Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 18–31
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.2+517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31
EDN: CNBPXH

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С НЕДИАГОНАЛЬНЫМИ ГЛАВНЫМИ МАТРИЦАМИ И СИЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ПО ГРАДИЕНТУ. ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ И РЕГУЛЯРНОСТИ

А. А. Архипова

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Изучаются недиагональные эллиптические и параболические системы уравнений с сильно нелинейными членами по градиенту. Мы рассматриваем и комментируем известные результаты о разрешимости и регулярности и описываем последние результаты автора в этой области.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические системы, нелинейные параболические системы, регулярность слабых решений

Для цитирования: *А. А. Архипова.* Квазилинейные эллиптические и параболические системы с недиагональными главными матрицами и сильными нелинейностями по градиенту. Проблемы разрешимости и регулярности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 18–31. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31

1. Сильно нелинейные эллиптические системы

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$ — решение системы

$$-\operatorname{div}(A(x,u)\nabla u) + b(x,u,\nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

где $u = (u^1, \ldots, u^N)$, $\nabla u = \left\{\dfrac{\partial u^k}{\partial x_\alpha}\right\}_{\alpha \leqslant n}^{k \leqslant N}$.

Предположим, что недиагональная матрица $A(x,u) = \left\{A_{k\,l}^{\alpha\,\beta}(x,u)\right\}_{k,l \leqslant N}^{\alpha,\beta \leqslant n}$ равномерно непрерывна на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности

$$(A(x,u)\,\xi \cdot \xi) \geqslant \nu\,|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN}, \tag{1.2}$$

$$|A(x,u)| \leqslant \mu, \quad (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \tag{1.3}$$

с константами $0 < \nu \leqslant \mu$.

Мы также предполагаем, что функция $b : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^N$ определена, удовлетворяет условиям Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$, и

$$|b(x,u,p)| \leqslant b_0|p|^2, \quad b_0 = \text{const}, \quad (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \; p \in \mathbb{R}^{nN}; \tag{1.4}$$

следующее одностороннее условие выполнено на $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$:

$$b(x,u,p) \cdot u = \sum_{k=1}^{N} b^k(x,u,p)u^k \geqslant \gamma\,|p|^2, \quad \gamma = \mathrm{const}, \quad \nu + \gamma > 0; \tag{1.5}$$

а также существует константа b_1 такая, что

$$|b(x,v,p) - b(x,v,q)| \leqslant b_1(|p| + |q|)|p-q|, \quad (x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \quad p,q \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{1.6}$$

В уравнении (1.1) мы рассматриваем функции

$$f \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^N), \quad q > n/2. \tag{1.7}$$

Условие (1.4) означает, что $b(x,u(x),\nabla u(x)) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ при условии, что u — функция из пространства Соболева $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, и мы имеем, что

$$-\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) = -b(x,u(x),\nabla u(x)) + f(x) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Такие системы (и, в частности, скалярные уравнения при $N=1$) известны как сильно нелинейные системы. Для изучения такого класса систем мы вынуждены применять специальные подходы.

Например, для исследования задачи Дирихле для такого класса скалярных уравнений (при $N=1$) в [8] применялся метод Лере—Шаудера. Доказано, что подходящим классом слабых решений является $W_2^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Ограниченность* слабых решений предполагалась как необходимое условие для доказательства их дальнейшей гладкости (см. контрпримеры регулярности в [8, гл. 1, § 2]).

Поскольку класс $W_2^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ является естественным при изучении задачи Дирихле для уравнения (1.1), $N=1$, где $b(x,u,p)$ имеет квадратичный рост по $|p|$ при $|p| \to \infty$, нам потребуются дополнительные предположения для оценки $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Одним из таких предположений является одностороннее условие (1.5). Следует отметить, что можно допустить более общие условия, чем (1.4) и (1.5) для функции b, но мы выбрали простейший вариант ограничений, чтобы объяснить основную идею нашего подхода.

В качестве контрпримера регулярности в скалярных задачах Дж. Фрезе [31] рассматривал вариационную задачу

$$\Phi[u] = \int\limits_{B_R(0)} [1 + (1 + e^u\,(\ln|x|)^{-12})^{-1}]\,|\nabla u|^2\,dx \implies \min_{u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)},$$

где $u : B_R(0) \to \mathbb{R}^1$, $R = e^{-1}$, $n=2$, $N=1$. Здесь $a(x,u) = 1 + (1 + e^u\,(\ln|x|)^{-12})^{-1}$, минимизирующей функцией здесь является $u \equiv 0$, и существует неограниченная экстремаль

$$u(x) = 12\,\ln(\ln|x|^{-1}) \in \mathring{W}_2^1(B_R(0)),$$

$1 \leqslant a(x,u(x)) \leqslant 2$, $|a'_u(x,u(x))| \leqslant 1$. Эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа

$$-\mathrm{div}(a(x,u)\nabla u) + \frac{1}{2}a'_u(x,u)|\nabla u|^2 = 0$$

в смысле распределений.

В этом примере выполняются предположения (1.1)–(1.4), но нет дополнительного условия, обеспечивающего L^∞-оценку на u.

Теперь рассмотрим так называемые *диагональные* сильно нелинейные системы. В этом случае $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N > 1$, является решением системы

$$-(a^{\alpha\beta}(x,u)u^k_{x_\beta})_{x_\alpha} + b^k(x,u,\nabla u) = f^k(x), \quad k \leqslant N,\ x \in \Omega, \tag{1.8}$$

где главная $[n \times n]$-матрица $a(x,u)$ одинакова для всех уравнений, а функция b имеет квадратичный рост по градиенту. Качественные свойства решений систем такого типа (в частности, систем, связанных с гармоническими отображениями) хорошо изучены. Априорная оценка L^∞-нормы решений (1.8) была получена в [8, гл. 8, § 5] при некотором одностороннем условии для функции b, но дальнейшая регулярность доказана только при предположении меньшей скорости роста $b(x,u,p) \sim |p|^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $|p| \to \infty$.

Результаты о гладкости при размерностях $n = 2$ и $n \geqslant 3$ для таких систем различны. Гладкая разрешимость задачи Дирихле для класса сильно нелинейных эллиптических систем в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ была доказана Дж. Фрезе [32] при некотором одностороннем условии для b.

С. Хильдебрандтом и К.-О. Видманом [34] было показано, что необходимым условием для доказательства непрерывности по Гельдеру и дальнейшей регулярности слабых решений уравнения (1.8) в $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $n \geqslant 3$, при условиях (1.2)–(1.4) является следующее условие:

$$b_0 \, \|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} < \nu. \tag{1.9}$$

В то же время, контрпримеры П.-А. Айверта [35] и М. Струве [48] подтверждают, что одностороннего условия (1.5) недостаточно для доказательства непрерывности ограниченного слабого решения диагональной системы при $n \geqslant 3$.

Существует важное различие в поведении слабых решений эллиптических систем с *недиагональными* главными матрицами и скалярных уравнений. Напомним, что слабые решения $u \in W_2^1(\Omega)$ уравнения (1.1) с $b = 0$, $N = 1$ и ограниченными эллиптическими матрицами $a(x) = A(x, u(x))$ — это функции, непрерывные по Гельдеру в Ω, согласно хорошо известным классическим результатам Де Джорджи и Нэша (см. [18, 40] и [8, гл. 4, § 1]).

В 1968 г. в работе [19] Э. Де Джорджи была построена линейная эллиптическая система

$$\operatorname{div}(A(x)\,\nabla\, u) = 0, \quad x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad n = N, \ n \geqslant 3, \tag{1.10}$$

с ограниченными, но не гладкими элементами эллиптической матрицы A. Система имеет слабое решение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_1(0);\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{x\to 0} |u(x)| = \infty$. Матрица $A(x)$ является симметричной, и мы можем рассматривать $u(x)$ как экстремаль соответствующего квадратичного функционала. Очевидно, результат противоречит скалярной ситуации [18, 40].

Позднее разными авторами было построено много различных контрпримеров регулярности для эллиптических и параболических систем с недиагональными главными частями (см. работы [24, 38, 44–46, 49] и ссылки в них).

Из сказанного следует, что можно ожидать лишь *частичную* регулярность слабых решений различных классов эллиптических и параболических систем. Возникает проблема описания и оценки допустимых сингулярных множеств слабых решений. Как правило, мы можем оценить хаусдорфову размерность сингулярного множества.

В настоящее время существует три основных подхода к изучению частичной регулярности слабых решений. Исторически первый метод использовал идею доказательства от противного. Он известен как «метод от противного». Идея состоит в том, чтобы доказать монотонность масштабированного эксцесса слабого решения от противного (см., например, [24, гл. 4, § 1]).

Позднее появился так называемый «прямой» метод. Он сочетает в себе идею замораживания коэффициентов и более высокую интегрируемость градиента слабого решения u. Более высокая интегрируемость $|\nabla\, u|$ является следствием применения локального варианта леммы Геринга [23]. Локальные варианты леммы [27, 47] позволяют доказать более высокую интегрируемость $|\nabla\, u|$ при условии, что определенная степень $|\nabla\, u|$ удовлетворяет обратным неравенствам Гельдера (ОНГ) с различными носителями (см. [24, гл. 5, § 1] и [26, § 7.1]). ОНГ применялись для уточнения данных о слабых решениях как эллиптических, так и параболических задач. Возникли различные модификации леммы Геринга, в частности, появились ОНГ в параболической метрике. Предложенная автором концепция *квазиобратных неравенств Гельдера* применялась для изучения решений сильно нелинейных эллиптических и параболических систем уравнений (см. [9, 10]).

Наконец, третий подход (метод A-гармонической аппроксимации) был успешно применен Ф. Дюзаром и Дж. Ф. Гротовски для исследования частичной регулярности нелинейных эллиптических систем [20] (см. также [22]). Метод является развитием идеи Э. Де Джорджи, заключающейся в оценке отличия интегрального тождества для слабого решения нелинейной задачи от простейшего тождества для модельной системы с подходящим классом пробных функций (см. [41]). Метод вводит элементарный способ доказательства частичной регулярности решений при более естественных или даже оптимальных предположениях о данных. Эта идея была обобщена Ф. Дюзаром и Г. Минджионе в [21] для изучения частичной регулярности слабых решений для широкого класса параболических систем (метод A-калорической аппроксимации). Позже появилась новая версия метода. Он получил название «метод $A(t)$-калорической аппроксимации» [17].

Метод ослабил предположения о гладкости главной матрицы различных классов параболических систем (см. [14–17]).

Теперь обсудим некоторые известные результаты о частичной регулярности.

Если мы рассмотрим простейшую эллиптическую систему (1.10) в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, с эллиптической равномерно непрерывной на $\Omega \times \mathbb{R}^N$ матрицей $A(x,u)$, то любое слабое решение системы из $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ является функцией, непрерывной по Гельдеру на открытом множестве Ω_0, а замкнутое сингулярное множество $\Sigma = \Omega \setminus \Omega_0$ допускает оценку $H_{n-2-\varepsilon}(\Sigma) = 0$ для некоторого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$. Результат был доказан Э. Джусти, М. Миранда [30] и Ч. Морри [39]. Следует отметить, что в двумерном случае ($n = 2$, $N \geqslant 1$) особые множества слабых решений (1.10) отсутствуют. Непрерывность слабых решений в этом случае следует из того, что любое слабое решение (1.10) из $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ принадлежит некоторому пространству $W_{2+\varepsilon}^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$. Это доказывается с помощью техники ОНГ. Непрерывность следует из теоремы вложения при $\dim \Omega = 2$.

Первый результат об интегрируемости более высокого порядка $|\nabla u|$ для систем (1.10) и более общих систем был доказан М. Джаквинта и Э. Джусти [25]. Авторы применяли *прямой метод* для доказательства частичной регулярности слабых решений.

Такую же оценку сингулярного множества можно получить для систем (1.1), если функция b имеет квадратичный рост по градиенту, и мы рассматриваем слабые *ограниченные* решения $u \in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ в предположении, что

$$2\, b_0\, \|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} < \nu, \tag{1.11}$$

где ν и b_0 фиксированы в (1.2) и (1.4), соответственно. Это ограничение на L^∞-норму позволяет получить локальные энергетические оценки решения. Окончание доказательства частичной регулярности такое же, как и в случае $b = 0$ либо в случае не критически растущего b при $|p| \to \infty$.

Следует отметить, что условие (1.11) всегда допускается авторами, если рассматриваются системы с квадратичной нелинейностью по градиенту.

По мнению автора, класс $V = W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ является естественным для изучения сильно нелинейных скалярных уравнений ($N = 1$) и доказательства непрерывности слабых решений во всех точках области. В этой ситуации принцип максимума помогает оценить $\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ по данным. Для эллиптических и параболических систем с *недиагональными* главными матрицами принцип максимума не выполняется, и у нас нет инструментов для оценки L^∞-нормы решения. Это означает, что невозможно проверить условие (1.11).

Именно по этой причине автор решил рассматривать слабые решения задачи (1.1)–(1.4) в более общем смысле. Предположим, что $u \in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ может быть неограниченным.

Определение 1.1. Функция $u \in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ является *слабым решением* системы (1.1), если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_\Omega [A(x,u)\,\nabla u \cdot \nabla \eta + b(x,u,\nabla u)\cdot \eta]\, dx = \int\limits_\Omega f(x)\cdot \eta\, dx \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.12}$$

Это означает, что мы понимаем u как решение в смысле распределений. Конечно, мы можем рассмотреть в (1.12) пробные функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Чтобы доказать локальную регулярность потенциально неограниченных слабых решений, мы дополнительно предположим, что выполняется одностороннее условие (1.5). Сформулируем предположения о поведении u в фиксированной точке $x^0 \in \Omega$, гарантирующие непрерывность $u(x)$ в некоторой окрестности этой точки.

Сначала определим *эксцесс* $E(r,x^0)$ следующим образом:

$$E(r,x^0) = \frac{1}{r^{n-2}} \int\limits_{B_r(x^0)} |\nabla u|^2\, dx.$$

Напомним, что условие

$$\liminf_{r\to 0} E(r,x^0) = 0 \tag{1.13}$$

является основным предположением для описания регулярных точек решений даже для простейших систем (1.10). В этом случае предположение (1.13) позволяет доказать монотонность по r эксцесса $E(r, x^0)$. Как следствие, можно доказать непрерывность по Гельдеру u в окрестности x^0.

Предположения (1.13) и (1.11) обычно используются для доказательства частичной регулярности *ограниченных* слабых решений системы (1.1) при условиях (1.2)–(1.4).

Теперь исследуем среднее значение u. Положим

$$u_{r,x^0} = \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r(x^0)} u(y)\,dy$$

и сформулируем следующий результат, принадлежащий автору.

Теорема 1.1 (см. [4, Theorem 2.1])**.** *Пусть выполнены предположения* (1.2)–(1.7)*, а u — слабое решение уравнения* (1.1) *из* $W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Если при $n > 2$ имеет место предел

$$\lim_{\rho\to 0} |u_{\rho,x^0}| = m, \quad m < \frac{\nu+\gamma}{b_0}, \tag{1.14}$$

в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, и если предположение (1.13) *выполнено в x^0, то существует $B_{\rho_0}(x^0) \subset \Omega$ такое, что $u \in C^\beta(\overline{B_{\rho_0}(x^0)}; \mathbb{R}^N)$ для любого $\beta \in (0, \min\{1, 2-n/q\})$.*

Если $n = 2$, то утверждение теоремы следует при выполнении условия (1.14)*.*

Замечание 1.1. Если доказана непрерывность u по Гельдеру в некотором шаре $B_{\rho_0}(x^0)$ и данные задачи достаточно гладкие, то можно доказать непрерывность $\nabla u(x)$ в некотором шаре $B_{\rho_1}(x^0)$, $\rho_1 < \rho_0$ (см., например, [26, теорема 9.7]), и дальнейшая регулярность следует из линейной теории регулярности.

Замечание 1.2. Как уже упоминалось, условие (1.13) предполагается даже тогда, когда $b = 0$ и требуется описать регулярные точки решений. Мы заменили в этой теореме ограничение (1.11) предположением (1.14).

Замечание 1.3. В [5] мы описали регулярные точки неограниченных слабых решений *нелинейных* эллиптических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Предполагалось одностороннее условие для функции b.

Замечание 1.4. В [4, 5] результаты были доказаны методом от противного. Метод был ранее применен Ч. Гамбургером в [33] для изучения частичной регулярности *ограниченных* слабых решений нелинейных эллиптических систем с естественными q-нелинейностями по градиенту, $q \geqslant 2$.

2. Параболические системы с квадратичной нелинейностью по градиенту

Глобальная разрешимость задачи Коши—Дирихле для скалярных параболических уравнений ($N = 1$) с квадратичной нелинейностью по градиенту может быть доказана методом Лере—Шаудера при условии, что данные достаточно гладкие в $\overline{Q^T} = \overline{\Omega} \times [0, T]$ $\forall T > 0$ (см., например, [7, гл. 5, § 6]). В качестве первого шага для применения метода нам потребуется априорная оценка $\|u(x, t)\|_{L^\infty(Q^T)}$ по данным, где u — решение задачи. Напомним, что получить такую оценку помогает одностороннее условие на нелинейный член.

Далее рассмотрим случай $N > 1$.

Прежде всего рассмотрим параболические системы *вариационной* структуры. Более точно, пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $Q^T = \Omega \times (0, T)$ и $u : Q^T \to \mathbb{R}^N$, $N > 1$, — решение следующей задачи Коши—Дирихле:

$$u_t + L\,u = 0, \quad u = u(z),\ z = (x, t) \in Q^T; \quad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad u|_{t=0} = \phi_0(x). \tag{2.1}$$

Здесь L — оператор Эйлера—Лагранжа для некоторого класса квадратичных функционалов.

Первый результат [1] автора был посвящен системам, порожденным простейшими функционалами

$$\Phi^0[v] = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (A(x,v)\nabla v \cdot \nabla v)\,dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

с эллиптическими недиагональными достаточно гладкими матрицами A (см. также [2, 11, 12]). В [1] было доказано, что глобальное решение задачи существует и имеет не более чем конечное число особых (сингулярных) точек $(x^j, t^j) \in \overline{\Omega} \times (0,\infty)$. Точка (x^j, t^j) является особой, если

$$\limsup_{t \nearrow t^j} E(u(t), B_r(x^j) \cap \Omega) \geqslant \varepsilon_0 \quad \forall r > 0 \tag{2.2}$$

при некотором $\varepsilon_0 > 0$, где

$$E(u(t), B_r(x^j) \cap \Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega \cap B_r(x^j)} (A(x, u(x,t))\nabla u(x,t) \cdot \nabla u(x,t))\,dx.$$

Условие (2.2) означает, что концентрация энергии сохраняется в особых точках.

Позднее в работах М. Спековиус-Нейгебауэр и Дж. Фрезе [42, 43] было доказано, что если дополнительно предположить, что для сильно нелинейных членов $b(x, u, \nabla u)$ класса параболических систем с вариационной структурой ($n = 2$) выполняется одностороннее условие, то не существует точек (x^j, t^j), в которых локальная энергия $E(u(t), B_r(x^j) \cap \Omega)$ концентрируется, и глобальное решение задачи является гладким для всех $t \in [0, \infty)$.

В [3] нами были рассмотрены более общие квадратичные функционалы

$$\Phi^t[v] = \int\limits_{\Omega} [f(x,t,v,\nabla v) + g(x,t,v)]\,dx, \;\; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in [0,T].$$

Тогда $L = \{L^k\}^{k \leqslant N}$ имеет следующую структуру:

$$L^k[v] = -\frac{d}{d\,x_\alpha} f_{v^k_{x_\alpha}}(x,t,v,\nabla v) + b^k(x,v,\nabla v),$$

где

$$b^k(x,t,v,p) = f_{v^k}(x,t,v,p) + g_{v^k}(x,t,v).$$

Среди предположений в [3] для f, g и их производных имеем, в частности, что

$$f(z,v,p) \approx |p|^2, \;\; |p| \to \infty, \quad |b(z,v,p)| \leqslant b_0|p|^2 + b_1|v|^m + \psi(z), \;\; m \geqslant 0.$$

(Отметим, что ниже мы пишем $\mathbb{B}(Q^T)$ вместо $\mathbb{B}(Q^T; \mathbb{R}^N)$ для упрощения записи.)

При некоторых предположениях о гладкости данных и при некотором *условии малости* произведения $b_0\,\|\nabla\,\phi_0\|_{L^2(\Omega)}$ нами доказана в [3] глобальная по времени разрешимость задачи (2.1) в классе $W_2^{2,1}(Q^T) \cap C^\beta(\overline{Q^T};\, \delta)$, $\|u(\cdot,t) - \phi_0(\cdot)\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \to 0$, $t \to 0$.

Напомним, что параболическая метрика определяется следующим образом:

$$\delta(z^1, z^2) = \max\{|x^1 - x^2|,\, |t^1 - t^2|^{1/2}\} \quad \forall z^1, z^2 \in \mathbb{R}^{n+1},$$

а утверждение $u \in C^\beta(\overline{Q^T};\, \delta)$ означает, что функция u является непрерывной по Гельдеру с показателем β по x_i, $i \leqslant n$, и показателем $\beta/2$ по переменной t.

Теперь рассмотрим квазилинейные параболические системы

$$u_t + L\,u = f(z), \quad z \in Q^T, \tag{2.3}$$

где оператор

$$L\,u = -\mathrm{div}(A(z,u)\nabla u) + b(z,u,\nabla u), \qquad b(z,u,p) \sim |p|^2, \;\; |p| \to \infty, \tag{2.4}$$

не имеет вариационной структуры и эллиптическая матрица $A(z,u)$ не является диагональной.

Насколько известно автору, для классических краевых задач с системами такого типа нет результатов о разрешимости даже в двумерной области Ω.

В то же время имеются результаты частичной регулярности для сильно нелинейных параболических систем с недиагональными главными матрицами. При условии (параметры ν и b_0 определены в (2.7) и (2.9))

$$2\, b_0\, \|u\|_{L^\infty(Q^T)} < \nu \tag{2.5}$$

было доказано М. Джаквинта и М. Струве [28], что слабое решение задачи (2.3), (2.4) из $L^2((0,T); W_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q^T)$ является непрерывной гельдеровской функцией на открытом множестве $Q^0 \subset Q^T$, а n-мерная мера Хаусдорфа в параболической метрике замкнутого сингулярного множества $\Sigma = Q^T \setminus Q^0$ равна нулю, т. е. $\mathcal{H}_n(\Sigma; \delta) = 0$. Качественные свойства слабых ограниченных решений сильно нелинейных систем изучались в предположении (2.5) в [36, 37] и других работах, посвященных этому классу параболических систем.

Возникает та же проблема, что и в эллиптическом случае. Принцип максимума не выполняется для недиагональных параболических систем, мы не можем оценить $\|u\|_{L^\infty(Q^T)}$ и проверить соотношение (2.5).

В недавних работах [6, 13] автором были рассмотрены слабые, возможно, *неограниченные* решения сильно нелинейных систем из пространства $V(Q^T) := W_2^{1,0}(Q^T) = L^2((0,T); W_2^1(\Omega))$.

Определение 2.1. Функция $u \in V(Q^T)$ называется *слабым решением* системы (2.3), (2.4), если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q^T} [-u \cdot \eta_t + (A(z,u)\nabla u \cdot \nabla \eta) + b(z,u,\nabla u) \cdot \eta)]\, dz = \int\limits_{Q^T} f \cdot \eta\, dz \quad \forall \eta \in C_0^\infty(Q^T). \tag{2.6}$$

Легко видеть, что мы можем зафиксировать пробные функции η в (2.6) из пространства $\mathring{W}_2^1(Q^T) \cap L^\infty(Q^T)$, где $\mathring{W}_2^1(Q^T) = \left[\overline{C_0^\infty(Q^T)}\right]_{W_2^1(Q^T)}$.

В [6, 13] мы предполагали, что матрица A определена на множестве $Q^T \times \mathbb{R}^N$ и удовлетворяет сильному условию эллиптичности в виде:

(H1)
$$(A(z,u)\xi \cdot \xi) \geqslant \nu |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN}, \quad |A(z,u)| \leqslant \mu, \tag{2.7}$$
для почти всех $z \in Q^T$, $u \in \mathbb{R}^N$; $\nu \leqslant \mu$ *— положительные константы.*

Мы также предполагали в [13], что матрица $A(z,u)$ равномерно непрерывна на $Q^T \times \mathbb{R}^N$. Мы смягчили это предположение в [6] до следующих условий:

(H2) *матрица* $A(z,u)$ *равномерно непрерывна по* $u \in \mathbb{R}^N$ *при п. в.* $z \in Q^T$;

(H3) *элементы* $A_{k\,l}^{\alpha\beta}(x,t,u)$ *матрицы* A *непрерывны по* $x \in \Omega$ *в интегральном смысле, т. е.* $A_{k\,l}^{\alpha\beta}(x,t,u) \in VMO(\Omega)$ *для п. в.* $t \in (0,T)$ *и для всех* $u \in \mathbb{R}^N$, *и, кроме того,*
$$\sup_{z^0 \in Q^T,\, \eta \in \mathbb{R}^N}\ \sup_{\rho \leqslant r}\ \fint\limits_{\Lambda_\rho(t^0)} \Big(\fint\limits_{B_\rho(x^0)} |A(y,t,\eta) - A_{\rho,x^0}(t,\eta)|^2 dy \Big)\, dt =: q^2(r) \to 0, \quad r \to 0; \tag{2.8}$$
здесь и ниже $Q_\rho(z^0) = B_\rho(x^0) \times \Lambda_\rho(t^0)$, *где* $B_\rho(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \rho\}$, $\Lambda_\rho(t^0) = (t^0 - \rho^2, t^0 + \rho^2)$, $|Q_\rho|_{n+1} = 2\omega_n \rho^{n+2}$, $\omega_n = |B_1|_n$, *перечеркиванием обозначается среднее значение интеграла*;

(H4) *функция* $b(z,u,p)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори на* $Q^T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ *и имеет квадратичный рост при* $|p| \to \infty$:
$$|b(z,u,p)| \leqslant b_0\, |p|^2, \quad b_0 = \mathrm{const}; \tag{2.9}$$

(H5) *функция* b *удовлетворяет односторонней оценке*
$$(b(z,u,p) \cdot u) \geqslant \gamma |p|^2 \quad \text{с} \quad \nu + \gamma > 0, \quad \text{п. в. } z \in Q^T,\ u \in \mathbb{R}^N,\ p \in \mathbb{R}^{nN}; \tag{2.10}$$

(H6) *существует константа* b_1 *такая, что*
$$\operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q^T} |b(z,u,p) - b(z,u,q)| \leqslant b_1(|p| + |q|)|p - q|, \quad u \in \mathbb{R}^N, \quad p, q \in \mathbb{R}^{nN}; \tag{2.11}$$

(H7) $f \in L^q(Q^T)$, $q > \dfrac{n+2}{2}$, $n \geqslant 2$, $\|f\|_{L^q(Q^T)} =: c_f$.

В [6] был доказан следующий результат.

Теорема 2.1 (см. [6, теорема 2.1]). *Пусть выполняются условия* (H1)–(H7) *и* $u \in V(Q^T)$ *является слабым решением системы* (2.3), (2.4). *Предположим, что*

$$\sup_{\rho>0} |u_{\rho,z^0}| < \frac{\nu+\gamma}{b_0}, \qquad u_{\rho,z^0} = \fint_{Q_\rho(z^0)} u(z)\,dz, \tag{2.12}$$

$$\liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{Q_r(z^0)} |\nabla u|^2\,dz = 0, \tag{2.13}$$

в некоторой точке $z^0 \in Q^T$. *Тогда существует окрестность* $Q_{r_0}(z^0) \subset Q^T$ *такая, что* $u \in C^\beta(\overline{Q_{r_0}(z^0)};\,\delta)$ *для любых* $\beta \in \Big(0, \min\Big\{2 - \dfrac{n+2}{q}, 1\Big\}\Big)$.

Следующая лемма содержит основной аналитический результат для доказательства теоремы 2.1.

Лемма 2.1 (см. [6, Lemma 3.1]). *Пусть* $u \in V(Q^T)$ — *слабое решение системы* (2.3), (2.4). *Зафиксируем множество* $Q_0 \subset\subset Q^T$ *и числа* $\tau \in (0,1)$, $M < \dfrac{\nu+\gamma}{b_0}$. *Существуют числа* θ, $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ *такие, что если для некоторых* $z^0 \in Q_0$ *и* $R < \delta(Q_0; \partial Q^T) =: \delta_0$

$$|u_{R,z^0}| \leqslant M, \tag{2.14}$$

$$E(R,z^0) := R^{2\alpha} + \frac{1}{R^n} \int_{Q_R(z^0)} |\nabla u|^2\,dz < \theta^2, \tag{2.15}$$

то

$$\Phi(R,z^0) := \fint_{Q_R(z^0)} |u(z) - u_{R,z^0}|^2\,dz \leqslant \mathbb{C}_1 E(R,z^0) \tag{2.16}$$

$$E(\tau R, z^0) \leqslant \mathbb{C}_2\,\tau^{2\alpha} E(R,z^0), \tag{2.17}$$

где $\alpha = \min\Big\{2 - \dfrac{n+2}{q}, 1\Big\}$, $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_1(\mu, b_0, n, c_f)$, $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_2(\nu, \mu, \alpha, n, q, c_f)$.

Заметим, что если зафиксировать любое $\beta < \alpha$ и выбрать такое τ, что выполняется неравенство $\mathbb{C}_2 \tau^{2\alpha} \leqslant \tau^{2\beta}$, то из (2.17) следует, что $E(\tau R, z^0) \leqslant \tau^{2\beta} E(R,z^0)$. Это обеспечивает монотонность $E(r,z^0)$ в точке z^0.

Эта лемма была доказана в [6, 13] методом от противного. Отметим, что подход того же типа мы применяли в эллиптическом случае, но в параболическом случае доказательство имеет дополнительные шаги, поскольку функция $u(x,t)$ не является гладкой по переменной t.

С помощью леммы 2.1 доказывается следующая оценка:

$$\Phi(r,\xi^0) \leqslant c\Big(\frac{r}{R}\Big)^{2\beta} E(R,z^0) \quad \forall r \leqslant R \tag{2.18}$$

для всех ξ^0 в цилиндре $Q_{\rho_0}(z^0)$.

Как следствие оценки (2.18), мы получаем оценку

$$\sup_{\xi^0 \in Q_{\rho_0}(z^0)} \sup_{r \leqslant R} \frac{1}{r^{n+2+2\beta}} \int_{Q_r(\xi^0)} |u(z) - u_{r,\xi^0}|^2\,dz \leqslant c*, \tag{2.19}$$

где константа $c*$ зависит от R^{-1}, $\|\nabla u\|_{2,Q_R(z^0)}$ и других данных задачи. Это означает, что мы оценили полунорму в пространстве Кампанато $\mathcal{L}^{2,n+2+2\beta}(Q_{\rho_0}(z^0);\,\delta)$ и, как следствие, также оценили норму в этом пространстве. Используя изоморфизм между $\mathcal{L}^{2,n+2+2\beta}Q_{\rho_0}(z^0);\,\delta)$ и $C^\beta(\overline{Q_{\rho_0}(z^0)});\,\delta)$, можно утверждать, что $u \in C^\beta(\overline{Q_{\rho_0}(z^0)});\delta)$.

3. Оценки сингулярных множеств

Здесь мы обсуждаем сведения о сингулярных множествах слабых решений эллиптических и параболических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту.

Как следствие теоремы 1.1, мы имеем описание сингулярного множества Σ в системе (1.1):

$$\Sigma = \Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma},$$

где

$$\Sigma_0 = \{x^0 \in \Omega : \liminf_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^{n-2}} \int\limits_{B_\rho(x^0)} |\nabla u|^2 dx > 0\}, \tag{3.1}$$

и $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma_1} \cup \widetilde{\Sigma_2}$,

$$\widetilde{\Sigma_1} = \{x^0 \in \Omega \setminus \Sigma_0 : \frac{\nu+\gamma}{b_0} \leqslant \lim_{r\to 0} |u_{r,x^0}| < \infty\}, \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\Sigma_2} = \{x^0 \in \Omega \setminus \Sigma_0 : \lim_{r\to 0} |u_{r,x^0}| = \infty \text{ и } \nexists \lim_{r\to 0} |u_{r,x^0}|\}. \tag{3.3}$$

Множество Σ_0 можно оценить по соответствующему результату Э. Джусти [29] (см. также доказательство в [24, гл. 4, теорема 2.2]).

Поскольку этот результат применяется для оценки сингулярных множеств различных типов систем, сформулируем его.

Теорема 3.1 (см. [29]). *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ и $0 \leqslant \alpha < n$. Положим, что*

$$\Sigma^\alpha = \{x \in \Omega : \limsup_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^\alpha} \int\limits_{B_\rho(x)} |v(y)|\, dy > 0\}.$$

Тогда имеем $H_\alpha(\Sigma^\alpha) = 0$.

Следуя этому результату, мы имеем в нашем случае, что

$$H_{n-2}(\Sigma_0) = 0. \tag{3.4}$$

Отметим, что множество Σ_0 может появиться даже в случае простейших квазилинейных эллиптических систем с $b = 0$.

Известно, как оценить множество $\widetilde{\Sigma_2}$ (см., например, [24, теорема 2.1, гл. 4]). В этом случае мы доказываем, что

$$\widetilde{\Sigma_2} \subset I_\varepsilon = \{x^0 \in \Omega \setminus \Sigma_0 : \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^{n-2+\varepsilon}} \int\limits_{B_r(x^0)} |\nabla u|^2\, dx > 0\} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.5}$$

Если (3.5) верно, то $H_{n-2+\varepsilon}(\widetilde{\Sigma_2}) \leqslant H_{n-2+\varepsilon}(I_\varepsilon) \underset{Th.3.1}{=} 0$. По определению размерности меры Хаусдорфа

$$\dim_H \widetilde{\Sigma_2} \leqslant n-2. \tag{3.6}$$

Таким образом, мы оценили множество

$$\Sigma_* = \Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma_2} : \quad \dim_H \Sigma_* \leqslant n-2.$$

Открытым вопросом для автора является то, как оценить множество $\widetilde{\Sigma_1}$.

В нашей статье [6] мы обсуждали сингулярное множество слабых решений $u \in V(Q^T)$ параболических систем (2.1) в условиях теоремы 2.1. В этом случае замкнутое сингулярное множество $\Sigma = \Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma}$, где

$$\Sigma_0 = \{z^0 \in Q^T : \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int\limits_{Q_r(z^0)} |\nabla u|^2\, dz > 0\}$$

$$\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma_1} \cup \widetilde{\Sigma_2}.$$

Здесь

$$\widetilde{\Sigma_1} = \{z^0 \in Q^T \setminus \Sigma_0 : \frac{\nu+\gamma}{b_0} \leqslant \lim_{r\to 0} |u_{r,z^0}| < \infty\}, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\Sigma_2} = \{z^0 \in Q^T \setminus \Sigma_0 : \lim_{r\to 0} |u_{r,z^0}| = \infty \text{ и } \nexists \lim_{r\to 0} |u_{r,z^0}|\}. \tag{3.8}$$

Используя параболическую версию теоремы 3.1, мы можем утверждать, что n-мерная мера Хаусдорфа множества Σ_0 в параболической метрике δ обращается в нуль, т. е.

$$\mathcal{H}_n(\Sigma_0;\, \delta) = 0. \tag{3.9}$$

Нами доказано в [6, раздел 4], что

$$\widetilde{\Sigma_2} \subset I^\varepsilon = \{z^0 \in Q^T \setminus \Sigma_0 : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^{n+\varepsilon}} \int\limits_{Q_r(z^0)} |\nabla u|^2\, dz > 0\} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.10}$$

В силу параболического варианта теоремы 3.1 $\mathcal{H}_{n+\varepsilon}(I^\varepsilon;\, \delta) = 0$. Из соотношения (3.10) следует, что $\mathcal{H}_{n+\varepsilon}(\widetilde{\Sigma_2};\, \delta) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$. Таким образом,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\widetilde{\Sigma_2}) \leqslant n. \tag{3.11}$$

Из (3.9), (3.11) вытекает

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma_2}) \leqslant n.$$

Открытый вопрос здесь тот же, что и в эллиптической ситуации: как оценить множество $\widetilde{\Sigma_1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипова А. А.* О глобальной разрешимости задачи Коши–Дирихле для недиагональных параболических систем с вариационной структурой при двух пространственных переменных// Пробл. мат. анализа — 1997. — *16.* — С. 3–40.
2. *Архипова А. А.* Локальная и глобальная по времени разрешимость задачи Коши–Дирихле для класса нелинейных недиагональных параболических систем// Алгебра и анализ — 1999. — *11*, № 6. — С. 69–102.
3. *Архипова А. А.* Глобальная разрешимость задачи Коши—Дирихле для одного класса сильно нелинейных параболических систем// Пробл. мат. анализа — 2020. — *105.* — С. 19–44.
4. *Архипова А. А.* Локальная регулярность слабых решений квазилинейных эллиптических систем с односторонним условием квадратичной нелинейности по градиенту// Пробл. мат. анализа — 2021. — *108.* — С. 35–52.
5. *Архипова А. А.* Условия регулярности нелинейных эллиптических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту// Пробл. мат. анализа — 2021. — *112.* — С. 19–34.
6. *Архипова А. А.* Параболические системы с квадратичной нелинейностью по градиенту. Регулярность решений// Пробл. мат. анализа — 2022. — *116.* — С. 35–58.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964.
9. *Arkhipova A. A.* Quasireverse Hölder inequalities and a priori estimates for strongly nonlinear systems// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. — 2003. — *14*, № 2. — С. 91–108.
10. *Arkhipova A. A.* Quasireverse Hölder inequalities and their applications// В сб.: «Nonlinear Equations and Spectral Theory. Dedicated to the Memory of Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya». — Providence: Am. Math. Soc. (2007). — С. 1–25.
11. *Arkhipova A. A.* Heat flow for one class of quadratic functionals with a nondiagonal principal matrix. Existence of a smooth global solution// Алгебра и анализ — 2018. — *30*, № 2. — С. 45–75.
12. *Arkhipova A. A.* Weak global solvability of two-phase problem for a class of parabolic systems with strong nonlinearity in the gradient. The case of two spatial variables// Алгебра и анализ — 2019. — *31*, № 2. — С. 118–151.
13. *Arkhipova A. A.* Local regularity of weak solutions to a class of parablic systems with quadratic nonlinearities in the gradient// Manuscripta Math. — 2023. — *170*, № 3-4. — С. 497–529.
14. *Arkhipova A. A., Stará J.* Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrices// Nonlinear Anal. — 2015. — *120.* — С. 236–261.

15. *Arkhipova A. A., Stará J.* Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. $(A(t), m)$-caloric approximation method// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2018. — *52*, № 1. — С. 111–146.
16. *Arkhipova A. A., Stará J.* Regularity problem for one class of nonlinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix// Comment. Math. Univ. Carolin. — 2019. — *60*, № 2. — С. 231–267.
17. *Arkhipova A. A., Stará J., John O.* Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systemes with nonsmooth in time// Nonlinear Anal. — 2014. — *95*. — С. 421–435.
18. *De Giorgi E.* Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari// Mem. Accad. Sci. Torino cl. Sci. Fis. Mat. Nat. — 1957. — *3*, (3). — С. 25–43.
19. *De Giorgi E.* Un esempio di estremali discontinue per un problema variozional di tipo ellittico// Boll. Unione Mat. Ital. — 1968. — *4*. — С. 135–137.
20. *Duzaar F., Grotowski J. F.* Optimal interior partial regularity for nonlinear elliptic systems: the method of A-harmonic approximation// Manuscripta Math. — 2000. — *103*. — С. 267–298.
21. *Duzaar F., Mingione G.* Second order parabolic systems, optimal regularity, and singular sets of solutions// Ann Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire — 2005. — *22*. — С. 705–751.
22. *Duzaar F., Steffen K.* Optimal interior and boundary regularity for almost minimizers to elliptic variational integrals// J. Reine Angew. Math. — 2002. — *546*. — С. 76–138.
23. *Gehring F. W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi conformal mapping// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 265–277.
24. *Giaquinta M.* Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1983.
25. *Giaquinta M., Giusti E.* On the regularity of the minima of variational integrals// Acta Math. — 1982. — *148*. — С. 31–46.
26. *Giaquinta M., Martinazzi L.* An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs. — Pisa: Edizioni della Normale, 2012.
27. *Giaquinta M., Modica G.* Regolarity results for some classes of higher order non linear elliptic systems// J. Reine Angew. Math. — 1979. — *311-312*. — С. 145–169.
28. *Giaquinta M., Struwe M.* On the partial regularity of weal solutions of nonlinear parabolic problems// Math. Z. — 1982. — *179*. — С. 437–451.
29. *Giusti E.* Precisazione delle funzioni $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari// Boll. Unione Mat. Ital. — 1969. — *2*. — С. 71–76.
30. *Giusti E., Miranda M.* Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasilineari// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31*. — С. 173–184.
31. *Frehse J.* A note on the Hölder continuity of the variational problems// Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. — 1975. — *43*. — С. 59–63.
32. *Frehse J.* On two-dimensional quasilinear elliptic systems// Manuscripta Math. — 1979. — *28*. — С. 21–49.
33. *Hamburger C.* A new partial regularity proof for solutions of nonlinear elliptic systems// Manuscripta Math. — 1998. — *95*, № 1. — С. 11–31.
34. *Hildebrandt S., Widman K.-O.* Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order// Math. Z. — 1975. — *142*. — С. 67–86.
35. *Ivert P.-A.* On quasilinear elliptic systems of diagonal form// Math. Z. — 1980. — *170*. — С. 283–286.
36. *Marino M., Maugeri A.* Partial Hölder continuity of solutions of nonlinear parabolic systems of second order with quadratic growth// Boll. Unione Mat. Ital. — 1989. — *3-B*. — С. 397–435.
37. *Marino M., Maugeri A.* A remark on the note: Partial Hölder continuity of the spatial derivatives of the solutions to nonlinear parabolic systems with quadratic growth// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova — 1996. — *95*. — С. 23–28.
38. *Mooney C.* Finite time blowup for parabolic systems in two dimensions// Arxiv. — 2016. — 1604.05616v1 [math.AP].
39. *Morrey C. B.* Partial regularity results for nonlinear elliptic systems// J. Math. Mech. — 1968. — *17*. — С. 649–670.
40. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations// Ann. J. Math. — 1958. — *80*. — С. 931–954.
41. *Simon L.* Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps. — Basel: Birkhäuzer, 1996.
42. *Specovius-Neigebauer M., Frehse J.* Existence of regular solutions to a class of parabolic systems in two space dimensions with critical growth behaviour// Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. — 2009. — *55*, № 2. — С. 239–261.
43. *Specovius-Neigebauer M., Frehse J.* Morrey estimates and Hölder continuity for solutions to parabolic equations with entropy inequalities// J. Reine Angew. Math. — 2010. — *638*. — С. 169–188.

44. *Stará J., John O.* Some (new) counterexamples of parabolic systems// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1995. — *36*. — C. 503–510.
45. *Stará J., John O.* On some regularity and non regularity results for solutions to parabolic systems// Matematiche — 2000. — *55*, Suppl. 2. — C. 145–163.
46. *Stará J., John O., Malý J.* Counterexample to the regularity of weak solution of the quasilinear elliptic system// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1986. — *27*. — C. 123–136.
47. *Stredulinsky E. W.* Higher integrability from reverse Hölder inequalities// Indiana Univ. Math. J. — 1980. — *29*, № 3. — C. 408–417.
48. *Struwe M.* A counterexample in elliptic regularity theory// Manuscripta Math. — 1981. — *34*. — C. 85–92.
49. *Sverák V., Yan X.* Non Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex variational integrals// Proc. Natl. Acad. Sci. USA — 2002. — *99*, № 24. — C. 15268–15276.

Арина Алексеевна Архипова
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: arinaark@gmail.com

UDC 517.2+517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31
EDN: CNBPXH

Quasilinear elliptic and parabolic systems with nondiagonal principal matrices and strong nonlinearities in the gradient. Solvability and regularity problems

A. A. Arkhipova

St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

We consider nondiagonal elliptic and parabolic systems of equations with strongly nonlinear terms in the gradient. We review and comment known solvability and regularity results and describe the last author's results in this field.

Keywords: nonlinear elliptic systems, nonlinear parabolic systems, regularity of weak solutions

For citation: A. A. Arkhipova, "Quasilinear elliptic and parabolic systems with nondiagonal principal matrices and strong nonlinearities in the gradient. Solvability and regularity problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 18–31. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31

REFERENCES

1. A. A. Arkhipova, "Global solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for nondiagonal parabolic systems with variational structure in the case of two spatial variables," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 1998, **92**, No. 6, 4231–4255.
2. A. A. Arkhipova, "Local and global solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for a class of nonlinear nondiagonal parabolic systems," *St. Petersburg Math. J.*, 2000, **11**, № 6, 989–1017.
3. A. A. Arkhipova, "Global solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for a class of strongly nonlinear parabolic systems," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2020, **250**, № 2, 201–231.
4. A. A. Arkhipova, "Local regularity of weak solutions to quasilinear elliptic systems with one-side condition on quadratic nonlinearity in the gradient," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2021, **255**, No. 4, 388–408.

5. A. A. Arkhipova, "Regularity conditions for nonlinear elliptic systems with quadratic nonlinearities in the gradient," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2021, **259**, No. 2, 128–147.
6. A. A. Arkhipova, "Parabolic systems with quadratic nonlinearities in the gradient. Regularity of solutions," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2022, **264**, No. 5, 525–551.
7. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Am. Math. Soc., Providence, 1968.
8. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.
9. A. A. Arkhipova, "Quasireverse Hölder inequalities and a priori estimates for strongly nonlinear systems," *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 2003, **14**, No. 2, 91–108.
10. A. A. Arkhipova, "Quasireverse Hölder inequalities and their applications," In: *Nonlinear Equations and Spectral Theory. Dedicated to the Memory of Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya*, Am. Math. Soc., Providence, 2007, pp. 1–25.
11. A. A. Arkhipova, "Heat flow for one class of quadratic functionals with a nondiagonal principal matrix. Existence of a smooth global solution," *St. Petersburg Math. J.*, 2019, **30**, No. 2, 181–202.
12. A. A. Arkhipova, "Weak global solvability of two-phase problem for a class of parabolic systems with strong nonlinearity in the gradient. The case of two spatial variables," *St. Petersburg Math. J.*, 2020, **31**, No. 2, 118–151.
13. A. A. Arkhipova, "Local regularity of weak solutions to a class of parablic systems with quadratic nonlinearities in the gradient," *Manuscripta Math.*, 2023, **170**, No. 3-4, 497–529.
14. A. A. Arkhipova and J. Stará, "Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrices," *Nonlinear Anal.*, 2015, **120**, 236–261.
15. A. A. Arkhipova and J. Stará, "Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. $(A(t), m)$-caloric approximation method," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2018, **52**, No. 1, 111–146.
16. A. A. Arkhipova and J. Stará, "Regularity problem for one class of nonlinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix," *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2019, **60**, No. 2, 231–267.
17. A. A. Arkhipova, J. Stará, and O. John, "Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systemes with nonsmooth in time," *Nonlinear Anal.*, 2014, **95**, 421–435.
18. E. De Giorgi, "Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari," *Mem. Accad. Sci. Torino cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1957, **3**, (3), 25–43.
19. E. De Giorgi, "Un esempio di estremali discontinue per un problema variozional di tipo ellittico," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1968, **4**, 135–137.
20. F. Duzaar and J. F. Grotowski, "Optimal interior partial regularity for nonlinear elliptic systems: the method of A-harmonic approximation," *Manuscripta Math.*, 2000, **103**, 267–298.
21. F. Duzaar and G. Mingione, "Second order parabolic systems, optimal regularity, and singular sets of solutions," *Ann Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 2005, **22**, 705–751.
22. F. Duzaar and K. Steffen, "Optimal interior and boundary regularity for almost minimizers to elliptic variational integrals," *J. Reine Angew. Math.*, 2002, **546**, 76–138.
23. F. W. Gehring, "The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi conformal mapping," *Acta Math.*, 1973, **130**, 265–277.
24. M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.
25. M. Giaquinta and E. Giusti, "On the regularity of the minima of variational integrals," *Acta Math.*, 1982, **148**, 31–46.
26. M. Giaquinta, L. Martinazzi, *An Introduction to the Regularity Theory for Elliptic Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs*, Edizioni della Normale, Pisa, 2012.
27. M. Giaquinta and G. Modica, "Regolarity results for some classes of higher order non linear elliptic systems," *J. Reine Angew. Math.*, 1979, **311-312**, 145–169.
28. M. Giaquinta and M. Struwe, "On the partial regularity of weal solutions of nonlinear parabolic problems," *Math. Z.*, 1982, **179**, 437–451.
29. E. Giusti, "Precisazione delle funzioni $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1969, **2**, 71–76.
30. E. Giusti and M. Miranda, "Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasilineari," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 173–184.
31. J. Frehse, "A note on the Hölder continuity of the variational problems," *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 1975, **43**, 59–63.
32. J. Frehse, "On two-dimensional quasilinear elliptic systems," *Manuscripta Math.*, 1979, **28**, 21–49.

33. C. Hamburger, "A new partial regularity proof for solutions of nonlinear elliptic systems," *Manuscripta Math.*, 1998, **95**, No. 1, 11–31.
34. S. Hildebrandt and K.-O. Widman, "Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order," *Math. Z.*, 1975, **142**, 67–86.
35. P.-A. Ivert, "On quasilinear elliptic systems of diagonal form," *Math. Z.*, 1980, **170**, 283–286.
36. M. Marino and A. Maugeri, "Partial Hölder continuity of solutions of nonlinear parabolic systems of second order with quadratic growth," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1989, **3-B**, 397–435.
37. M. Marino and A. Maugeri, "A remark on the note: Partial Hölder continuity of the spatial derivatives of the solutions to nonlinear parabolic systems with quadratic growth," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1996, **95**, 23–28.
38. C. Mooney, "Finite time blowup for parabolic systems in two dimensions," *Arxiv*, 2016, 1604.05616v1 [math.AP].
39. C. B. Morrey, "Partial regularity results for nonlinear elliptic systems," *J. Math. Mech.*, 1968, **17**, 649–670.
40. J. Nash, "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations," *Ann. J. Math.*, 1958, **80**, 931–954.
41. L. Simon, *Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps*, Birkhäuzer, Basel, 1996.
42. M. Specovius-Neigebauer and J. Frehse, "Existence of regular solutions to a class of parabolic systems in two space dimensions with critical growth behaviour," *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 2009, **55**, No. 2, 239–261.
43. M. Specovius-Neigebauer and J. Frehse, "Morrey estimates and Hölder continuity for solutions to parabolic equations with entropy inequalities," *J. Reine Angew. Math.*, 2010, **638**, 169–188.
44. J. Stará and O. John, "Some (new) counterexamples of parabolic systems," *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1995, **36**, 503–510.
45. J. Stará and O. John, "On some regularity and non regularity results for solutions to parabolic systems," *Matematiche*, 2000, **55**, Suppl. 2, 145–163.
46. J. Stará, O. John, and J. Malý, "Counterexample to the regularity of weak solution of the quasilinear elliptic system," *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1986, **27**, 123–136.
47. E. W. Stredulinsky, "Higher integrability from reverse Hölder inequalities," *Indiana Univ. Math. J.*, 1980, **29**, No. 3, 408–417.
48. M. Struwe, "A counterexample in elliptic regularity theory," *Manuscripta Math.*, 1981, **34**, 85–92.
49. V. Sverák and X. Yan, "Non Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex variational integrals," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2002, **99**, No. 24, 15268–15276.

Arina A. Arkhipova
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: arinaark@gmail.com