Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 50–61
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.938
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61
EDN: ERJRZY

СВОЙСТВО ОТСЛЕЖИВАНИЯ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. Л. Бланк[1,2]

[1]*Институт проблем передачи информации РАН*
[2]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Предлагается новый подход, основанный на анализе влияния одиночного возмущения, в качестве теста для свойства отслеживания для широкого класса динамических систем (в частности, неавтономных) при различных возмущениях. Подробно изучены приложения для нескольких интересных классов динамических систем.

Ключевые слова: динамическая система, псевдотраектория, отслеживание, отслеживание в среднем

Для цитирования: *М. Л. Бланк.* Свойство отслеживания для неавтономных динамических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 50–61. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61

1. Введение

При моделировании из-за неизбежно присутствующих возмущений, начиная от разного рода ошибок (в частности, в связи с округлением при компьютерном моделировании) и до неполного описания изучаемых процессов, мы можем наблюдать лишь приближенные реализации эволюционных процессов. Поэтому одна из основных проблем состоит в том, чтобы ответить, в каком смысле наблюдаемые траектории[1], которые бы будем называть *псевдотраекториями*, соотносятся с истинными траекториями невозмущенной системы. Одна из возможностей — найти условия, при которых в окрестности полученной реализации на максимально возможном интервале времени существует настоящая траектория изучаемого процесса.

Этот вопрос становится особенно нетривиальным в случае неавтономных систем, когда сама система со временем меняет свое поведение. В настоящее время в литературе практически отсутствуют результаты в этом направлении, и данная статья восполняет этот пробел, предлагая относительно простой тест для решения задачи отслеживания.

На уровне связей между отдельными траекториями гиперболической системы и соответствующих псевдотраекторий это свойство (называемое свойством *отслеживания*) впервые было сформулировано Д. В. Аносовым [1] как ключевой этап анализа структурной устойчивости диффеоморфизмов. Похожий, но гораздо менее интуитивный подход, называемый «спецификацией» в тех же условиях был предложен Р. Боуэном [5]. На качественном уровне оба подхода гарантируют, что ошибки не накапливаются во время процесса моделирования. В системах со свойством

[1]Приближенные траектории систем под действием малых возмущений.

отслеживания каждую приближенную траекторию можно равномерно отследить истинной траекторией системы на сколь угодно большом промежутке времени.

Естественно, это имеет большое значение при анализе хаотических систем, где даже произвольно малая ошибка в начальных данных приводит к (экспоненциально во времени) большим расхождениям траекторий.

Дальнейшее развитие теории показало, что для диффеоморфизма[1] наличие свойства отслеживания влечет за собой равномерную гиперболичность. В некоторой степени это ограничивает всю теорию равномерного отслеживания важным, но совершенно специфическим классом гиперболических динамических систем. Понятие *отслеживания в среднем*, введенное в [2] около 30 лет назад, позволило значительно расширить диапазон возмущений, рассматриваемых в теории отслеживания, в частности, иметь дело с возмущениями типа гауссовского шума, малыми лишь в среднем, но не равномерно. Читатель может найти обширный обзор исторических аспектов свойства отслеживания и различных подходов к его изучению в [3, 7, 8].

Технически самая сложная часть анализа свойства отслеживания состоит в том, что необходимо учитывать бесконечное (во времени) число независимых возмущений исходной системы. Это делает задачу весьма нелокальной. Поэтому очень желательно свести задачу отслеживания к ситуации с конечным числом возмущений (например, одним), хотя бы и с более жестким контролем точности аппроксимации.

Для реализации этой идеи мы разработали недавно (в [3, 4]) принципиально новую конструкцию, заключающуюся в эффективной аппроксимация псевдотраекторий автономных динамических систем при единственном во времени возмущении динамики. Основной результат состоит в том, что из свойства аппроксимации при наличии только одного возмущения при условии некоторых оценок точности аппроксимации следует интересующее нас свойство отслеживания. В настоящей статье мы распространяем этот подход на неавтономные системы.

2. Основные определения и результаты

Мы ограничиваемся динамическими системами с дискретным временем, оставляя обобщение нашего подхода на системы с непрерывным временем (потоки) для будущих исследований.

Определение 2.1. *Неавтономная динамическая система* определяется действием зависящего от времени отображения $f : X \times \mathbb{Z} \to X$, определяемого двусторонней последовательностью $\vec{f} := \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ (не обязательной обратимых) отображений $f_i : X \to X$ из полного метрического пространства (X, ρ) в себя. Другими словами, $f(x, t) := f_t x$.

Определение 2.2. *Траекторией* системы $(\vec{f}, X)$, начинающейся в точке $x \in X$, назовем двустороннюю последовательность точек $\vec{x} := \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset X$, для которой $x_0 = x$ и $f_t x_i = x_{t+1}$ для всех доступных значений индекса t (времени).

Определение 2.3. *Псевдотраектория* системы $(\vec{f}, X)$ — это двусторонняя последовательность точек $\vec{y} := \{\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\} \subset X$, удовлетворяющая условию, что последовательность расстояний $\{\rho(f_t y_t, y_{t+1})\}$ для всех доступных значений индекса t удовлетворяет некоторому условию «малости».

Замечание 2.1. В общем случае множество доступных значений индекса t вдоль траектории может быть ограничено как снизу (нет прообразов некоторой точки), так и сверху (траектория попала в «дыру» открытой системы). В настоящей статье мы ограничиваемся анализом (псевдо)траекторий, для которых доступны все целочисленные значения индекса.

Определим множество «*моментов возмущения*»

$$\mathcal{T}(\vec{y}) := \{t_i : \ \gamma_{t_i} := \rho(f_i y_{t_i}, y_{t_{i+1}}) > 0, \ i \in \mathbb{Z}\}$$

с естественным упорядочиванием: $t_i < t_{i+1}$ $\forall i$. Амплитуды возмущений γ_{t_i} будем называть *зазорами* между последовательными отрезками истинных траекторий.

[1] действующего на компакте

Определение 2.4. Для заданного $\varepsilon > 0$ будем говорить, что псевдотраектория $\vec{y}$:

(U) *равномерного* (*uniform*) типа, если $\rho(f_i y_i, y_{i+1}) \leqslant \varepsilon$ при всех доступных i;

(A) *малого в среднем* (*on average*) типа, если $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{i=-n}^{n} \rho(f_i y_i, y_{i+1}) \leqslant \varepsilon$;

(S) *с одним возмущением* (*single perturbations*) типа, если множество $\mathcal{T}(\vec{y})$ состоит из одной точки.

Тип (A) позволяет рассматривать возмущения гауссовского типа, которые малы только в среднем, но допускают редкие большие выбросы. Если в (A) часть псевдотраектории, соответствующая отрицательным значениям времени, конечна, то достаточно рассматривать только положительные значения индекса i, что приводит к односторонним суммам $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} \rho(f_i y_i, y_{i+1})$ вместо двусторонних.

Идея *отслеживания* в теории динамических систем сводится к вопросу о возможности аппроксимации псевдотраекторий данной динамической системы истинными траекториями. Естественно, ответ зависит от типа аппроксимации.

Определение 2.5. Будем говорить, что истинная траектория $\vec{x}$ *отслеживает* псевдотраекторию $\vec{y}$ с точностью δ (и обозначим это термином «δ-*отслеживает*»):

(U) *равномерно* (*uniformly*), если $\rho(x_i, y_i) \leqslant \delta$ при всех доступных i;

(A) *в среднем* (*on average*), если $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{i=-n}^{n} \rho(x_i, y_i) \leqslant \delta$.

Определение 2.6. Будем говорить, что неавтономная динамическая система $(\vec{f}, X, \rho)$ удовлетворяет свойству $(\alpha + \beta)$-*отслеживания* (и обозначим это $\vec{f} \in \mathcal{S}(\alpha, \beta)$) при $\alpha \in \{U, A, S\}$, $\beta \in \{U, A\}$, если $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0$ такое, что каждая ε-псевдотраектория α-типа может быть отслежена в смысле β с точностью δ.

Вместо полного анализа действия всех наличествующих возмущений мы предлагаем тест, основанный на анализе только одного возмущения (т. е. псевдотраекторий типа S).

Определение 2.7. Будем говорить, что псевдотраектория $\vec{y}$ типа S с единственным возмущением в момент времени $t = t_0$ *аппроксимируется* истинной траекторией $\vec{x}$ с показателем точности $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$, если

$$\rho(x_k, y_k) \leqslant \varphi(k - t_0) \rho(f_{t_0-1} y_{t_0-1}, y_{t_0}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Функция φ здесь контролирует качество аппроксимации на всей области определения, а второй член соответствует амплитуде возмущения. В дальнейшем будем предполагать, что $\varphi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to \pm\infty$.

Определение 2.8. Будем говорить, что неавтономная динамическая система удовлетворяет *свойству аппроксимации одиночного возмущения* с показателем точности $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ (и обозначим это $\vec{f} \in \mathcal{A}_\varphi$), если для любой псевдотраектории $\vec{y}$ типа S (т. е. $\#(\mathcal{T}(\vec{y})) = 1$) найдется траектория $\vec{x}$, аппроксимирующая $\vec{y}$ с показателем точности φ.

Наш основной результат состоит в следующем утверждении.

Теорема 2.1. *Если* $\vec{f} \in \mathcal{A}_\varphi$ *при* $\sum\limits_k \varphi(k) < \infty$, *то* $\vec{f} \in \mathcal{S}(U, U) \cup \mathcal{S}(A, A)$.

Другими словами, проверка того, что $\vec{f} \in \mathcal{A}_\varphi$ с суммируемым показателем точности φ, влечет как равномерное свойство отслеживания при равномерно малых возмущениях, так и отслеживание в среднем при малых в среднем возмущениях.

Наследование свойства отслеживания от отдельных отображений f_i ко всей неавтономной системе $\vec{f}$ и наоборот довольно контринтуитивно, что будет продемонстрировано в разделе 4.

3. Доказательство основной теоремы

Подход, который мы здесь используем, в основном следует идее конструкции, развитой для случая автономной системы в [3, 4], с рядом отличий, связанных с более сложной изучаемой ситуацией, когда само отображение меняется во времени.

Технически мы доказываем, что существует константа $K = K(\varphi) < \infty$, такая, что для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует истинная траектория, приближающая равномерно или в среднем с точностью $\delta \leqslant K\varepsilon$ любую ε-псевдотраектории U/A-типа.

Рассмотрим множество моментов возмущений псевдотраектории $\vec{y} := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$

$$\mathcal{T}(\vec{y}) := \{t_i :\ \gamma_{t_i} := \rho(f_i y_{t_i}, y_{t_{i+1}}) > 0,\ i \in \mathbb{Z}\}.$$

Между моментами времени t_k нет других возмущений и, следовательно, $\vec{y}$ можно разделить на сегменты истинных траекторий. Благодаря свойству $\mathcal{A}_\varphi$ любая пара последовательных сегментов настоящих траекторий, рассматриваемая как псевдотраектория с единственным возмущением, может быть аппроксимирована другой истинной траекторией с показателем точности φ.

Без ограничения общности будем считать, что возмущения происходят в каждый момент времени и, следовательно, $t_i = i \ \ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Опишем итеративную процедуру.

Сначала разделим отрезки псевдотраектории между моментами возмущений t_i в последовательных парах, принадлежащих интервалам времени типа $(t_{\pm 2k-1}, t_{\pm 2k+1}]$. Рассматривая псевдотраекторию на этих интервалах как псевдотраекторию типа S и используя свойство аппроксимации однократного возмущения, аппроксимируем ее новой псевдотраекторией, состоящей из отрезков истинных траекторий вдвое большей длины. После этого применяем ту же процедуру для псевдотраектории, полученной на предыдущем шаге построения.

В результате на каждом шаге построения мы получаем новую псевдотраекторию, состоящую из вдвое меньшего числа отрезков истинных траекторий с экспоненциально возрастающей длиной, но с большими зазорами между ними (по сравнению с исходными зазорами). В пределе это дает аппроксимацию всей исходной псевдотраектории.

Для оценки ошибки аппроксимации найдем точность аппроксимации пары отрезков истинных траекторий: $v_{-N^-}, v_{-N^-+1}, \ldots, v_{-1}$ и $v_0, v_1, \ldots, v_{N^+}$. По свойству $\mathcal{A}_\varphi$ существует траектория $\vec{z} \subset X$ такая, что

$$\rho(v_k, z_k) \leqslant \varphi(k)\rho(f_{-1}v_{-1}, v_0) \ \ \forall k \in \{-N^-, \ldots, N^+\}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=-N^-}^{N^+} \rho(z_k, v_k) \leqslant \rho(f_{-1}v_{-1}, v_0) \sum_k \varphi(k) = \Phi \cdot \rho(f_{-1}v_{-1}, v_0).$$

Отметим несколько важных моментов в этой оценке:

(a) каждый момент возмущения t_i учитывается только один раз за весь процесс аппроксимации;

(b) точность аппроксимации зависит только от зазора $\rho(f_{-1}v_{-1}, v_0)$ между «концами» склеенных вместе отрезков траекторий;

(c) зазоры между сегментами траекторий на следующем шаге конструкции могут возрасти по сравнению с текущим шагом.

На n-м шаге процесса аппроксимации пар сегментов траекторий получаем псевдотраекторию $\vec{z}^{(n)}$ с двусторонней последовательностью зазоров $\{\gamma_{t_i}^{(n)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Оценим величины этих зазоров.

Согласно свойству аппроксимации однократного возмущения получаем рекурсивную оценку для зазоров:

$$\gamma_{t_i}^{(n+1)} \leqslant \gamma_{t_i}^{(n)} + \varphi_-^{(n)}\gamma_{t_{i-1}}^{(n)} + \varphi_+^{(n)}\gamma_{t_{i+1}}^{(n)}, \tag{3.1}$$

где $\varphi_\pm^{(n)} = \varphi(\pm 2^n)$. Действительно, длины склеиваемых сегментов траекторий на n-ом шаге процедуры равны 2^n, в то время как $\varphi_-^{(n)}\gamma_{t_{i-1}}^{(n)}$ — оценка сверху для ошибки аппроксимации слева, а $\varphi_+^{(n)}\gamma_{t_{i+1}}^{(n)}$ — аналогичная оценка для ошибки аппроксимации справа.

Переписывая (3.1) следующим образом:

$$\gamma_{t_i}^{(n+1)} \leqslant (\varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)})\gamma_{t_i}^{(n)} + \left((1 - \varphi_-^{(n)} - \varphi_+^{(n)})\gamma_{t_i}^{(n)} + \varphi_-^{(n)}\gamma_{t_{i-1}}^{(n)} + \varphi_+^{(n)}\gamma_{t_{i+1}}^{(n)}\right),$$

мы видим, что в первом члене множитель $\varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}$ стремится к нулю с ростом n, тогда как второй член соответствует усредняющему оператору типа $v_i \to (1-a-b)v_i + av_{i-1} + bv_{i+1}$. Остается заметить, что рекурсивное применение этого оператора сглаживает последовательность $\{v_i\}$ до константы.

Чтобы сделать это рассуждение точным, нам потребуются некоторые вычисления. Без ограничения общности полагаем, что функция φ четная (т. е. $\varphi(-k) = \varphi(k)\ \forall k$). В самом деле, заменив φ на $\tilde\varphi(k) := \max(\varphi(-k), \varphi(k))\ \forall k$, получаем результат.

Обозначим через $\gamma^{(n)} := \sup\limits_i \gamma_{t_i}^{(n)}$ максимальное значение зазоров на n-шаге процедуры, а через $\tau^{(n)} := 2^n$ — длину отрезков истинных траекторий. Тогда, используя предыдущее неравенство и монотонность функций $\varphi(\pm|k|)$, получаем

$$\gamma^{(n+1)} \leqslant \gamma^{(n)} + \varphi(\tau^{(n)})\gamma^{(n)} + \varphi(-\tau^{(n)})\gamma^{(n)} = \gamma^{(n)} \cdot \Big(1 + \varphi(-\tau^{(n)}) + \varphi(\tau^{(n)})\Big).$$

Продолжая это и переходя от n к $n-1$ и т. д., приходим к следующей оценке:

$$\gamma^{(n+1)} \leqslant \gamma^{(0)} \cdot \prod_{k=0}^{n} \Big(1 + \varphi(-\tau^{(k)}) + \varphi(\tau^{(k)})\Big).$$

В этом месте нам понадобится следующее простое неравенство, доказанное в [3].

Лемма 3.1. *Для любой последовательности $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ неотрицательных действительных чисел справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + b_k) \leqslant e^{\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}.$$

Полагая $b_k := \varphi(-\tau^{(k)}) + \varphi(\tau^{(k)})$ и используя то, что в случае равномерно малых возмущений $\gamma_{t_i}^{(0)} \leqslant \varepsilon\ \ \forall i \in \mathbb{Z}$, по лемме 3.1 оцениваем сверху зазоры $\gamma^{(n+1)}$ следующим образом:

$$\gamma^{(n+1)} \leqslant \varepsilon \exp\left(\sum_k \varphi(k)\right) = \varepsilon e^{\Phi}. \tag{3.2}$$

Здесь мы используем то, что каждый момент возмущения t_i учитывается только один раз за весь процесс аппроксимации.

Таким образом, зазоры $\gamma_{t_i}^{(n)}$ равномерно по n ограничены сверху величиной εe^{Φ}.

Оценку сверху расстояния между $z_t^{(n)}$ и $y_t = z_t^{(0)}$ мы получим как сумму расстояний между последовательными парами аппроксимирующих псевдотраекторий $z_t^{(k)}$, $z_t^{(k+1)}$. Поэтому вклад каждого зазора в окончательную ошибку приближения суммируется (см. рис. 1). Используя это, получаем

$$\rho(z_t^{(n)}, y_t) \leqslant \varepsilon e^{\Phi} \sum_i \varphi(t - t_i) \leqslant \varepsilon \Phi e^{\Phi} \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Аналогично, для любого $k > 0$

$$\rho(z_t^{(n)}, z^{(n+k)}) \leqslant \varepsilon e^{\Phi} \sum_{|j| \geqslant \tau(t,n)} \varphi(j) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

поскольку $\tau(t,n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Поэтому для любого заданного t последовательность $\{z_t^{(n)}\}_n$ фундаментальна и сходится при $n \to \infty$ к пределу z_t, где $\{z_t\}$ является истинной траекторией нашей системы.

Поскольку оценка (3.3) равномерна по n, мы можем использовать ее также и для z_t, получая

$$\rho(z_t, y_t) \leqslant \varepsilon \Phi e^{\Phi} \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

что доказывает $G \in \mathcal{S}(U, U)$.

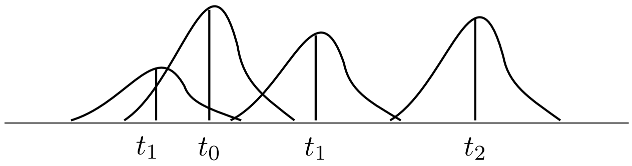

Рис. 1. Вклад в верхнюю оценку ошибки аппроксимации.
Fig. 1. Contributions to the upper bound of the approximation error.

Рассмотрим теперь случай возмущений A-типа. В предположении, что возмущения в среднем малы, получаем

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(0)} \leqslant \varepsilon.$$

Наша цель — показать, что $\exists C \neq C(\varepsilon)$ такое, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n)} \leqslant C\varepsilon \quad \forall n.$$

Не теряя общности, мы предполагаем, что функция φ — четная (т. е. $\varphi(-k) = \varphi(k)\ \forall k$). Действительно, заменив общую функцию φ ее симметризованной версией

$$\tilde{\varphi}(k) := \max(\varphi(-k), \varphi(k)) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

получаем требуемый результат.

Обозначим $R_k^{(n)} := \sum\limits_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n)}$. Тогда, используя (3.1), получаем

$$\begin{aligned}
R_k^{(n+1)} &= \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n+1)} \leqslant \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n)} + \sum_{i=-k}^{k} \varphi_-^{(n)} \gamma_{t_{i-1}}^{(n)} + \sum_{i=-k}^{k} \varphi_+^{(n)} \gamma_{t_{i+1}}^{(n)} = \\
&= R_k^{(n)} + \varphi_-^{(n)} \left(\gamma_{t_{-k-1}}^{(n)} + R_k^{(n)} - \gamma_{t_{k+1}}^{(n)} \right) + \varphi_+^{(n)} \left(-\gamma_{t_{-k-1}}^{(n)} + R_k^{(n)} + \gamma_{t_{k+1}}^{(n)} \right) = \\
&= (1 + \varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}) R_k^{(n)} + (\varphi_-^{(n)} - \varphi_+^{(n)})(\gamma_{t_{-k-1}}^{(n)} - \gamma_{t_{k+1}}^{(n)}) = \\
&= (1 + \varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}) R_k^{(n)} \leqslant \qquad \text{(поскольку } \varphi_-^{(n)} = \varphi_+^{(n)}) \\
&\leqslant \ldots \leqslant R_k^{(0)} \prod_{i=0}^{n} (1 + \varphi_-^{(i)} + \varphi_+^{(i)}).
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы закончить доказательство теоремы.

Вклад в верхнюю границу ошибки аппроксимации поступает из двух разных источников: оценки зазоров (меняющиеся по ходу описанной выше процедуры аппроксимации) и суммирования вкладов ошибок от аппроксимации пар последовательных сегментов истинных траекторий (см. рис. 1).

Чтобы получить оценку сверху для частичной суммы зазоров, применяя лемму 3.1 при $b_n := \varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}$, имеем

$$R_k^{(n+1)} \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + b_i) R_k^{(0)} \leqslant e^{\sum\limits_{i=0}^{n} b_i} R_k^{(0)} \leqslant e^{\Phi} R_k^{(0)}. \tag{3.4}$$

Для n-ой аппроксимирующей псевдотраектории $\vec{z}^{(n)}$ обозначим

$$Q_k^{(n)} := \frac{1}{2k+1} \sum_{t=-k}^{k} \rho(z_t^{(n)}, y_t).$$

Тогда

$$Q_k^{(n)} \leqslant \frac{1}{2k+1}\sum_{t=-k}^{k}\sum_i \gamma_{-t+i}^{(n)}\varphi(i) = \sum_i \varphi(i)\cdot\left(\frac{1}{2k+1}\sum_{t=-k}^{k}\gamma_{-t+i}^{(n)}\right) = \sum_i \varphi(i)\cdot R_k^{(n)}(t),$$

где $R_k^{(n)}(t) := \sum\limits_{i=-k}^{k}\gamma_{-t+t_i}^{(n)}$.

При помощи (3.4) получаем следующую оценку сверху:

$$\limsup_{k\to\infty} Q_k^{(n)} \leqslant \varepsilon\Phi e^{\Phi}, \tag{3.5}$$

не зависящую от номера шага n процедуры аппроксимации.

Утверждение о сходимости аппроксимирующих псевдотраекторий к пределу $\vec{z}$, являющемуся истинной траекторией системы, доказывается по той же схеме, что и в предыдущем рассмотренном случае равномерных возмущений. Аналогично оценивается и расстояние в среднем между $\vec{z}$ и $\vec{y}$, используя неравенство (3.5) вместо (3.2) (применявшегося ранее).

Теорема доказана. □

4. Приложения

В этом разделе мы применим описанный подход для некоторых важных классов динамических систем (в частности, для необратимых и разрывных отображений).

4.1. Дискретное пространство. Пусть фазовое пространство X состоит из конечного числа точек $\#(X) = M < \infty$ и снабжено дискретной метрикой $\rho(x,y) := 1_{x\neq y}$. В этой постановке не может быть малых возмущений, и мы будем рассматривать случай возмущений малых в среднем.

Начнем с не зависящих от времени семейств отображений.

Утверждение 4.1. *Пусть $\vec{f} := \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $f_i \equiv f : X \to X$. Тогда свойство $\vec{f} \in \mathcal{S}(A,A)$ эквивалентно условию $\min\limits_{n>0}\#(f^nX) = 1$.*

Доказательство. Заметим, что в силу конечности фазового пространства предельное множество для последовательности $\{f^nX\}$ состоит из периодических точек отображения f, а минимум $\min\limits_{n>0}\#(f^nX)$ достигается в некоторый конечный момент времени $n = N$.

Пусть $\vec{y}$ — псевдотраектория S-типа отображения $\vec{f}$ с единственным возмущением в момент времени t_0. Тогда истинная траектория $\vec{x}$, приближающая $\vec{y}$ в среднем, может быть построена следующим образом:

$$x_t := \begin{cases} y_t, & \text{если } t < t_0, \\ f^{t-t_0}y_{t_0}, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Следовательно, последовательность расстояний $\{\rho(x_k,y_k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ содержит не более N ненулевых элементов, что влечет отслеживание в среднем.

Если предположение $\#(f^NX) = 1$ не выполняется, то существует как минимум две различные периодические точки $u,v \in X$ отображения f. Обозначим через m период точки u и рассмотрим следующую псевдотраекторию S-типа $\vec{y}$:

$$y_t := \begin{cases} f^{(m-t \bmod k)}u, & \text{если } t < 0, \\ f^tv, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Иными словами, псевдотраектория $\vec{y}$ следует за истинной периодической траекторией точки u в отрицательном времени, так что $fy_{-1} = u$, а из-за возмущения в момент времени $t = 0$ совпадает с траекторией вперед (в положительное время) точки $v \neq u$.

Предположим, что истинная траектория $\vec{x}$ аппроксимирует в среднем $\vec{y}$. По определению дискретной метрики из этого следует, что $\vec{x}$ отличается от $\vec{y}$ только на конечном интервале времени, что противоречит построению $\vec{y}$. □

Следующий результат показывает, что пара отображений, не удовлетворяющих свойству отслеживания, может привести к неавтономной динамической системе, обладающей этим свойством.

Пример 4.1. Пусть $X := \{1, 2, 3\}$ и

$$g_1(1) := 2, \quad g_1(2) := 1, \quad g_1(3) := 1; \qquad g_2(1) := 2, \quad g_2(2) := 3, \quad g_2(3) := 2.$$

Рассмотрим $\vec{f} := \{f_i\}$ такую, что $f_i(x) := g_{h(i)}(x)$, где $h : \mathbb{Z} \to \{1, 2\}$.

Функция $h(t)$ здесь играет роль индикатора того, какое из отображений g_i применяется в момент времени t.

Утверждение 4.2.

(a) *Если* $h \equiv 1$ *или* $h \equiv 2$, *то* $\vec{f} \notin \mathcal{S}(A, A)$.

(b) *Если* $\forall N \in \mathbb{Z}_+$ $\exists k > N$ *такое, что* $h(k) = 2$, $h(k+1) = 1$, *то* $\vec{f} \in \mathcal{S}(A, A)$.

Другими словами, несмотря на то, что оба отображения g_1 и g_2 не удовлетворяют свойству отслеживания в среднем, зависящее от времени отображение $\vec{f}$ может удовлетворять этому свойству при очень слабых предположениях об осцилляциях функции h.

Доказательство.

(a) Оба отображения g_1, g_2 допускают траектории периода 2 и, следовательно, не являются отслеживаемыми согласно утверждению 4.1.

(b) Пусть $\vec{y}$ — псевдотраектория S-типа отображения $\vec{f}$ с единственным возмущением в момент времени t_0. Рассмотрим истинную траекторию

$$x_t := \begin{cases} y_t, & \text{если } t < t_0, \\ f^{t-t_0} y_{t_0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По условию найдется такое $n > t_0$, что $f_n = g_2$ и $f_{n+1} = g_1$. Возможны всего четыре следующих варианта:

- $x_n = y_n$. Тогда $x_t = y_t \;\; \forall t > n$.
- $x_n = 1, y_n = 2$. Тогда $g_2(x_n) = 2$, $g_2(y_n) = 3$ и $g_1 \circ g_2(x_n) = 1 = g_1 \circ g_2(y_n)$. Поэтому $x_t = y_t \;\; \forall t > n + 1$.
- $x_n = 1$, $y_n = 3$. Тогда $g_2(x_n) = 2 = g_2(y_n)$. Поэтому $x_t = y_t \;\; \forall t > n$.
- $x_n = 2$, $y_n = 3$. Тогда $g_2(x_n) = 3$, $g_2(y_n) = 2$ и $g_1 \circ g_2(x_n) = 1 = g_1 \circ g_2(y_n)$. Поэтому $x_t = y_t \;\; \forall t > n + 1$.

Во всех случаях мы наблюдаем лишь конечное число несовпадающих точек. □

Следующий пример демонстрирует, что возможно и обратное явление, когда отображения, обладающие свойством отслеживания, порождают неотслеживаемую неавтономную динамическую систему.

Пример 4.2. Пусть $X := \{1, 2, 3\}$ и

$$g_1(1) := 2, \quad g_1(2) := 3, \quad g_1(3) := 3; \qquad g_2(1) := 3, \quad g_2(2) := 1, \quad g_2(3) := 3.$$

Рассмотрим такую $\vec{f} := \{f_i\}$, что $f_{2k+1}(x) := g_1(x), \quad f_{2k}(x) := g_2(x) \;\; k \in \mathbb{Z}$.

Утверждение 4.3. $g_i \in \mathcal{S}(A, A)$, *но* $\vec{f} \notin \mathcal{S}(A, A)$.

Доказательство. Первое утверждение является следствием утверждения 4.1. Для доказательства второго утверждения рассмотрим псевдотраекторию S-типа $\vec{y}$ (с единственным возмущением в момент времени $t = 0$)

$$y_t := \begin{cases} 3, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } t = 2k > 0; \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предположим, что существует истинная траектория $\vec{x}$, аппроксимирующая $\vec{y}$ в среднем. Тогда неизбежно $\exists n < 0$ такое, что $x_n = 3$, откуда следует $x_t = 3 \; \forall t > n$. Приходим к противоречию. □

4.2. Гиперболические отображения. Обсудим применение нашего теста одиночного возмущения для композиций гиперболических отображений. Общие определения, связанные с теорией гиперболических отображений, можно найти, например, в [5, 6]. В этом разделе мы ограничимся простейшим случаем аффинных отображений вида $fx := Ax + b$, где A — матрица, а b — вектор. Как мы увидим, даже этот случай весьма нетривиален с точки зрения отслеживания.

Обратимая матрица A размера $d \times d$ с действительными элементами разделяет евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ в прямую сумму трех A-инвариантных линейных подпространств $E^s(A), E^u(A), E^n(A)$ (устойчивого, неустойчивого и нейтрального):

$$E^s(A) := \{v \in \mathbb{R}^d : \ \ ||A^n v|| \leqslant C\lambda_s^n ||v|| \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+\},$$
$$E^u(A) := \{v \in \mathbb{R}^d : \ \ ||A^{-n} v|| \leqslant C\lambda_u^{-n} ||v|| \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+\},$$
$$E^n(A) := \{v \in \mathbb{R}^d : \ \ ||Av|| = ||v||\},$$

где $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u < \infty$, $C < \infty$ и $||v|| := \sqrt{\sum\limits_i v_i^2}$.

В общем случае некоторые из подпространств $E^s(A), E^u(A), E^n(A)$ могут быть пустыми.

Определение 4.1. Если $E^n(A) = \varnothing$, то будем говорить, что матрица A — *гиперболическая.*

Обозначим нормализованные проекторы на эти пространства через π^s, π^u, π^n, соответственно. А именно, каждый вектор $v \in \mathbb{R}^d$ однозначно представляется в виде $v = q_s\pi^s v + q_u\pi^u v + q_n\pi^n v$, где $q_s, q_u, q_n \in \mathbb{R}$ и $||\pi^s v|| = ||\pi^u v|| = ||\pi^n v|| = 1$.

Из приведенных выше определений вытекает следующее свойство сжатия, которое мы сформулируем в виде отдельного утверждения.

Лемма 4.1 (сжатие)**.** *Пусть A — гиперболическая матрица. Тогда существуют числа $0 < \lambda < 1$, $C < \infty$ такие, что*

$$||A^t x - A^t y|| \leqslant C\lambda^t ||x - y|| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \ x - y \in E^u(A), \ t \geqslant 0,$$
$$||A^t x - A^t y|| \leqslant C\lambda^t ||x - y|| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \ x - y \in E^s(A), \ t \leqslant 0.$$

С точки зрения свойства отслеживания самые интересные вопросы здесь связаны с отображениями тора, а именно с отображениями вида $fx := Ax + b \pmod 1$.

Пример 4.3 (диффеоморфизмы Аносова)**.** Пусть $X := \mathbb{T}^d$ — единичный d-мерный тор, а $g_n : X \to X$ — гиперболические отображения тора $g_n x := A_n x + b_n \pmod 1$ такие, что $\det(A_n) = 1$, $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда неавтономная система определяется двусторонней последовательностью $\vec{f} := \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ отображений f_i из набора $\{g_i\}$.

Автономный случай ($N = 1$) подробно изучен в [2,4], но при его анализе активно используются так называемые марковские разбиения произвольно малого диаметра, хорошо известные в теории гиперболических отображений. К сожалению, даже в простейшей ситуации 2-периодической комбинации ($N = 2$) пары отображений $\vec{f} = \ldots, g_1, g_2, g_1, g_2, \ldots$ никакой замены марковского разбиения не известно. Чтобы преодолеть это препятствие, мы рассмотрим эту же задачу в $\mathbb{R}^d$, а не в $\mathbb{T}^d$, и вернемся позже к примеру 4.3 с использованием полученных результатов.

Пример 4.4 (аффинные отображения)**.** Пусть $X := \mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 1$ и евклидовой метрикой ρ, и пусть $g_n : X \to X$ — гиперболические отображения $g_n x := A_n x + b_n$ $n \in \{1, 2, \ldots, N$. Тогда неавтономная система определяется двусторонней последовательностью $\vec{f} := \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ отображений f_i из набора $\{g_i\}$.

Здесь снова автономная постановка изучалась в [4], и можно было бы ожидать, что обобщение для комбинации нескольких гиперболических отображений не может изменить ситуацию коренным образом. Несмотря на это, мы покажем, что это именно так даже для пары различных гиперболических отображений.

Для заданной двусторонней последовательности натуральных чисел $\{h(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ положим

$$A_h^{(t)} := \prod_{i=0}^{|t|-1} A_{h(t-i)} \ \ |t| \geqslant 1.$$

Утверждение 4.4. *Пусть последовательность* $\{h(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — M*-периодическая и* $\vec{f} := \{g_{h(i)}\}$. *Предположим, что матрица* $A^{(M)} := \prod_{i=1}^{M} A_{h(i)}$ — *гиперболическая. Тогда* $\vec{f} \in \mathcal{S}(A, A)$.

Замечание 4.1. Даже незначительные нарушения предположений утверждения 4.4 приводят к неотслеживаемым системам. Действительно, даже в периодической по времени постановке наличие нетривиального нейтрального подпространства E^n_M гарантирует, что возмущения, принадлежащие этому подпространству и действующие периодически с периодом M, не могут быть скомпенсированы. Общая ситуация, когда функция $h(i)$ непериодическая, еще более сложная. Для изучения свойств отслеживания в общем случае необходимо сделать ряд технических предположений об асимптотических свойствах матриц $A^{(n)}$ и использовать более сложные методы. Это будет сделано в отдельной публикации.

Доказательство утверждения 4.4. Проблема здесь в том, что даже в простейшем периодическом по времени случае последовательность инвариантных подпространств $E^{u/s}(A^{(t)})$ не сходится при $|t| \to \infty$. Чтобы преодолеть эту трудность, покажем, что некоторый аналог леммы 4.1 может быть применен в неавтономном случае для нахождения траектории отображения $\vec{f}$, которая аппроксимирует псевдотраекторию типа S как в положительном, так и в отрицательном времени.

Применяя лемму 4.1 к матрице $A^{(M)}$ и используя тот факт, что $E^u(A) = E^s(A^{-1})$ для гиперболической матрицы A, получаем экспоненциальную сходимость следующих последовательностей:

$$||(A^{(M)})^n x - (A^{(M)})^n y|| \leqslant C\lambda^n ||x-y|| \quad \text{если} \quad x-y \in E^u(A^{(M)}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$||(A^{(M)})^{-n} x - (A^{(M)})^{-n} y|| \leqslant C\lambda^n ||x-y|| \quad \text{если} \quad x-y \in E^s(A^{(M)}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Чтобы иметь дело с промежуточными моментами времени $t = nM + k$ при $0 < k < M$, заметим, что обозначая $D := \max\{||A_i|| \;\; 1 \leqslant i \leqslant M$, мы получаем

$$||(A^{(nM+k)})x - (A^{(nM+k)})^y|| \leqslant D^M ||(A^{(M)})^{-n} x - (A^{(M)})^{-n} y||,$$

откуда следуют экспоненциально убывающие оценки для всех моментов времени $t \to \pm\infty$.

Псевдотраектория типа S неавтономной динамической системы может быть представлена траекторией назад, заканчивающейся в некоторой точке $u \in X$, и траекторией вперед, исходящей из некоторой точки $v \in X$. Множества $u + E^u(A^{(M)})$ и $v + E^s(A^{(M)})$ имеют непустое пересечение. Выберем любую точку z, принадлежащую этому пересечению. Тогда из приведенных выше оценок с учетом того, что $g_i(x) - g_i(y) = A_i x - A_i y \;\forall i$ и не зависит от b_i, получаем, что траектория точки z аппроксимирует в среднем рассматриваемую псевдотраекторию S-типа с экспоненциальным показателем точности. Таким образом, теорема 2.1 применима в рассматриваемом случае. ☐

Теперь мы готовы вернуться к анализу гиперболических отображений тора. Здесь $X := \mathbb{T}^d := [0,1)^d$ с метрикой $\rho(x,y) := ||x - y \pmod 1||$, а отображения тора определяются как $g_i(x) := A_i x + b_i \pmod 1$.

Утверждение 4.5. *Пусть последовательность* $\{h(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — M*-периодическая и* $\vec{f} := \{g_{h(i)}\}$. *Предположим, что* $\forall i$ *все элементы матриц* A_i *и векторов* b_i *являются целыми числами. Тогда гиперболичность матрицы* $A^{(M)} := \prod_{i=1}^{M} A_{h(i)}$ *влечет* $\vec{f} \in \mathcal{S}(A, A)$.

Доказательство. Основная идея здесь состоит в том, чтобы свести анализ отслеживания аффинных отображений тора к той же задаче для аффинных отображений в $\mathbb{R}^d$. Действительно, разница между ними только в том, что мы дополнительно берем целую часть. К сожалению, следуя этой конструкции, мы сталкиваемся с техническим препятствием: рассматриваемые аффинные отображения должны коммутировать со сдвигами целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$. В этом и есть причина предположения о целочисленности элементов матриц A_i и векторов b_i.

Таким образом, при сделанных предположениях для каждой (псевдо)траектории $\vec{y}$ отображения тора существует (псевдо)траектория $\vec{z}$ соответствующего отображения $\mathbb{R}^d$ такая, что $\vec{z} \pmod 1 = \vec{y}$. Следовательно, если $\vec{z}$ является псевдотраекторией типа A относительно евклидовой метрики, то $\vec{y}$ является псевдотраекторией типа A, но относительно метрики тора $\rho(\cdot,\cdot)$.

С другой стороны, по предложению 4.4 существует истинная траектория $\vec{x}$ системы в $\mathbb{R}^d$, приближающая $\vec{y}$ в среднем. Остается заметить, что последовательность $\vec{x} \pmod 1$ оказывается истинной траекторией на торе, аппроксимирующей в среднем псевдотраекторию $\vec{y}$ в метрике $\rho(\cdot,\cdot)$ с точностью, не превышающей точность аппроксимации в $\mathbb{R}^d$. $\square$

В заключение отметим, что классические линейные аносовские автоморфизмы тора удовлетворяют условиям утверждения 4.5, однако, ввиду отсутствия предположения о равенстве единице определителя матрицы отображения, класс примеров, удовлетворяющих этим условиям, существенно шире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем// В сб.: «Труды V Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 2». — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. — С. 39–45.
2. *Blank M.* Metric properties of ε-trajectories of dynamical systems with stochastic behaviour// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1988. — *8*, № 3. — С. 365–378.
3. *Blank M.* Average shadowing and gluing property// *ArXiv.* — 2022. — 2202.13407 [math.DS].
4. *Blank M.* Average shadowing revisited// *ArXiv.* — 2022. — 2205.10769 [math.DS nlin.CD].
5. *Bowen R.* Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. — Berlin: Springer, 1975.
6. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. — Cambridge: Univ. Press, 1995.
7. *Kulczycki M., Kwietniak D., Oprocha P.* On almost specification and average shadowing properties// Fund. Math. — 2014. — *224*. — С. 241–278.
8. *Pilyugin S. Yu., Sakai K.* Shadowing and hyperbolicity. — Cham: Springer, 2017.

Бланк Михаил Львович
Институт проблем передачи информации РАН;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: `blank@iitp.ru`

UDC 517.938
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61
EDN: ERJRZY

Shadowing property for nonautonomous dynamical systems

M. L. Blank[1,2]

[1]*Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia*
[2]*HSE University, Moscow, Russia*

A new approach based on the analysis of the influence of a single perturbation is proposed as a test for the shadowing property for a broad class of dynamical systems (in particular, non-autonomous) under a variety of perturbations. Applications for several interesting cases are considered in detail.

Keywords: dynamical system, pseudo-trajectory, shadowing, average shadowing

For citation: M. L. Blank, "Shadowing property for nonautonomous dynamical systems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 50–61. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61`

REFERENCES

1. D. V. Anosov, “Ob odnom klasse invariantnykh mnozhestv gladkikh dinamicheskikh sistem” [On a class of invariant sets of smooth dynamical systems], In: *Trudy V Mezhd. konf. po nelineynym kolebaniyam. T. 2* [Proc. 5th Int. Conf. on Nonlin. Oscill. Vol. 2], Inst. mat. AN USSR, Kiev, 1970, pp. 39–45 (in Russian).
2. M. Blank, “Metric properties of ε-trajectories of dynamical systems with stochastic behaviour,” *Ergodic Theory Dynam. Systems.* , 1988, **8**, No. 3, 365–378.
3. M. Blank, “Average shadowing and gluing property,” *ArXiv.*, 2022, 2202.13407 [math.DS].
4. M. Blank, “Average shadowing revisited,” *ArXiv.*, 2022, 2205.10769 [math.DS nlin.CD].
5. R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer, Berlin (1975).
6. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Univ. Press, Cambridge (1995).
7. M. Kulczycki, D. Kwietniak, and P. Oprocha, “On almost specification and average shadowing properties,” *Fund. Math.*, 2014, **224**, 241–278.
8. S. Yu. Pilyugin and K. Sakai, *Shadowing and Hyperbolicity*, Springer, Cham (2017).

Michael Blank
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia;
HSE University, Moscow, Russia
E-mail: blank@iitp.ru