Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 73–97
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958+517.984.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97
EDN: DYSLPL

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д. А. Закора

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Исследуется задача о нормальных колебаниях гомогенной смеси нескольких вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область трёхмерного пространства с бесконечно гладкой границей. Рассматриваются два граничных условия: условие прилипания и условие проскальзывания без касательных напряжений. Доказано, что существенный спектр задачи в обоих случаях представляет собой конечный набор отрезков, расположенных на действительной оси. Оставшийся спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и расположен на действительной оси за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряжённых собственных значений. Спектр задачи содержит подпоследовательность собственных значений с предельной точкой в бесконечности и степенным асимптотическим распределением.

Ключевые слова: смесь жидкостей, сжимаемая вязкая жидкость, спектральная задача, существенный спектр, дискретный спектр

Для цитирования: *Д. А. Закора.* Спектральные свойства операторов в задаче о нормальных колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 73–97. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97

1. Введение

1.1. Формулировка нелинейной динамической задачи. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью нескольких вязких сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится внутри области Ω. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне Ω.

Баротропное движение смеси $n \geqslant 2$ жидкостей описывается следующей системой уравнений[1]:

$$\begin{gathered} R_i\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + R_i(\mathbf{u}_i\cdot\nabla)\mathbf{u}_i = \operatorname{div}\Big(-P_iI_3 + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\Big) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + R_i\mathbf{F}_i, \\ \frac{\partial R_i}{\partial t} + \operatorname{div}(R_i\mathbf{u}_i) = 0, \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i=1,\dots,n, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t,x) = \big(u_{i1}(t,x); u_{i2}(t,x); u_{i3}(t,x)\big)^\tau$ $(x=(x_1;x_2;x_3)\in\Omega)$ — поле скоростей i-й компоненты смеси (символом τ обозначена операция транспонирования), $R_i = R_i(t,x)$ — плотность,

[1] Пусть A, B — матрицы, действующие в $\mathbb{R}^m$. Положим $\operatorname{div} A := \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$ и $A\!:\!B := \operatorname{tr}(A^\tau B) = \sum_{i,j=1}^m A_{ij}B_{ij}$.

$P_i = P_i(t,x)$ — давление, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t,x)$ — известные поля внешних массовых сил. Тензоры полных напряжений $\mathbf{T}_i$ и тензоры вязких напряжений $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами[1]:

$$\mathbf{T}_i := -P_i I_3 + \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{S}_i := \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j), \quad \sigma^{ij}(\mathbf{u}) := \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}), \tag{1.2}$$

где I_3 — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$, μ_{ij}, λ_{ij} — коэффициенты матриц вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Матрицы вязкостей подчинены следующим условиям:

$$\mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} > 0. \tag{1.3}$$

Предположим, что давление в каждой компоненте смеси пропорционально плотности:

$$P_i = c_i R_i, \quad c_i > 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.4}$$

Линеаризованная относительно состояния покоя система (1.1) будет рассматриваться с двумя типами граничных условий. Первый тип граничных условий — условия прилипания:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.5}$$

Второй тип граничных условий — условия непротекания для каждой компоненты смеси и нулевые касательные напряжения:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_i \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1.6}$$

где символ «$\times$» означает векторное произведение. В дальнейшем граничное условие (1.6) с учётом (1.2) будет переписано в более удобной для вычислений форме.

Система уравнений (1.1) — один из вариантов описания движения многокомпонентных жидкостных смесей и моделирует движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей в многоскоростной модели (см. [12]). Это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение. В нелинейной теории многокомпонентных жидкостных смесей наряду с предположением (1.4) используются и другие связи (см. [5, 6, 14]).

Математическое исследование моделей движения многокомпонентных сред началось относительно недавно. Представление о различных моделях, а также возникающих при этом математических задач можно получить по монографиям [14, 29], а также обзору, приведённому в статье [27]. В работах [21, 22] получены первые результаты по слабой разрешимости нелинейной модели многокомпонентной смеси, заполняющей всё пространство $\mathbb{R}^3$. В следующей работе тех же авторов [23] исследуется вопрос единственности решения в случае отсутствия внешних сил и взаимодействия между компонентами смеси. Глубокие результаты по разрешимости нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область, получены в [11, 12].

Цель данной работы — исследование задачи о нормальных колебаниях линеаризованной относительно состояния покоя системы (1.1)–(1.4) с граничными условиями (1.5) либо (1.6).

1.2. Линеаризация динамической задачи. Предположим, что рассматриваемая система находится в равновесии, т. е. $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}_i = -g\mathbf{e}_3$, $i = 1,\ldots,n$, где g — ускорение свободного падения. Из (1.1) и (1.4) найдём, что стационарные плотности ρ_{i0} в компонентах смеси распределены по закону $\rho_{i0} = \rho_{i0}(0)\exp(-gc_i^{-1}x_3)$, где $\rho_{i0}(0)$ — стационарная плотность i-й компоненты смеси в начале координат.

[1] Для поля $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)^\tau$ определим набор коэффициентов $e_{lk}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_l}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$ $(l,k = 1,2,3)$ тензора скоростей деформаций $e(\mathbf{u})$. Через $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}) := \sum_{s=1}^{3} e_{ss}(\mathbf{u}) = \operatorname{div}\mathbf{u}$ обозначим след матрицы $e(\mathbf{u})$.

Будем считать, что $R_i(t,x) = \rho_{i0}(x_3) + \widetilde{\rho}_i(t,x)$, $\mathbf{F}_i(t,x) = -g\mathbf{e}_3 + \mathbf{f}_i(t,x)$, где $\widetilde{\rho}_i$ — так называемая динамическая плотность, $\mathbf{f}_i$ — малое поле внешних массовых сил, наложенное на гравитационное поле. Предполагая, что $\mathbf{u}_i$, $\widetilde{\rho}_i$, $\mathbf{f}_i$ — малые одного порядка малости, и учитывая равенства

$$\frac{c_i\nabla\widetilde{\rho}_i + \widetilde{\rho}_i g\mathbf{e}_3}{\rho_{i0}} = \frac{c_i\rho_{i0}\nabla\widetilde{\rho}_i - c_i\widetilde{\rho}_i\nabla\rho_{i0}}{\rho_{i0}^2} = \nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right),$$

придём к линеаризованной системе:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right) + \frac{1}{\rho_{i0}}\operatorname{div}\sum_{j=1}^n\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\
&\frac{\partial\widetilde{\rho}_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i = 1,\dots,n.
\end{aligned}$$

Осуществим в последней системе замену $c_i^{1/2}\rho_{i0}^{-1/2}\widetilde{\rho}_i(t,x) =: \rho_i(t,x)$ с целью её симметризации. В результате с учётом (1.2) получим следующую основную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^n L_{ij}\mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\
&\frac{\partial\rho_i}{\partial t} = -\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i = 1,\dots,n,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $L_{ij} := -\mu_{ij}\Delta - (\mu_{ij}+\lambda_{ij})\nabla\operatorname{div}$ — дифференциальные операторы теории упругости.

2. Постановка задачи и основная теорема

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях смеси. Разыскивая решения линеаризованной однородной задачи (1.7) в виде $\mathbf{u}_i(t,x) = \exp(-\lambda t)\mathbf{u}_i(x)$, $\rho_i(t,x) = \exp(-\lambda t)\rho_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, где λ — спектральный параметр, $\mathbf{u}_i(x)$, $\rho_i(x)$ — амплитудные элементы, придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^n L_{ij}\mathbf{u}_j + \nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) = \lambda\mathbf{u}_i,\\
&\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i) = \lambda\rho_i, \quad x\in\Omega, \quad i = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Далее система (2.1) с граничными условиями (1.5) либо (1.6) будет трактоваться в виде следующей спектральной задачи для замкнутого оператора $\mathcal{A}_j$ (индекс $j = 0$ соответствует граничным условиям (1.5), индекс $j = 1$ — условиям (1.6)) с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, плотной в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}_j\xi = \lambda\xi, \quad \xi\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)\subset\mathcal{H}. \tag{2.2}$$

При исследовании спектральной задачи (2.1), (1.6) будем предполагать, что *граница $\partial\Omega$ области Ω не является поверхностью вращения.* Это условие призвано несколько упростить вычисления.

Определение 2.1. *Существенным спектром* замкнутого оператора $\mathcal{A}$ называется множество

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} : \text{оператор } \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} \text{ не является фредгольмовым}\bigr\}.$$

Определим матрицы $\mathbf{\Phi} := \operatorname{diag}(c_1\rho_{10}(x_3),\dots,c_n\rho_{n0}(x_3))$ и $\mathbf{R} := \operatorname{diag}(\rho_{10}(x_3),\dots,\rho_{n0}(x_3))$. Основным утверждением работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Спектр $\sigma(\mathcal{A}_j)$ оператора $\mathcal{A}_j$ расположен на действительной положительной полуоси за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности, а $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) = \Lambda_E\cup\Lambda_L$, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_1) = \Lambda_E$, где*

$$\begin{aligned}
\Lambda_E &:= \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} :\ \det\bigl(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\bigr) = 0,\ \ x\in\overline{\Omega}\bigr\},\\
\Lambda_L &:= \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} :\ \det\bigl(\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\bigr) = 0,\ \ x\in\partial\Omega\bigr\}.
\end{aligned}$$

Множество $\sigma(\mathcal{A}_j)\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}_j) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1)), \quad k \longrightarrow \infty, \quad j=0,1,$$
$$\mathcal{C} := \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\,d\Omega.$$

Замечание 2.1. Из условий (1.3) следует, что $2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}>0$. Отсюда и из неравенства $\mathbf{\Phi}>0$ теперь видно, что множество Λ_E представляет собой объединение n отрезков, расположенных на положительной полуоси. Таким же образом устроено и множество Λ_L.

Замечание 2.2. Утверждения теоремы 2.1 относительно оператора $\mathcal{A}_0$ справедливы и при ослабленных условиях на матрицы вязкостей: $\mathbf{M}>0$, $2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}>0$.

В случае $n=1$ с некоторыми изменениями система уравнений (2.1) с граничными условиями прилипания (1.5) либо с условиями нулевых напряжений на границе исследована в [16]. При этом исследование опиралось на результаты работы [25], в которой бесконечная дифференцируемость границы $\partial\Omega$ существенна. Настоящая работа следует тому же плану. Отметим, что в [20] с использованием результатов работы [19] исследован существенный спектр линеаризованного оператора Навье—Стокса в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ $(m\geqslant 2)$ с C^2-гладкой границей. При этом техника псевдо-дифференциальных операторов не применялась.

3. Доказательство теоремы

3.1. Операторная формулировка спектральной задачи. Введём векторное гильбертово пространство с весом $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})$ $(j=1,\ldots,n)$ со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} := \int\limits_{\Omega}\rho_{j0}(x_3)\mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\,d\Omega, \qquad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} = \int\limits_{\Omega}\rho_{j0}(x_3)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega,$$

а также подпространство гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ единичной коразмерности:

$$L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) := \big\{f\in L_2(\Omega) : (f,\rho_{j0}^{1/2})_{L_2(\Omega)}=0\big\}, \quad j=1,\ldots,n.$$

Введём основное гильбертово пространство $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ с естественно определённым на нём скалярным произведением и соответствующей нормой, где

$$\mathcal{H}_1 := \bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0}) = \big\{\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_n)^\tau :\ \mathbf{u}_j\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0}),\ j=1,\ldots,n\big\},$$
$$\mathcal{H}_2 := \bigoplus_{j=1}^{n}L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) = \big\{\rho := (\rho_1;\ldots;\rho_n)^\tau :\ \rho_j\in L_{2,\rho_{j0}}(\Omega),\ j=1,\ldots,n\big\}.$$

Через $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ будем обозначать векторные и скалярные пространства Соболева со стандартными скалярными произведениями и нормами, а $\mathbf{L}_2(\Omega)\equiv\mathbf{L}_2(\Omega,1)$.

Введём оператор $L_0 : \mathcal{D}(L_0)\subset\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_1$, отвечающий граничным условиям прилипания (1.5), по следующему закону:

$$L_0\mathbf{u} := \bigg(\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^{n}L_{1j}\mathbf{u}_j;\ldots;\frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^{n}L_{nj}\mathbf{u}_j\bigg)^\tau, \quad \mathcal{D}(L_0) := \bigoplus_{j=1}^{n}\Big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^2(\Omega) :\ \mathbf{u}_j=\mathbf{0}\ \ (x\in\partial\Omega)\Big\}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.3). *Тогда оператор L_0 самосопряжён и положительно определён в $\mathcal{H}_1$, $L_0^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Энергетическое пространство $\mathcal{H}_{L_0}$ оператора L_0 выражается по следующей формуле*:

$$\mathcal{H}_{L_0} = \mathcal{D}(L_0^{1/2}) = \bigoplus_{j=1}^{n}\Big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^1(\Omega) :\ \ \mathbf{u}_j=\mathbf{0}\ \ (x\in\partial\Omega)\Big\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_{L_0} \subset \mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму (см. (1.2))

$$L(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{v}_i}) + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i})\Big)\, d\Omega \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i})\, d\Omega. \qquad (3.2)$$

Покажем, что при выполнении условий (1.3) (плотно определённая) квадратичная форма $L(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута. Для этого проведём вспомогательные вычисления.

Введём обозначения

$$K_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} \end{pmatrix}, \quad \xi_j := \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2}e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2}e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2}e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix},$$

$$K := \big\{K_{ij} \equiv K(\lambda_{ij},\mu_{ij})\big\}_{i,j=1}^{n}, \quad \xi := \big(\xi_1;\xi_2,\dots;\xi_n\big)^{\tau}, \qquad (3.3)$$

и вычислим квадратичную форму симметричной $(6n \times 6n)$-матрицы K:

$$\begin{aligned}
\big(K\xi,\xi\big) &= \sum_{i,j=1}^{n} \big(K_{ij}\xi_j,\xi_i\big) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2}e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2}e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2}e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_i) \\ e_{22}(\mathbf{u}_i) \\ e_{33}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{12}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{13}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{23}(\mathbf{u}_i) \end{pmatrix} \right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij}e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij}e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij}e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij}e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij}e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij}e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_i) \\ e_{22}(\mathbf{u}_i) \\ e_{33}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{12}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{13}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2}e_{23}(\mathbf{u}_i) \end{pmatrix} \right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij}\sum_{k=1}^{3} e_{kk}(\mathbf{u}_j)e_{kk}(\overline{\mathbf{u}_i}) + \\
&\quad + 4\mu_{ij}\big(e_{12}(\mathbf{u}_j)e_{12}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{13}(\mathbf{u}_j)e_{13}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{23}(\mathbf{u}_j)e_{23}(\overline{\mathbf{u}_i})\big)\Big) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j):e(\overline{\mathbf{u}_i})\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)I_3 + 2\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\Big):e(\overline{\mathbf{u}_i}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j):e(\overline{\mathbf{u}_i}) \Big). \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\big(K\xi,\xi\big) &= \sum_{i,j=1}^{n} \bigg(\Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij}\Big)\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)I_3 + 2\mu_{ij}\Big(e(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)I_3\Big)\bigg):e(\overline{\mathbf{u}_i}) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \bigg(\Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij}\Big)\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij}\Big(e(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)I_3\Big):\Big(e(\overline{\mathbf{u}_i}) - \frac{1}{3}\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i})I_3\Big)\bigg) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Big)\mathrm{tr}\, e(\mathbf{u}_j)\mathrm{tr}\, e(\overline{\mathbf{u}_i}) +$$

$$+ 2 \sum_{l,k=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \mu_{ij}\Big(e_{lk}(\mathbf{u}_j) - \frac{\delta_{lk}}{3}\,\mathrm{tr}\, e(\mathbf{u}_j)\Big)\Big(e_{lk}(\overline{\mathbf{u}_i}) - \frac{\delta_{lk}}{3}\,\mathrm{tr}\, e(\overline{\mathbf{u}_i})\Big)\right).$$

Пусть матрицы вязкостей удовлетворяют условиям (1.3). Тогда матрица K, очевидно, неотрицательна. Допустим, что $\big(K\xi, \xi\big) = 0$. Обозначим через $\gamma(\mathbf{M}) > 0$, $\gamma(\mathbf{\Lambda} + 2/3\mathbf{M}) > 0$ нижние грани соответствующих матриц и найдём из последнего соотношения, что

$$0 = \big(K\xi, \xi\big) \geqslant \gamma\Big(\mathbf{\Lambda} + \frac{2}{3}\,\mathbf{M}\Big) \sum_{j=1}^{n} \big|\mathrm{tr}\, e(\mathbf{u}_j)\big|^2 + 2 \sum_{l,k=1}^{3} \gamma(\mathbf{M}) \sum_{j=1}^{n} \Big|e_{lk}(\mathbf{u}_j) - \frac{\delta_{lk}}{3}\,\mathrm{tr}\, e(\mathbf{u}_j)\Big|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда имеем $\mathrm{tr}\, e(\mathbf{u}_j) = 0$ для каждого $j = \overline{1,n}$. Следовательно, $e_{lk}(\mathbf{u}_j) = 0$ $(l,k = 1,2,3,\ j = \overline{1,n})$, а значит, $\xi = 0$. Таким образом, существует константа $\gamma(K) > 0$ такая, что $\big(K\xi, \xi\big) \geqslant \gamma(K)\big(\xi, \xi\big)$ для любого $\xi \in \mathbb{C}^{6n}$. Последнее соотношение с учётом (3.3), (3.4) перепишем следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) \right) \geqslant \gamma(K) \sum_{i=1}^{n} e(\mathbf{u}_i) : e(\overline{\mathbf{u}_i}). \tag{3.5}$$

Используя первое неравенство Корна (см. [15, гл. I, § 2, п. 2.1, теорема 2.1]) и неравенство Фридрихса (см. [17, гл. 18, теорема 18.1]), из (3.2)–(3.5) найдём, что для всех $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_0}$

$$C\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbf{W}_2^1(\Omega)} \geqslant L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \frac{\gamma(K)}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{3} \int_{\Omega} |\nabla u_{jl}|^2\, d\Omega \geqslant \frac{\gamma(K)}{4} \min\big\{1, C_F^{-1}\big\} \|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbf{W}_2^1(\Omega)}.$$

Здесь C_F — константа из неравенства Фридрихса, C — некоторая положительная константа. Из полученных неравенств следует, что (плотно определённая) квадратичная форма $L_0(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [7, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [7, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L_0 такой, что

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (L_0\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_0},$$
$$\mathcal{D}(L_0) = \big\{\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_0} :\ \exists\, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1 : L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}\ \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_0}\big\}.$$

Предположим, что элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_0}$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω, тогда с использованием тождества Бэтти (см. [17, гл. 24, формула (24.22)]) найдём (см. (1.2)), что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_0}$

$$(L_0\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, dS =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})}.$$

Отсюда следует формула для $L_0\mathbf{u}$ (см. (3.1)), поскольку $\mathcal{H}_{L_0}$ плотно в $\mathcal{H}_1$. Таким образом, дважды дифференцируемое решение $\mathbf{u}$ уравнения $L_0\mathbf{u} = \mathbf{w}$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i \ \ (x \in \Omega), \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \ \ (x \in \partial\Omega), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0)$ — это в точности обобщённое решение (см. [17, гл. 11, определение 11.1]) указанной краевой задачи при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})$, $i = 1, \ldots, n$. Из теоремы об априорных оценках (см., например, [18, теорема 2.2]) следует формула для $\mathcal{D}(L_0)$ (см. (3.1)).

Компактность оператора L_0^{-1} следует из компактности вложения $\mathcal{H}_{L_0}$ в $\mathcal{H}_1$. □

Определим теперь оператор L_1, отвечающий граничным условиям непротекания с нулевыми касательными напряжениями (1.6). Заметим, что из (1.6) и (1.2), в силу очевидного равенства $I_3\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$, следует, что

$$\mathbf{0}=(\mathbf{T}_i\mathbf{n})\times\mathbf{n}=\Big(-P_iI_3+\sum_{j=1}^n\lambda_{ij}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)I_3+2\sum_{j=1}^n\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\Big)\mathbf{n}\times\mathbf{n}=2\sum_{j=1}^n\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\times\mathbf{n}$$

для любого $x\in\partial\Omega$, $i=1,\ldots,n$. Обозначим через τ_s, $s=1,2$ единичные векторы, касательные к поверхности $\partial\Omega$ и ортогональные между собой. Тогда с учётом сказанного выше граничные условия (1.6) для задачи (2.1) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{n}=0,\quad 2\sum_{j=1}^n\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad s=1,2,\quad i=1,\ldots,n. \tag{3.6}$$

Введём теперь, учитывая (1.6) и (3.6), оператор $L_1:\mathcal{D}(L_1)\subset\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$L_1\mathbf{u}:=\Big(\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^nL_{1j}\mathbf{u}_j;\ldots;\frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^nL_{nj}\mathbf{u}_j\Big)^\tau, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{D}(L_1):=\Big\{\mathbf{u}\in\mathcal{H}_1:\ \mathbf{u}_i\in\mathbf{W}_2^2(\Omega),\quad \mathbf{u}_i\cdot\mathbf{n}=0\ \ (x\in\partial\Omega),$$
$$2\sum_{j=1}^n\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s=0\ \ (x\in\partial\Omega),\quad s=1,2,\quad i=1,\ldots,n\Big\}.$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и граница* $\partial\Omega$ *не является поверхностью вращения. Тогда оператор* L_1 *самосопряжён и положительно определён в* $\mathcal{H}_1$, $L_1^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. *Энергетическое пространство* $\mathcal{H}_{L_1}$ *оператора* L_1 *выражается по следующей формуле*:

$$\mathcal{H}_{L_1}=\mathcal{D}(L_1^{1/2})=\bigoplus_{j=1}^n\Big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^1(\Omega):\ \ \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}=0\ \ (x\in\partial\Omega)\Big\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_{L_1}\subset\mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму (3.2). Как и в лемме 3.1 условия (1.3) на матрицы вязкостей влекут соотношение (3.5). Поскольку граница $\partial\Omega$ не является поверхностью вращения, пространства $\big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^1(\Omega):\ \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}=0\ \ (x\in\partial\Omega)\big\}$ не содержат жёсткие перемещения. Следовательно, для элементов этих пространств справедливо второе неравенство Корна (см. [15, гл. I, § 2, п. 2.2, теорема 2.5]). Из (3.2)–(3.5) и второго неравенства Корна найдём, что для всех $\mathbf{u}\in\mathcal{H}_{L_1}$

$$C\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^n\mathbf{W}_2^1(\Omega)}\geqslant L(\mathbf{u},\mathbf{u})\geqslant\gamma(K)C_K^{-2}\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^n\mathbf{W}_2^1(\Omega)}.$$

Здесь C_K — константа из второго неравенства Корна, C — некоторая положительная константа. Из полученных неравенств следует, что (плотно определённая) квадратичная форма $L_0(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [7, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [7, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L_1 такой, что

$$L(\mathbf{u},\mathbf{v})=(L_1\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathcal{D}(L_1),\ \ \mathbf{v}\in\mathcal{H}_{L_1},$$
$$\mathcal{D}(L_1)=\big\{\mathbf{u}\in\mathcal{H}_{L_1}:\ \exists\,\mathbf{w}\in\mathcal{H}_1:L(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{w},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}\ \forall\,\mathbf{v}\in\mathcal{H}_{L_1}\big\}.$$

Предположим, что элемент $\mathbf{u}\in\mathcal{H}_{L_1}$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω, тогда с использованием тождества Бэтти (см. [17, гл. 24, формула (24.22)]) найдём (см. (1.2)), что для любого $\mathbf{v}\in\mathcal{H}_{L_1}$

$$(L_1\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}=L(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega L_{ij}\mathbf{u}_j\cdot\overline{\mathbf{v}_i}\,d\Omega+\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^n\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{v}_i}\,dS=$$
$$=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega L_{ij}\mathbf{u}_j\cdot\overline{\mathbf{v}_i}\,d\Omega+\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}\Big(\sum_{j=1}^n\lambda_{ij}\operatorname{tr}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{v}_i}+2\sum_{j=1}^n\mu_{ij}e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{v}_i}\Big)dS=$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS. \tag{3.8}$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_1}$, состоящих из финитных полей, отсюда найдём, что

$$(L_1\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})}.$$

Отсюда следует формула для $L_1\mathbf{u}$ (см. (3.7)), поскольку множество элементов из $\mathcal{H}_{L_1}$, состоящих из финитных полей, плотно в $\mathcal{H}_1$. Подставляя выражение для $L_1\mathbf{u}$ в (3.8), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS = 0.$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_1}$ вида $\mathbf{v} = (\mathbf{0}; \ldots; \mathbf{v}_i; \ldots; \mathbf{0})^{\tau}$ отсюда найдём, что

$$2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, дважды дифференцируемое решение $\mathbf{u}$ уравнения $L_1\mathbf{u} = \mathbf{w}$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i \ \ (x \in \Omega), \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \ \ 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \ \ s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_1)$ — это в точности обобщённое решение (см. [17, гл. 11, определение 11.1]) указанной краевой задачи при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})$, $i = 1, \ldots, n$. Из теоремы об априорных оценках (см. [18, теорема 2.2]) следует формула для $\mathcal{D}(L_1)$ (см. (3.7)).

Компактность оператора L_1^{-1} следует из компактности вложения $\mathcal{H}_{L_1}$ в $\mathcal{H}_1$. □

Введём оператор $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$T\mathbf{u} := \bigg(-\frac{1}{\rho_{10}} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_1); \ldots; -\frac{1}{\rho_{n0}} \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_n)\bigg)^{\tau}, \quad \mathcal{D}(T) := \mathcal{H}_1. \tag{3.9}$$

Лемма 3.3. *Оператор T ограничен, самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Напомним, что $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\|T\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} &= \sum_{i=1}^{n} \Big\| -\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})} = \sum_{i=1}^{n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)\Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)\bigg)^2 \leqslant n \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\Big)^2 \leqslant \\
&\leqslant 4n^2 \max_{i,j}\{a_{ij}^2\} \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant \frac{4n^2 \max\limits_{i,j}\{a_{ij}^2\}}{\min\limits_{j} \min\limits_{x\in\Omega} \rho_{j0}(x_3)} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}_1,
\end{aligned}$$

т. е. оператор T ограничен в $\mathcal{H}_1$: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Далее для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$\begin{aligned}
(T\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} &= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \\
&= -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{j<i} a_{ji}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \sum_{i>j} a_{ij}\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant 0,
\end{aligned}$$

т. е. оператор T самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. □

Введём оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ по следующему закону:

$$B\mathbf{u} := \Big(-\frac{c_1^{1/2}}{\rho_{10}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{10}\mathbf{u}_1); \ldots ; -\frac{c_n^{1/2}}{\rho_{n0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{n0}\mathbf{u}_n) \Big)^{\tau}, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}(B) := \bigoplus_{j=1}^{n} \Big\{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \ \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j) \in \mathbf{L}_2(\Omega), \ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \ (x \in \partial\Omega) \Big\}.$$

Лемма 3.4. *Сопряжённый оператор* $B^* : \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ *имеет вид*

$$B^*\rho = \bigg(\nabla\Big(\frac{c_1^{1/2}\rho_1}{\rho_{10}^{1/2}} \Big); \ldots ; \nabla\Big(\frac{c_n^{1/2}\rho_n}{\rho_{n0}^{1/2}} \Big) \bigg)^{\tau}, \quad \mathcal{D}(B^*) := \bigoplus_{j=1}^{n} \Big\{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \Big\}.$$

Доказательство. По определению сопряжённого оператора имеем

$$\mathcal{D}(B^*) = \big\{ \rho \in \mathcal{H}_2 : \ \exists\, \eta \in \mathcal{H}_2 : (B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, \eta)_{\mathcal{H}_1} \ \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B) \big\},$$

а значит, $\rho \in \bigoplus_{j=1}^{n} \big\{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \big\} = \mathcal{D}(B^*)$. Отсюда теперь следует, что

$$(B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = \sum_{j=1}^{n} \Big(-\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j), \rho_j \Big)_{L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)} = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j)\, d\Omega =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} c_j^{1/2}\rho_{j0}^{1/2}\overline{\rho_j}(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n})\, dS + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \rho_{j0}\mathbf{u}_j \cdot \nabla\Big(\frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \Big)\, d\Omega =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \bigg(\mathbf{u}_j, \nabla\Big(\frac{c_j^{1/2}\rho_j}{\rho_{j0}^{1/2}} \Big) \bigg)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} = (\mathbf{u}, B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B), \quad \rho \in \mathcal{D}(B^*).$$

Лемма доказана. □

Введём оператор $A_j := L_j + T$, $j = 0, 1$ (см. (3.1), (3.7), (3.9)). Из лемм 3.1–3.3 и определения оператора B (см. (3.10)) следует, что $\mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(A_j^{1/2}) = \mathcal{D}(L_j^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$. Оператор B замыкаем, так как оператор B^* плотно определён (см. [7, гл. V, § 3, п. 1] и лемму 3.4). Следовательно, операторы $BA_j^{-1/2}$ и BA_j^{-1} ограниченно действуют из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$:

$$Q_j := BA_j^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad BA_j^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad j = 0, 1. \tag{3.11}$$

Лемма 3.5. *Оператор* $A_j^{-1/2}B^*$ *замыкаем,* $\overline{A_j^{-1/2}B^*} = Q_j^*$, $Q_j^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A_j^{-1/2}B^*$. *Аналогичные утверждения верны и для оператора* $A_j^{-1}B^*$, $j = 0, 1$.

Доказательство. Учитывая $Q_j^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, для любых $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$ имеем

$$(Q_j\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, A_j^{-1/2}B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} = (\mathbf{u}, Q_j^*\rho)_{\mathcal{H}_1}.$$

Отсюда следует, что $Q_j^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A_j^{-1/2}B^*$, оператор $A_j^{-1/2}B^*$ ограничен на $\mathcal{D}(B^*)$ и расширяется по непрерывности (можно считать, что замыкается) до оператора Q_j^*. □

Наша цель — записать максимальную L_2-реализацию оператора системы (2.1) в виде операторной блок-матрицы с использованием введённых в (3.1)–(3.11) операторов. Сужение максимальной L_2-реализации оператора системы (2.1) на $\mathcal{D}(A_j) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ с использованием введённых операторов можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{0j} := \begin{pmatrix} A_j & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0j}) = \mathcal{D}(A_j) \oplus \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}. \tag{3.12}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_{0j}$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_{0j}}$ есть замкнутый максимальный аккретивный оператор, т. е. других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_{0j}$ нет. Этот оператор $\overline{\mathcal{A}_{0j}}$ и будет максимальной L_2-реализацией оператора системы (2.1). Подобные построения для операторных блоков проводились в работах А. А. Шкаликова [19,28], Н. Д. Копачевского и Т. Я. Азизова [2], и др. Тем не менее, приведём полное доказательство.

Лемма 3.6. *Оператор $\mathcal{A}_{0j}$ замыкаем и $\overline{\mathcal{A}_{0j}} =: \mathcal{A}_j$ — замкнутый максимальный аккретивный оператор. Оператор $\mathcal{A}_j$ представи́м в следующем виде*:

$$\mathcal{A}_j := \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q_j^* \\ -Q_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q_jA_j^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & Q_jQ_j^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_j^{-1/2}Q_j^* \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_j) := \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{u} + A_j^{-1/2}Q_j^*\rho \in \mathcal{D}(A_j) \Big\}, \quad j = 0, 1. \tag{3.13}$$

Доказательство.

1) Оператор $\mathcal{A}_{0j}$, очевидно, плотно определён. Далее, легко проверить, что для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0j})$ выполняется $\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{0j}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A_j^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$, т. е. оператор $\mathcal{A}_{0j}$ аккретивен, а значит, допускает замыкание (см. [9, гл. I, § 4, п. 2]).

Построим замыкание оператора $\mathcal{A}_{0j}$, используя сначала включение $\mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(B)$. Пусть

$$\xi_n := (\mathbf{u}_n; \rho_n)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0j}), \quad \xi_n \longrightarrow \xi := (\mathbf{u}; \rho)^\tau, \quad \mathcal{A}_{0j}\xi_n \longrightarrow \xi_0 := (\mathbf{u}_0; \rho_0)^\tau. \tag{3.14}$$

Отсюда имеем $\mathbf{u}_n + A_j^{-1}B^*\rho_n \in \mathcal{D}(A_j)$ и $\mathbf{u}_n + A_j^{-1}B^*\rho_n = \mathbf{u}_n + (BA_j^{-1})^*\rho_n \longrightarrow \mathbf{u} + (BA_j^{-1})^*\rho$, $A_j(\mathbf{u}_n + A_j^{-1}B^*\rho_n) \longrightarrow \mathbf{u}_0$. Оператор A_j самосопряжён, а значит, замкнут, поэтому имеем включение $\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A_j)$ и равенство $A_j(\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^*\rho) = \mathbf{u}_0$.

Далее, из (3.14) следует, что $\mathbf{u}_n \in \mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u}$, $-B\mathbf{u}_n \longrightarrow \rho_0$. Но оператор B, как отмечено выше, замыкаем, а значит, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ и $-\overline{B}\mathbf{u} = \rho_0$.

Таким образом, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}})$ и $\overline{\mathcal{A}_{0j}}\xi = \xi_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_{0j}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^*\rho) \\ -\overline{B}\mathbf{u} \end{pmatrix}, \ \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}}) = \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} : \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B}), \ \mathbf{u} + (BA_j^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A_j) \Big\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A_j^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$ (см. леммы 3.1, 3.2 и формулу (3.10)). Отсюда следует равенство $(BA_j^{-1})^* = (BA_j^{-1/2}A_j^{-1/2})^* = A_j^{-1/2}(BA_j^{-1/2})^* = A_j^{-1/2}Q_j^*$ (см. (3.11)). Теперь из включения $\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^*\rho = \mathbf{u} + A_j^{-1/2}Q_j^*\rho \in \mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(A_j^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A_j^{1/2})$ — линеал, следует, что $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_j^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(\overline{B})$. Таким образом, условие $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}})$ можно опустить, а выражение $\overline{B}\mathbf{u}$ записать в виде $\overline{B}\mathbf{u} = (\overline{B}A_j^{-1/2})A_j^{1/2}\mathbf{u} = Q_jA_j^{1/2}\mathbf{u}$. Из проведённых рассуждений теперь получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_{0j}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{u} + A_j^{-1/2}Q_j^*\rho) \\ -Q_jA_j^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix}, \ \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}}) = \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{u} + A_j^{-1/2}Q_j^*\rho \in \mathcal{D}(A_j) \Big\}.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ в (3.13) является естественной областью определения для каждой факторизации, обе факторизации определяют один и тот же оператор $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_j = \overline{\mathcal{A}_{0j}}$, $j = 0, 1$.

2) Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}_j$ максимален. Аккретивность оператора $\mathcal{A}_j$ следует из аккретивности $\mathcal{A}_{0j}$, однако может быть проверена и непосредственно. Действительно, если $\xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, то $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_j^{1/2})$. Отсюда и из факторизации (3.13) оператора $\mathcal{A}_j$ с симметричными крайними сомножителями найдём, что $\mathrm{Re}(\mathcal{A}_j\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A_j^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$ для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, а значит, оператор $\mathcal{A}_j$ аккретивен. Для доказательства максимальности оператора $\mathcal{A}_j$ достаточно установить (см. [9, гл. I, § 4, п. 2, теорема 4.3]), что $\rho(\mathcal{A}_j) \cap \{\lambda < 0\} \neq \varnothing$, где $\rho(\mathcal{A}_j)$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}_j$.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ непосредственно проверяется (см. (3.17)), что

$$\mathcal{A}_j - \lambda\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}Q_j^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A_j^{-1} - \lambda^{-1}Q_j^*Q_j & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda^{-1}Q_j & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Введём оператор-функцию $L_j(\lambda) := I - \lambda A_j^{-1} - \lambda^{-1} Q_j^* Q_j$. Очевидно, что при $\lambda < 0$ (ограниченный) оператор $L_j(\lambda)$ самосопряжён и положительно определён, а значит, существует, ограничен и задан на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ оператор $L_j^{-1}(\lambda)$: $L_j^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Из последней факторизации при $\lambda < 0$ тогда найдём, что существует

$$(\mathcal{A}_j - \lambda \mathcal{I})^{-1} = \begin{pmatrix} A_j^{-1/2} & 0 \\ -\lambda^{-1} Q_j & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_j^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^{-1/2} & \lambda^{-1} Q_j^* \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_j^{-1/2} L_j^{-1}(\lambda) A_j^{-1/2} & \lambda^{-1} A_j^{-1/2} L_j^{-1}(\lambda) Q_j^* \\ -\lambda^{-1} Q_j L_j^{-1}(\lambda) A_j^{-1/2} & -\lambda^{-1} I - \lambda^{-2} Q_j L_j^{-1}(\lambda) Q_j^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{3.16}$$

$$L_j(\lambda) = I - \lambda A_j^{-1} - \lambda^{-1} Q_j^* Q_j, \quad j = 0, 1,$$

а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 0, 1$. □

Таким образом, спектральную задачу (2.1) с граничными условиями (1.5) или (1.6) можно записать в виде (2.2) с замкнутым максимальным аккретивным оператором $\mathcal{A}_j$, $j = 0, 1$.

Замечание 3.1. Формула (3.16) при всех $\lambda \notin \sigma(L_j(\lambda)) \cup \{0\}$, где $\sigma(L_j(\lambda))$ — спектр оператор-функции $L_j(\lambda)$, даёт представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}_j$. Из (3.16), в частности, следует, что $\sigma(\mathcal{A}_j) \backslash \{0\} \subset \sigma(L_j(\lambda))$. Более того, из факторизации (3.15) и теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см. [24, гл. XVII, § 3, теорема 3.1]) следует, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j) \subset \sigma_{ess}(L_j(\lambda))$. Можно доказать, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j) = \sigma_{ess}(L_j(\lambda))$, $j = 0, 1$. Однако далее этот факт не понадобится.

Замечание 3.2. Имеют место факторизации Шура—Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства. Пусть $A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k)$ $(k, l = 1, 2)$, $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, $D_1 := A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$. Если $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, то существует

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1} A_{21} & I \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} D_1^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} D_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \tag{3.17}$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, то существует

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} D_2^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} D_2^{-1} \\ -D_2^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \tag{3.18}$$

3.2. Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи. Приведём необходимые определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [4, 8, 18, 26]), необходимые для исследования существенного спектра оператора $\mathcal{A}_j$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathcal{L}(x, D) \mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.19}$$

где $x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$, $D := (D_1; D_2; D_3) := \Big(-i \dfrac{\partial}{\partial x_1}; -i \dfrac{\partial}{\partial x_2}; -i \dfrac{\partial}{\partial x_3} \Big)$, $\mathbf{v}(x) := (v_1(x); \ldots; v_m(x))^\tau$, $\mathbf{f}(x) := (f_1(x); \ldots; f_m(x))^\tau$. Пусть $\mathcal{L}(x, \xi)$, $\xi := (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$ — полиномиальная матрица, получаемая из (3.19) заменой символа D на ξ. Будем считать далее, что (3.19) определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга (см. [4, с. 375], а также [18]).

Определение 3.1 (см. [4, с. 376]). Оператор $\mathcal{L}(x, D)$ называется *эллиптическим* в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) \neq 0$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.

Известно, что $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) = \det \pi \mathcal{L}(x, \xi)$, где $\pi \mathcal{L}$ — главная часть матрицы $\mathcal{L}$. О выделении главной части системы Дуглиса—Ниренберга см. [4, с. 377].

Возьмём произвольную точку $z_0 \in \partial\Omega$ и введём, следуя [8, 26], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница $\partial\Omega$ задаётся бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i = z_i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2, 3$ параметров y_1, y_2, которые выбираются так, что $y_i = \mathrm{const}$ есть линии кривизны. В векторной записи $z = z(y')$, где $y' := (y_1; y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. В окрестности границы $\partial\Omega$ введём координаты y_1, y_2, y_3, где y_3 — расстояние от точки x до $\partial\Omega$. Тогда $x = z(y') + y_3 N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задаётся так, чтобы направление векторного произведения $\partial z/\partial y_1 \times \partial z/\partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$, а начало координат находится в точке z_0. Пусть $E_i(y')$ $(i = 1, 2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\partial\Omega$, тогда $\partial z/\partial y_i \cdot \partial z/\partial y_j = E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Обозначим через $\tau_s := E_s^{-1/2}(y')\partial z/\partial y_s$, $s = 1, 2$, единичные векторы, касательные к границе $\partial\Omega$. Тогда $\tau_i^\tau \tau_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, $\tau_s^\tau N = N^\tau \tau_s = 0$, $s = 1, 2$.

Рассмотрим теперь систему граничных условий

$$\mathcal{B}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.20}$$

где $\mathcal{B}(x, D)$ — $(r \times m)$-матрица, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Перепишем операторы краевой задачи (3.19), (3.20) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathcal{L}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\Big) = \pi\mathcal{L}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big), \qquad \pi\mathcal{B}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\Big) = \pi\mathcal{B}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big).$$

Определение 3.2 (см. [4, с. 380], а также [8, с. 12])**.** Краевая задача (3.19), (3.20) называется *эллиптической*, если выполнено определение 3.1 и условие Шапиро—Лопатинского:

$$\operatorname{rank} \int\limits_{\gamma_+} \pi\mathcal{B}(0, \xi', \xi_3)\big(\pi\mathcal{L}(0, \xi', \xi_3)\big)^{-1}\big(I_m, \xi_3 I_m\big)\, d\xi_3 = r$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Здесь I_m — единичная матрица в $\mathbb{R}^m$, а через $\big(I_m, \xi_3 I_m\big)$ обозначена составная $(m \times 2m)$-матрица; γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3-корни уравнения $\det \pi\mathcal{L}(0, \xi', \xi_3) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро—Лопатинского понадобятся также следующие леммы и обозначения из [8].

Лемма 3.7 (см. [8, с. 14])**.** *В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2}\big(1 - K_j y_3\big)^{-1} E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\,\frac{\partial}{\partial y_j} + N_i\frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j $(j = 1, 2)$ — главные кривизны поверхности $\partial\Omega$.

Введём некоторые обозначения. Пусть

$$\beta := (\beta_1; \beta_2; \beta_3)^\tau, \quad \beta_l := \sum_{j=1}^{2} E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_l}{\partial y_j}\xi_j \quad (l = 1, 2, 3), \quad \alpha := \beta + \xi_3 N, \tag{3.21}$$

тогда $\beta^\tau N = 0$, $N^\tau\beta = 0$, $N^\tau N = 1$, поскольку $\beta = E_1^{-1/2}\xi_1\tau_1 + E_2^{-1/2}\xi_2\tau_2$. Положим $|\xi'|^2 := |\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2 = \beta^\tau\beta = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать следующее выражение: $|\xi|^2 := |\xi'|^2 + \xi_3^2 = \alpha^\tau\alpha$.

Лемма 3.8 (см. [8, с. 15])**.** *Во введённой выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ имеют место следующие формулы для главных символов*:

$$\sigma_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = i\alpha_l, \quad \sigma_0(\nabla) = i\alpha, \quad \sigma_0(\mathrm{div}) = i\alpha^\tau, \quad \sigma_0(\Delta) = -|\xi|^2 = -\big(|\xi'|^2 + \xi_3^2\big).$$

Лемма 3.9 (см. [8, с. 16]). *Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3-полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$:*

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{\pi}{|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^2} = \pi i, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^2} = -\pi|\xi'|, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|^3},$$
$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = 0, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \pi i, \qquad |\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2.$$

3.3. О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}_j$. Напомним (см. определение 2.1), что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_j$ состоит из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A}_j - \lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым. Можно проверить, что система из (2.1) составляет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга (см. [4, с. 375], а также [18]). Из работы [25] следует, что оператор $\mathcal{A}_j - \lambda\mathcal{I}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической.

Выделим из системы (2.1) главную часть:

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\nabla\rho_i = \mathbf{0}, \quad c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\operatorname{div}\mathbf{u}_i - \lambda\rho_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.22}$$

Выделим из граничных условий (1.5) и (1.6) (с учётом (3.6)) главные части:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}_i \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.23}$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ матричный дифференциальный оператор системы уравнений (2.1) — это $(4n \times 4n)$-матрица; через $\mathcal{B}_j(x, D)$ обозначим матрицу, отвечающую граничным условиям ($j = 0$ отвечает граничным условиям (1.5), а $j = 1$ — условиям (1.6) или, что то же, (3.6)) — это $(3n \times 4n)$-матрица. В этом случае главная часть $\pi\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ оператора $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ определяется системой из (3.22), а $\pi\mathcal{B}_j(x, D) = \mathcal{B}_j(x, D)$, где $\mathcal{B}_j(x, D)$ определяется условиями (3.23) при $j = 0$ и (3.24) при $j = 1$.

Таким образом, существенные спектры исследуемых операторов $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ будут состоять из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, в которых нарушается эллиптичность краевых задач (3.22), (3.23) и (3.22), (3.24), соответственно.

Лемма 3.10. *Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ при $\lambda \notin \Lambda_E$, где*

$$\Lambda_E = \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : \det\bigl(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\bigr) = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\bigr\}.$$

Доказательство. Рассмотрим главный символ $\sigma_0(\mathcal{L}_\lambda(x, D)) = \pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi)$, где $\xi = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$, системы (2.1), определяемый системой (3.22):

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Здесь и далее знак «$\otimes$» означает тензорное (кронекеровское) произведение матриц. Основные свойства тензорного произведения можно найти в [10, гл. 8, п. 8.2]. Напомним, что матрицы вязкостей и плотностей имеют вид: $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Phi} = \operatorname{diag}(c_1\rho_{10}(x_3), \ldots, c_n\rho_{n0}(x_3))$.

Обозначим

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

и применим факторизацию (3.18) при $E_1 = \mathbb{C}^{3n}$, $E_2 = \mathbb{C}^n$. С учётом $\xi^\tau\xi = |\xi|^2$ непосредственными вычислениями проверяется (см. (1.3) и замечание 2.1), что

$$A_{11}^{-1} = \Bigl(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau\Bigr)^{-1} = \frac{1}{|\xi|^4}\Bigl(\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} \otimes \xi\xi^\tau\Bigr).$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= -\lambda I_n-\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^\tau\cdot\Big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau\Big)^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi=\\
&=-\lambda I_n-\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^\tau\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\xi\xi^\tau\Big)\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(I_n-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big((2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1/2}.
\end{aligned}\tag{3.27}
$$

Обозначим через $\Gamma_\xi:=(|\xi|^{-1}\xi,\mathbf{a}^\perp,\mathbf{b}^\perp)$ матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi|^{-1}\xi$, $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ($|\mathbf{a}^\perp|=|\mathbf{b}^\perp|=1$), где $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ортогональны ξ и между собой. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$
\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi=I_3,\quad \Gamma_\xi^\tau\xi=(|\xi|;0;0)^\tau=:|\xi|\mathbf{e}_1,\quad \Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi=\operatorname{diag}(|\xi|^2,0,0)=:|\xi|^2P_1.\tag{3.28}
$$

Обозначим $\mathrm{S}_\xi:=I_n\otimes\Gamma_\xi$, тогда $\mathrm{S}_\xi^\tau\mathrm{S}_\xi=I_n\otimes I_3=I_{3n}$. Из (3.18), (3.26)–(3.28) и теоремы Лапласа о вычислении определителей теперь найдём, что (см. определение 3.1)

$$
\begin{aligned}
\pi\det\mathcal{L}_\lambda(x,\xi)&=\det\pi\mathcal{L}_\lambda(x,\xi)=\det\begin{pmatrix}I&0\\A_{21}A_{11}^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&A_{11}^{-1}A_{12}\\0&I\end{pmatrix}=\\
&=\det\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau & 0_{3n\times n}\\ 0_{n\times3n} & \mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1/2}\end{pmatrix}=\\
&=\det\mathrm{S}_\xi^\tau\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau\big)\mathrm{S}_\xi\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes|\xi|^2P_1\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=\big(|\xi|^2\big)^{3n}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=(-1)^n|\xi|^{6n}\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det\big(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\big)\neq0
\end{aligned}\tag{3.29}
$$

для любого $x\in\overline{\Omega}$ и $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, если только $\lambda\notin\Lambda_E$. □

Лемма 3.11. *Задача* (2.1), (1.5) *эллиптична при* $\lambda\notin\Lambda_E\cup\Lambda_L$, *где*

$$
\Lambda_L=\big\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \det\big(\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\big)=0,\ \ x\in\partial\Omega\big\}.
$$

Доказательство. Прежде всего, будем считать, что $\lambda\notin\Lambda_E$, поскольку по лемме 3.10 на множестве Λ_E оператор $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (2.1), (1.5) не является эллиптической (см. определение 3.2). Дальнейшее доказательство разобьём на несколько шагов.

1) Зафиксируем $z_0\in\partial\Omega$ и введём в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано в предыдущем пункте. Перепишем операторную матрицу системы (2.1) в локальной системе координат и выделим из неё главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу системы (3.22), записанную в локальной системе координат. Главный символ последней системы имеет вид (3.25) с заменой ξ на α (см. (3.21) и лемму 3.8). При этом $\det\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$ вычисляется по формуле (3.29) с заменой $|\xi|^2$ на $\alpha^\tau\alpha=\xi'^2+\xi_3^2$. Уравнение $\det\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)=0$ имеет $3n$-кратные ξ_3-корни $\xi_3=\pm i|\xi'|$.

2) Найдём выражение для матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$ в определении 3.2. Далее для краткости положим $\xi'^2+\xi_3^2=:|\xi|^2$. Обозначим

$$
\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\\ \mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau & -\lambda I_n\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\tag{3.30}
$$

и найдём матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$, с помощью факторизации (3.18) при $E_1=\mathbb{C}^{3n}$, $E_2=\mathbb{C}^n$. С учётом $\alpha^\tau\alpha=(\beta^\tau+\xi_3N^\tau)(\beta+\xi_3N)=\beta^\tau\beta+\xi_3^2=\xi'^2+\xi_3^2=|\xi|^2$ (см. (3.21)) непосредственными вычислениями проверяется (см. (1.3) и замечание 2.1), что

$$A_{11}^{-1}=\Big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)^{-1}=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big). \tag{3.31}$$

Отсюда следует (см. аналогичные вычисления в (3.27)), что

$$\begin{aligned}D_2^{-1}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}&=\big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1/2}\big)^{-1}=\\&=\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Из (3.30)–(3.32) имеем

$$\begin{aligned}&A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=\\
&=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau\cdot A_{11}^{-1}=\\
&=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\times\\
&\qquad\times\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\
&=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}\cdot\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\
&=A_{11}^{-1}-\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\times\\
&\qquad\times\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\
&=A_{11}^{-1}-\frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\
&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)-\\
&\qquad-\frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\
&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\
&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+\\
&\qquad+\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})+\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\
&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+I_n+\\
&\qquad+\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\
&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\Big(\mathbf{M}^{-1}+\lambda\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\
&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big),\end{aligned}\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}-A_{11}A_{12}D_2^{-1}&=-\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\times\\
&\qquad\times\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1=\\
&=-\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{M}^{-1}-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\big)\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha=\end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{|\xi|^2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha =$$
$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\Big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\Big)^{-1}\otimes\alpha =$$
$$= -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda\mathbf{\Phi}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha = -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha. \tag{3.34}$$

Из факторизации (3.18) и формул (3.33)-(3.34) теперь сможем найти необходимые для вычислений части матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$.

3) Перепишем оператор граничных условий (1.5) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим его главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу граничных условий (3.23), записанную в локальной системе координат:

$$\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3) = \begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau & 0_n \\ I_n\otimes\tau_2^\tau & 0_n \\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

где 0_n — нулевая $(n\times n)$-матрица.

Заметим, что

$$I_{3n} = \begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau \\ I_n\otimes\tau_2^\tau \\ I_n\otimes N^\tau\end{pmatrix}\big(I_n\otimes\tau_1, I_n\otimes\tau_2, I_n\otimes N\big) = \big(I_n\otimes\tau_1, I_n\otimes\tau_2, I_n\otimes N\big)\begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau \\ I_n\otimes\tau_2^\tau \\ I_n\otimes N^\tau\end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Из определения 3.2 с учётом представления (3.30), факторизации (3.18) и формул (3.33)–(3.36) теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (2.1), (1.5) требуется показать, что

$$\operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 =$$
$$= \operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\big(I_n\otimes\tau_1, I_n\otimes\tau_2, I_n\otimes N\big)\begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau & 0_n \\ I_n\otimes\tau_2^\tau & 0_n \\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 =$$
$$= \operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\big(I_{3n},0_{3n\times n}\big)\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}D_2^{-1} \\ *_{n\times 3n} & *_{n\times n}\end{pmatrix}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 =$$
$$= \operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\Bigg(\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - \big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big),$$
$$-\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha\Bigg)\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 = 3n. \tag{3.37}$$

Здесь γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3 = i|\xi'|$, а символами $*_{n\times 3n}$, $*_{n\times n}$ обозначены несущественные для вычислений матрицы соответствующих размеров.

4) Проведём вспомогательные вычисления. Пусть $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ — $(n\times n)$-матрицы. Из (3.21) следует, что $\alpha\alpha^\tau = (\beta+\xi_3 N)(\beta^\tau+\xi_3 N^\tau) = \beta\beta^\tau + \xi_3(\beta N^\tau + N\beta^\tau) + \xi_3^2 NN^\tau$. Используя формулы из леммы 3.9, теперь вычислим

$$\mathcal{M} := \int\limits_{\gamma_+}\bigg(\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{N}\otimes|\xi|^2 I_3 + \mathbf{P}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big), \frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{C}\otimes\alpha\bigg)\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 =$$
$$= \int\limits_{\gamma_+}\bigg(\mathbf{N}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}\,I_3 + \mathbf{P}\otimes\frac{1}{|\xi|^4}\,\alpha\alpha^\tau, \mathbf{C}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}\,\alpha, \mathbf{N}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,I_3 + \mathbf{P}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,\alpha\alpha^\tau, \mathbf{C}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,\alpha\bigg)d\xi_3 =$$
$$= \int\limits_{\gamma_+}\bigg(\mathbf{N}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}\,I_3 + \mathbf{P}\otimes\bigg[\frac{1}{|\xi|^4}\,\beta\beta^\tau + \frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,(\beta N^\tau + N\beta^\tau) + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}\,NN^\tau\bigg], \mathbf{C}\otimes\bigg[\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,\beta + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}\,N\bigg],$$

$$\mathbf{N}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,I_3+\mathbf{P}\otimes\left[\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,\beta\beta^\tau+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}\,(\beta N^\tau+N\beta^\tau)+\frac{\xi_3^3}{|\xi|^4}\,NN^\tau\right],\mathbf{C}\otimes\left[\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}\,\beta+\frac{\xi_3^3}{|\xi|^2}\,N\right]\Bigg)d\xi_3=$$
$$=\Bigg(\mathbf{N}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}\,I_3+\mathbf{P}\otimes\left[\frac{\pi}{2|\xi'|^3}\,\beta\beta^\tau+\frac{\pi}{2|\xi'|}\,NN^\tau\right],\mathbf{C}\otimes\left[\frac{\pi}{|\xi'|}\,\beta+\pi iN\right],$$
$$\mathbf{N}\otimes\pi iI_3+\mathbf{P}\otimes\left[\frac{\pi}{2|\xi'|}(\beta N^\tau+N\beta^\tau)+\pi iNN^\tau\right],\mathbf{C}\otimes\big(\pi i\beta-\pi|\xi'|N\big)\Bigg). \qquad (3.38)$$

Обозначим через $\Gamma_\alpha:=(|\xi'|^{-1}\beta,\mathbf{a}^\perp,N)$ матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi'|^{-1}\beta$, $\mathbf{a}^\perp$, N, где $\mathbf{a}^\perp$ ортогонален β, N и $|\mathbf{a}^\perp|=1$. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\begin{aligned}&\Gamma_\alpha^\tau\Gamma_\alpha=I_3,\quad \Gamma_\alpha^\tau\beta=(|\xi'|;0;0)^\tau=:|\xi'|\mathbf{e}_1,\quad \Gamma_\alpha^\tau N=(0;0;1)^\tau=:\mathbf{e}_3,\\&\Gamma_\alpha^\tau\beta\beta^\tau\Gamma_\alpha=\operatorname{diag}(|\xi'|^2,0,0)=:|\xi'|^2P_1,\quad \Gamma_\alpha^\tau NN^\tau\Gamma_\alpha=\operatorname{diag}(0,0,1)=:P_3.\end{aligned} \qquad (3.39)$$

Обозначим $\mathrm{S}_\alpha:=I_n\otimes\Gamma_\alpha$, тогда $\mathrm{S}_\alpha^\tau\mathrm{S}_\alpha=I_n\otimes I_3=I_{3n}$. Из (3.38), (3.39) найдём, что

$$\mathcal{N}:=\mathrm{S}_\alpha^\tau\cdot\mathcal{M}\cdot\operatorname{diag}(\mathrm{S}_\alpha,I_n\otimes I_1,\mathrm{S}_\alpha,I_n\otimes I_1)=$$
$$=\Bigg(\frac{\pi}{|\xi'|}\Big[\mathbf{N}\otimes I_3+\frac12\,\mathbf{P}\otimes(P_1+P_3)\Big],\pi\mathbf{C}\otimes(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_3),$$
$$\pi i\Big[\mathbf{N}\otimes I_3+\frac12\,\mathbf{P}\otimes\big(2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)\big)\Big],\pi i|\xi'|\mathbf{C}\otimes(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_3)\Bigg). \qquad (3.40)$$

Далее, несложно вычислить, что спектр матрицы $2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)$ состоит из собственного значения $\lambda=0$ кратности один и собственного значения $\lambda=1$ кратности два. Обозначим через T матрицу, столбцами которой являются собственные элементы, а также соответствующий присоединённый элемент матрицы $2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)$, отвечающий точке $\lambda=1$. Тогда

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}0&1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1&0&0\\0&i/\sqrt2&-i/\sqrt2\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt2&0&-i/\sqrt2\\1/\sqrt2&0&i/\sqrt2\end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяются следующие соотношения (см. (3.39)):

$$\mathrm{T}^{-1}\big(2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)\big)\mathrm{T}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^{-1}\big(P_1+P_3\big)\mathrm{T}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}^{-1}\big(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_3\big)=\sqrt2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}. \qquad (3.41)$$

Из (3.40), (3.41) найдём, что

$$\mathcal{S}:=I_n\otimes\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathcal{N}\cdot\operatorname{diag}(I_n\otimes\mathrm{T},I_n\otimes I_1,I_n\otimes\mathrm{T},I_n\otimes I_1)=$$
$$=\left(\frac{\pi}{|\xi'|}\left[\mathbf{N}\otimes\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac12\,\mathbf{P}\otimes\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right],\pi\sqrt2\mathbf{C}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\pi i\left[\mathbf{N}\otimes\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac12\,\mathbf{P}\otimes\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\right],\pi i\sqrt2|\xi'|\mathbf{C}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right). \qquad (3.42)$$

Матрица $\mathcal{S}$ имеет размер $3n\times 8n$. Из теоремы Лапласа о вычислении определителей найдём, что любой минор матрицы $\mathcal{S}$ порядка $3n$, который может быть отличен от нуля, непременно содержит в качестве множителя определитель $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P})$. Таким образом, если $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P})=0$, то $\operatorname{rank}\mathcal{S}<3n$. С другой стороны, рассматривая минор матрицы $\mathcal{S}$, составленный из $3n$ строк и первых $3n$ столбцов, найдём, что

$$\det\frac{\pi}{|\xi'|}\left(\mathbf{N}\otimes I_3+\frac12\,\mathbf{P}\otimes(I_3-P_1)\right)=\frac{\pi^{3n}}{|\xi'|^{3n}}\cdot\det\mathbf{N}\cdot\det{}^2\Big(\mathbf{N}+\frac12\,\mathbf{P}\Big)\neq0$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\det \mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

Из проведённых рассуждений и равенств $\operatorname{rank}\mathcal{M} = \operatorname{rank}\mathcal{N} = \operatorname{rank}\mathcal{S}$ (см. (3.38), (3.40), (3.42)) следует, что $\operatorname{rank}\mathcal{M} = 3n$ для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\det \mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

5) Применим проведённые рассуждения к (3.37). Учитывая, что $\det \mathbf{N} = \det \mathbf{M}^{-1} \neq 0$,

$$\begin{aligned}\det\Big(\mathbf{N}+\frac{1}{2}\,\mathbf{P}\Big) &= \det\Big(\mathbf{M}^{-1} - \frac{1}{2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\Big) = \\ &= \det\Big(\frac{1}{2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\Big) = \\ &= \frac{\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)}{2^n\cdot\det\mathbf{M}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)} \neq 0\end{aligned}$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$, найдём, что равенство (3.37) имеет место для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$ (при этом также $\lambda \notin \Lambda_E$, как отмечено в начале доказательства). По определению 3.2 задача (2.1), (1.5) эллиптична при $\lambda \notin \Lambda_E \cup \Lambda_L$. ☐

Лемма 3.12. *Задача* (2.1), (1.6) *эллиптична при* $\lambda \notin \Lambda_E$.

Доказательство. Как и в лемме 3.11, будем считать, что $\lambda \notin \Lambda_E$, поскольку по лемме 3.10 на множестве Λ_E дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (2.1), (1.6) не является эллиптической (см. определение 3.2). Далее повторим дословно шаги 1) и 2) из доказательства леммы 3.11 и продолжим с построения оператора граничных условий.

3) Перепишем оператор граничных условий (1.6) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим его главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу граничных условий (3.24), записанную в локальной системе координат.

Заметим, что часть граничных условий (3.24) может быть переписана в следующей форме:

$$\begin{aligned}0 &= 2\sum_{j=1}^n \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s = \sum_{j=1}^n 2\mu_{ij}\tau_s^\tau e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} = \\ &= \sum_{j=1}^n 2\mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) & e_{12}(\mathbf{u}_j) & e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ e_{21}(\mathbf{u}_j) & e_{22}(\mathbf{u}_j) & e_{23}(\mathbf{u}_j) \\ e_{31}(\mathbf{u}_j) & e_{32}(\mathbf{u}_j) & e_{33}(\mathbf{u}_j)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} \nabla u_{j1}\cdot\mathbf{n} + \dfrac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n} \\ \nabla u_{j2}\cdot\mathbf{n} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n} \\ \nabla u_{j3}\cdot\mathbf{n} + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}\end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} n_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{n}\cdot\nabla & n_2\dfrac{\partial}{\partial x_1} & n_3\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ n_1\dfrac{\partial}{\partial x_2} & n_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{n}\cdot\nabla & n_3\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ n_1\dfrac{\partial}{\partial x_3} & n_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} & n_3\dfrac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{n}\cdot\nabla \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ u_{j3}\end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau \Big\{ n_k\frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{lk}\mathbf{n}\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^3 \mathbf{u}_j, \quad s=1,2, \quad i=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Во введённой выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ с использованием леммы 3.8 выпишем главные символы дифференциальных операторов из (3.43):

$$\begin{aligned}&\sigma_0\Big(\mu_{ij}\tau_s^\tau\Big\{N_k\frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{lk}N\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^3\Big) = \mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l + i\delta_{lk}N\cdot\alpha\big\}_{l,k=1}^3 = \\ &= \mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l + i\delta_{lk}(\beta^\tau+\xi_3N^\tau)N\big\}_{l,k=1}^3 = \mu_{ij}i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau + \xi_3 I_3), \quad s=1,2, \quad i,j=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.44}$$

С учётом соотношений (3.43)-(3.44) операторная матрица граничных условий (3.24) запишется в локальной системе координат следующим образом:

$$\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Из определения 3.2 с учётом представления (3.30), факторизации (3.18) и формул (3.33)-(3.34) теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (2.1), (1.6) требуется показать, что ранг следующей матрицы равен $3n$:

$$\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\bigl(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\bigr)^{-1}\bigl(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\bigr)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}D_2^{-1}\\ *_{n\times 3n} & *_{n\times n}\end{pmatrix}\bigl(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\bigr)\,d\xi_3. \tag{3.46}$$

Здесь γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3=i|\xi'|$, а символами $*_{n\times 3n}$, $*_{n\times n}$ обозначены, как и в (3.37), несущественные для дальнейших вычислений матрицы соответствующих размеров.

Обозначим через $\mathcal{M}$ матрицу, составленную из $3n$ строк и первых $4n$ столбцов матрицы (3.46). Если ранг матрицы $\mathcal{M}$ будет равен $3n$, то и ранг матрицы (3.46), очевидно, будет таким же. Вычислим составляющие матрицы $\mathcal{M}$ с использованием вспомогательных вычислений (см. (3.21)) и обозначений:

$$\begin{gathered}\tau_s^\tau\alpha=\tau_s^\tau(\beta+\xi_3 N)=\tau_s^\tau(E_1^{-1/2}\xi_1\tau_1+E_2^{-1/2}\xi_2\tau_2)=E_s^{-1/2}\xi_s,\quad s=1,2,\\ \tau_s^\tau\alpha\alpha^\tau=E_s^{-1/2}\xi_s(\beta^\tau+\xi_3 N^\tau),\quad s=1,2,\quad N^\tau\alpha=\xi_3,\quad N^\tau\alpha\alpha^\tau=\xi_3\beta^\tau+\xi_3^2N^\tau,\\ \mathbf{I}_j:=\mathbf{\Phi}-\lambda(j\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}),\quad j=1,2,3.\end{gathered} \tag{3.47}$$

Отсюда, из формул (3.33)-(3.34) и леммы 3.9 имеем

$$\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\bigl(A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\bigr)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Bigl(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Bigr)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}i\biggl(I_n\otimes\Bigl(\frac{1}{|\xi|^2}E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau+\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\tau_s^\tau\Bigr)-\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes 2E_s^{-1/2}\xi_s\Bigl(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\beta^\tau+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}N^\tau\Bigr)\biggr)d\xi_3=$$
$$=i\biggl(I_n\otimes\Bigl(\frac{\pi}{|\xi'|}E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau+\pi i\tau_s^\tau\Bigr)-\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau\biggr)=$$
$$=i\Bigl(I_n\otimes\pi i\tau_s^\tau-\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}E_s^{-1/2}\xi_s N^\tau\Bigr),\quad s=1,2, \tag{3.48}$$

$$\int\limits_{\gamma_+}I_n\otimes N^\tau\cdot\bigl(A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\bigr)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}I_n\otimes N^\tau\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Bigl(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Bigr)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\biggl(\mathbf{M}^{-1}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}N^\tau-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\Bigl(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\beta^\tau+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}N^\tau\Bigr)\biggr)d\xi_3=$$
$$=\mathbf{M}^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}N^\tau-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{2|\xi'|}N^\tau=\frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}N^\tau, \tag{3.49}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} \mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\big(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\big)\,d\xi_3=\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\frac{-i}{|\xi|^2}\,\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha\,d\xi_3=$$

$$=2\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s\int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,d\xi_3=2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s,\quad s=1,2,\quad (3.50)$$

$$\int\limits_{\gamma_+} I_n\otimes N^\tau\cdot\big(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\big)\,d\xi_3=\int\limits_{\gamma_+} I_n\otimes N^\tau\cdot\frac{-i}{|\xi|^2}\,\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha\,d\xi_3=$$

$$=-i\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,d\xi_3=\pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}.\quad (3.51)$$

Из (3.48)–(3.51) теперь найдём, что

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} i\big(I_n\otimes\pi i\tau_1^\tau-\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_1^{-1/2}\xi_1N^\tau\big) & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1\\ i\big(I_n\otimes\pi i\tau_2^\tau-\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_2^{-1/2}\xi_2N^\tau\big) & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2\\ \frac12\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,N^\tau & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{N}:=\mathcal{M}\cdot\operatorname{diag}\big((I_n\otimes N, I_n\otimes\tau_1, I_n\otimes\tau_2), I_n\big)=$$

$$=\begin{pmatrix} -i\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_1^{-1/2}\xi_1 & -\pi I_n & 0_n & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1\\ -i\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_2^{-1/2}\xi_2 & 0_n & -\pi I_n & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2\\ \dfrac12\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\dfrac{\pi}{|\xi'|} & 0_n & 0_n & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что минор матрицы $\mathcal{N}$, составленный из $3n$ строк и последних $3n$ столбцов, равен $\pi^{3n}\det\mathbf{I}_2^{-1}\cdot\det\mathbf{\Phi}^{1/2}=\pi^{3n}\det^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\cdot\det\mathbf{\Phi}^{1/2}\neq 0$, а значит, $\operatorname{rank}\mathcal{N}=3n$. Отсюда и из равенства $\operatorname{rank}\mathcal{M}=\operatorname{rank}\mathcal{N}$ следует, что ранг матрицы (3.46) равен $3n$. ☐

Лемма 3.13. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0)=\Lambda_E\cup\Lambda_L$, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_1)=\Lambda_E$. *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}_j$.

Доказательство. Из определения 2.1, лемм 3.10–3.12 и [25] следуют формулы для существенных спектров операторов $\mathcal{A}_j$, $j=1,2$. Далее, в лемме 3.6 доказано, что оператор $\mathcal{A}_j$ является максимальным аккретивным оператором. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_j-\lambda\mathcal{I}$ непрерывно обратим при отрицательных λ, а его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [7, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] или [24, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности оператора $\mathcal{A}_j$. ☐

3.4. Локализация и асимптотика дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_j$. Доказательство факта, что невещественный спектр оператора $\mathcal{A}_j$ (или оператора $\mathcal{A}_j^{-1}$, если он существует) состоит из конечного числа симметричных относительно вещественной оси пар собственных значений конечной кратности, состоит в проверке принадлежности оператора $\mathcal{A}_j^{-1}$ классу Хелтона: $\mathcal{A}_j^{-1}\in(H)$ (см. [1, гл. III, § 5, определение 5.1, следствие 5.21]). Чтобы не приводить здесь множество сопутствующих определений и терминов, сформулируем желаемое следствие из [1, гл. III, § 5, следствие 5.21] и [1, 23, гл. III, § 5, пример 5.23] в виде следующего предложения.

Предложение 3.1. *Определим в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ *оператор*

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S_1 & -S_3^*\\ S_3 & S_2\end{pmatrix},\qquad T_1=T_1^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1),\quad T_2=T_2^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2),$$

$$S_1 = S_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad S_2 = S_2^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2), \quad S_3 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Пусть $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_2) = \varnothing$. Тогда невещественный спектр оператора $\mathcal{T}$ состоит из конечного числа симметричных относительно $\mathbb{R}$ пар собственных значений конечной кратности.

Лемма 3.14. *Невещественный спектр оператора $\mathcal{A}_j$ состоит из конечного числа симметричных относительно $\mathbb{R}$ пар собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_j = \{0\}$. Допустим противное, тогда существует такой элемент $0 \neq \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, что (см. лемму 3.6)

$$\mathcal{A}_j\xi = \begin{pmatrix} A_j^{1/2}(A_j^{1/2}\mathbf{u} + Q_j^*\rho) \\ -Q_j A_j^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $(\rho, Q_j A_j^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_2} = 0$, а значит, $(A_j^{1/2}(A_j^{1/2}\mathbf{u} + Q_j^*\rho), \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} = \|A_j^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0$ и $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Тогда $A_j^{1/2}Q_j^*\rho = 0$, а значит, $\rho = 0$, так как $\operatorname{Ker} Q_j^* = \{0\}$ (см. лемму 3.4, (3.11) и лемму 3.5).

Таким образом, точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}_j$. По лемме 3.13 точка $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора $\mathcal{A}_j$: $0 \in \rho(\mathcal{A}_j)$. Отсюда и из второй факторизации в лемме 3.6 следует, что оператор $Q_jQ_j^*$ является положительно определённым в $\mathcal{H}_2$, а значит, существует $(Q_jQ_j^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

Из второй факторизации в лемме 3.6 теперь найдём, что

$$\mathcal{A}_j^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (Q_jQ_j^*)^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_j^{-1} - A_j^{-1/2}Q_j^*(Q_jQ_j^*)^{-1}Q_jA_j^{-1/2} & -A_j^{-1/2}Q_j^*(Q_jQ_j^*)^{-1} \\ (Q_jQ_j^*)^{-1}Q_jA_j^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Из представления $A_j = L_j + T$ и лемм 3.1–3.3 следует, что $A_j^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_j^{-1}$ имеет структуру оператора $\mathcal{T}$ из предложения 3.1. Утверждение леммы теперь следует из $\sigma((Q_jQ_j^*)^{-1}) \cap \{0\} = \varnothing$ и предложения 3.1. □

Лемма 3.15. *Спектр оператора $\mathcal{A}_j$ содержит подпоследовательность собственных значений с асимптотическим поведением*

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}_j) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \longrightarrow \infty, \quad j = 0, 1,$$

$$\mathcal{C} := \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega \Big(\operatorname{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\operatorname{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\, d\Omega.$$

Доказательство.

1) Покажем, что собственные значения оператора L_j имеют асимптотическое распределение $\lambda_k(L_j) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1))$ при $k \longrightarrow \infty$ с константой $\mathcal{C}$, определённой в лемме.

Действительно, указанная асимптотическая формула следует из обзора М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [3, § 1, п. 3] с константой

$$\mathcal{C} = \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \operatorname{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\}\, dS(\xi), \tag{3.52}$$

где $a_0 := \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau$, $b_0 := \mathbf{R} \otimes I_3$. Учитывая, что

$$\operatorname{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\} = \operatorname{tr}\Big\{\big(a_0^{1/2}b_0^{-1}a_0^{1/2}\big)^{-3/2}\Big\} = \operatorname{tr}\Big\{\big(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big\},$$

вычислим собственные значения матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$. Используя (3.28) и теорему Лапласа о вычислении определителей, найдём соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \det(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2} - \lambda I_{3n}) &= \det\Big(\mathbf{R}^{-1/2}\big(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R} \otimes I_3\big)\mathbf{R}^{-1/2}\Big) = \\ &= \det{}^2\mathbf{R}^{-1/2} \cdot \det\Big(I_n \otimes \Gamma_\xi^\tau \cdot \big(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R} \otimes I_3\big) \cdot I_n \otimes \Gamma_\xi\Big) = \\ &= \det\mathbf{R}^{-1} \cdot \det\big(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes |\xi|^2 P_1 - \lambda\mathbf{R} \otimes I_3\big) = \\ &= |\xi|^{6n} \cdot \det\mathbf{R}^{-1} \cdot \det\big(\mathbf{M} \otimes I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes P_1 - \mathbf{R} \otimes \lambda|\xi|^{-2} I_3\big) = \end{aligned}$$

$$= |\xi|^{6n} \cdot \det \mathbf{R}^{-1} \cdot \det \big(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big) \cdot \det^2\big(\mathbf{M} - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big) = 0.$$

Отсюда следует, что спектр матрицы $b_0^{-1/2} a_0 b_0^{-1/2}$ состоит из трёх множеств:

$$\Big\{\lambda_k^{(1)} = |\xi|^2 \lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big),\ \ \lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(3)} = |\xi|^2 \lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)\Big\}_{k=1}^{n},$$

где $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)$, $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)$ $(k = \overline{1, n})$ — собственные значения соответствующих матриц. Из (3.52) и проведённых рассуждений теперь найдём, что

$$\mathcal{C} = \frac{1}{24\pi^3} \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \left(\sum_{k=1}^{n} \big(\lambda_k^{(1)}\big)^{-3/2} + 2 \sum_{k=1}^{n} \big(\lambda_k^{(2)}\big)^{-3/2} \right) dS(\xi) =$$

$$= \frac{1}{24\pi^3} \int\limits_{\Omega} \Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} \Big) d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \frac{dS(\xi)}{|\xi|^3} =$$

$$= \frac{1}{6\pi^2} \int\limits_{\Omega} \Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} \Big) d\Omega.$$

2) Из представления $A_j = L_j + T = (I + TL_j^{-1})L_j$ следует, что оператор A_j является *слабым возмущением* оператора L_j. Отсюда и из степенной асимптотики собственных значений оператора L_j следует (см., например, [13]), что главные члены асимптотик собственных значений этих операторов совпадают.

Далее, из (3.15) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}_j$ и оператор-функции $L_j(\lambda)$ совпадают. Наличие же у оператор-функции (пучка операторов) $L_j(\lambda)$ последовательности собственных значений с указанным в лемме асимптотическим распределением следует из теоремы А. С. Маркуса и В. И. Мацаева о сравнении спектров (см. [13, теорема 1.2]). □

Утверждения теоремы 2.1 следуют из лемм 3.13–3.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1988. — *6*. — С. 5–33.
3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1977. — *14*, № 11. — С. 5–58.
4. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Мат. сб. — 1965. — *68*, № 3. — С. 373–416.
5. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Теория частичного плавления// Геолог. и геофиз. — 1989. — № 9. — С. 56–64.
6. *Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Черных Е. Г.* Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением// Сиб. ж. индустр. мат. — 2014. — *17*, № 4. — С. 60–66.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
8. *Кожевников А. Н.* Функциональные методы математической физики. Учебное пособие. — М.: МАИ, 1991.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1973.
11. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений политропного движения смесей вязких сжимаемых жидкостей// Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — *13*. — С. 541–583.
12. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — *82*, № 1. — С. 151–197.
13. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
14. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. — М.: Наука, 1987.
15. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: МГУ, 1990.

16. *Пал П. К., Масленникова В. Н.* Спектральные свойства операторов в задаче о колебании сжимаемой жидкости во вращающихся сосудах// Докл. АН СССР. — 1985. — *281*, № 3. — С. 529–534.
17. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
18. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса—Л. Ниренберга. II// Тр. МИАН. — 1966. — *92.* — С. 233–297.
19. *Atkinson F. V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A. A.* The essential spectrum of some matrix operators// Math. Nachr. — 1994. — *167.* — С. 5–20.
20. *Faierman M., Fries R. J., Mennicken R., Möller M.* On the essential spectrum of the linearized Navier—Stokes operator// Integr. Equ. Oper. Theory. — 2000. — *38*, № 1. — С. 9–27.
21. *Frehse J., Goj S., Málek J.* A Stokes-like system for mixtures// В сб.: «Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics. II». — Dordrecht—Norwell—New York—London: Kluwer, 2002. — С. 119–136.
22. *Frehse J., Goj S., Málek J.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden—Fowler type higher-order equations// SIAM J. Math. Anal. — 2005. — *36*, № 4. — С. 1259–1281.
23. *Frehse J., Goj S., Málek J.* A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum// Appl. Math. — 2005. — *50.* — С. 527–541.
24. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
25. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227.* — С. 247–276.
26. *Kozhevnikov A., Skubachevskaya T.* Some applications of pseudo-differential operators to elasticity// Hokkaido Math. J. — 1997. — *26*, № 2. — С. 297–322.
27. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence// Methods Appl. Anal. — 2013. — *20*, № 2. — С. 179–195.
28. *Mennicken R., Shkalikov A. A.* Spectral decomposition of symmetric operator matrices// Math. Nachr. — 1996. — *179.* — С. 259–273.
29. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. — River Edge: World Sci. Publ., 1995.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

UDC 517.958+517.984.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97
EDN: DYSLPL

Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids

D. A. Zakora

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol', Russia

In this paper, we study a problem of normal oscillations of a homogeneous mixture of several viscous compressible fluids filling a bounded domain of three-dimensional space with an infinitely smooth boundary. Two boundary conditions are considered: the no-slip condition and the slip condition without shear stresses. It is proved that the essential spectrum of the problem in both cases is a finite set of segments located on the real axis. The discrete spectrum lies on the real axis, except perhaps for a finite number of complex conjugate eigenvalues. The spectrum of the problem contains a subsequence of eigenvalues with a limit point at infinity and a power-law asymptotic distribution.

Keywords: mixture of fluids, compressible viscous fluid, spectral problem, essential spectrum, discrete spectrum

For citation: D. A. Zakora, "Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 73–97. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. D. Orlova, "Evolyutsionnaya i spektral'naya zadachi, porozhdennye problemoy malykh dvizheniy vyazkouprugoy zhidkosti" [Evolutionary and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1988, **6**, 5–33 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1977, **14**, No. 11, 5–58 (in Russian).
4. L. R. Volevich, "Razreshimost' kraevykh zadach dlya obshchikh ellipticheskikh sistem" [Solvability of boundary-value problems for general elliptic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1965, **68**, No. 3, 373–416 (in Russian).
5. V. N. Dorovskiy and Yu. V. Perepechko, "Teoriya chastichnogo plavleniya" [The theory of partial melting], *Geolog. i geofiz.* [Geology and Geophysics], 1989, No. 9, 56–64 (in Russian).
6. Kh. Kh. Imomnazarov, Sh. Kh. Imomnazarov, M. M. Mamatkulov, and E. G. Chernykh, "Fundamental'noe reshenie dlya statsionarnogo uravneniya dvukhskorostnoy gidrodinamiki s odnim davleniem" [Fundamental solution for the stationary equation of two-velocity hydrodynamics with one pressure], *Sib. zh. industr. mat.* [Sib. J. Industr. Math.], 2014, **17**, No. 4, 60–66 (in Russian).
7. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
8. A. N. Kozhevnikov, *Funktsional'nye metody matematicheskoy fiziki. Uchebnoe posobie* [Functional Methods of Mathematical Physics. Textbook], MAI, Moscow, 1991 (in Russian).

9. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear differential equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
10. P. Lancaster, *Teoriya matrits* [The Theory of Matrices], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
11. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Razreshimost' nachal'no-kraevoy zadachi dlya uravneniy politropnogo dvizheniya smesey vyazkikh szhimaemykh zhidkostey" [Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of polytropic motion of mixtures of viscous compressible fluids], *Sib. elektron. mat. izv.* [Sib. Electron. Math. Bull.], 2016, **13**, 541–583 (in Russian).
12. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Razreshimost' nestatsionarnykh uravneniy mnogokomponentnykh vyazkikh szhimaemykh zhidkostey" [Solvability of nonstationary equations of multicomponent viscous compressible fluids], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2018, **82**, No. 1, 151–197 (in Russian).
13. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teorema o sravnenii spektrov i spektral'naya asimptotika dlya puchka M. V. Keldysha" [The comparison theorem for spectra and the spectral asymptotics for the M. V. Keldysh pensil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
14. R. I. Nigmatulin, *Dinamika mnogofaznykh sred. T. 1* [Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
15. O. A. Oleynik, G. A. Iosifyan, and A. S. Shamaev, *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnykh uprugikh sred* [Mathematical Problems of the Theory of Strongly Nonhomogeneous Elastic Media], MSU, Moscow, 1990 (in Russian).
16. P. K. Pal and V. N. Maslennikova, "Spektral'nye svoystva operatorov v zadache o kolebanii szhimaemoy zhidkosti vo vrashchayushchikhsya sosudakh" [Spectral properties of operators in the problem of oscillation of a compressible fluid in rotating vessels], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **281**, No. 3, 529–534 (in Russian).
17. K. Rektorys, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike* [Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering], Mir, Moscow, 1985 (Russian translation).
18. V. A. Solonnikov, "Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya sistem, ellipticheskikh v smysle A. Daglisa—L. Nirenberga. II" [On general boundary-value problems for systems elliptic in the sense of Douglis—Nirenberg. II], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1966, **92**, 233–297 (in Russian).
19. F. V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, and A. A. Shkalikov, "The essential spectrum of some matrix operators," *Math. Nachr.*, 1994, **167**, 5–20.
20. M. Faierman, R. J. Fries, R. Mennicken, and M. Möller, "On the essential spectrum of the linearized Navier—Stokes operator," *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2000, **38**, No. 1, 9–27.
21. J. Frehse, S. Goj, and J. Málek, "A Stokes-like system for mixtures," In: *Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics. II*, Kluwer, Dordrecht—Norwell—New York—London, 2002, pp. 119–136.
22. J. Frehse, S. Goj, and J. Málek, "On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden—Fowler type higher-order equations," *SIAM J. Math. Anal.*, 2005, **36**, No. 4, 1259–1281.
23. J. Frehse, S. Goj, and J. Málek, "A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum," *Appl. Math.*, 2005, **50**, 527–541.
24. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of linear operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1990.
25. G. Grubb and G. Geymonat, "The essential spectrum of elliptic systems of mixed order," *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
26. A. Kozhevnikov and T. Skubachevskaya, "Some applications of pseudo-differential operators to elasticity," *Hokkaido Math. J.*, 1997, **26**, No. 2, 297–322.
27. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence," *Methods Appl. Anal.*, 2013, **20**, No. 2, 179–195.
28. R. Mennicken and A. A. Shkalikov, "Spectral decomposition of symmetric operator matrices," *Math. Nachr.*, 1996, **179**, 259–273.
29. K. L. Rajagopal and L. Tao, *Mechanics of mixtures*, World Sci. Publ., River Edge, 1995.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol', Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com