Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2022). С. 62–72
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72
EDN: ESEMSD

ОТСУТСТВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ АРГУМЕНТА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Е. И. Галахов[1], **О. А. Салиева**[2]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный технологический университет «Станкин», Москва, Россия*

Мы доказываем отсутствие положительных решений для некоторых полулинейных эллиптических неравенств в частных производных с преобразованиями аргумента в полупространстве. Доказательства основаны на методе пробных функций.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические неравенства, преобразования аргумента, отсутствие решений, положительные решения, монотонные решения

Для цитирования: *Е. И. Галахов, О. А. Салиева.* Отсутствие положительных решений некоторых нелинейных неравенств с преобразованиями аргумента в полупространстве// Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. **69**, № 1. С. 62–72. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72

1. Введение

В настоящей работе рассматривается известная проблема необходимых условий существования положительных решений некоторых нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. Существует несколько подходов к этим вопросам, такие как техники сравнения, энергетический метод и т. д. Подход, основанный на выборе специальных пробных функций, был предложен С. И. Похожаевым [3] и развит в совместных статьях и монографиях с Э. Митидиери, В. А. Галактионовым и другими соавторами (см. [2, 10] и ссылки в этих работах). В частности, было установлено, что для широкого класса неравенств в частных производных с нелинейностями степенного роста ($f(u) \sim cu^q$) существование положительных решений определяется соотношением между показателем q и так называемым критическим показателем, зависящим от размерности области определения и других параметров задачи.

Этот факт вызывает вопрос об устойчивости критического показателя по отношению к различным возмущениям и преобразованиям задачи, включая нелокальные эффекты, возникающие во многих областях теории уравнений с частными производными, таких как теория дробных степеней оператора Лапласа и интегро-дифференциальных операторов, имеющих такие приложения, как оценка влажности почв, математические модели лазерного излучения и особенно физика плазмы. Один из возможных примеров такого нелокального эффекта — интегрирование искомой функции по атомарной мере, что может быть также выражено как преобразование аргумента. Поэтому в работах авторов настоящей статьи (см., в частности, [9, 11]) были разработаны новые

Статья была поддержана стратегической программой академического лидерства университета РУДН.

техники пробных функций для нескольких новых классов неравенств, включая неравенства с преобразованиями аргумента во всем пространстве.

Здесь мы адаптируем метод пробных функций к получению достаточных условий отсутствия положительных решений для некоторых полулинейных эллиптических неравенств с преобразованиями аргумента в полупространстве. Мы приводим примеры, показывающие точность найденного критического показателя (см. замечания 2.2 и 3.1). Отметим, что аналогичные результаты для неравенств в полупространстве без преобразований аргумента были получены в [4, 5] и в более частном случае задачи Дирихле — в [6, 8] (см. также ссылки в этих работах) и авторами настоящей работы в [1]. Существенное продвижение в этом направлении было сделано недавно в [7].

Оставшаяся часть статьи состоит из трех разделов. В разделе 2 мы получаем результаты об отсутствии решений для полулинейных эллиптических неравенств с монотонно неубывающим (относительно нормальной переменной) преобразованием аргумента в нелинейном слагаемом, в разделе 3 — для неравенств с преобразованиями, близкими к тождественному (в определенном смысле, указанном ниже), а в разделе 4 мы рассматриваем более общие преобразования, но сужаем класс «допустимых» решений, ограничиваясь монотонными.

2. Монотонные преобразования

Пусть $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \tilde{g}(x_n))$, где $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ — строго монотонно возрастающая функция такая, что

(g0) $g(s) \geqslant s$ при всех $s > 0$ и $\inf\limits_{s \in \mathbb{R}_+} \dfrac{\tilde{g}^{-1}(s)|\tilde{g}'(s)|^{-1}}{s} > 0$.

Пример 2.1. Простейший пример: $g(s) = as + b$ с константами $a > 1$, $b \geqslant 0$.

Рассмотрим полулинейное эллиптическое неравенство

$$-\Delta u(x) \geqslant |u(g(x))|^q \qquad (x \in \mathbb{R}^n_+), \tag{2.1}$$

где $q > 1$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

Определение 2.1. Назовем *слабым решением* неравенства (2.1) функцию $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, удовлетворяющую неравенству

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta\psi(x)\, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(g(x))|^q \psi(x)\, dx \tag{2.2}$$

для любой неотрицательной пробной функции $\psi \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ с компактным носителем такой, что $\psi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \equiv 0$.

Лемма 2.1. *Существует невозрастающая функция $\varphi(s) \geqslant 0$ в $C^2[0,\infty)$, удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & s \geqslant 2, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\int\limits_1^2 \frac{|\varphi'(s)|^{q'}}{\varphi^{q'-1}(s)}\, ds < \infty, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_1^2 \frac{|\varphi''(s)|^{q'}}{\varphi^{q'-1}(s)}\, ds < \infty. \tag{2.5}$$

Здесь и ниже $q' = \dfrac{q}{q-1}$.

Доказательство. Можно выбрать $\varphi(s)$ равным $(2-s)^\lambda$ с достаточно большим $\lambda > 0$ в некоторой левой окрестности 2. □

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (g0), $n > 1$ *и* $1 < q \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$. *Тогда неравенство* (2.1) *не имеет нетривиальных (в частности, положительных) решений* $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$.

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что нетривиальное решение (2.1) существует. Пусть $0 < R < \infty$ (в частности, возможен случай $R = 1$). Функция $x_n\varphi_R(x)$, где

$$\varphi_R(x) = \prod_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{|x_k|}{R}\right) \ (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+})$$

и $\varphi(s)$ — функция из леммы 2.1, будет использоваться в качестве *пробной функции* для неравенства (2.1). Отметим, что подобные пробные функции использовались для задачи (2.1) с $g(x) \equiv x$ в [4].

Подставляя пробную функцию $x_n\varphi_R$ в соотношение (2.2), получим

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta(x_n\varphi_R(x))\, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(g(x))|^q x_n\varphi_R(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Используя монотонность $\tilde{g}$ и φ_R, можно оценить правую часть (2.6) снизу как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(g(x))|^q x_n\varphi_R(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q \tilde{g}^{-1}(x_n)\varphi_R(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tilde{g}^{-1}(x_n))|\tilde{g}'(x_n)|^{-1}\, dx \geqslant$$
$$\geqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx, \tag{2.7}$$

где $c = \inf\limits_{s\in\mathbb{R}_+} \dfrac{\tilde{g}^{-1}(s)|\tilde{g}'(s)|^{-1}}{s} > 0$ в силу (g0).

С другой стороны, имеем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta(\varphi_R(x)x_n)\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta\varphi_R(x) \cdot x_n\, dx - 2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\, dx. \tag{2.8}$$

Применяя параметрическое неравенство Юнга к первому слагаемому в правой части (2.8), получим

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta\varphi_R(x) \cdot x_n\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)| \cdot |\Delta\varphi_R(x)|\, x_n\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_1\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\Delta\varphi_R(x)|^{q'}\, x_n\varphi_R^{1-q'}(x)\, dx =$$
$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_1R^{n+1-2q'}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\Delta\varphi_1(y)|^{q'}\, \varphi_1^{1-q'}(y)\, dy =$$
$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_2R^{n+1-2q'} \tag{2.9}$$

с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$.

Второе слагаемое в правой части (2.8) можно оценить аналогично:

$$-2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\, dx \leqslant 2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\right|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_3\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{1-q'}\left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\right|^{q'} \varphi_R^{1-q'}(x)\, dx =$$

$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\,dx + c_3R^{n+1-2q'}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}\right|^{q'}\varphi_1^{1-q'}(y)\,dy =$$

$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\,dx + c_4R^{n+1-2q'} \quad (2.10)$$

с некоторыми константами $c_3, c_4 > 0$.

Комбинируя (2.6)–(2.10), будем иметь

$$\frac{c}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\,dx \leqslant (c_2+c_4)R^{n+1-2q'}. \quad (2.11)$$

Далее будем использовать стандартное обозначение $B_r(x_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_*| < r\}$, где $x_* \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Тогда для всех $x \in B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+$ по построению имеем $\varphi_R(x) = 1$. Поэтому, уменьшая область интегрирования в левой части неравенства (2.11), получим

$$\frac{c}{2}\int\limits_{B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^q x_n\,dx \leqslant (c_2+c_4)R^{n+1-2q'}.$$

Устремляя $R \to \infty$, приходим к противоречию при $n+1-2q' < 0$, что доказывает теорему во всех случаях, кроме критического (когда $n+1-2q' = 0$).

В критическом случае получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^q x_n\,dx < \infty$$

и отсюда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)}|u(x)|^q x_n\,dx \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Но из (2.6), (2.7) и неравенства Гельдера следует, что

$$c\int\limits_{B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^q x_n\,dx \leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)}|u(x)|^q x_n\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)}|\Delta(\varphi_R(x)x_n)|^{q'}x_n^{1-q'}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \quad (2.12)$$

и отсюда

$$\int\limits_{B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^q x_n\,dx \leqslant c\left(\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)}|u(x)|^q x_n\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \text{ при } R\to\infty,$$

так как второй множитель в правой части (2.12) можно оценить сверху через $(c_2+c_4)R^{n+1-2q'}$, как и выше, причем $n+1-2q' = 0$, так что для нетривиального u получаем противоречие и в этом случае. Это завершает доказательство. □

Замечание 2.1. Такой же результат имеет место для $g(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = (\tilde g(x_1,\ldots,x_{n-1}),x_n)$, где $\tilde g : \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ таково, что $|\tilde g(x')| \geqslant |x'| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2}$ и $\inf\limits_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}|J_{\tilde g'}^{-1}(x')|\cdot|\tilde g'(x')| > 0$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Замечание 2.2. Критический показатель $\dfrac{n+1}{n-1}$ оптимален. См. пример решения $u_q(x)$ при $q > \dfrac{n+1}{n-1}$ и $g(x)\equiv x$ в [5]. Его модификация $u_{q,g}(x) = u_q(x',\tilde g^{-1}(x_n))$ удовлетворяет (2.1) для более общих g со свойством (g0).

3. Преобразования, близкие к тождественному

Пусть теперь $g \in C^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n_+)$ удовлетворяет следующим условиям:

(g1) *существует константа* $c_1 > 0$ *такая, что при* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *выполнено* $|g(x) - x| \leqslant c_1$;

(g2) $g(x) = x$ *при* $x \in \mathcal{C} \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : x_n \leqslant 4c_1\}$.

Пример 3.1. В качестве примера можно взять $g(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \tilde{g}(x_n))$, где

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} s, & 0 \leqslant s \leqslant 4, \\ s + \dfrac{1}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi s}{4}\right), & s \geqslant 4. \end{cases}$$

Введем обозначение $Q_r = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : |x_i| \leqslant r,\, i = 1, \ldots, n\}$, где $r > 0$. Мы ограничиваемся рассмотрением класса положительных решений, удовлетворяющих для любого $R > 0$ оценке

$$\int\limits_{Q_{2R}} |u(x)|^q x_n \, dx \leqslant c_2 \int\limits_{Q_R} |u(x)|^q x_n \, dx, \tag{3.1}$$

который включает, в частности, решения, удовлетворяющие двусторонней оценке

$$c(1 + |x|)^\alpha \leqslant u(x) \leqslant c'(1 + |x|)^\alpha \ (x \in \mathbb{R}_+)$$

с некоторыми константами $\alpha \in \mathbb{R}$ и $c, c' \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (g1), (g2) *и* $1 < q \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$. *Тогда неравенство* (2.1) *не имеет положительных решений* $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$.

Доказательство. Повторим рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, оценивая правую часть (2.6) при $R > 4c_1$ другим способом. А именно, мы покрываем область $Q_{2R} \setminus \mathcal{C}$ натуральным числом $M(R)$ шаров $B^{m,R}_{2c_1} = B_{2c_1}(x^{m,R})$ радиуса $2c_1$ с центрами в некоторых точках $x^{m,R}$ так, что объединение $M(R)$ меньших шаров с теми же центрами $B^{m,R}_{c_1} = B_{c_1}(x^{m,R})$ радиуса c_1 полностью лежит в $Q_R \setminus \mathcal{C}$ и эти шары не пересекаются, так что

$$\int\limits_{Q_R \setminus \mathcal{C}} f(x)\, dx \geqslant \sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B^{m,R}_{c_1}} f(x)\, dx, \tag{3.2}$$

и существует константа $c_3 = c_3(n)$ такая, что каждая точка $Q_R \setminus \mathcal{C}$ принадлежит не более чем c_3 шарам $B^{m,R}_{2c_1}$, поэтому для любой неотрицательной функции $f(x)$, интегрируемой в $Q_R \setminus \mathcal{C}$, имеем

$$\int\limits_{Q_R \setminus \mathcal{C}} f(x)\, dx \leqslant c_3 \sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B^{m,R}_{2c_1}} f(x)\, dx. \tag{3.3}$$

Заметим, что, так как $-\Delta u \geqslant u^q \geqslant 0$, функция u удовлетворяет слабому неравенству Харнака

$$\inf_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} u^q(y) \geqslant c_4 R^{-n} \int\limits_{B^{m,R}_{4c_1}} u^q(x) dx \tag{3.4}$$

с некоторой константой $c_4 > 0$, не зависящей от m и R. Кроме того, так как центры $x^{m,R}$ шаров $B^{m,R}_{2c_1}$ по построению лежат вне $\mathcal{C}$, т. е. n-е координаты этих центров больше $4c_1$, а следовательно, n-е координаты всех точек шаров $B^{m,R}_{2c_1}$ больше $2c_1$, то

$$\frac{\sup\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n}{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n} = \frac{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n + 4c_1}{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n} = 1 + \frac{4c_1}{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n} \leqslant 1 + \frac{4c_1}{2c_1} = 3. \tag{3.5}$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{Q_{2R}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx \overset{(g2)}{=}$$

$$= \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{Q_R\setminus\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\,dx \overset{(3.2)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B_{c_1}^{m,R}} u^q(g(x))x_n\,dx \overset{(g1)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \sum_{m=1}^{M(R)} \inf_{y\in B_{2c_1}^{m,R}} u^q(y) \int\limits_{B_{c_1}^{m,R}} x_n\,dx \overset{(3.4),\ (3.5)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3}\sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B_{2c_1}^{m,R}} u^q(x)x_n dx \overset{(3.3)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3c_3} \int\limits_{Q_R\setminus\mathcal{C}} u^q(x)x_n\,dx \overset{(3.1)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3c_2c_3} \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(x)x_n\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3c_2c_3} \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{c_4}{3c_2c_3}\right) \int\limits_{Q_{2R}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx$$

и завершим доказательство аналогично предыдущему. □

Далее ограничимся классом решений u неравенства (2.1) не более чем со степенным ростом на бесконечности, т. е. такими, для которых существуют константы $c_0 > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что

$$u(x) \leqslant c_0|x|^\alpha \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Обозначим* $I_R = \int\limits_{Q_R} u^q(x)x_n dx$. *Тогда для любой функции* $u(x)$, *удовлетворяющей* (3.6), *имеем*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{I_{2R}}{RI_R} = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Предположим обратное, т. е.

$$\exists\varepsilon > 0 :\ \exists R_0 > 0 :\ \forall R > R_0\ I_{2R} \geqslant \varepsilon R I_R. \tag{3.8}$$

Применяя (3.8) k раз, получим

$$I_{2^kR} \geqslant 2^{\frac{k(k-1)}{2}}(\varepsilon R)^k I_R. \tag{3.9}$$

С другой стороны, из (3.6) следует
$$I_{2^k R} \leqslant c(2^k R)^{\alpha q+n+1}. \tag{3.10}$$
Комбинируя (3.9) с (3.10) и устремляя $k \to \infty$, получаем противоречие, которое доказывает утверждение. □

Замечание 3.1. Аналогично можно показать, что
$$\limsup_{R\to\infty} \frac{I_{2R-c}}{I_{2R}} = 1.$$

Для решений неравенства (2.1), удовлетворяющих (3.6), условие (g2) в теореме 3.1 можно заменить следующими условиями:

(g3) *$g \in C^1(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n_+)$ и существует константа $c_2 > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ выполнено $|J_{g^{-1}}(x)| \geqslant c_2$.*

(g4) *Обозначим $g^{-1}(x_1,\dots,x_n) = (g_1^{-1}(x_1,\dots,x_n),\dots,g_n^{-1}(x_1,\dots,x_n))$. Тогда существует константа $c_3 > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ имеем $g_n^{-1}(x_1,\dots,x_n) \geqslant c_3 x_n$.*

Пример 3.2. В качестве примера можно взять $g(x) = (x_1,\dots,x_{n-1},ax_n+b))$ при $a>0$ (но не обязательно $a \geqslant 1$, как в примере 2.1) и $b \geqslant 0$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (g1), (g3) *и* (g4) (*но не обязательно* (g2)), *а также $1 < q \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$. Тогда неравенство* (2.1) *не имеет положительных решений $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, удовлетворяющих* (3.6).

Доказательство. При условиях теоремы имеем
$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{2R}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx \overset{x=g^{-1}(y)}{=} \int\limits_{g^{-1}(Q_{2R})} u^q(y)g_n^{-1}(y_n)\varphi_R(g^{-1}(y))|J_{g^{-1}}(x)|\,dy \overset{(g3),(g4)}{\geqslant}\\
&\geqslant c_2c_3 \int\limits_{g^{-1}(Q_{2R})} u^q(y)y_n\varphi_R(g^{-1}(y))\,dy \overset{(g1)}{\geqslant} c_2c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y)y_n\varphi_R(g^{-1}(y))\,dy =\\
&= c_2c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y)y_n(\varphi_R(y)+\varphi_R(g^{-1}(y))-\varphi_R(y))\,dy \geqslant\\
&\geqslant c_2c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y)y_n(\varphi_R(y) - \max_{y\in Q_{2R-c_1}}|\varphi_R'(y)|\cdot|g^{-1}(y)-y|)\,dy \overset{(g1)}{\geqslant}\\
&\overset{(g1)}{\geqslant} c_2c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y)y_n(\varphi_R(y) - \max_{y\in Q_{2R}}|\varphi_R'(y)|\cdot c_1)\,dy \geqslant\\
&\geqslant c_2c_3\left(\int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y)y_n\varphi_R(y)\,dy - \max_{z\in Q_2}|\varphi_1'(z)|\cdot\frac{c_1}{R}\int\limits_{Q_{2R}} u^q(y)y_n\,dy\right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$
Применяя лемму 3.1, при $R > 2c_1$ приходим к
$$\max_{z\in Q_2}|\varphi_1'(z)|\cdot\frac{c_1}{R}\int\limits_{Q_{2R}} u^q(y)y_n\,dy \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_R} u^q(y)y_n\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{2R}} u^q(y)y_n\varphi_R(y)\,dy$$
хотя бы для некоторой последовательности R, стремящейся к ∞. Отсюда с учетом (3.11) и замечания (3.1) следует
$$\int\limits_{Q_{2R}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx \geqslant \frac{c_2c_3}{2}\int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y)y_n\varphi_R(y)\,dy \geqslant \frac{c_2c_3}{4}\int\limits_{Q_{2R}} u^q(y)y_n\varphi_R(y)\,dy$$

для некоторой подпоследовательности той же последовательности, что позволяет завершить доказательство аналогично предыдущим. □

Замечание 3.2. Критический показатель $\dfrac{n+1}{n-1}$ оптимален по крайней мере для преобразований $g(x)$ таких, что $g(x)=x$ вне некоторого компактного множества $K\subset\mathbb{R}^n_+$ и $|g(x)-x|\leqslant c_K$ для всех $x\in K$, где c_K — константа Липшица для решения $u_q(x)$, упомянутого в замечании 2.1, на множестве K. В этом случае легко показать, что функция

$$v_q(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left(\frac{2}{3}\right)^{q'}u_q(g^{-1}(x))$$

при $q>\dfrac{n+1}{n-1}$ удовлетворяет (2.1).

4. Отсутствие монотонных решений

Пусть теперь $g\in C(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n_+)=(\tilde g(x_1,\ldots,x_{n-1}),x_n)$, где $\tilde g:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ таково, что

(g5) *существует константа $c_4>0$ такая, что $|\tilde g(x')|\leqslant c_4|x'|$ для всех $x\in\mathbb{R}^n_+$, где $|x'|$ определено, как в замечании* 2.1.

Пример 4.1. В качестве примера можно взять $g(x)=(c_4x_1,\ldots,c_4x_{n-1},x_n))$ при $c_4>0$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены* (g5) *и* $1<q\leqslant\dfrac{n+1}{n-1}$. *Тогда неравенство* (2.1) *не имеет нетривиальных решений $u\in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, монотонно неубывающих по x_n для любого $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$.*

Замечание 4.1. Известно, что в случае равенства в (2.1) с однородным условием Дирихле на $\partial\mathbb{R}^n_+=\{(x',0):\,x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$ все неотрицательные решения с необходимостью являются монотонно неубывающими (см. [6]), и поэтому из теоремы 4.1 следует отсутствие каких-либо нетривиальных решений этой задачи. Обобщения этого свойства монотонности и связанные с ними результаты об отсутствии решений квазилинейных задач с оператором p-Лапласа можно найти в [1, 8] и по ссылкам, приведенным в этих работах.

Доказательство теоремы 4.1. Не ограничивая общности, будем считать, что $c_4>1$ (иначе можно применить замечание 2.1), и рассмотрим пробные функции $\psi_R(x)=\psi_R(x',x_n)=\varphi_R(x',x_n-3c_4R)$. Так как оценка правой части (2.8) остается неизменной с точностью до замены пробных функций φ_R на ψ_R, достаточно оценить $\int\limits_{Q_{2R}}u^q(g(x))x_n\psi_R(x)\,dx$ снизу. Это можно сделать следующим образом:

$$\int\limits_{Q_{2R}}u^q(g(x))x_n\psi_R(x)\,dx\geqslant\int\limits_{Q_R}u^q(g(x))x_n\,dx\geqslant$$
$$\geqslant c\inf_{x\in\tilde Q_{c_4R}}u^q(x)R^{n+1}\geqslant c\int\limits_{\tilde Q_{2c_4R}}u^q(x)x_n\,dx\geqslant c\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\psi_R\,dx,$$

где $\tilde Q_r\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{x=(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n):\,(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n-3c_4r)\in Q_r\}$, $r>0$. Здесь на втором шаге мы используем условие (g5), а на третьем — слабое неравенство Харнака. Далее аналогично предыдущим доказательствам получаем

$$\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\,dx=\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\psi_R\,dx\leqslant cR^{n+1-2q'}$$

для некоторого $c>0$, не зависящего от R, и в силу условия монотонности $u(\cdot,x_n)$ по x_n имеем

$$\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\,dx\geqslant\int\limits_{Q_R}u^q(x)x_n\,dx.$$

Доказательство завершается аналогично предыдущим случаям. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галахов Е. И., Салиева О. А.* Отсутствие решений задачи Дирихле для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений в полупространстве// Дифф. уравн. — 2016. — *52.* — С. 749–760.
2. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и разрушение решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. МИАН. — 2001. — *234.* — С. 1–383.
3. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *56.* — С. 592–594.
4. *Bidaut-Véron M. F., Pohozaev S.* Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems// J. Anal. Math. — 2001. — *84.* — С. 1–49.
5. *Birindelli I., Mitidieri E.* Liouville theorems for elliptic inequalities and applications// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1998. — *128A.* — С. 1217–1247.
6. *Dancer E.* Some notes on the method of moving planes// Bull. Aust. Math. Soc. — 1992. — *46.* — С. 425–434.
7. *Dupaigne L., Sirakov B., Souplet Ph.* A Liouville-type theorem for the Lane—Emden equation in a half-space// ArXiv. — 2020. — 2003.11466.
8. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$// ArXiv. — 2015. — 1509.03897v1.
9. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408.* — С. 102–113.
10. *Galaktionov V., Mitidieri E., Pohozaev S.* Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schrödinger equations. — Boca Raton: CRC Press, 2014.
11. *Salieva O.* On nonexistence of solutions to some nonlinear inequalities with transformed argument// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2017. — *2017.* — С. 3–13.

Е. И. Галахов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `egalakhov@gmail.com`

О. А. Салиева
Московский государственный технологический университет «Станкин», Москва, Россия
E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

UDC 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72
EDN: ESEMSD

Absence of positive solutions of some nonlinear inequalities with transformations of the argument in a half-space

E. I. Galakhov[1] **and O. A. Salieva**[2]

[1] *RUDN University, Moscow, Russia*
[2] *Moscow State Technological University "Stankin," Moscow, Russia*

We prove the absence of positive solutions for some semilinear elliptic partial differential inequalities with transformations of the argument in a half-space. The proofs are based on the test functions method.

Keywords: nonlinear elliptic inequalities, transformations of arguments, absence of solutions, positive solutions, monotonic solutions

For citation: E. I. Galakhov, O. A. Salieva, "Absence of positive solutions of some nonlinear inequalities with transformations of the argument in a half-space," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **69**, No. 1, 62–72. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72

REFERENCES

1. E. I. Galakhov and O. A. Salieva, "Otsutstvie resheniy zadachi Dirikhle dlya nekotorykh kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy v poluprostranstve" [Absence of solutions to the Dirichlet problem for some quasilinear elliptic equations in a half-space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, 749–760 (in Russian).
2. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, "Apriornye otsenki i razrushenie resheniy nelineynykh uravneniy i neravenstv v chastnykh proizvodnykh" [A priori estimates and blow-up of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2001, **234**, 1–383 (in Russian).
3. S. I. Pohozaev, "Sushchestvenno nelineynye emkosti, porozhdennye differentsial'nymi operatorami" [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **56**, 592–594 (in Russian).
4. M. F. Bidaut-Véron and S. Pohozaev, "Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems," *J. Anal. Math.*, 2001, **84**, 1–49.
5. I. Birindelli and E. Mitidieri, "Liouville theorems for elliptic inequalities and applications," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.*, 1998, **128A**, 1217–1247.
6. E. Dancer, "Some notes on the method of moving planes," *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1992, **46**, 425–434.
7. L. Dupaigne, B. Sirakov, and Ph. Souplet, "A Liouville-type theorem for the Lane—Emden equation in a half-space," *ArXiv*, 2020, 2003.11466.
8. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$," *ArXiv*, 2015, 1509.03897v1.
9. E. Galakhov and O. Salieva, "On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, 102–113.
10. V. Galaktionov, E. Mitidieri, and S. Pohozaev, *Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schrödinger equations*, CRC Press, Boca Raton, 2014.
11. O. Salieva, "On nonexistence of solutions to some nonlinear inequalities with transformed argument," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2017, **2017**, 3–13.

E. I. Galakhov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: egalakhov@gmail.com

O. A. Salieva
Moscow State Technological University "Stankin," Moscow, Russia
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com