7.2), устанавливаем

$$\lim_{m\to\infty} J^m = \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega (b^m(\mathrm{x}, u^m) - f^m) T_k(u^m - \xi) d\mathrm{x} = \int\limits_\Omega (b(\mathrm{x}, u) - f) T_k(u - \xi) d\mathrm{x}. \qquad (7.40)$$

Соединяя (7.35), (7.39), (7.40), выводим (3.7). Таким образом, $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ является энтропийным решением задачи (1.1), (1.2). ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
2. *Кожевникова Л. М.* Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 3. — С. 131–161.
3. *Ковалевский А. А., Скрыпник И. И., Шишков А. Е.* Сингулярные решения нелинейных эллиптических и параболических уравнений. — Киев: Наукова думка, 1962.
4. *Кожевникова Л. М., Кашникова А. П.* Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака—Орлича// Дифф. уравн. — 2023. — *59*. — С. 35–51.
5. *Рутицкий Я. Б., Красносельский М. А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Физматлит, 1958.
6. *Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A.* Gossez's approximation theorems in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// J. Funct. Anal. — 2018. — *275*, № 9. — С. 2538–2571.

7. *Ait Khellou M., Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak—Orlicz spaces// An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. — 2016. — *43*, № 2. — С. 164–187.
8. *Ait Khellou M., Douiri S. M., El Hadfi Y.* Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the Log-Hölder continuity condition// Mediterr. J. Math. — 2020. — *17*, № 1. — С. 1–18.
9. *Benilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L.* An L^1-theory of existence and nuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1995. — *22*, № 2. — С. 241–273.
10. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2013. — *20*, № 1. — С. 57–75.
11. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* Variational inequalities in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2014. — *21*, № 5. — С. 787–811.
12. *Boccardo L., Gallouët Th.* Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures// Commun. Part. Differ. Equ. — 1992. — *17*, № 3-4. — С. 641–655.
13. *Chlebicka I.* A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak—Orlicz spaces// Nonlinear Anal. — 2018. — *175*. — С. 1–27.
14. *Chlebicka I.* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2023. — *153*, № 2. — С. 588–618.
15. *Denkowska A., Gwiazda P., Kalita P.* On renormalized solutions to elliptic inclusions with nonstandard growth// Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2021. — *60*, № 21. — С. 1–44.
16. *Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H.* Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak—Orlicz spaces// Ric. Mat. — 2018. — *67*, № 2. — С. 549–579.
17. *Elemine Vall M. S. B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data// Bol. Soc. Parana Mat. — 2018. — *36*, № 1. — С. 125–150.
18. *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak—Orlicz space// Differ. Equ. — 2018. — *264*. — С. 341–377.
19. *Gwiazda P., Świerczewska-Gwiazda A., Wróblewska A.* Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for a class of non-Newtonian fluids// Math. Methods Appl. Sci. — 2010. — № 2. — С. 125–137.
20. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. — Berlin: Springer, 1983.
21. *Talha A., Benkirane A.* Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak—Orlicz spaces// Monatsh. Math. — 2018. — *186*, № 4. — С. 745–776.
22. *Ying Li, Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz spaces// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2021. — *61*. — С. 1–20.

Л. М. Кожевникова
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия;
Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

UDC 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115
EDN: EBRPUC

Entropy and renormalized solutions for a nonlinear elliptic problem in Musielak–Orlicz spaces

L. M. Kozhevnikova[1,2]

[1] *Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia*
[2] *Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia*

In this paper, we establish the equivalence of entropy and renormalized solutions of second-order elliptic equations with nonlinearities defined by the Musielak–Orlicz functions and the right-hand side from the space $L_1(\Omega)$. In nonreflexive Musielak—Orlicz—Sobolev spaces, we prove the existence and uniqueness of both entropy and renormalized solutions of the Dirichlet problem in domains with a Lipschitz boundary.

Keywords: second-order elliptic equation, entropy solution, renormalized solution, Musielak–Orlicz–Sobolev space, existence and uniqueness of solutions

For citation: L. M. Kozhevnikova, "Entropy and renormalized solutions for a nonlinear elliptic problem in Musielak–Orlicz spaces," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 98–115. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115`

REFERENCES

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. Part I: General Theory], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).
2. L. M. Kozhevnikova, "Entropiynye i renormalizovannye resheniya anizotropnykh ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami nelineynostey" [Entropy and renormalized solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity exponents], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 3, 131–161 (in Russian).
3. A. A. Kovalevskiy, I. I. Skrypnik, and A. E. Shishkov, *Singulyarnye resheniya nelineynykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravneniy* [Singular Solutions of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations], Naukova Dumka, Kiev, 1962 (in Russian).
4. L. M. Kozhevnikova and A. P. Kashnikova, "Ekvivalentnost' entropiynykh i renormalizovannykh resheniy nelineynoy ellipticheskoy zadachi v prostranstvakh Muzilaka—Orlicha" [Equivalence of Entropy and Renormalized Solutions of a Nonlinear Elliptic Problem in Musielak–Orlicz Spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2023, **59**, 35–51 (in Russian).
5. Ya. B. Rutitskiy and M. A. Krasnosel'skiy, *Vypuklye funktsii i prostranstva Orlicha* [Convex Functions and Orlicz Spaces], Fizmatlit, Moscow, 1958 (in Russian).
6. Y. Ahmida, I. Chlebicka, P. Gwiazda, and A. Youssfi, "Gossez's approximation theorems in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces," *J. Funct. Anal.*, 2018, **275**, No. 9, 2538–2571.
7. M. Ait Khellou and A. Benkirane, "Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak—Orlicz spaces," *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2016, **43**, No. 2, 164–187.
8. M. Ait Khellou, S. M. Douiri, and Y. El Hadfi, "Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the Log-Hölder continuity condition," *Mediterr. J. Math.*, 2020, **17**, No. 1, 1–18.

9. Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vazquez, “An L^1-theory of existence and nuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1995, **22**, No. 2, 241–273.
10. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, 2013, **20**, No. 1, 57–75.
11. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “Variational inequalities in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, 2014, **21**, No. 5, 787–811.
12. L. Boccardo and Th. Gallouët, “Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1992, **17**, No. 3-4, 641–655.
13. I. Chlebicka, “A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak—Orlicz spaces,” *Nonlinear Anal.*, 2018, **175**, 1–27.
14. I. Chlebicka, “Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2023, **153**, No. 2, 588–618.
15. A. Denkowska, P. Gwiazda, and P. Kalita, “On renormalized solutions to elliptic inclusions with nonstandard growth,” *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2021, **60**, No. 21, 1–44.
16. R. Elarabi, M. Rhoudaf, and H. Sabiki, “Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak—Orlicz spaces,” *Ric. Mat.*, 2018, **67**, No. 2, 549–579.
17. M. S. B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, and A. Benkirane, “Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data,” *Bol. Soc. Parana Mat.*, 2018, **36**, No. 1, 125–150.
18. P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, and A. Zatorska-Goldstein, “Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak—Orlicz space,” *Differ. Equ.*, 2018, **264**, 341–377.
19. P. Gwiazda, Á. Swierczewska-Gwiazda, and A. Wróblewska, “Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for a class of non-Newtonian fluids,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2010, No. 2, 125–137.
20. J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Springer, Berlin, 1983.
21. A. Talha and A. Benkirane, “Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak—Orlicz spaces,” *Monatsh. Math.*, 2018, **186**, No. 4, 745–776.
22. Li Ying, Y. Fengping, and Zh. Shulin, “Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz spaces,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2021, **61**, 1–20.

L. M. Kozhevnikova
Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia
E-mail: kosul@mail.ru